DETERMINAZIONE

DEL TEMPO CHE IMPIEGA UN GRAVE DISCENDENTE PER UN CANALE CIRCOLARE.

Del Sig. Gio. Francesco Malfatti.

1. Il fortunato accidente del Galileo di trovarsi colla mano al polso, mentre nel Tempio di S. Antonio di Padova teneva gli occhi rivolti ad una lampada pendente innanzi all' Altare, la quale andava oscillando, ci ha fruttato, come ognun sa, la sua bella teoria de' pendoli semplici circolari, promossa poi tanto dall' *Ugenio* colla invenzione de' centri di oscillazione ne' pendoli composti, colla dottrina delle evolute, e con altri tali sublimi ritrovamenti, che hanno dilatato sempre più i confini della Meccanica, ed accresciuta di molto la suppellettile delle umane cognizioni. E' noto altresì, che l' osservato isocronismo tra le battute del polso e le oscillazioni prima più grandi e poi minori della lampada avean fatto credere al primo, che un grave discendente per un canal circolare, per arrivare sino al punto più basso, sempre impiegasse lo stesso tempo, qualunque fosse l' arco della discesa; proposizione, che egli non ha mai potuto dimostrare, perchè essa è solo fisicamente vera negli archi minimi del cerchio presi dal punto più basso, e non si verifica matematicamente per qualunque arco, che nella cicloide, come nel suo libro *de Horologio oscillatorio* c' insegna il secondo.

2. Oltracciò si è cercato di provare, che la caduta per un arco circolare si compie in tempo più lungo che per un arco cicloidale, il quale abbia comuni col primo i due termini; verità, che si trae pure dal problema della brachistocrona, che si sa essere la cicloide. Ma a me non è noto, che nessun Geometra si sia espressamente applicato a deter-

minare con precisione il tempo speso da un corpo nel discendere per un arco di circolo; e in grazia della celebrità dell'errore Galileano ho creduto che la cosa possa meritare qualche serata di attenzione per parte di alcun che sia del mestiere. Io vi ho posto la mia; ed ecco cosa sono stati i miei risultati.

3. Il Problema dunque che si deve sciogliere è questo: Determinare il tempo che impiega un grave nel discendere, partendosi dalla quiete, per un canale FA, che sia un arco di cerchio di raggio BA (Fig. 1.).

Suppongo, che in F si cominci il moto, e che sia arrivato il grave in M colla velocità u. Guidate le due ordinate ortogonali coll' asse BA, e infinitamente prossime MP, QT, tiro QN parallela ad AB e il raggio BM. Stabilisco quindi che sia MI la gravità acceleratrice del corpo in direzione parallela al raggio verticale, e da I conduco sulla tangente MQL la normale IL, e compio il rettangolo DL. Perchè gli angoli BMQ, NMI son retti, detratto il comune NMQ, sono eguali gli angoli BMP, IML; onde riescon simili i triangoli BMP, ILM, e perciò sarà $BM:MP::IM:ML$; e di più $BM:BP::IM:MD$. Ora, per la legge della risoluzione delle forze, in vece della gravità MI posso sostituire le due forze laterali MD, ML, che sono a quella equivalenti, delle quali la MD, siccome normale al canale, contr'esso si esercita, ed applicata alla massa del corpo riducesi ad una pura pressione; l'altra ML è la forza libera che accelera il grave per la curva.

4. Chiamo $MI=f$, $AB=a$, AE altezza della caduta $=b$; $AP=x$, $PT=-dx$, ed è $PM=\sqrt{2ax-x^2}$. Avremo pertanto la forza del grave contro il canale da questa analogia $a:a-x::f:\frac{f(a-x)}{a}$, che è nulla in O principio del quadrante circolare, ove da questo punto cominciasse il moto, e diventa uguale alla gravità acceleratrice, quando arriva il corpo nel punto A.

5. La forza libera per la tangente si ottiene coll'analogia $a:\sqrt{2ax-x^2}::f:ML=\frac{f\sqrt{2ax-x^2}}{a}$. Ora, chiamato

dt il tempuscolo per l'archetto MQ, poichè le formole delle forze libere sono $Fds = udu$, $Fdt = du$, introducendo in vece di F la forza $f\frac{\sqrt{2ax - x^2}}{a}$, e in vece di ds, che nel nostro caso è MQ, l'espressione dell'archetto minimo $\frac{-adx}{\sqrt{2ax - x^2}}$, il quale si prende negativamente, perchè nel discendere che fa il corpo, cala l'arco AM, e cala l'ascissa AP, avremo $-fdx = udu$; $\frac{f\sqrt{2ax - x^2}}{a} . dt = du$. Colla integrazione della prima formola si ottiene $2f(b-x) = u^2$, così portando la condizione, che sia nulla la velocità, quando $x = b$; onde si trae $u = \sqrt{2f}\sqrt{b-x}$; perchè poi $du = -\frac{fdx}{u}$ sarà parimente $du = \frac{-fdx}{\sqrt{2f}\sqrt{b-x}}$, e quindi $\frac{f\sqrt{2ax - x^2}}{a} . dt = -\frac{fdx}{\sqrt{2f}\sqrt{b-x}}$; e colle riduzioni $\frac{dt\sqrt{2f}}{a} = \frac{-dx}{\sqrt{x}\sqrt{2a-x}\sqrt{b-x}}$; formola che si deve condurre ad integrazione.

