INTORNO
ALLA MOLTIPLICAZIONE ED ALLA DIVISIONE ALGEBRAICHE.

Del Sig. LEONARDO SALIMBENI.

§. I.

Mi propongo di esaminare in questa Memoria la moltiplicazione e la divisione algebraiche, cioè le due operazioni che formano la base ed il fondamento principale di questa Scienza, la più estesa e la più utile di tutte le Matematiche. Non riesca strano a taluno se io prendo per mano un' argomento sì semplice, che pare appena poter dar luogo e materia ad un nuovo ragionamento. Mi si permetta di deviare alquanto dalla strada comunemente battuta; e vedrassi che sulla moltiplicazione e sulla divisione algebraiche possono dirsi cose utili e nuove, ed anche rettificarne alcune da tutti ammesse, le quali non reggono ad un esame rigoroso, e veramente matematico.

§. II.

Ma prima di tutto siami lecito osservare, che colla stessa parola *unità* noi sogliamo nominare due cose differenti, e quindi ne nascono degli equivoci e delle false conseguenze. Imperocchè ora per *unità* vogliamo significare il principio de' numeri, ed ora la misura comune delle grandezze dello stesso genere. Per evitare quest' anfibologia alcuni hanno chiamata la prima *unità astratta* o puramente *unità*, ed *unità concreta* l' altra; ma dopo fatta questa necessaria distinzione non presero cura nel corso delle loro Opere di farne quell' uso che dovevano. Dell' *unità astratta* non può a mio giudizio darsi miglior difinizione di quella d'Euclide nel Libro settimo, ma dell'*unità concreta* non mi è riuscito di leggerne alcuna che tutte le idee comprenda ad essa appartenenti; e però mi piacque comporne una nuova, ed è la seguente: *Unità concreta è una data grandezza presa secondo il nostro arbitrio, a cui riferiamo tutte le grandezze ad essa omogenee*. Dico *data* perchè determinata e costante dee essere questa comune misura; dico *a cui riferiamo tutte le grandezze ad essa omogenee*, perchè una misura non può essere comune che a così fatte grandezze; e dico per fine *presa secondo il nostro arbitrio*, perchè è in nostra balía servirsi d'una piuttosto che d'altra misura. In fatti la libbra di Verona, che in questa Città è l'*unità concreta* de' pesi, è una misura presa all'arbitrio de' Veronesi; quella di Londra all'arbitrio degl'Inglesi; e così discorrendo. Dal che ne segue che per ogni ordine di grandezze dello stesso genere havvi un'unità concreta; e che le grandezze di genere diverso hanno diverse unità concrete: quindi io sarei d'opinione, che col carattere 1 non si dovesse nell'Algebra segnare che la sola unità astratta, e che tutte le unità concrete, al modo dell'altre grandezze, s'indicassero colle lettere dell'Alfabeto.

§. III.

Entriamo ora in argomento, e cominciamo da un esame sulla difinizione della moltiplicazione algebraica. Euclide nel settimo Libro difinisce a questo modo il moltiplicamento di due numeri interi: *un numero dicesi moltiplicare un numero, quando il numero moltiplicato componendosi tante volte, quante unità sono nel moltiplicante, generasi un qualche numero*. Questa difinizione data dall'antico e celebre Autore è eccellente per esprimere la moltiplicazione fra i numeri interi (de' quali solamente e' parla ne' suoi Arimmetici), e potrebbe anche servire per indicare la moltiplicazione fra due numeri rotti, ma non certamente quella fra due grandezze qualunque, come presto faremo vedere; e pure gl'Inventori dell'Algebra, Scienza che conta pochi secoli dalla sua origine, e tutti gli Scrittori d'Elementi che gli ſeguirono dappoi hanno eſſa difinizione adottata ſenza alcun notabile cangiamento, e ſolo ſoſtituendovi la parola *grandezza* all'altra *numero*. Ma io rifletto primieramente che trattandoſi di grandezze in generale, non di numeri, biſognerebbe che i detti Autori, quando dicono *quante unità ſono nel moltiplicante*, ſignificaſſero che dell' unità concrete, non dell' aſtratte intendono di parlare; per modo che la loro difinizione ſarebbe veramente queſta: *una grandezza diceſi moltiplicare una grandezza, quando la grandezza moltiplicata componendoſi tante volte, quante unità concrete del moltiplicante ſono in eſſo, generaſi una qualche grandezza*. Ed è appunto queſta difinizione, anche così corretta, che io voglio in ſecondo luogo moſtrar difettoſa. In fatti ſia l'A la grandezza da moltiplicare, e la B la moltiplicante: ſia poi la C l'unità concreta della B. Secondo adunque i ſuddetti Autori moltiplicare l' A per la B vuol dire comporre l'A tante volte, quante la C miſura la B. Ora ſe la C miſuri eſattamente la B, intenderò facilmente coſa ſia queſta moltiplicazione; poichè ſe la C miſuri tre volte la B, moltiplicare l'A per la B vorrà dire comporre tre volte l' A. Anche quando la C non miſuri eſattamente la B, ma ſia però l'una parte dell'altra, regge la difinizione; poichè ſe la C miſuri per eſempio la B due volte ed un terzo, moltiplicare l'A per la B vorrà dire comporre l'A due volte ed un terzo. Ma ſe la C alla B ſia incommenſurabile, ſiccome non vi è in queſto caſo neſſun numero razionale intero o rotto che poſſa eſprimere quante volte la C miſuri la B, così reſterà allora imperfetta l'idea della moltiplicazione. Non è dunque generale l'eſpoſta difinizione; e però conviene abbandonarla, e cercarne altra migliore.

§. IV.

Secondo il mio parere la vera e general difinizione della moltiplicazione algebraica è queſta. *Una grandezza diceſi moltiplicare una grandezza, quando facciaſi come l'unità concreta della grandezza moltiplicante alla ſteſſa, così la grandezza moltiplicata ad un'altra grandezza che ſi produce*. Vale a dire io prendo per difinizione della moltiplicazione algebraica quella fra le ſue proprietà, ch' eſſendo generale, ſia anche la più ſemplice.

§. V.

Quello che ho detto della moltiplicazione ſerve ancora per moſtrare il difetto della ſolita difinizione della diviſione algebraica, e la neceſſità di cangiarla in queſta. *Una grandezza diceſi dividere una grandezza, quando facciaſi come la divìdente alla ſua unità concreta, così la diviſa ad un' altra grandezza che ne proviene*. Direi più volentieri *ad un' altra grandezza che ſi produce*, ſe il verbo *produrre* non foſſe ora comunemente adottato per ſignificare una moltiplicazione; quantunque eſſo verbo potrebbe ugualmente bene ſignificare e quello che naſce dalla diviſione, come quello che naſce dalla moltiplicazione. Dalle due definizioni, da me propoſte per la moltiplicazione e la diviſione, chiaramente appariſce, che queſte due operazioni, preſe in ſenſo generale algebraico, ſono propriamente due proporzionalità, ovvero due regole auree.

