CALCOLO

DELLE VARIAZIONI FINITE NELLA TRIGONOMETRIA PIANA E SFERICA

Del Sig. Cavaliere Lorgna.

Ruggero *Cotes*, ingegno singolare, è il primo che su le variazioni trigonometriche abbia versato in un Opuscolo che ha per titolo *Æstimatio errorum in mixta mathesi*, *&c.* nel suo libro de *Harmonia Mensurarum*. Altri in appresso, diffondendone l'uso, ne fecero più ampia trattazione, disponendole in forma di proporzioni, onde presero comunemente il titolo di Analogie differenziali. Ma queste variazioni si suppongono da *Cotes*, e da tutti gli altri infinitamente piccole, e come tali si maneggiano nel ridurre e conformare le analogie. E per verità se si trattasse di ritorno da queste analogie differenziali a grandezze finite, come dai differenziali si passa alle integrazioni, tutto il rigore geometrico potrebbe in questo calcolo, come nell' infinitesimale, aver luogo indubitatamente. Ma le grandezze finite che si determinano con queste analogie differenziali provengono dall' attribuire ne' termini alle variazioni infinitamente piccole valori finiti; il che non può mai somministrare valori esatti, se non abbiasi riguardo alle grandezze svanite nella prima supposizione. Con miglior consiglio pertanto prese a considerare prima di ogni altro queste Variazioni nella loro condizione finita, vera e naturale, il dottissimo Sig. *Cagnoli*, e nè trattò metodicamente nella sua eccellente e lodevolissima Opera di Trigonometria piana e sferica: del che se gli deve grandissima obbligazione. Ma siccome una stessa proporzione involge talora nel primo membro la variazione incognita di una grandezza, e nel secondo lo stato variato di questa medesima grandezza, e talora vi compariscono implicate, singolarmente nella Trigonometria sferica, tre diverse variazioni, così avviene, che non sia permesso con metodo semplice e rigoroso di separare, e definire le variazioni dimandate. Se ciò non accadesse sarebbe questo il miglior trattato che possa desiderarsi in sì fatta importantissima materia. Pensò di rimediarvi il Sig. *Camerer* di Parigi, almeno nella Trigonometria Piana, s'era possibile, ed ha perciò proposto due cangiamenti per queste analogie differenziali finite (Giorn. Astronom. del Sig. *Bode* Berlino 1793) I.° Ha mutato in positivi li differenziali negativi implicati nella seconda ragione, affine di procedere senza errore alle trasformazioni analitiche, di cui parleremo or ora: ma come per questi casi il Sig. *Cagnoli* ha avvertito precisamente (§. 282) come si possa operare con sicurezza, cade l'accusa del Sig. *Camerer* su questo punto. II.° Ha ridotto in serie i valori totali d'ogni differenziale, liberando il secondo membro dell' equazione dal differenziale ignoto. Non si deve negar lode a questo espediente; ma è vero altresì che per lo più riuscendo complicato il calcolo delle funzioni assunte dal Sig. *Camerer*, la di lui approssimazione col mezzo di queste serie senza dubbio è più laboriosa che non è quella per via di false posizioni additata dal Sig. *Cagnoli* al §. 281; ma non si deve ricorrere alle approssimazioni in materia che ammette determinazioni esatte. L'occasione ch' ebbi di versare intorno alle variazioni analitiche finite (Mem. della Soc. Italiana T. IV.) mi fece fin da quell' epoca entrare in opinione, che bisognava prendere sott' altro aspetto l'argomento, e trattarlo per altra via, onde avere tutte le variazioni separate ed intere senza approssimazioni. Così ho fatto; ed ecco il metodo che n' è risultato certamente esatto e rigoroso, e facilissimo, se non erro, così nella piana, come nella sferica Trigonometria.

§. I.

Sei, come tutti sanno, sono le parti, di un triangolo. Date tre di queste parti, delle quali una almeno sia un lato del triangolo, si determinano le altre tre. Ma siccome si viene in cognizione di queste tre ad una ad una separatamente, così ciascheduna di esse è sempre espressa da funzione delle tre parti date. La variazione dunque di ciascheduna na di quelle tre parti non altro può essere fuorchè la variazione di questa funzione delle tre parti date. Bisogna pertanto, che per l'estimazione di sì fatte variazioni si dia luogo a opportune relazioni contenenti le parti del Triangolo a quattro a quattro, ove una di esse qualunque possa riguardarsi e trattarsi come funzione dell'altre tre.

Ma dovendo altre di esse variar per sè, ed altre per variazione indotta, ed altre necessariamente restar invariate, si dicano *Varianti* le prime, *Variate* le seconde, e *Costanti* quelle che non variano nè per sè, nè per variazione derivativa.