6. Per integrar questa formola faccio $x = \frac{z^2}{b}$, e mi risulta $-dx = -\frac{2zdz}{b}$, $\sqrt{x} = \frac{z}{\sqrt{b}}$, $\sqrt{2a-x} = \frac{\sqrt{2ab-z^2}}{\sqrt{b}}$; $\sqrt{b-x} = \frac{\sqrt{b^2-z^2}}{\sqrt{b}}$; e quindi colle sostituzioni nasce

$$\frac{-dx}{\sqrt{x}\sqrt{2a-x}\sqrt{b-x}} = \frac{-2dz\sqrt{b}}{\sqrt{2ab-z^2}\sqrt{b^2-z^2}}.$$

Questa la spezzo in due, cosicchè la prima abbia il solo denominatore $\sqrt{2ab-z^2}$, la seconda l'altro denominatore $\sqrt{b^2-z^2}$ ed ho con equivalenza;

$$-\frac{2dz\sqrt{b}}{\sqrt{2ab-z^2}\sqrt{b^2-z^2}} = \frac{2dz\sqrt{b^2-z^2}}{(2a-b)\sqrt{b}\sqrt{2ab-z^2}}$$

$-\frac{2dz\sqrt{2ab-z^2}}{(2a-b)\sqrt{b}\sqrt{b^2-z^2}}$. Onde $\frac{dt\sqrt{2f}}{a}=\frac{2}{(2a-b)\sqrt{b}}$ $\left(\frac{dz\sqrt{b^2-z^2}}{\sqrt{2ab-z^2}}-\frac{dz\sqrt{2ab-z^2}}{\sqrt{b^2-z^2}}\right)$, ossia $\frac{dt\sqrt{2fb(2a-b)}}{2a}$

$$=(A)\ \frac{dz\sqrt{b^2-z^2}}{\sqrt{2ab-z^2}}\ (B)-\frac{dz\sqrt{2ab-z^2}}{\sqrt{b^2-z^2}}.$$

7, Integriamo ora la prima formola (A), che bisogna innanzi a tutto trasformare in un'altra per trarne quell' algebraico che può contenere. A questo fine faccio $\frac{r}{b}=$ $=\frac{\sqrt{2ab-z^2}}{\sqrt{b^2-z^2}}$; e sarà quadrando, $\frac{r^2}{b^2}=\frac{2ab-z^2}{b^2-z^2}$ ovvero $b^2r^2-z^2r^2=2ab^3-b^2z^2$, che ci somministra $z=\frac{b\sqrt{2ab-r^2}}{\sqrt{b^2-r^2}}$. Differenziando poi la precedente equazione, abbiamo $2b^2rdr-2zrD.zr=-2b^2zdz$; e dividendo per $2zr$; $\frac{b^2dr}{z}-D.zr=-\frac{b^2dz}{r}$, o equivalentemente

$$\frac{bdr\sqrt{b^2-r^2}}{\sqrt{2ab-r^2}}-D.zr=-\frac{bdz\sqrt{b^2-z^2}}{\sqrt{2ab-z^2}},\ \text{cioè}$$

$$\frac{dz\sqrt{b^2-z^2}}{\sqrt{2ab-z^2}}=D.\frac{zr}{b}-\frac{dr\sqrt{b^2-r^2}}{\sqrt{2ab-r^2}}.\ \text{Dunque}$$

integrando; $\int\frac{dz\sqrt{b^2-z^2}}{\sqrt{2ab-z^2}}=\frac{zr}{b}-\int\frac{dr\sqrt{b^2-r^2}}{\sqrt{2ab-r^2}}=$

$$\frac{z\sqrt{2ab-z^2}}{\sqrt{b^2-z^2}}-\int\frac{dr\sqrt{b^2-r^2}}{\sqrt{2ab-r^2}}.$$