§. VI.

Queſte due difinizioni così enunziate fanno ſtrada alla dimoſtrazione di tanti bei Teoremi, i quali per la maggior parte non ſono ſtati che propoſti dagli Autori, poi ad un *patet* abbandonati. Fra queſti io ne ſceglierò ſolamente alcuni, i quali però abbaſtanza moſtreranno con qual chiarezza ſi poſſano trattare anche i rimanenti. La facilità di provare un teorema generale fra due grandezze qualunque, nel caſo in cui eſſe foſſero numeri, ha fatto fino ad ora prendere per dimoſtrazione generale quella che ai ſoli numeri era parziale; ma queſta maniera non liberò l' Algebra da alcuni erroruzzi che noi dovremo neceſſariamente notare, quando paragoneremo i noſtri agli altrui riſultamenti.

§. VII.

Contro la consuetudine di tutti gli Autori d' Algebra mi servirò di figure nella dimostrazione di questi Teoremi, per quello che esse ajutano moltissimo la fantasia del Lettore. Così fece Euclide nel suo quinto Libro (il quale propriamente all' Algebra non alla geometria appartiene, perchè in esso trattasi di grandezze in generale), e rappresentò con linee le grandezze stesse, dando però loro sempre il nome di grandezze, non mai quello di linee. Ciò nulla ostante nel metodo d' Euclide trovo quest' inconveniente, che nelle figure non si possono a colpo d'occhio distinguere le grandezze di un genere da quelle di un genere diverso. A questo io ho cercato di supplire in una maniera semplicissima; e consiste nel rappresentare per esempio le grandezze di un genere con linee semplici, quelle di un altro genere con linee raddoppiate, con linee triplicate quelle di un terzo genere, e così discorrendo. Così le grandezze D A della Fig. 1. sono grandezze dello stesso genere; e le grandezze B C sono pure dello stesso genere; ma amendue le D A ad amendue le B C sono eterogenee, perchè le prime sono rappresentate con linee semplici, e le seconde con linee raddoppiate. Questa piccola variazione nel metodo adoprato da Euclide per rappresentare le grandezze, serve ad evitare molti errori, che possonsi facilmente commettere nel maneggio di quelle grandezze, che per condizione della proposizione non sono necessariamente dello stesso genere.

§. VIII.

Comincio per tanto da questo Teorema: *Se una grandezza moltiplichi una grandezza; il prodotto sarà omogeneo alla grandezza moltiplicata*. Sieno le due grandezze A B (Fig. I.), e l'A moltiplicando la B produca la C. Dico che la C è omogenea alla B.

Imperocchè sia la D l'unità concreta dell' A. E poichè l'A moltiplicando la B ha prodotto la C; quindi (§. IV.) sarà come l'unità concreta dell'A, cioè la D, all'A; così la B alla C. Adunque la B alla C ha proporzione; e però omogenea è la B alla C; il che convenia dimostrare.

§. IX.

Quantunque semplice e manifesto sia questo Teorema, egli è però contrario ad una idea comunemente ricevuta. Chi è, che non abbia molte e molte volte letto: che una linea moltiplicando una linea produce una superficie, e che una linea moltiplicando una superficie produce un solido? tutte cose falsissime. Una linea moltiplicata per una linea, o per una grandezza di qualsivoglia altro genere, darà sempre una linea; ed una superficie moltiplicata per una linea o per qualsivoglia altra grandezza produrrà sempre una superficie; poichè abbiamo dimostrato che la grandezza prodotta è dello stesso genere della moltiplicata.

§. X.

Corre anche in Algebra, come Teorema sì manifesto da non aver bisogno di alcuna dimostrazione, che *se due grandezze con vario ordine moltiplichinsi insieme, i prodotti sono uguali fra loro*. Per esempio sieno le A B due grandezze; si dice adunque che il prodotto della B nell' A è uguale al prodotto dell' A nella B. Ma questo Teorema preso in senso generale, come faremo vedere, è falso; non essendo vero che nel caso in cui le grandezze A B sieno dello stesso genere. Quello che può aver indotto in quest' errore è la solita applicazione a numeri; la quale però, essa stessa, ben esaminata può dimostrare la falsità dell' assunto. Imperocchè abbiansi le due grandezze 3. piedi e 70. libbre da moltiplicarsi insieme. Se moltiplichinsi li 3. piedi per le 70. libbre, il prodotto sarà 210. piedi; ma se moltiplichinsi le 70. libbre per 3. piedi, il prodotto sarà 210. libbre. Adunque, qualunque sia l' ordine della moltiplicazione, ottiensi lo stesso numero 210: ma nel primo modo il numero 210 indica 210. piedi, e nel secondo 210. libbre.; nè vi sarà certamente alcuno che pretenda asserire che 210. piedi sia grandezza uguale a 210. libbre. Adunque non sempre due grandezze con vario ordine moltiplicandosi insieme fanno lo stesso prodotto; e però falso è il Teorema generale. Indicata pertanto la sorgente dell' errore passo a dimostrare i veri ed esatti Teoremi, che risultano dalla moltiplicazione di due grandezze fra loro.

§. XI.

TEOREMA. *Se due grandezze omogenee con vario ordine moltiplicandosi insieme producano due grandezze; queste saranno omogenee alle prime ed uguali fra loro.* Sieno omogenee le due grandezze *A B* (Fig. 2.) e l' *A* moltiplicando la *B* produca la *C*, poi la *B* moltiplicando l' *A* produca la *D*. Dico che le *C D* sono omogenee alle *A B*, ed uguali fra loro.

Imperocchè poichè l' *A* moltiplicando la *B* ha prodotto la *C*; quindi sarà la *C* omogenea alla *B* (§. VIII.) Di nuovo poichè la *B* moltiplicando l' *A* ha prodotto la *D*; quindi omogenea sarà la *D* all' *A*. Ma l' *A* è omogenea alla *B*. Adunque elleno sono tutte omogenee le *A B C D*; e però avranno la stessa unità concreta. Sia questa l' *E*. E poichè l' *A* moltiplicando la *B* ha prodotto la *C*; quindi sarà (§. IV.) come l' *E* all' *A*, così la *B* alla *C*. Ma se quattro grandezze *dello stesso genere* sieno proporzionali, ancora alternando sono proporzionali. Adunque egli è come l' *E* alla *B*, così l' *A* alla *C*. Come poi l' *E* alla *B*, così è l' *A* alla *D*; perocchè la *B* moltiplicando l' *A* ha prodotto la *D*: (§. IV.) laonde egli è come l' *A* alla *C*, così l' *A* alla *D*. Uguali sono dunque fra loro le *C D*, ed omogenee alle *A B*; il che convenia dimostrare.

§. XII.