Quest' idea chiara della cosa fa subito comprendere,

I. Che le *Varianti* non debbono dipendere l'una dall'altra, nè indursi variazione scambievolmente.

II. Che le *Variate* debbono entrare una sola per volta nelle relazioni suddette, che diremo *Relazioni Appropriate*, non essendo luogo ad altre parti *Variate* subito che non è legata la mutazione dell' una con la mutazione dell' altra; e deve ciascheduna separatamente derivare dalla sola mutazione delle *Varianti*.

III. E che perciò ciascheduna delle *Variate* dovrà sempre essere rappresentata o da funzione di una *Variante* e due *Costanti*, o da funzione di due *Varianti* e una *Costante*, o da funzione di tre *Varianti* insieme, secondo che o una sola parte nel Triangolo varierà per sè, o vi dovranno variar due o tre parti simultaneamente.

§. II.

Esposti i principj, sia lecito di premettere all'applicazione che ne faremo alcune necessarie avvertenze.

I. Un angolo che abbia per seno la grandezza z si scriverà *ang. sen.* z, così *ang. cos.* z, *ang. tang.* z &c. sarà un angolo che ha per coseno, per tangente ecc. la grandeza z.

II. L' espressione *cos. ang. sen.* z significherà il coseno di un angolo che ha per seno la grandezza z. Così *tang. ang. sen.* z sarà la tangente di un angolo avente per seno la grandezza z, e così d' altre simili espressioni. E facile da vedere, che la prima equivale alla forma esplicita $\sqrt{(1-z^2)}$, la seconda a questa $\frac{z}{\sqrt{(1-z^2)}}$ &c. Ma essendo nelle Tavole de' seni a fianco del seno z il coseno corrispondente del medesimo angolo, la tangente &c. può essere più comodo nella pratica il contrassegnare così tali linee, che non è il calcolarle di fatto.

III. Con la lettera δ si esprimeranno le variazioni di valore incognito, e con la lettera Δ le variazioni conosciute.

IV. Lo stato variato di z si esprimerà, com' è costume, col simbolo z', e sarà z' lo stesso che $z+\delta z$, oppure $z+\Delta z$, secondo che z sarà una parte *Variata*, oppur *Variante* del Triangolo.

§. III.

TRIGONOMETRIA PIANA

Variazioni indotte dalla variabilità di una parte nell' altre parti del Triangolo.

I.

Variabilità di un lato. Sia ABC (fig. I.) il triangolo, AC (F) il lato *variante*, e CD o CD' la variazione di questo lato. E' manifesto, che due parti restano invariate o *costanti*, cioè il lato AB (G), e l' angolo adjacente BAC (A), e che variano le altre tre parti del triangolo, cioè I. l'angolo ACB (C) II. l' angolo ABC (B) III. il lato BC (H).

I. Per trovare la mutazione indotta nell' angolo variato ACB la relazione *appropriata* (§. I.), in cui non entrino che la variante AC (F), le costanti, e la parte variata ACB (C), è la seguente somministrata dalla Trigonometria $tang.\ C = \frac{G\ sen.\ A}{F - G\ cos.\ A}$. Sarà per tanto $ang.\ C = ang.\ tang.\ \left(\frac{G\ sen.\ A}{F - G\ cos.\ A}\right)$. Per la qual cosa, variando stato da ambe le parti, si avrà $ang.\ C = ang.\ tang.\left(\frac{G\ sen.\ A}{F - G\ cos.\ A}\right)$, cioè

$ang.\ C \mp \delta C = ang.\ tang.\left(\frac{G\ sen.\ A}{F \pm \Delta F - G\ cos.\ A}\right)$, e però

$\mp \delta C = ang.\ tang.\left(\frac{G\ sen.\ A}{F \pm \Delta F - G\ cos.\ A}\right) - ang.\ C$

II. E quanto all' angolo variato ABC, è cosa evidente, attesa la permanenza dell' angolo BAC, che la sua variazione è la stessa dell' altro angolo variato ACB, ma in senso contrario.

III. E quanto finalmente alla variazione del lato $BC(H)$, poichè si ha, come nell' artic. preced., $ang.\ C = ang.\ tang.$ $\left(\frac{G\ sen.\ A}{F - G\ cos.\ A}\right)$, e però $sen.\ C = sen.\ ang.\ tang.\ \left(\frac{G\ sen.\ A}{F - G\ cos.\ A}\right)$ (§. *II.*), la relazione appropriata sarà per le regole trigonometriche

$$H = \frac{G\ sen.\ A}{sen.\ C} = \frac{G\ sen.\ A}{sen.\ ang.\ tang.\left(\frac{G\ sen.\ A}{F - G\ cos.\ A}\right)}$$

Laonde, variando stato e trasponendo, si avrà

$$\pm \delta H = \frac{G\ sen.\ A}{sen.\ ang.\ tang.\ \left(\frac{G\ sen.\ A}{F \pm \Delta F - G\ cos.\ A}\right)} - H;$$

che se si voglia il valore esplicito di δH, si faccia $\frac{G\ sen.\ A}{F - G\ cos.\ A} = x$, sarà per i principi di Trigonometria $sen.\ ang.\ tang\ x = x : \sqrt{(1 + x^2)}$; e però, sostituendo il valore di x, si troverà $\pm \delta H = \sqrt{(G^2 + (F \pm \Delta F)^2 - 2G(F \pm \Delta F)\ cos.\ A)} - H$

II.