8. La teoria delle Sezioni Coniche ci ricordi ora, che nell'iperbola chiamato c il primo semiasse, e il secondo, r l'ascissa dal centro nel primo, l'espressione del minimo archet-

to iperbolico, che denomino ds, è $ds =$

$$\frac{dr\sqrt{\frac{(c^2+e^2)}{c^2}r^2 - c^2}}{\sqrt{r^2 - c^2}};$$

Sicchè moltiplicando per $\frac{c}{\sqrt{c^2+e^2}}$, e cambiando i segni sotto le radici nell' omogeneo di comparazione, si avrà $\frac{cds}{\sqrt{c^2+e^2}} = \frac{dr\sqrt{\frac{c^4}{c^2+e^2} - r^2}}{\sqrt{c^2-r^2}}$. Confrontiamo pertanto con questa la formola $\frac{dr\sqrt{b^2 - r^2}}{\sqrt{2ab - r^2}}$, e la ridurremo identica, se farem $c^2 = 2ab$; $\frac{c^4}{c^2+e^2} = b^2$, onde trarremo $c = \sqrt{2ab}$; $f = \sqrt{4a^2 - 2ab}$; $\frac{c}{\sqrt{c^2+e^2}} = \frac{\sqrt{2ab}}{2a}$; e concluderemo, integrando, essere $\int \frac{dr\sqrt{b^2 - r^2}}{\sqrt{2ab - r^2}} = \frac{\sqrt{2ab}}{2a}$ (Arc. ip°: di

sem. 1°. $\sqrt{2ab}$
sem. 2°. $\sqrt{4a^2 - 2ab}$ ascissa dal centro nel 1° r); e

sostituendo il valore di r, e ritornando alla formola (A);

$$\text{(A)} \int \frac{dz\sqrt{b^2 - z^2}}{\sqrt{2ab - z^2}} = \frac{z\sqrt{2ab - z^2}}{\sqrt{b^2 - z^2}} - \frac{\sqrt{2ab}}{2a}$$

(Arc. ip°. di 1°. sem. $\sqrt{2ab}$
2°. sem. $\sqrt{4a^2 - 2ab}$ ascissa centrale

nel 1°. $\frac{b\sqrt{2ab - z^2}}{\sqrt{b^2 - z^2}}$); ove si noti, che osservasi in questa ascissa la condizione necessaria, che sia sempre maggiore del 1°. semiasse, come esige la natura dell' iperbola, qualunque valore diasi a z. Quest' integrale, cui non abbiamo aggiunta alcuna coſtante, è tale, che fatto $z=o$, tutto va a zero, perchè l'arco iperbolico in tale ipoteſi diventa arco d'un'aſciſſa eguale al 1°. ſemiaſſe, che lo fa appunto eſſer nullo.

9. Si paſſi adeſſo alla integrazione dell' altra formola $(B)\ \frac{dz\sqrt{2ab-z^2}}{\sqrt{b^2-z^2}}$. Colle teoríe coniche avendoſi il differenziale ds dell'arco ellittico di 1° ſemiaſſe c di 2° e, e di aſciſſa centrale nel 1° aſſe z così eſpreſſo

$$ds = dz\,\frac{\sqrt{c^2-\frac{(c^2-e^2)z^2}{c^2}}}{\sqrt{c^2-z^2}}$$

, fatta la moltiplicazione per $\frac{c}{\sqrt{c^2-e^2}}$, ſarà $\frac{cds}{\sqrt{c^2-e^2}} = \frac{dz\sqrt{\left(\frac{c^4}{c^2-e^2}-z^2\right)}}{\sqrt{c^2-z^2}}$, che renderemo identica colla formola $(B)\ \frac{dz\sqrt{2ab-z^2}}{\sqrt{b^2-z^2}}$. Perciò ſarà $c^2=b^2$, $\frac{c^4}{c^2-e^2}=2ab$; e quindi $c=b$, $e=$

$$\frac{b\sqrt{2a-b}}{\sqrt{2a}} = \frac{b\sqrt{4a^2-2ab}}{2a}\ ;\quad \frac{c}{\sqrt{c^2-e^2}} = \frac{\sqrt{2ab}}{b}\ ;$$

e finalmente $\int (B)\ \frac{dz\sqrt{2ab-z^2}}{\sqrt{b^2-z^2}} = \frac{\sqrt{2ab}}{b}$ (Arc. ellit. di 1°. ſem. b

2°. ſem. $b\,\frac{\sqrt{4a^2-2ab}}{2a}$

aſciſſa centrale nel 1°. z); arco che ſvaniſce, quando $z=o$. Laonde riaſſumendo la formola differenziale del tempo del § 6, e ſalendo al ſuo integrale, ſi ha

$$\frac{t(2a-b)\sqrt{2fb}}{2a} = \frac{z\sqrt{2ab-z^2}}{\sqrt{b^2-z^2}} - \frac{\sqrt{2ab}}{2a}\ (\text{Arc. ip.}$$

di 1°. sem. $\sqrt{2ab}$
2°. sem. $\sqrt{4a^2 - 2ab}$ ascissa centrale nel 1°. $\left.\frac{b\sqrt{2ab - z^2}}{\sqrt{b^2 - z^2}}\right)$