Quando poi le due grandezze che fra loro si moltiplicano non sieno omogenee, allora si avrà questa proposizione. *Se due grandezze eterogenee con vario ordine moltiplicandosi insieme producano due grandezze; queste saranno omogenee alle prime, una all' altra, ed avranno alle loro unità concrete la medesima proporzione.*

Sieno

Sieno le A B (Fig. 3.) due grandezze eterogenee; e le A B con vario ordine moltiplicandosi insieme producano le due grandezze CD; cioè l' A moltiplicando la B produca la C; poi la B moltiplicando l'A produca la D. Dico primieramente che le C D sono omogenee alle A B, una all'altra, cioè la C omogenea alla B, e la D all' A.

Imperocchè poichè l'A moltiplicando la B ha prodotto la C; quindi omogenea sarà la C alla B (§. VIII.). Di nuovo poichè la B moltiplicando l' A ha prodotto la D; quindi omogenea sarà la D all' A. Elleno sono adunque le due D C omogenee alle A B, l'una all'altra. Dico in oltre che le D C alle loro unità concrete hanno la medesima proporzione. Imperocchè sia l'E l'unità concreta delle A D, e l'F quella delle B C. Dico che come la D all'E, così è la C all'F. Imperocchè poichè l'A moltiplicando la B ha prodotto la C; quindi sarà (§. IV.) come l' E all' A, così la B alla C. Di nuovo poichè la B moltiplicando l' A ha prodotto la D; quindi sarà (§. IV.) come l' F alla B, così la A alla D. Poichè dunque egli è come l' E all' A, così la B alla C; e come l' A alla D, così l' F alla B; quindi per uguaglianza perturbata sarà come l' E alla D, così l' F alla C; laonde contrariamente egli è come la D all' E, così la C all' F; il che convenia dimostrare.

§. XIII.

Unendo insieme i due teoremi antecedenti potremo dunque conchiudere, che se due grandezze, di qualunque genere sia ciascuna di esse, con vario ordine moltiplicandosi insieme producano due grandezze; queste saranno o uguali fra loro, o proporzionali alle loro unità concrete.

§. XIV.

Wolfio, quell'acutissimo e celebre Scrittore d' Elementi, cadde esso pure nell' errore di credere, che due grandezze (sieno esse o omogenee ovvero eterogenee) moltiplicandosi fra loro producano la stessa grandezza; e di più volle darne una dimoſtrazione (*) che quì traſcrivo verbo a verbo per poterla più facilmente confutare. Eccola. *Duæ quantitates ſe mutuo multiplicantes idem factum gignunt. Sint duo factores A & B; erit* $1:A::B:AB$, *&* $1:B::A:BA$. *Eſt vero etiam* (alternando) $1:A::B::BA$; *adeoque ob unitatem eandem per hypoth;* $B:AB::B:BA$. *Ergo* $AB=BA$. Queſta dimoſtrazione pecca per due coſe. Prima per aver ſuppoſto che le unità concrete delle grandezze anche eterogenee ſieno uguali fra loro, contro quanto ſi è chiaramente veduto nel §. IV. Secondo per aver alternato la proporzionalità $1:B::A:BA$, conchiudendo che dunque $1:A$ ſta come $B:BA$. Imperocchè allora ſolamente quattro grandezze proporzionali poſſono alternarſi, quando ſieno dello ſteſſo genere. So che queſta condizione vien qualche volta ommeſſa dagli Scrittori d' Algebra, ma eſſa non è per queſto meno neceſſaria. In fatti ſe le quattro grandezze che formano una proporzionalità non ſieno tutte omogenee, non ſi potrà mai paragonare la prima colla terza, e la ſeconda colla quarta, cioè non ſi potrà mai alternare la proporzionalità; poichè allora ſolo due grandezze hanno fra loro proporzione, quando ſieno dello ſteſſo genere. Nè varrebbe aſſerire che anche *Euclide* nella prop. 16 del libro quinto diſſe: *ſe quattro grandezze ſieno proporzionali, ancora alternamente ſono proporzionali*, ſenza aggiugnere la condizione che le grandezze debbano eſſere *dello ſteſſo genere*, imperciocchè ſi rende evidente che queſte parole ſono ſtate ommeſſe per negligenza degli *Amanuenſi* dall' oſſervare, che non alternò mai *Euclide* una proporzionalità, le cui grandezze non foſſero tutte quattro dello ſteſſo genere. Si ricava lo ſteſſo anche dalla propoſizione 22. dello ſteſſo libro, *ſe ſieno quantunque grandezze, ed altre ad eſſe uguali di moltitudine, preſe a due a due nella ſteſſa proporzione, ancora per uguaglianza ſaranno nella ſteſſa proporzione*; dove l' illuſtre Maeſtro ſi è nella dimoſtrazione ſervito delle moltiplici, non dell' alternazione delle proporzionalità, quantunque queſto metodo, quando ne aveſſe potuto far uſo, l' avrebbe reſa più elegante e ſpedita dell' altro; e ciò perchè le gran-

(*) *Elem. Arith. theor. 39.*

dezze fra le quali vuol conchiudere l' uguaglianza possono non essere tutte dello stesso genere. Notisi in oltre che questo ultimo modo non era ad esso ignoto, come quegli che se ne valse nella proposizione 14. del settimo in cui tratta lo stesso che nella 22. del quinto colla sola differenza, che in quella supponeva grandezze in generale, ed in questa numeri astratti, i quali sono grandezze dello stesso genere. In fatti i celebri Traduttori Veronesi di quest' Autore hanno nella loro traduzione aggiunte all' enunciato della detta proposizione 16. del quinto quelle parole *dello stesso genere*, a ciò certamente condotti da tutte le ragioni da me esposte. E tornando sul primo sbaglio del *wolfio* dico che se le unità concrete delle grandezze A B fossero state da esso indicate colle lettere dell' alfabeto, come ha suggerito nel §. II., avrebbe egli di primo tratto riconosciuto, che con una lettera si doveva segnare l' unità concreta della grandezza A, e con altra lettera l' unità concreta della grandezza B; e quindi più facilmente si sarebbe avveduto, che il suo teorema non è vero, quando sieno eterogenee le $A\,B$.

§. XV.