Variabilità di un angolo. Sia nel medesimo triangolo B l' angolo *variante*, e la sua variazione sia l' angolo CBD, o CBD'. E' certo, che per questa variazione si mutano i lati I. $AC(F)$ II. $BC(H)$ III. l' angolo $BCA(C)$, restando *costanti* l' angolo $BAC(A)$, e il lato $AB(G)$.

I. Per trovare la variazione del lato *variato* AC, la relazione appropriata, in cui non entrano che le varianti (*ang.* B), le costanti, e il lato variato $AC(F)$, si definirà in questo modo.

Essendo $sen. C : sen. B = G : F$, e $sen. C = sen. (A+B)$, sarà immediatamente $F = \frac{G\, sen. B}{sen. (A+B)}$. Pertanto variando stato, e trasponendo sarà $\pm \delta F = \frac{G\, sen. (B \pm \Delta B)}{sen. (A+B\pm\Delta B)} - F$

II. Quanto alla mutazione dell' altro lato variato $BC(H)$, poichè la trigonometria somministra $sen. C : sen. A = G : H = sen. (A+B) : sen. A$, si avrà $H = \frac{G\, sen. A}{sen. (A+B)}$. Dunque variando stato sarà

$$\pm \delta H = \frac{G\, sen. A}{sen. (A+B+\Delta B)} - H$$

III. La variazione finalmente dell' angolo $BCA(C)$ è la stessa dell' angolo $ABC(B)$, ma in senso contrario, com' è manifesto.

III.

Ma debbano essere per condizione *costanti un lato e l' angolo opposto*. Sia $BAC(A)$ l' angolo costante (fig. II.), il lato costante sia l' opposto $BC(H)$, e sia primamente

Variante un lato, come $AB(G)$. Le parti *variate* saranno I. il lato $AC(F)$ II. l' angolo $BCA(C)$ III. l' angolo $ABC(B)$.

I. Per la variazione del lato AC, essendo per i principj di Trigonometria

$cos. A = \frac{G^2+F^2-H^2}{2GF}$, la relazione appropriata sarà

$F = G\, cos. A \pm \sqrt{(H^2 - G^2\, sen.^2 A)}$.

Dunque variando stato sarà subitamente

$$\delta F = (G+\Delta G)\, cos. A \pm \sqrt{(H^2-(G+\Delta G)^2 sen.^2 A)} - F$$

Nello stesso modo si troverà la variazione del lato G, se fosse il lato F assunto come variante, di questa forma

$$\delta G = (F+\Delta F)\, cos. A \pm \sqrt{(H^2-(F+\Delta F)^2\, sen.^2 A)} - G$$

II. E quanto alla variazione dell' angolo BCA, poichè $\text{sen.}\, C = \frac{G\, \text{sen.}\, A}{H}$, sarà

$\text{ang.}\, C. = \text{ang. sen.} (\frac{G\, \text{sen.}\, A}{H})$. Dunque variando stato si avrà

$\delta C = \text{ang. sen.} (\frac{(G+\Delta G)\, \text{sen} A}{H}) - \text{ang.}\, C$

III. La variazione poi dell' angolo ABC sarà la stessa che abbiamo trovato per l' angolo ACB, ma in senso contrario.

Variante un angolo, come ABC. Le parti variate saranno I. il lato $AC(F)$ II. il lato $AB\,(G)$ III. l' angolo ACB.

I. Per la variazione del lato AC, essendo $F = \frac{H\, \text{sen.} B}{\text{sen.}\, A}$, si avrà col solito metodo $\delta F = \frac{H\, \text{sen.}\, (B+\Delta B) - F\, \text{sen.}\, A}{\text{sen.}\, A}$,

II. E per la variazione del lato AB, essendo $G = \frac{H\, \text{sen.}\, C}{\text{sen.}\, A}$, e $\text{sen.}\, C = \text{sen.}\, (A+B)$, onde $G = \frac{H\, \text{sen.} (A+B)}{\text{sen.}\, A}$, sara $\delta G = \frac{H\, \text{sen.}\, (A+B+\Delta B) - G\, \text{sen.}\, A}{\text{sen.}\, A}$

III. Ed è poi evidente per la variazione dell' angolo C, che $\delta C = -\Delta B$.

IV.

Ma di nuovo debbano essere per condizione *costanti due lati del triangolo*, posta variante un' altra parte qualunque. Sia pertanto *Variante l' angolo* $ABC\,(B)$ (fig. III.), e siano *costanti* i lati $AB\,(G)$, $BC\,(H)$ che lo comprendono. Le parti *variate* saranno I. il lato $AC\,(F)$ divenuto AD II. l' angolo $BAC\,(A)$ III. l' angolo $BCA\,(C)$.