$-\frac{\sqrt{2ab}}{b}$ (Arc. ellit. di 1°. sem. b , ascissa dal
2°. sem. $b\,\frac{\sqrt{4a^2 - 2ab}}{2a}$

centro nel 1°. asse z); e rimesso il valore di z dato per x

$$\frac{t(2a - b)\sqrt{2fb}}{2a} = \frac{\sqrt{bx}\sqrt{2ab - bx}}{\sqrt{b^2 - bx}} - \frac{\sqrt{2ab}}{2a}$$

(Arc. ip. di 1°. sem. $\sqrt{2ab}$
2°. sem. $\sqrt{4a^2 - 2ab}$, ascissa centrale nel 1°. $\left.\frac{b\sqrt{2ab - bx}}{\sqrt{b^2 - bx}}\right) - \frac{\sqrt{2ab}}{b}$ (Arc. ellit.
di 1°. sem. b , asc. cent. nel 1°. $\sqrt{bx}$), che col-
2°. sem. $b\frac{\sqrt{4a^2 - 2ab}}{2a}$

le riduzioni si cangia nella seguente;

$$(C)\ t = \frac{a\sqrt{4ax - 2x^2}}{(2a - b)\sqrt{fb - fx}} - \frac{a}{(2a - b)\sqrt{fa}}$$ (Arc. ip.
di 1°. sem. $\sqrt{2ab}$
2°. sem. $\sqrt{4a^2 - 2ab}$, asc. cent. nel 1°. $\frac{b\sqrt{2ab - bx}}{\sqrt{b^2 - bx}}$

$- \frac{2a^2}{b(2a - b)\sqrt{fa}}$ (Arc. ellit. di 1°. sem. b
2°. sem. $b\frac{\sqrt{4a^2 - 2ab}}{2a}$,
asc. cent. nel 1°. $\sqrt{bx}$.) + C; essendo C la costante che va aggiunta per rendere l'integrale completo.

10. A determinare questa costante C, rifletteremo, che il tempo è nullo, quando $x = b$, perchè allora comincia la discesa del grave. Ora in tal caso l'arco ellittico dell'integrazione si fa arco di ascissa centrale $= b$, cioè di ascissa eguale al 1°. semiasse, e in conseguenza l'arco diventa il quadrante della ellisse. Rispetto dunque all'arco ellittico,

ove $\mathfrak{Q}.E$ ſimboleggi il quadrante ellittico, la parziale integrazione completa ſarà $\mathfrak{Q}.E.$ — Arc. ellit. ecc.

11. Reſta a vedere, coſa diventano gli altri due termini dell' integrazione, quando $x=b$. Poichè la parte algebraica ha il denominatore $\sqrt{(fb-fx)}$, annullandoſi queſto, ſarà il valore della frazione algebraica una quantità infinita. Ma infinito eziandio riſulta l'arco iperbolico, mentre in tal caſo la corriſpondente aſciſſa $\frac{b\sqrt{2ab-bx}}{\sqrt{b^2-bx}}$ ſi fa infinita. Eſſendo dunque nella equazione (C) queſti due termini di ſegno diverſo, equivaleranno eſſi alla differenza di due quantità infinite; e potendo cotal differenza eſſer finita, biſognerà cercarne il valore.

12. I due primi termini del 2°. membro nella equazione ſuddetta ſi preſentino in queſta maniera;

$$\frac{\sqrt{a}}{(2a-b)\sqrt{f}}\left(\frac{\sqrt{a}\sqrt{4ax-2x^2}}{\sqrt{b-x}} - \text{Arch. ip. di } \begin{matrix}\text{1°. ſem. } \sqrt{(2ab} \\ \text{2°. ſem. } \sqrt{(4a^2-2ab}\text{, aſc. cen. } b\end{matrix}\frac{\sqrt{2ab-bx}}{\sqrt{(b^2-bx}}\right).$$

Poſto $x=b$, ſi ſa $\frac{\sqrt{a}\sqrt{4ax-x^2}}{\sqrt{b-x}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{4ab-b^2}}{\sqrt{b-x}}$, ove ſi deve intendere, che anche nel denominatore ſia $x=b$; e l'aſciſſa $\frac{b\sqrt{2ab-bx}}{\sqrt{b^2-bx}} = \frac{\sqrt{b}\sqrt{2ab-b^2}}{\sqrt{b-x}}$, eſſendo qui pure $x=b$. Ora, ſe abbiamo l' iperbola AM (Fig. 2) dei ſemiaſſi $CA=\sqrt{2ab}$, $AB=\sqrt{4a^2-2ab}$, e immaginiamo preſa dal centro l'aſciſſa infinita CP e condotta la corriſpondente ordinata infinita PM, perchè il punto M della curva coincide con un punto dell' aſſintoto infinito CBM, ſaran ſimili i due triangoli CAB, CPM, e avremo $CA : CB :: CP : CM$, ovvero perchè $CP = \frac{\sqrt{b}\sqrt{2ab-b^2}}{\sqrt{b-x}}$, e CB