Quando le due grandezze che con vario ordine moltiplicansi insieme sieno eterogenee, noi abbiamo dimostrato che i prodotti alle loro unità concrete hanno la medesima proporzione. Ciò mi mette naturalmente nella necessità di dichiarare la caratteristica proprietà delle grandezze eterogenee fornite di questa condizione, vale a dire aventi alla loro unità concreta la medesima proporzione. Ma prima premetterò la seguente difinizione. *Si dice che un numero rappresenta una grandezza, quando l' unità astratta a quel numero abbia la stessa proporzione, che l' unità concreta di quella grandezza alla grandezza medesima*. Così il numero 3. rappresenterà il peso di un corpo, quando l' 1. al 3. abbia la stessa proporzione che l' unità concreta de' pesi (volgarmente detta libbra) al peso dello stesso corpo. Non bisogna però confondere questa, che io ho chiamata rappresentazione, coll' uguaglianza; per esempio non bisogna dire che il numero 3. sia uguale al peso di quel corpo: ma dalla rappresentazione all' uguaglianza vi ha però un facile paſſaggio, ed è quello d'intendere cangiato il *numero aſtratto* che rappreſenta la grandezza in un *numero concreto* avente per unità concreta quella della grandezza medeſima; il che ſi dimoſtra colle parole, pronunziando dopo il numero aſtratto il nome di eſſa unità concreta. In queſto modo ſe intenderò cangiato il numero aſtratto 3. nel concreto 3. libbre, paſſerò dalla rappreſentazione all' uguaglianza, e potrò aſſerire che il ſuddetto peſo è uguale a tre libbre. L' eſpoſta difinizione è la vera chiave per dimoſtrare tutte le regole uſate dai pratici nel calcolare le figure piane e le ſolide, come a ſuo luogo vedremo. Per ora contentiamoci di conoſcere la caratteriſtica proprietà delle grandezze eterogenee proporzionali alle loro unità concrete, il che ci verrà indicato da queſto teorema.

§. XVI.

Le grandezze eterogenee proporzionali alle loro unità concrete ſono rappreſentate dallo ſteſſo numero.

Sieno le grandezze eterogenee A B (Figg. 4, 5, 6) le cui unità concrete ſieno le C D, la C dell' A, e la D della B; e ſia come l' A alla C, così la B alla D. Dico che lo ſteſſo numero rappreſenterà l'una e l'altra delle A B.

Imperocchè o le A B ſono commenſurabili alle C D o no. Sieno primieramente commenſurabili. E poichè l' A alla C è commenſurabile (Fig. 4.); quindi una dell' altra ſarà o parte o parti. Sia primieramente la C parte dell' A; e quante volte la C miſura l' A tante unità ſieno nel numero E. Sia poi l' F l'unità aſtratta. E poichè la C miſura l' A per l' unità aſtratte che ſono nell' E; e ancora l' unità aſtratta F miſura l' E per l' unità aſtratte che ſono in eſſo; quindi egli è come l' F all' E così la C all' A; laonde (§. XV.) il numero E rappreſenta la grandezza A. Di nuovo poichè ſta come l' F all' E, così la C all' A; e come la C all' A, così è per ſuppoſizione la D alla B; quindi ancora come l' F all' E, così è la D alla B: e però (§. XV.) il numero E rappreſenta la grandezza B. Ma eſſo numero E rappreſenta pure la grandezza A. Dunque l' E rappreſenta una e l'altra grandezza A B. Sia ora la C parti dell' A (Fig. 5.); e dividaſi l' A nelle ſue parti, la cui moltitudine sia espressa dal numero E; ma la moltitudine delle stesse parti dell' A che sono nella C sia espressa dal numero G; ed intendasi il numero rotto EG avente per numeratore l'E e per denominatore il G. Adunque come la C all' A, così è il numero G al numero E. Come poi il denominatore G al numeratore E, così è l'unità astratta F al numero rotto EG; laonde egli è come l'F all' EG, così la C all' A; e però il numero rotto EG rappresenta la grandezza A (§. XV.). Allo stesso modo si proverà che se l'A sia parte o parti della C, uno stesso numero rotto rappresenterà sì la grandezza A che la B. Sia finalmente la C incommensurabile all' A (Fig. 6.), e come la C all' A, così sia l'unità astratta F al numero E. Adunque l'E è un numero irrazionale, e rappresenta la grandezza A. Egli poi rappresenta ancora la grandezza B, perocchè essendo come la C all' A così la D alla B, avrà pure la D alla B la stessa proporzione che l'unità astratta F al numero E; laonde lo stesso numero irrazionale E rappresenta l'una e l'altra delle grandezze A B. Per conseguenza le grandezze eterogenee proporzionali alle loro unità concrete possono esser dallo stesso numero rappresentate; sia esso poi o intero, o rotto, o irrazionale.

§. XVII.

Ecco perchè il prodotto di 3. piedi in 70. libbre, ed il prodotto di 70. libbre in 3. piedi sono dallo stesso numero 210 rappresentati. Li due prodotti non sono altrimenti uguali, ma sono proporzionali alle loro unità concrete; e quindi possono dallo stesso numero 210. essere rappresentati.

§. XVIII.

Dalle due grandezze si può passare col raziocinio alle tre, quattro, e quante mai si vogliano, e dimostrare facilmente che se una moltitudine di grandezze tutte eterogenee con vario ordine moltiplichinsi insieme; si potranno ottenere tanti prodotti eterogenei quante erano le grandezze da moltiplicarsi; li quali però tutti alle loro unità concrete avranno la medesima proporzione. Se poi alcune delle grandezze che con vario ordine moltiplicansi insieme fossero dello stesso genere; allora i prodotti eterogenei proporzionali alle loro unità concrete non sarebbero più tanti quante le grandezze che si moltiplicano, ma solo quanti i generi differenti che trovassersi in esse. Sicchè, non badando alla moltitudine de' prodotti, si potrà assumere per teorema generale, che *se quante si vogliano grandezze con vario ordine moltiplichinsi insieme; tutti i prodotti, che possono nascere dalla moltiplicazione saranno l' uno all' altro, o omogenei ed uguali fra loro, o eterogenei e proporzionali alle loro unità concrete*. Ma sì le grandezze uguali, che le eterogenee e proporzionali alle loro unità concrete possono essere dallo stesso numero rappresentate; quindi si ricava un altro teorema generale, *che se quante si vogliano grandezze con vario ordine moltiplichinsi insieme; i prodotti possono essere rappresentati dallo stesso numero*.

§. XIX.

Adunque nell' Algebra non è lecito dire che ab sia uguale a ba, se non quando sieno omogenee le grandezze a b: parimente li tre prodotti mnp mpn npm, che nascono dalle tre grandezze m n p con vario ordine moltiplicate insieme, non sono fra loro uguali, che quando le grandezze m n p sieno omogenee. Vero è però, che avendo noi dimostrato che se quante grandezze si vogliano con vario ordine moltiplichinsi insieme, i prodotti possono essere rappresentati dallo stesso numero (§. XVIII.), ne segue da esso teorema che le due grandezze ab ba possano essere rappresentate dallo stesso numero; così le tre mnp mpn npm. Concludiamo per tanto che se quante si vogliano grandezze con vario ordine moltiplichinsi insieme; i prodotti non sono sempre uguali, come sogliono dare per regola certa gli Analisti, ma possono bensì essere sempre dallo stesso numero rappresentati.

§. XX.