I. Per la variazione del lato AC, essendo $\text{cos.}\, B. = \frac{G^2+H^2-F^2}{2GH}$, la relazione appropriata sarà

$F = \pm\sqrt{(G^2+H^2-2GH\, \text{cos.}\, B)}$

Variando

Variando pertanto stato, e trasponendo, si avrà

$$\delta F = \pm\sqrt{\left(G^2+H^2-2GH\,\text{cos.}(B\mp\Delta B)\right)} - F$$

II. Quanto all'angolo BAC, si consideri, che

$\text{tang.}\ A = \frac{H\,\text{sen.}\,B}{G-H\,\text{cos.}\,B}$, e che però

$\text{ang.}\ A = \text{ang. tang.}\ \left(\frac{H\,\text{sen.}\,B}{G-H\,\text{cos.}\,B}\right)$. Dunque variando stato sarà $\delta A = \text{ang. tang.}\left(\frac{H\,\text{sen.}(B\mp\Delta B)}{G-H\,\text{cos.}\,(B\mp\Delta B)}\right) - \text{ang.}\ A$

III. Similmente si troverà

$$\delta C = \text{ang. tang.}\ \left(\frac{G\,\text{sen.}(B\mp\Delta B)}{H-G\,\text{cos.}\,(B\mp\Delta B)}\right) - \text{ang.}\,C$$

Variante l' angolo $BAC\,(A)$ *adiacente a uno de' lati costanti* AB. Le parti *variate* saranno I. il lato $AC\,(F)$ II. l'angolo $ABC\,(B)$ III. l'angolo $BCA\,(C)$.

I. Per la variazione del lato AC, giacchè $\text{cos.}\ A = \frac{F^2+G^2-H^2}{2FG}$, la relazione appropriata sarà

$F = G\,\text{cos.}\,A \pm\sqrt{(H^2-G^2\,\text{sen.}^2 A)}$, e però

$$\delta F = G\,\text{cos.}\,(A\pm\Delta A)\pm\sqrt{\left(H^2-G^2\,\text{sen.}^2(A\pm\Delta A)\right)} - F$$

II. E quanto all' angolo $ABC\,(B)$, essendo $\text{sen.}\ A : \text{sen.}\,C = H : G = \text{sen.}\,A : \text{sen.}\ (A+B)$, sarà $\text{sen.}\ (A+B) = \frac{G\,\text{sen.}\ A}{H}$,

onde $\text{ang.}\,(A+B) = \text{ang. sen.}\left(\frac{G\,\text{sen.}\ A}{H}\right)$, Dunque

$\text{ang.}\,B = \text{ang. sen.}\left(\frac{G\,\text{sen.}\ A}{H}\right) - \text{ang.}\ A$, e però immediatamente

$$\delta B = \text{ang. sen.}\left(\frac{G\,\text{sen.}\,(A\pm\Delta A)}{H}\right) - \text{ang.}\,(A\pm\Delta A+B)$$

III. La variazione dell'angolo BCA si trarrà facilmente dall' essere $\text{sen.}\,C : \text{sen.}\ A = G : H$, onde $\text{sen.}\ C = \frac{G\,\text{sen.}\ A}{H}$,

e però $\text{ang.}\ \ C = \text{ang. sen.}\ \left(\frac{G\,\text{sen.}\ A}{H}\right)$, e

$$\delta C = \text{ang. sen.}\ \left(\frac{G\,\text{sen.}\ (A\pm\Delta A)}{H}\right) - \text{ang.}\ C$$

§. IV.

Variazioni indotte dalla variabilità di due parti nell' altre parti del Triangolo.

I.

VAriabilità di due lati. Sia ABC (fig. IV.) il triangolo, $AB(G)$, $BC(H)$ i due lati *varianti*. Resta invariato o *costante* il solo angolo $BAC(A)$, e le parti *variate* saranno. I. l' ang. ABC (B) II. l' ang. $ACB(C)$ III. il lato $AC(F)$. Come pertanto le mutazioni insorte in queste parti variate derivano da tutte due insieme le variazioni de' lati AB, BC, è cosa indubitata, che dette varianti non debbono separarsi nelle relazioni *appropriate*, e che perciò le parti variate debbono ad una ad una mettersi in relazione, non con una variante, ma con tutte insieme (§. I.). Posto ciò

I. Per trovare la variazione dell' *ang.* ABC; giacchè $sen.\ C : sen.\ A = G : H = sen.\,(A+B) : sen.\ A$, sarà variando stato $G' : H' = sen.\,(A+B') : sen.\ A$, e però $sen.\ (A+B') = \frac{G'\,sen.\ A}{H'}$, onde $ang.\,(A+B') = ang.\,sen.\,(\frac{G'\,sen.\ A}{H'})$.