$= \sqrt{CA^2 + AB^2} = \sqrt{2ab + 4a^2 - 2ab} = 2a$; $\sqrt{2ab} : 2a :: \dfrac{\sqrt{b}\sqrt{2ab - b^2}}{\sqrt{b-x}} : \dfrac{\sqrt{a}\sqrt{4ab - 2b^2}}{\sqrt{b-x}}$

Dunque l'intero assintoto $CM = \dfrac{\sqrt{a}\sqrt{4ab - 2b^2}}{\sqrt{b-x}}$, che è espressione identica con quella della parte algebraica della nostra integrazione nel caso di $x = b$. Dunque in questa ipotesi la differenza delle due quantità $\dfrac{\sqrt{a}\sqrt{4ax - x^2}}{\sqrt{b-x}}$ — arc . iperb . ecc. diventa le differenza tra l'infinito assintoto, e l'arco infinito della iperbola, che ha i due semiassi sopra notati. Fatta pertanto questa differenza $= \triangle$, e nella equazione (C) separato il comun fattore de' termini $\dfrac{\sqrt{a}}{(2a-b)\sqrt{f}}$, sarà la completa integrazione del tempo;

$$t = \frac{\sqrt{a}}{(2a - b\sqrt{f}} \left(- \triangle + \frac{\sqrt{a}\sqrt{4ax - 2x - 2x^2}}{\sqrt{b-x}} \right.$$

$$- \text{Arc . ip}^{e}\text{. di } \begin{matrix} 1^{\circ}\text{. sem. } \sqrt{2ab} \\ 2^{\circ}\text{. sem. } \sqrt{4a^2 - 2ab} \end{matrix}, \text{asc . cent. } \frac{b\sqrt{2ab - bx}}{\sqrt{b^2 - bx}}$$

$$+ \frac{2a\,\mathfrak{Q}.E}{b} - \frac{2a}{b} \text{ Arc. . Ellit . di } \begin{matrix} 1^{\circ}\text{. sem . } b \\ 2^{\circ}\text{. sem . } \dfrac{b\sqrt{4a^2 - 2ab}}{2a} \end{matrix},$$

$$\left. \text{asc . cent . } \sqrt{bx} \right)$$

13. Da questo tempo per gli archi variabili passiamo alla misura del tempo impiegato dal grave sino al più basso punto della discesa, che corrisponde all' ipotesi di $x = o$. In questo caso la parte algebraica si annulla, l' arco iperbolico, che le tien dietro, si cangia in un altro di ascissa centrale $\dfrac{b\sqrt{2ab}}{b} = \sqrt{2ab}$, cioè in un arco di ascissa eguale al

1°. ſemiaſſe, vale a dire in un arco nullo, e così accade all' arco ellittico, perchè la ſua aſciſſa $\sqrt{bx}$ dal centro ſi fa nulla. Chiamato quindi T il tempo intero della caduta, verrà l' equazione $T = \frac{\sqrt{a}}{(2a-b)\sqrt{f}}$

$$\left(-\Delta + \frac{2aQ}{b} . E\right)$$, con che reſta ſciolto il Problema.

14. Non devo però ommettere, che affine di trar qualche utilità dalle anzidette formole dei valori del tempo, fa d'uopo poter eſprimere con quantità algebraiche, almen per via di ſerie convergenti, gli archi ellittici ed iperbolici, e così pure la differenza Δ. A ciò però ho io provveduto baſtantemente nel 2°. Tomo della noſtra Società, ove eſibiſco alcune ſerie ſempre convergenti, che ſervono a far conoſcere ſiffatti valori, dalle quali traſcelgo ora le due che appartengono al quadrante ellittico e alla differenza Δ, per addattarle al valor del tempo dell' intera caduta nel noſtro problema. In quel mio opuſcolo, eſſendo m il 1°. ſemiaſſe, n la diſtanza del centro dalla direttrice nell' iperbola, e la ſemicirconferenza circolare di raggio 1, trovo

$$\Delta = \frac{n\omega}{4} + \frac{n\omega}{2}\left(\frac{1^2 . n^2}{2^2 . 4m^2} + \frac{1^2 . 3^2 . n^4}{2^2 . 4^2 . 6m^4} + \frac{1^2 . 3^2 . 5^2 n^6}{2^2 . 4^2 . 6^2 . 8m^6} + \frac{1^2 . 3^2 . 5^2 . 7^2 n^8}{2^2 . 4^2 . 6^2 . 8^2 . 10\, m^8} \text{ ecc.}\right);$$