Ed eccomi oramai pervenuto al punto di poter tranquillare l' animo di chi ad onta della chiarezza ed evidenza delle cose da me dimostrate pur dubitasse di paralogismo, per la ragione che dalla falsità della suddetta regola gli sembrasse dover seguire la strana e veramente fatal conseguenza, che quasi tutti i calcoli degli Analisti (i quali su di essa sono per la maggior parte appoggiati), debbano altresì essere fallaci, e bisognosi di rettificazione. Ma la cosa non è così come può parere a primo aspetto; poichè quantunque sia fallace la regola presa in senso generale, nondimeno da ogni taccia restano liberi i calcoli, solo che nell' Algebra s'introducano due supposizioni, le quali se nei libri elementari non trovansi espresse, niuno però mi negherà che tacitamente non vengano ammesse da tutti gli Analisti; e sono queste. Prima. *Che tutte le grandezze di qualunque natura esse sieno possano essere rappresentate da numeri*, prendendo il senso della parola *rappresentate* secondo l' idea da me datane al §. XV. Seconda. *Che le lettere dell' alfabeto indichino non le grandezze stesse* (come sogliamo dire) *ma i numeri che le rappresentano*. In forza di queste due supposizioni ognun vede che tutte le grandezze, che maneggiansi nell' Algebra, essendo numeri, o di lor natura o rappresentanti altre grandezze, sarà in questo caso vera la regola, ed esatti i calcoli; laonde per esempio ab è uguale a ba, perchè essendo le a b due numeri, il prodotto dell' a nel b è uguale al prodotto del b nell'a.

§. XXI.

Adunque l'errore degli Analisti nel dare per regola generale, *che quante si vogliano grandezze moltiplicandosi insieme facciano uguali prodotti* si riduce ad errore di parole e non di fatti. La regola non è vera, che quando le grandezze sieno omogenee, come ho dimostrato; ma poichè essi adoprano sempre numeri astratti, la fallacia della regola non può condurli ad errore di calcolo. Il celebre *Eulero*, accortosi forse del comun inganno, ha costantemente ne' suoi Elementi d' Algebra rese sinonime le parole grandezza e numero, quantunque fra esse vi sia quella differenza che passa tra il generale ed il particolare; e sfuggì a' suoi acutissimi sguardi quell'idea della *rappresentazione* delle grandezze da me data al §. XV., colla quale tutto si salva e tutto si prova legittimamente.

§. XXII.

Poichè resta ancora da darsi la dimostrazione della famosa regola, che nel moltiplicamento gli stessi segni producono una grandezza positiva, e i segni contrarj una grandezza negativa (giacchè non credo che le cose sino ad ora dette su questo argomento possano meritare il nome di dimostrazione) sarà pregio dell'opera rintracciarne una che non patisca eccezione: ma prima esporrò il mio sentimento intorno alle grandezze positive e negative, non parendomi esatto quanto di esse vien dalla maggior parte degli Autori, per non dire da tutti, proferito. Comincio per tanto dal difinirle: e sebbene le mie difinizioni siano tali che ognun dirà, come anch' ei l' intendea così, pure io da esse ricaverò conseguenze diverse da quelle degli altri. Secondo adunque il mio giudizio, *Grandezze positive sono grandezze da aggiungersi; e grandezze negative sono grandezze da togliersi*. Adunque tra le grandezze positive e le negative non havvi altra differenza che nell' *uso* che se ne vuol fare; le une sono destinate alla summa, e l'altre alla sottrazione; ma la loro natura è sempre la stessa. Ne viene ancora, che una grandezza positiva può essere uguale ad una negativa; poichè per esempio il 7 sarà uguale a se stesso, sia che nella summa o nella sottrazione sia esso impiegato: ma egli però non sarà lo stesso nell'uso che se ne vuol fare, il quale è differente. Per strana che appaja questa conseguenza pronunciata così astrattamente, io però farò vedere con un' applicazione, siccome convengo in questo con tutti gli Analisti. In fatti (Fig. 7.) sia l'AC una linea retta, ed il punto B sia l'origine, come si suol dire, delle grandezze. Prendansi ora dall'una parte e dall'altra del punto B le rette BA BC uguali fra loro, ma la BA sia dalla parte delle positive, e la BC dalla parte delle negative. Se chiamo la grandezza positiva BA uguale a $+a$, ognuno conviene che la grandezza negativa BC sia uguale a $-a$. Ma la retta BA è uguale alla retta BC, laonde è forza che anche la grandezza

dezza positiva $+a$ sia uguale alla grandezza negativa $-a$; uguale però in grandezza, ma differente nell' uso. Quindi debbesi far differenza tra *uguaglianza* ed *equazione*, che gli Analisti prendono per una stessa cosa; imperocchè *io dico che due grandezze sono in equazione, quando non solo sieno uguali in grandezza, ma debbansi pure allo stesso modo usare*. Dalla qual difinizione apparisce manifestamente, che una grandezza positiva può bensì esser uguale, ma non in equazione con una negativa, e però $+a$ è uguale a $-a$, ma $+a$ non sarà in equazione con $-a$. Da tutto ciò si ricava, che dovrebbesi esprimere con due segni differenti *uguaglianza* ed *equazione*, in vece d'indicarli, come si fa, col segno comune $=$; pure siccome della prima si fa poco uso nell' Algebra e molto della seconda, e l' equazione rinchiudendo anche l'uguaglianza, così non può cagionar errore il servirsi dello stesso segno, quando ciò venga fatto colle dovute cautele.

§. XXIII.

L'idee semplici che io ho affisso alle grandezze positive e negative sono ben differenti da quelle che sono state adottate dagli Autori d'Elementi, i quali con un' analogia (cosa veramente nuova nelle Matematiche) hanno voluto spiegar la loro natura, e quindi ne hanno tratto delle strane conseguenze. L'analogia è questa. *Le grandezze positive sono come crediti che un uomo abbia dall' altro*, e *le grandezze negative*, *come debiti*. L'analogia può fin qui correre, perchè li crediti di un uomo sono realmente cose d' aggiungere a' suoi capitali; e i debiti cose da togliersi da essi. *E siccome* (soggiungono essi) *si può dire di un uomo che niente possega ed abbia un debito, ch' egli ha meno del niente, perocchè per aver niente bisogna che paghi prima il suo debito, così le grandezze negative sono minori del niente*. Ma come mai quello che non è, quello ch'è la mancanza di un essere che prima esisteva, il nulla finalmente, come può mai essere maggiore della grandezza negativa, cioè di un ente ch'esiste? Non è egli questo un distruggere la vera nozione di maggioranza? Perchè una grandezza è negativa, vale a dire perchè essa è destinata alla sottrazione, per questo dovrà esser minor del niente? Basta mettere in forma di sillogismo l' argomentazione di questi Autori per accorgersi della sua falsità. *Chi ha un debito e niente possede, ha meno del niente: la grandezza negativa è come un debito: dunque la grandezza negativa è meno del niente*; il quale sillogismo avendo manifestamente più di tre *termini* pecca nella *forma*. Dalla strana proposizione che le grandezze negative sieno minori del nulla, n' è anche derivata la ugualmente strana conseguenza ch' esse grandezze sieno eterogenee alle positive (*a*).