Per la qual cosa $ang.\ (B+\delta B) = ang.\,sen.\ (\frac{G'sen.\ A}{H'}) - ang.A$ e immediatamente

$$\delta B = ang.\,sen.\,(\frac{(G+\Delta G)\,sen.\ A}{H+\Delta H}) - ang.(A+B)$$

II. Attesa la permanenza dell' *ang.* BAC, la variazione dell' *ang.* ACB è la medesima manifestamente dell' *ang.* ABC, ma in senso contrario.

III. E quanto finalmente alla variazione del lato $AC\,(F)$, essendo per la Trigonometria $tang.\ C = \frac{G\,sen.\ A}{F - G\,cos.\ A}$, e

$ang.\ C = ang.\,tang.\,(\frac{G\,sen.\ A}{F - G\ cos.\ A})$, ed essendo pure

$sen.\ C. = (\frac{G\ sen.\ A}{H}$, onde $ang.\ C = ang.\ sen.$ $(\frac{G\ sen.\ A}{H})$, farà $(\frac{G\ sen.\ A}{F - G\ cos.\ A}) = tang.\ ang.\ sen.$ $(\frac{G\ sen.\ A}{H})$. Perciò la relazione appropriata farà

$$F = G\ cos.\ A + \frac{G\ sen.\ A}{tang.\ ang.\ sen.\ (\frac{G\ sen.\ A}{H})}$$

e la variazione dimandata

$$\delta F = G'\ (cos.\ A + \frac{sen.\ A}{tang.\ ang.\ sen.\ (\frac{G'\ sen.\ A'}{H'})}) - F$$

Che se si voglia questa variazione in termini espliciti è facile da vedere, che $tang.\ ang.\ sen.\ \frac{G\ sen.\ A}{H}$ $= \frac{G\ sen.\ A}{\sqrt{(H^2 - G^2\ sen.^2 A)}}$. Sarà pertanto

$F = G\ cos.\ A + \sqrt{(H^2 - G^2 sen.^2 A)}$, e la sua variazione

$$\delta F = (G + \Delta G)\ cos.\ A + \sqrt{((H + \Delta H)^2 - (G + \Delta G)^2 . sen.^2 A)} - F$$

II.

Variabilità di due angoli. Sia *ABC* (fig. V.) il triangolo, *BAC* (*A*), *BCA* (*C*) gli angoli *varianti*. Resta *costante* il solo lato *AC* (*F*), e le parti *variate* saranno I. il lato *AB* (*G*) II. il lato *BC* (*H*) III. L'angolo *ABC* (*B*).

I. La relazione *appropriata* per la variazione del lato *AB* (*G*) II. sarà per le regole trigonometriche

$$G = \frac{F\ sen.\ C}{sen.\ B} = \frac{F\ sen.\ C}{sen.\ (A + C)}.$$

Per la qual cosa, variando stato, sarà

$$G' = \frac{F\ sen.\ C'}{sen.\ (A' + C')}$$ e però

$$\delta G = \frac{F\,sen.(C+\Delta C) - G\,sen.(A+\Delta A+C+\Delta C)}{sen.(A+\Delta A+C+\Delta C)}$$

II. Nello stesso modo, essendo $H = \frac{F\,sen.A}{sen(A+C)}$, si troverà

$$\delta H = \frac{F\,sen.(A+\Delta A) - H\,sen.(A+\Delta A+C+\Delta C)}{sen.(A+\Delta A+C+\Delta C)}$$

III. E quanto alla variazione dell' Angolo $ABC\,(B)$ è manifesto, che deve essere $\delta B = -\Delta A - \Delta C$.

III.

Variabilità di un angolo e di un lato. Sieno nel medesimo triangolo (Fig. V.) *l' ang.* $BCA\,(C)$, e il lato $AC\,(F)$ le parti *varianti*; resterà *costante* il solo *ang.* $BAC\,(A)$, e le parti *variate* saranno I. il lato $AB\,(G)$ II. il lato $BC\,(H)$ III. l' *ang.* $ABC\,(B)$.

I. E quanto primamente alla variazione del lato AB, la relazione appropriata, in cui non entrino, che le varianti, la costante, e la parte variata, sarà $G = \frac{F\,sen.C}{sen.B} = \frac{F\,sen.C}{sen.(A+C)}$. Perciò avremo variando stato

$$\delta G = \frac{(F+\Delta F)\,sen.(C+\Delta C) - G\,sen.(A+\Delta A+C+\Delta C)}{sen.(A+\Delta A+C+\Delta C)}$$

II. Nello stesso modo troveremo la variazione del lato $BC\,(H)$ di questa forma

$$\delta H = \frac{(F+\Delta F)\,sen\,A - H\,sen.(A+C+\Delta C)}{sen.(A+C+\Delta C)}$$

III. E la variazione poi dell' angolo ABC δB sarà la stessa ΔC data dell' angolo variante, com'è manifesto, ma in senso contrario.

§. V.

Variazioni indotte dalla variabilità di tre parti nell' altre parti del Triangolo.