e ſiccome n nella iperbola è ſempre minore di m, reſta chiara la convergenza di queſta ſerie. Ora le determinazioni poſte ci danno per 2°. ſemiaſſe dell'iperbola la formola $\frac{m}{n}\sqrt{m^2-n^2}$. Fatto quindi il confronto coi ſimboli del problema, avremo

$$m = \sqrt{2ab}\,;\ \frac{m}{n}\sqrt{m^2-n^2} = \sqrt{4a^2-2ab}\,,$$

onde ſi trae $n = b$; e però ſarà il noſtro

$$\Delta = \frac{b\omega}{4} + \frac{b\omega}{2}\left(\frac{1^2 . b}{2^2 . 4 . 2a} + \frac{1^2 . 3^2 b^2}{2^2 . 4^2 . 6^2 . 2^2 a^2} + \frac{1^2 . 3^2 . 5^2 . b^3}{2^2 . 4^2 . 6^2 . 8 . 2^3 a^3} + \frac{1^2 . 3^2 . 5^2 . 7^2 b^4}{2^2 . 4^2 . 6^2 . 8^2 . 10 . 2^4 a^4} \text{ ecc.}\right)$$

15. La serie esprimente il valore del quadrante ellittico, significando qui pure m il 1°. semiasse, n la distanza del centro dalla direttrice, si trova essere nel citato opuscolo la seguente;

$$\mathfrak{Q}.E = \frac{m\phi}{2} - \frac{m\phi}{2}\left(\frac{1.m^2}{2^2 n^2} + \frac{1^2.3m^4}{2^2.4^2 n^4} + \frac{1^2.3^2.5m^6}{2^2.4^2.6^2 n^6} + \frac{1^2.3^2.5^2.7m^8}{2^2.4^2.6^2.8^2 n^8} \text{ ecc.}\right)$$

Risultando pertanto il 2° semiasse della elisse $= \frac{m}{n}\sqrt{n^2-m^2}$ perchè questa sia la ellisse del nostro problema, bisogna che sia $m = b$; $\frac{m}{n}\sqrt{n^2-m^2} = \frac{b\sqrt{4a^2-2ab}}{2a}$, che fa essere $n = \sqrt{2ab}$, onde colle sostituzioni avremo

$$\mathfrak{Q}.E \; \frac{b\phi}{2} - \frac{b\phi}{2}\left(\frac{1.b}{2^2.2a} + \frac{1^2.3b^2}{2^2.4^2.2^2a^2} + \frac{1^2.3^2.5b^3}{2^2.4^2.6^2.2^3a^3} \text{ ecc.}\right);$$

$$\frac{2a.\mathfrak{Q}.E}{b} = a\phi - a\phi\left(\frac{1.b}{2^2.2a} + \frac{1^2.3b^2}{2^2.4^2.2^2a^2} + \frac{1^2.3^2 5\,b^3}{2^2.4^2.6^2.2^3a^3} + \frac{1^2.3^2.5^2.7b^4}{2^2.4^2.6^2.8^2.2^4a^4} \text{ ecc.}\right).$$

Ma $T = \frac{\sqrt{a}}{(2a-b)\sqrt{f}}\left(-\Delta + \frac{2a.\mathfrak{Q}.E}{b}\right)$. Dunque sarà T eguale a un moltiplo della differenza delle due serie, che rappresentano i valori di $\frac{2a.\mathfrak{Q}.E}{b}$, e di Δ; le quali colla riduzione di esse ad una sola serie ci somministrano finalmente

$$(D)\; T = \frac{\phi\sqrt{a}}{(2a-b)\sqrt{f}}\left(a - \left(\frac{3b}{2^2.2a^0} + \frac{7.1^2b^2}{2^2.4^2\,2^2a^2}\right.\right.$$

$$+\frac{11 \cdot 1^2 \cdot 3^2 b^3}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 2^3 a^2}+\frac{15 \cdot 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 b^4}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 2^4 a^3}$$
$$+\frac{19 \cdot 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 b^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 2^5 a^4} \text{ ecc. ſino all' infinito } \Big)\Big).$$

progredendo la ſerie colla legge, che ſi fa manifeſta.

16. Avverto così alla sfuggita, che eſſendo le formole poſte al §. 5. proporzionalità e non vere equazioni, mancano di preciſione fiſica anche i valori de' tempi, che abbiamo notati. Ma ſuppoſta δ l'altezza della libera diſceſa d'un grave in un dato tempo θ, la eguale, ove θ ſia un minuto ſecondo, è di piedi parigini 15.096 proſſimamente, ſi rimedia col cangiare le ſuddette ſormole in queſt' altre; $2\delta F ds = u du$; $2\delta F dt = \theta du$, le quali importano una vera egua-glianza, come è già noto. Da ciò deriva, che in vece di t, T, biſogna ſoſtituire $\frac{\sqrt{2\delta} \cdot t}{\theta}$, $\frac{\sqrt{2\delta} \cdot T}{\theta}$; onde il vero tempo dell' intera diſceſa, chiamata S tutta la ſerie, verrà così eſpreſſo $T = \frac{\theta \phi \sqrt{a} \cdot S}{(2a-b)\sqrt{2\delta f}}$, ovvero ponendo θ un minuto ſecondo, che fa eſſere $\delta = 15.096$ piedi parigini, e di più ſuppoſta 1 la gravità acceleratrice f; $T = \frac{\phi \sqrt{a} \cdot S}{(2a-b)\sqrt{30.192}}$