§. XXIV.

Teorema. *Se sienvi due grandezze, una delle quali sia spezzata in quanti segamenti si vogliano; dico che il prodotto della non spezzata in tutta l' altra è uguale a' prodotti della non spezzata in ciascun segamento dell' altra.*

Sieno le *A BC* (Fig. 8.) due grandezze, una delle quali, cioè la *BC*, sia spezzata in quanti si vogliano segamenti *BD DC*: e l' *A* moltiplicando la *BC* produca la grandezza *E* a questa omogenea; moltiplicando poi le *BD DC* produca le grandezze *FG GH* a queste omogenee, e però anche alla *BC*. Dico che uguale è l' *E* all' *FH*. Imperocchè espongasi l' unità concreta *M* dell' *A*. E poichè l' *A* moltiplicando la *BD* ha prodotto la *FG*; quindi sarà come l' *M* all' *A*, così la *BD* alla *FG*. Per la medesima ragione l' *M* all' *A* sta come la *DC* alla *GH*. Adunque ancora come la *BD* alla *FG*, così la *DC* alla *GH*. Ed elleno son tutte grandezze omogenee; laonde come la *BD* alla *FG*, così tutta la *BC* a tutta l' *FH*. Ma come la *BD* alla *FG*, così è l' *M* all' *A*; e però egli è come l' *M* all' *A*, così la *BC* alla *FH*. Come poi l' *M* all' *A*, così è pure la *BC* all' *E*; perocchè l' *A* moltiplicando la *BC* ha prodotto l' *E*. Adunque sta come la *BC* all' *E*, così la *BC* all' *FH*. Uguale ella è dunque l' *E* all' *FH*; il che convenia dimostrare.

(*a*) Wolfi. Elem. Analy. n. 23.

§. XXV.

Per conseguenza se la grandezza A sia rappresentata dal numero a, il segamento BD dal numero b, ed il segamento DC dal numero c, sicchè tutta la BC sia rappresentata dal numero $b+c$; sarà il prodotto del numero a in tutto il numero $b+c$ uguale al prodotto dell'a nel b, insieme col prodotto dell'a nel c; e però il prodotto dell'a nel $b+c$ è uguale ad $ab+ac$.

§. XXVI.

Teorema. *Se sienvi due grandezze, una delle quali sia spezzata in quanti segamenti si vogliano; il prodotto da tutta la spezzata nell' altra è uguale a' prodotti da ciascun segamento della spezzata nell' altra.*

Sieno le A BC (Fig. 9.) due grandezze, una delle quali, cioè la BC sia spezzata in quanti segamenti si vogliano BD DC; e la BC moltiplicando l'A produca l'E a questa omogenea; poi le BD DC moltiplicando la stessa A producano le FG GH a queste omogenee, e però anche all'E. Dico che uguale è l'E all'FH. Imperocchè espongasi l'unità concreta N della BC. E poichè la BC moltiplicando l'A ha prodotto l'E; quindi starà come l'N alla BC, così l'A all' E. Per la medesima ragione egli è come l'N alla BD, così l'A all'FG, ed ancora come l'N alla DC, così l'A alla GH. Poichè dunque egli è come l'N alla DC, così l'A alla GH; quindi sarà contrariamente come la DC all'N, così la GH all'A. Ma come l'N alla BD, così è l'A all'FG. Adunque per uguaglianza starà come la DC alla BD, così la GH all'FG: e componendo sarà come la BC alla BD, così l'FH all'FG. Come poi la BD all'N, così è l'FG all'A; laonde di nuovo per uguaglianza starà come la BC all'N, così l'FH all'A; e però contrariamente egli è come l'N alla BC, così l'A all'FH. Ma come l'N alla BC, così è l'A all'E; e però starà come l'A all'E, così l'A all'FH. Uguale ella è dunque l'E all'FH; il che convenia dimostrare.

§. XXVII.

Quindi se rappresenteremo l'A dal numero a, la BD dal numero b, e la DC dal numero c, sicchè tutta la BC sia rappresentata dal numero $b+c$; sarà il prodotto del $b+c$ nell' a uguale al prodotto del b nell' a insieme col prodotto del c nell' a; cioè il prodotto di $b+c$ nell' a è uguale a $ba+ca$. Questa stessa verità, trattandosi di numeri, si poteva trarre anche dalle cose dette nel §. XXV senza ricorrere al Teorema antecedente; perocchè essendosi colà dimostrato che il prodotto dell'a nel $b+c$ è uguale ad $ab+ac$; ma il prodotto dell'a nel $b+c$ è uguale al prodotto del $b+c$ nell' a, e così ancora uguale è l'ab al ba, e l'ac al ca; perocchè sono numeri le a b c; quindi anche il prodotto del $b+c$ nell'a è uguale a $ba+ca$; come di sopra.

§. XXVIII.

TEOREMA. *Se sienvi due grandezze, ciascuna delle quali sia spezzata in quanti segamenti si vogliano; una di esse moltiplicando l' altra farà un prodotto uguale a' prodotti da ciascun segamento della prima in ciascun segamento dell' altra.*

Sieno le AB CD (Fig. 10.) due grandezze ciascuna delle quali sia spezzata in quanti si vogliano segamenti, l' AB negli AE EB, e la CD nelli CF FD; e l'AB moltiplicando la CD produca la grandezza G, e l' AE moltiplicando ciascuna delle CF FD produca le grandezze HI IK; e così pure l'EB moltiplicando ciascuna delle CF FD produca le grandezze KL LM. Saranno adunque tutte omogenee le CD G HI IK KL LM. Dico ora che uguale è la G all' M. Imperocchè poichè le AE CD sono due grandezze, una delle quali, cioè la CD è spezzata nelli segamenti CF FD; quindi uguale è il prodotto dell'AE nella CD (§. XXIV.) alli prodotti dell' AE nelle CF FD. Ma il prodotto dell' AE nella CF è l' HI, ed il prodotto dell'AE nell' FD è l' IK. Adunque uguale è il prodotto dell' AE nella CD all' HK. Similmente dimostreremo che uguale è il prodotto dell' EB nella CD alla KM. Laonde il prodotto dell' AE nella

CD insieme col prodotto della EB nella CD è uguale a tutta l'HM. Uguale egli è poi il prodotto dell' AB nella CD insieme col prodotto dell'EB nella CD (§. XXVI.) al prodotto dell'AB nella CD, cioè alla G; perocchè le AB CD, sono due grandezze, delle quali l' AB è spezzata nelli segamenti AE EB. Adunque la G è uguale all'HM; il che convenia dimostrare.

§. XXIX.