Tre essendo le *varianti* simultanee in questa sorta di variazioni, e dovendo le parti *variate* esser poste in relazione ad una ad una con tutte insieme le *varianti*, è certo, che in questo caso non è luogo ad alcuna parte invariata o *costante* nel triangolo.

I.

Variabilità di tre lati. Sia ABC (fig. VI.) il Triangolo, in cui sono *varianti* tutti tre i lati AB (G), $BC(H)$ $AC(F)$, convertito perciò nel triangolo CDE. Varieranno pertanto gli angoli I. BCA (C) II. ABC (B) III. BAC (A).

I. E quanto primamente all' angolo C, la relazione appropriata sarà

$$\text{cos. } C = \frac{F^2+H^2-G^2}{2FH}, \text{ onde risulta}$$

$$\text{ang. } C = \text{ang. cos.}\left(\frac{F^2+H^2-G^2}{2FH}\right), \text{ e la variazione}$$

$$\delta C = \text{ang. cos.}\left(\frac{\overline{F+\Delta F}^2+\overline{H+\Delta H}^2-\overline{G+\Delta G}^2}{2(F+\Delta F)(H+\Delta H)}\right) - \text{ang.} C$$

II. nello stesso modo si troverà per l' *angolo* B

$$\delta B = \text{ang. cos.}\left(\frac{\overline{G+\Delta G}^2+\overline{H+\Delta H}^2-\overline{F+\Delta F}^2}{2(G+\Delta G)(H+\Delta H)}\right) - \text{ang.} B$$

III. E la variazione poi del terzo angolo A sarà manifestamente

$$\delta A = -\Delta B - \Delta C$$

II.

Variabilità di un angolo, e di due lati. Siano nel me-

medesimo Triangolo l'*ang. BAC* (A), il lato $AB(G)$, e il lato BC (H) le parti *varianti*. Le parti *variate* sarann o I. il lato AC (F) II. l'angolo $ABC(B)$ III. l'angolo $ACB(C)$

I. Quanto al lato AC, essendo, come qui sopra,

$cos.\ A = \frac{F^2+^2G^2-H^2}{2FG}$, la relazione appropriata sarà

$$F = G\ cos.\ A \pm \sqrt{(H^2 - G^2 sen.^2 A)}$$

Dunque variando stato, avremo immediatamente

$$\delta F = (G+\Delta G) cos.(A+\Delta A) \pm \sqrt{\left((H+\Delta H)^2 - (G+\Delta G)^2 sen.^2(A+\Delta A)\right)} - F$$

Che se in vece del lato BC fosse stato *variante* il lato AC (F), con lo stesso metodo si sarebbe trovata la variazione del lato H di questa forma

$$\delta H = \pm \sqrt{\left((G+\Delta G)^2 + (F+\Delta F)^2 - 2(G+\Delta G)(F+\Delta F)\ cos\cdot(A+\Delta A)\right)} - H$$

II. Per la variazione poi dell'Angolo ABC (B), essendo $sen.\ C : sen.\ A = G : H = sen.(A+B) : sen.\ A$, sarà

$sen.(A+B) = \frac{G\ sen.\ A}{H}$, e $ang.(A+B) = ang.\ sen.\ \frac{G\ sen.\ A}{H}$

Perciò $ang.\ B = ang\ sen.\ \frac{G\ sen.\ A}{H} - ang.\ A$, e

$$\delta B = ang.\ sen.\left(\frac{(G+\Delta G) sen.(A+\Delta A)}{H+\Delta H}\right) - ang.(A+\Delta A+B)$$

III. E finalmente per la variazione dell'angolo $ACB(C)$, poichè la relazione appropriata è

$sen.C = \frac{G\ sen.\ A}{H}$, onde $ang.\ C = ang.\ sen.\ \frac{G\ sen.\ A}{H}$, sarà

$$\delta C = ang.\ sen.\left(\frac{(G+\Delta G)\ sen.(A+\Delta A)}{H+\Delta H}\right) - ang.\ C$$

III.

Variabilità di due angoli e un lato. Sia il medesimo triangolo (fig. VI.) in cui le parti *varianti* sieno l'*angolo* BAC (A), l'*angolo* ABC (B), e il lato AC (F); e però le *variate* saranno I. il lato AB (G) II. il lato BC (H) III. l'*angolo* BCA (C).

I. Pertanto la relazione appropriata per la variazione del lato AB, stante l'analogia trigonometrica $sen. C : sen. B = G : F = sen. (A+B) : sen. B$, sarà $G = \frac{F\, sen. (A+B)}{sen. B}$. Dunque, variando stato, si avrà immediatamente

$$\delta G = \frac{(F+\Delta F)\; sen. (A+\Delta A+B+\Delta B) - G\, sen. (B+\Delta B)}{sen. (B+\Delta B)}$$

II. E con lo stesso metodo, essendo $H = \frac{F\, sen. A}{sen. B}$, si troverà la variazione di H

$$\delta H = \frac{(F+\Delta F)\, sen. (A+\Delta A) - H\, sen. (B+\Delta B)}{sen. (B+\Delta B)}$$

III. E quanto finalmente alla variazione dell' *angolo* ACB (C), essendo date le variazioni Δ *ang.* A, Δ *ang.* B, sarà manifestamente

$$\delta C = -(\Delta A + \Delta B)$$

§. VI.