Sia per eſempio, $b = a = 1$, cioè ſi faccia la diſceſa per un intero quadrante di circolo di raggio 1; fatto il calcolo numerico, ſi troverà eſſere $T = 0.337$, proſſimamente; il che vuol dire, che un pendulo ſemplice lungo un piede compirebbe ſenſibilmente cadendo dall' altezza del quadrante tre intere oſcillazioni in due minuti ſecondi. La noſtra ſerie del tempo dell' intera caduta ci ſarà pur utile, quando il vogliamo, alla ſoluzione di queſt' altro problema: dato un pendolo di conveniente lunghezza, determinare l' altezza dell' arco, oſſia i gradi dell' arco di diſceſa, perchè il pendolo faccia la ſua intera oſcillazione in un minuto ſecondo, il che può ſervire per l' eſattezza degli orologj a pendolo che battano i ſecondi; e a queſto fine biſognerà far uſo del metodo del regreſſo delle ſerie, o, ſe ſi trova più comodo, di quello delle falſe poſizioni.

17. Ritorno ora alla equazione (D), e ſuppongo che b diventi infinitamente piccolo, cioè che l' arco, per cui il grave diſcende, ſia minore di qualunque dato. Si fa evidente, che in tale ipoteſi tutti i termini della ſerie ſon nulli riſpettivamente al 1°. termine a, che ſolo rimane, onde avremo $T = \frac{\phi \sqrt{a} \cdot a}{2a\sqrt{f}}$, ovvero $T = \frac{\phi \sqrt{a}}{2\sqrt{f}}$.

Trarremo queſta ſteſſa verità dall'altra equazione

$$T = \frac{\sqrt{a}}{(2a-b)\sqrt{f}} \left(-\Delta + \frac{2a \mathfrak{Q} \cdot E}{b}\right)$$ modificata al preſente caſo. Imperciocchè l' iperbola, la quale ha per ſemiaſſe primo $\sqrt{2ab}$, e per ſecondo $\sqrt{4a^2 - 2ab}$, ove b ſia infinitamente piccolo, ſi cangia in un' iperbola di ſemiaſſe $2^\circ = 2a$, e di ſemiaſſe 1°. infiniteſimo. Ma allora la curva ſi confonde coll' aſſintoto, che reſta collocato in direzione perpendicolare alla linea delle aſciſſe. Dunque è nulla la differenza tra l' arco iperbolico infinito e l' aſſintoto, e conſeguentemente $\Delta = o$. In queſta ſteſſa ſuppoſizione, avendo il quadrante ellittico $\mathfrak{Q} . E$ i due ſemiaſſi b, $\frac{b\sqrt{4a^2 - 2ab}}{2a}$, diventano tutti e due lo ſteſſo b, e però il quadrante ellittico ſi muta in quadrante circolare di raggio b, e riſulta $\frac{2a \mathfrak{Q} . E}{b} = \frac{2a \mathfrak{Q} . \text{circ. di raggio } b}{b}$. Ma qualunque quadrante circolare diviſo pel ſuo raggio, coſtituiſce un quoto, che è una quantità coſtante, o grande, o piccolo ſia queſto raggio. Dunque, chiamata ϕ la ſemicirconferenza circolare di raggio 1, ſarà $\frac{\phi}{2 . 1} = \frac{\mathfrak{Q} . \text{circ.}}{b}$, e quindi $\frac{2a \mathfrak{Q} . \text{circ.}}{b} = a\phi$, onde avrem $T = \frac{\sqrt{a}}{2a\sqrt{f}} . a\phi = \frac{\phi \sqrt{a}}{2\sqrt{f}}$, e queſta concluſione dimoſtra l' iſocroniſmo negli archi minimi di cerchio, che aſ-

ſumono la proprietà cicloidale; la qual coſa però non ſi verifica negli archi finiti, come malamente ſupponeva il *Galileo*.