E però se l' AE sia rappresentata dal numero a, l'EB dal numero b, cosicchè tutta l' AB sia rappresentata dall' $a+b$; e similmente se la CF sia rappresentata dal numero m, la FD dal numero n, e tutta la CD dal numero $m+n$; sarà il prodotto dell'$a+b$ nell'$m+n$, e ancora il prodotto dell' $m+n$ nell'$a+b$ uguale all' $am+an+bm+bn$. Dalle cose fin qui dette ricavasi adunque la dimostrazione di quella bella regola degli Analisti, che *se due grandezze complesse di altre grandezze semplici positive moltiplichinsi insieme; il prodotto di una nell' altra è uguale ai prodotti di ciascuna grandezza semplice della prima in ciascuna grandezza semplice dell' altra*. Ora fo passaggio alle grandezze complesse di grandezze positive e negative.

§. XXX.

Teorema. *Se sienvi due grandezze, una delle quali sia spezzata in quanti segamenti si vogliano; il prodotto della non ispezzata in un segamento dell' altra è uguale all' eccesso in cui il prodotto della non ispezzata in tutta l' altra eccede i prodotti della stessa in ciascuno de' segamenti rimanenti dell' altra*.

Sieno le A BC (Fig. 11.) due grandezze, una delle quali, cioè la BC, sia spezzata in quanti segamenti si vogliano BE ED DC. Dico che uguale è il prodotto dell' A nella BE all' eccesso in cui il prodotto dell' A nella BC eccede i prodotti dell' A in ciascuna delle rimanenti ED DC.

Imperocchè poichè le A BC sono due grandezze, una delle quali, la BC, è spezzata in quanti segamenti si vogliano *BE ED DC*; quindi sarà (§. XXIV) il prodotto dell'*A* nella *BC* uguale a' prodotti dell'*A* in ciascuna delle *BE ED DC*. Adunque il solo prodotto dell'*A* nella *BE* è uguale all' eccesso, onde il prodotto dell'*A* nella *BC* eccede i prodotti dell'*A* in ciascuna delle rimanenti *ED DC*; il che conveniva dimostrare.

§. XXXI.

Laonde se col numero a rappresenteremo la grandezza A, col numero b la grandezza BC, col c l' ED, e la DC col d, sicchè la rimanente BE sia rappresentata da $b-c-d$; sarà il prodotto dell'a nel $b-c-d$ uguale all' ab meno ac e meno ancora ad; e però il detto prodotto sarà uguale all' $ab-ac-ad$. Ma il prodotto dell'a nel $b-c-d$ è uguale al prodotto del $b-c-d$ nell'a (essendo numeri gli a b c d); dunque ancora il prodotto del $b-c-d$ nell' a è uguale all' $ab-ac-ad$.

§. XXXII.

Vengo ora alla dimostrazione del seguente famoso Teorema, che serve per la moltiplicazione delle grandezze complesse, che includano segni negativi. *Se sienvi due grandezze ciascuna delle quali sia complessa di grandezze semplici positive e negative; il prodotto di una nell' altra è uguale alla grandezza complessa dai prodotti di ciascuna grandezza semplice della prima in tutte le grandezze semplici dell' altra; con questa regola, che i prodotti, che derivano da grandezze semplici aventi lo stesso segno, sono positivi, ed i prodotti da grandezze semplici aventi segno diverso sono negativi.* Potrei dimostrare questo teorema allo stesso modo de' precedenti con figure, e poi farne l' applicazione all' Algebra, ma per non andar troppo alla lunga presenterò al mio lettore una dimostrazione senza il soccorso di quelle, la quale s' appoggia però sulle antecedenti proposizioni.

Sieno per tanto l'$m-n$, e l'$a-b$ due numeri complessi di numeri semplici positivi e negativi; cioè l'$m-n$ del positivo m e del negativo n, e l'$a-b$ del positivo a e del negativo b.

Dico che il prodotto dell' $m-n$ nell' $a-b$ è uguale al numero compleſſo dai prodotti ma, mb, na, nb, con queſta regola che l' ma e l' nb che derivano, il primo da numeri ſemplici poſitivi, ed il ſecondo da numeri ſemplici negativi, debbono eſſere amendue poſitivi; ma l' mb e l' na che derivano da numeri ſemplici uno poſitivo e l' altro negativo debbono eſſer amendue negativi; vale a dire il prodotto dell' $m-n$ nell' $a-b$ è uguale all' $ma-mb-na+nb$. Imperocchè ſuppongaſi $m-n=d$, e l' $a-b=q$; adunque $m=n+d$, e $a=b+q$; laonde (§. XXVIII.) ſarà $ma=nb+nq+db+dq$. Ed aggiungendo al ſecondo membro e togliendo dallo ſteſſo la grandezza nb, ſarà ancora $ma=nb+nq+db+dq+nb-nb$; ovvero dando un ordine differente allo ſteſſo ſecondo membro, ſarà $ma=nb+db+nb+nq+dq-nb$. Ma $nb+db$ è uguale (§. XXVI.) al prodotto dell' $n+d$, cioè dell' m, nel b, e però è uguale all' mb; e parimente $nb+nq$ (§. XXIV.) è uguale al prodotto dell' n nel $b+q$, cioè nell' a, e però è uguale all' na. Per conſeguenza $ma=mb+na+dq-nb$; laonde $dq=ma-mb-na+nb$. Egli è poi il dq il prodotto del d nel q, o dell' $m-n$ nell' $a-b$; quindi il prodotto dell' $m-n$ nell' $a-b$ è uguale all' $ma-mb-na+nb$; il che conveniva dimoſtrare.

§. XXXIII.

Ciaſcun vede che ſiccome la diviſione algebraica non è che una proporzionalità inverſa di quella della moltiplicazione, così non debbe riuſcir difficile trattare collo ſteſſo metodo, che abbiamo adoperato in queſta, anche l' altra operazione; pure alcuni teoremi renderanno la coſa più manifeſta. *Se una grandezza divida una grandezza; il quoziente ſarà omogeneo alla grandezza diviſa.* La grandezza A (Fig. 12.) dividendo la grandezza B dia per quoziente la C. Dico che la C è omogenea alla B. Imperocchè ſia la D l' unità concreta dell' A. E poichè l' A dividendo la B ha dato la C; quindi egli è (§. V.) come l' A alla D, così la B alla C. Elleno hanno dunque proporzione le B C; e però la C è omogenea alla B; il che convenia dimoſtrare.

§. XXXIV.

TEOREMA. *Se una grandezza dividendo una grandezza dia un quoziente; questo moltiplicato per la grandezza dividente farà un prodotto uguale alla grandezza divisa*. La grandezza *A* (Fig. 13.) dividendo la grandezza *B* dia per quoziente la grandezza *C* che sarà ad essa omogenea (§. XXXIII.); poi l' *A* moltiplicando la *C* produca la *D* omogenea alla *C* (§. VIII.), e però anche alla *B*. Dico che uguale è la *D* alla *B*. Imperocchè sia l'*E* l' unità concreta dell' *A*. E poichè la *B* divisa per l' *A* ha dato la *C*; quindi sarà come l'*A* all'*E*, così la *B* alla *C*; e però contrariamente egli è come l' *E* all'*A*, così la *C* alla *B*. Ma come l' *E* all' *A*, così è la *C* alla *D*, perocchè l' *A* moltiplicando la *C* ha prodotto la *D* (§. IV.). Laonde egli è come la *C* alla *D*, così la *C* alla *B*. Uguale ella è dunque la *D* alla *B*; il che convenia dimostrare.