Potrebbero moltiplicarsi i Problemi variando condizioni e dati a piacere. Ma è miglior consiglio il ridur tutto a forme generali, come ho fatto nella seguente Tavola, a cui in ogni caso può ricorrere il calcolatore, onde trattare le variazioni triangolari sotto qualunque aspetto. In fatto si cerchi, per modo di esempio, la variazione del lato (H) (fig. I.), mentre sia costante l'*angolo* A, e varianti i lati (G), (F). Nelle colonne a sinistra si trovi la combinazione delle quattro lettere $A\ F\ G\ H$, ch'è la X^{ma}. La seconda equazione somministrerà sul fatto la relazione dimandata, in cui facendo variare stato alle lettere F, G, H, si otterrà

$$H' = \sqrt{(G'^2 + F'^2 - 2G'F'\; cos. A)}$$

cioè, apponendo alla variazione di H il segno delle variazioni incognite, e quello delle cognite alle variazioni di F, G

$$\delta H = \sqrt{\left((G+\Delta G)^2 + (F+\Delta F)^2 - 2\,(G+\Delta G)\,(F+\Delta F)\; cos. A\right)} - H$$

E chiedendo con le stesse condizioni dell'*ang.* A costante, e di F, G varianti la variazione dell'*angolo* B, si cerchi la combinazione delle quattro lettere *BFGA*, ch' è la I^{ma}. Nella quarta equazione si avrà la relazione appropriata onde trovare col metodo usato

$$\delta B = ang.\,tang.\,\frac{(F+\Delta F)\,sen.\,A}{G+\Delta G-(F+\Delta F)\,cos.\,A} - ang.\,B$$

Non credo, che sia necessario il diffondersi più oltre in questa materia, ridotta, come mi sembra, a tutta la possibile facilità.

TAVOLA

TAVOLA

Delle relazioni appropriate onde determinare la variazione indotta dalla variabilità di una, di due, e di tre parti in ciascheduna delle altre parti del Triangolo rettilineo.

I. A.B.F.G	$F = \frac{G \text{ sen. } B}{\text{sen. } \overline{A+B}}$ $G = \frac{F \text{ sen. } \overline{A+B}}{\text{sen. } B}$ $\text{ang. } A = \text{ang. sen. } \frac{G \text{ sen. } B}{F} - \text{ang. } B$ $\text{ang. } B = \text{ang. tang. } \frac{F \text{ sen. } A}{G - F \text{ cos. } A}$	V. B.C.F.H	$F = \frac{H \text{ sen. } B}{\text{sen. } \overline{B+C}}$ $H = \frac{F \text{ sen. } \overline{B+C}}{\text{sen. } B}$ $\text{ang. } C = \text{ang. sen. } \frac{H \text{ sen. } B}{F} - \text{ang. } B$ $\text{ang. } B = \text{ang. tang. } \frac{F \text{ sen. } C}{H - F \text{ cos. } C}$
II. A.B.F.H	$F = \frac{H \text{ sen. } B}{\text{sen. } A}$ $H = \frac{F \text{ sen. } A}{\text{sen. } B}$ $\text{ang. } A = \text{ang. sen. } \frac{H \text{ sen. } B}{F}$ $\text{ang. } B = \text{ang. sen. } \frac{F \text{ sen. } A}{H}$	VI. B.C.G.H	$G = \frac{H \text{ sen. } C}{\text{sen. } \overline{B+C}}$ $H = \frac{G \text{ sen. } \overline{B+C}}{\text{sen. } C}$ $\text{ang. } B = \text{ang. sen. } \frac{H \text{ sen. } C}{G} - \text{ang. } C$ $\text{ang. } C = \text{ang. tang. } \frac{G \text{ sen. } B}{H - G \text{ cos. } B}$
III. A.B.G.H	$H = \frac{G \text{ sen. } A}{\text{sen. } \overline{A+B}}$ $G = \frac{H \text{ sen. } \overline{A+B}}{\text{sen. } A}$ $\text{ang. } B = \text{ang. sen } \frac{G \text{ sen. } A}{H} - \text{ang. } A$ $\text{ang. } A = \text{ang. tang. } \frac{H \text{ sen. } B}{G - H \text{ cos. } B}$	VII C.F.A.G	$G = \frac{F \text{ sen. } C}{\text{sen. } \overline{A+C}}$ $F = \frac{G \text{ sen. } \overline{A+C}}{\text{sen. } C}$ $\text{ang. } A = \text{ang. sen. } \frac{F \text{ sen. } C}{G} - \text{ang. } C$ $\text{ang. } C = \text{ang. tang. } \frac{G \text{ sen. } A}{F - G \text{ cos. } A}$
IV. B.C.F.G	$G = \frac{F \text{ sen. } C}{\text{sen. } B}$ $F = \frac{G \text{ sen. } B}{\text{sen. } C}$ $\text{ang. } C = \text{ang. sen. } \frac{G \text{ sen. } B}{F}$ $\text{ang. } B = \text{ang. sen. } \frac{F \text{ sen. } C}{G}$	VIII. C.F.A.H	$H = \frac{F \text{ sen. } A}{\text{sen. } \overline{A+C}}$ $F = \frac{H \text{ sen. } \overline{A+C}}{\text{sen. } A}$ $\text{ang. } C = \text{ang. sen. } \frac{F \text{ sen. } A}{H} - \text{ang. } A$ $\text{ang. } A = \text{ang. tang. } \frac{H \text{ sen. } C}{F - H \text{ cos. } C}$