18. Da ultimo, non perchè non ſia notiſſimo, ma perchè lo richiede l' opportunità dell' argomento, penſo che non debba riuſcir diſcaro, che io replichi qui la dimoſtrazione dell' iſocroniſmo non ſol proprio, ma anche comparato in due pendoli di eguale lunghezza, un circolare per gli archi minimi, e l' altro cicloidale per qualunque arco; con che darem fine alla noſtra piccola Diſſertazione. La teoria delle evolute c' inſegna, che il pendolo cicloidale debb' eſſere tanto lungo, quanta è la lunghezza del raggio d' oſculo, che dall' imo punto della cicloide va all' evoluta, il qual raggio d' oſculo ſi ſa eſſere duplo del diametro del circolo genitore. Sia dunque la cicloide AD (Fig. 3) generata dal circolo BNA, che deve avere il raggio $AC = \frac{a}{4}$, affinchè il circolare di raggio a, e il cicloidale abbiano la medeſima lunghezza. Stabiliſco, che partendoſi da F il grave ſia arrivato in M, e ſia, come nel pendolo circolare $AE = b$. Pongo $AP = x$, cui corriſponde l' ordinata al circolo $PN = \frac{ax}{2} - x^2$ e l' ordinata alla cicloide, PM, cui è infinitamente proſſima la QR. La verticale $MI = f$, rappreſenti la gravità acceleratrice del corpo, e da I ſi conduca la IL a ſquadra colla tangente ML della curva, poi ſi tiri la corda $AN = \sqrt{\frac{ax}{2}}$. Perchè AN è parallela alla tangente ML, ſaranno ſimili i due triangoli rettangoli NAP, MIL, e verrà l' analogia $\sqrt{\frac{ax}{2}} : x :: f : ML = \frac{fx\sqrt{2}}{\sqrt{ax}} = \frac{f\sqrt{2x}}{\sqrt{a}}$; che ſarà la forza libera accelerante il grave per la curva. Prodotta poi la QR finchè tagli la MT in S, perchè la taglia anche ad angolo retto, ſimili abbiamo i triangoli MRS, IML, e però $IM : ML :: MR : MS$, che dà $IM . MS = ML . MR$. Ma, poſta la velocità in $M = u$, per le formole delle forze libere, ſarà $ML . MR = MI . MS = udu$, oſſia, poichè nella diſceſa del pen-

dolo cala l'ascissa AP; $f(-dx)=udu$. Dunque integrando in modo che riesca nulla la velocità, quando $x=b$; $f(b-x)=\frac{u^2}{2}$, e $u=\sqrt{2f}\sqrt{b-x}$. Per l'altra legge de' movimenti liberi, essendo $ML.dt=du$, colla sostituzione del valore di ML, nascerà $\frac{f\sqrt{2x}}{\sqrt{a}}dt=du$, e perchè

$$du=-\frac{fdx}{u}=-\frac{fdx}{\sqrt{2f}\sqrt{b-x}},\ \text{avremo}\ \frac{f\sqrt{2x}}{\sqrt{a}}.dt$$

$$=-\frac{fdx}{\sqrt{2f}.\sqrt{b-x}},\ \text{e dopo le riduzioni},$$

$$dt=\frac{\sqrt{a}(-dx)}{2\sqrt{f}\ \sqrt{bx-x^2}}=\frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{f}}\frac{(-bdx:2)}{\sqrt{bx-x^2}}.\ \text{Quindi}$$

integrando $t=\frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{f}}$ (C — arco di rag. $\frac{b}{2}$ e di seno verso x)

La determinazione della costante C si ha col riflettere, che dev' esser nullo il tempo, quando $x=b$. Ma allora l' arco diventa la semicirconferenza di raggio $\frac{b}{2}$. Dunque, chiamata S questa semicirconferenza, sarà

$$t=\frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{f}}\left(S-\text{arco di rag. }\frac{b}{2},\ \text{seno verso } x\right).$$

Ora per avere il tempo dell'intera caduta bisogna fare $x=0$, che fa svanire il seno verso x, e l'arco corrispondente. Perciò, significando T il tempo della discesa totale, sarà

$$T=\frac{\sqrt{a}.S}{b\sqrt{f}}.$$ Se ϕ è la semicirconferenza d'un cerchio di raggio 1, sta $1:\phi::\frac{b}{2}:S$. Dunque $S=\frac{b\phi}{2}$, e

quindi $T = \frac{\Phi\sqrt{a}}{2\sqrt{f}}$. In questa formola non entra per niente l'altezza b della discesa. Dunque il valor del tempo è affatto da essa indipendente, e riman lo stesso qualunque sia l'arco di caduta del pendolo; ed ecco l'isocronismo proprio del pendolo cicloidale. Questo valor di tempo è affatto identico con quello degli archi minimi nel pendolo circolare egualmente lungo: ed ecco valere ancora ne' due pendoli l'isocronismo comparato.

Fig. 1.

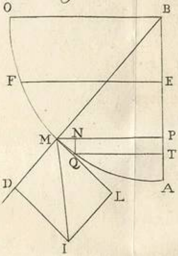

Fig. 2.

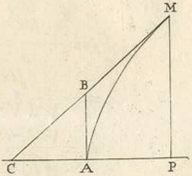

Fig. 3.