§. XXXV.

TEOREMA. *Se una grandezza moltiplicando una grandezza faccia un prodotto; questo diviso per la grandezza moltiplicante darà un quoziente uguale alla grandezza moltiplicata*.

La grandezza *A* (Fig. 14.) moltiplicando la grandezza *B* produca la grandezza *C* ad essa omogenea; poi la *C* divisa per l' *A* dia per quoziente la grandezza *D* omogenea alle *C B*. Dico che uguale è la *D* alla *B*. Imperocchè sia l' E l' unità concreta dell'*A*. E poichè l'*A* moltiplicando la *B* ha prodotto la *C*; quindi sarà come l' *E* all' *A*, così la *B* alla *C*; laonde contrariamente egli è come l'*A* all'*E*, così la *C* alla *B*. Ma come l'*A* all'*E*, così è la *C* alla *D*; perchè la *C* divisa per l' *A* ha dato la *D* (§. V). Adunque egli è come la *C* alla *D*, così la *C* alla *B*; e però uguale è la *D* alla *B*; il che convenia dimostrare.

§. XXXVI.

§. XXXVI.

Seguendo con questo metodo si può quanto mai elegantemente dimostrare tutte le proprietà delle grandezze proporzionali, e delle proporzioni composte, nelle quali entrino la moltiplicazione e la divisione. Sopra tutto riesce chiarissima la teoria de' quozienti, che impropriamente nell' Algebra si confondono colle frazioni, non essendo i quozienti pure frazioni che nel caso in cui dividansi numeri fra loro, non grandezze in generale. Ma siccome non è stato mio scopo in questa Memoria, che di mostrare agli Analisti, con quanta maggior facilità e sicurezza possasi per questa nuova strada piantare le regole del calcolo, così mi fermerò a questo punto; e solo passerò a soddisfare all' assunto presomi nel §. XV.), dove mi era riservato a far conoscere la cagione per cui sono caduti in errore coloro che hanno asserito che il prodotto di una linea per una linea è una superficie; il che mi aprirà l' adito a presentare il vero modo con cui possonsi dimostrare le comuni regole della Geometria pratica per calcolare le figure piane, ed anche le solide.

§. XXXVII.

Se siavi un rettangolo che abbia per esempio un lato di quattro piedi, e l' altro di otto, ognun vede che la sua area è di 32. piedi quadrati, poichè se ciascun lato si divida ne' suoi piedi e per li punti delle divisioni tirinsi rette parallele all' altro lato e formisi una spezie di graticola; il detto rettangolo comprende 32. quadrati di un piede. Ora essendo il numero 32. il prodotto appunto del quattro nell' otto; molti hanno conchiuso, che l' area di un rettangolo è uguale al prodotto de' due lati; e però che linea moltiplicando linea produca superficie. Ma essi non hanno posto mente che moltiplicando l' otto per quattro non moltiplicano lato per lato, ma moltiplicano solo fra loro due numeri che rappresentano i lati del rettangolo; così il numero 32, preso astrattamente, non è la superficie di quello, ma solo la rappresenta; e per convertirlo nella superficie conviene prenderlo concretamente pronunciando 32. piedi quadrati; quindi essi hanno confuso insieme le idee di rappresentazione e d'identità, e da questa confusione n'è nato lo sbaglio: ma il seguente paragrafo, ove sta rinchiusa la vera teoria del calcolo de' terreni, dimostrerà la cosa con più chiarezza.

§. XXXVIII.

E' noto. I. *Che l' unità concreta lineare vien chiamata piede lineare*. II. *Che la figura quadrata fatta su questo piede lineare, ovvero il piede quadrato, vien preso per unità concreta superficiale*. Ciò posto, pronuncio questo Teorema. *Se i lati di un rettangolo siano rappresentati da numeri; il prodotto di essi numeri rappresenterà l' area del rettangolo*.

Sia l' AC (Fig. 15.) un rettangolo, ed il numero intero o rotto D rappresenti il lato AB, ed il numero intero o rotto E rappresenti l' altro lato AC. Il numero poi D moltiplicando l' E produca il numero F. Dico che l' F rappresenta il rettangolo AC. Imperocchè sia la linea IK l' unità, o il piede lineare; onde descritto dall' IK il quadrato HK, sarà l' HK l' unità superficiale. Sia in oltre la G l' unità numerica. E poichè il numero D rappresenta la linea AB; quindi sarà (§. XV.) come l' IK, cioè l' IH, all' AB, così l' unità astratta G al numero D. Per la stessa ragione egli è come l' IK alla BC, così l' unità astratta G al numero E. Uguale è dunque la proporzione composta dalle proporzioni dell' IH all' AB, e dell' IK alla BC, alla proporzione composta dalle proporzioni della G al D, e della G all' E. Ma il quadrato HK al rettangolo AC ha la proporzione composta dalle proporzioni dell' IH all' AB, e dell' IK alla BC; e parimente l' unità astratta G al numero prodotto F è in proporzione composta della G al D, e della G all' E, perocchè il D moltiplicando l' E ha prodotto l' F. Adunque egli è come il quadrato HK, cioè l' unità superficiale, al rettangolo AC; così l' unità astratta G al numero F; e però il numero F (§. XV.) rappresenta la superficie del rettangolo AC; il che convenia dimostrare.

§. XXXIX.

Questo solo Teorema basta per conoscere con quanta felicità possansi dimostrare tutte l'altre regole che appartengono al calcolo delle figure piane, e così pure quelle delle figure solide, che unite formano la più interessante parte della Geometria pratica: e tutto ciò senza valersi di quel falso principio che linea moltiplicando linea produca superficie; e che linea moltiplicando superficie produca solido. Ma basti il fin qui detto intorno alla moltiplicazione ed alla divisione algebraiche.

Il Fine delle Memorie Sociali.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

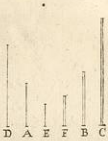

Fig. 4.

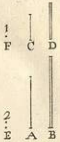

Fig. 5.

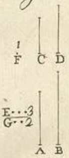

Fig. 6.

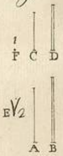

Fig. 7.

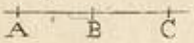

Fig. 8.

Fig. 9.

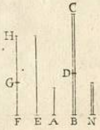

Fig. 10.

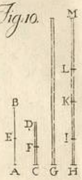

Fig. 11.

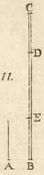

Fig. 12.

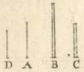

Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 15.