TAVOLA

Delle relazioni appropriate onde determinare la variazione indotta dalla variabilità di una, di due, e di tre parti in ciascheduna delle altre parti del Triangolo rettilineo.

IX. C. F. G. H	$\text{ang.}\,C = \text{ang. cos.}\,\frac{E^2+H^2-G^2}{2FH}$ $G = \sqrt{}(F^2+H^2-2FH\,\text{cos.}\,C)$ $H = F\,\text{cos.}\,C \pm \sqrt{}(G^2-F^2\,\text{sen}^2\,C)$ $F = H\,\text{cos.}\,C \pm \sqrt{}(G^2-H^2\,\text{sen.}^2\,C)$	XI. F. G. H. B	$\text{ang.}\,B = \text{ang. cos.}\,\frac{G^2+H^2-F^2}{2GH}$ $F = \sqrt{}(G^2+H^2-2GH\,\text{cos.}\,B)$ $G = H\,\text{cos.}\,B \pm \sqrt{}(F^2-H^2\,\text{sen.}^2\,B)$ $H = G\,\text{cos.}\,B \pm \sqrt{}(F^2-G^2\,\text{sen.}^2\,B)$
X. A. F. G. H	$\text{ang.}\,A = \text{ang. cos.}\,\frac{G^2+F^2-H^2}{2FG}$ $H = \sqrt{}(G^2+F^2-2GF\,\text{cos.}\,A)$ $F = G\,\text{cos.}\,A \pm \sqrt{}(H^2-G^2\,\text{sen.}^2\,A)$ $G = F\,\text{cos.}\,A \pm \sqrt{}(H^2-F^2\,\text{sen}^2\,A)$	XII. A. C. G. H	$G = \frac{H\,\text{sen.}\,C}{\text{sen.}\,A}$ $H = \frac{G\,\text{sen.}\,A}{\text{sen.}\,C}$ $\text{ang.}\,C = \text{ang. sen.}\,\frac{G\,\text{sen.}\,A}{H}$ $\text{ang.}\,A = \text{ang. sen.}\,\frac{G\,\text{sen.}\,C}{G}$

§ VII.

TRIGONOMETRIA SFERICA.

E bene, che nella Trigonometria piana si sieno percorse le variazioni a parte a parte, perchè il metodo di trattarle non incontri difficoltà in verun caso, e sia nel tempo stesso fatta strada al maneggio facile ed uinforme di quelle che alla Sferica appartengono. Posti i medesimi principj sarebbe agevole il prendere per mano anche in questa Trigonometria le variazioni indotte dalla variabilità di una parte (§. III.), di due (§. IV.), di tre (§. V.) nell' altre parti del Triangolo sferico; ma ben inteso l'uso delle Tavole che abbiamo esibito pe' triangoli rettilinei, son certo, che si troverà utile e compendioso il valersi di un simile ajuto per maneggiare tutte le variazioni de' triangoli sferici. Pertanto la Tavola quì annessa riferita al triangolo sferico *ABC* (fig. VII.), e calcolata con tutta la diligenza, supplirà a tutti i casi comodamente. Vi si sono contrassegnati coll' asterisco i casi dubbj in ogni particolare risoluzione tanto per parte de' lati quanto per conto degli angoli; e sopra questi casi potrà sempre consultarsi la Trigonometria sferica del Sig. *Cagnoli* per accertarsi del valore dimandato precisamente secondo le circostanze. E perchè se n' abbia una qualche applicazione per norma, daremo un' esempio per ciaschedun caso di variabilità di una parte, di due, e di tre del Triangolo Sferico fondamentale.

§. VIII.

Variazioni indotte dalla variabilità di una parte nell' altre parti del Triangolo.

Variabilità di un lato.. Sia *ABC* (fig. VII.) il triangolo, e sieno *AC* (*F*) il lato *variante*, costanti il lato *AB*

(G) e l'angolo adiacente A, e *Variate* le altre tre parti del triangolo, cioè I. l'angolo B II. l'angolo C III. il lato BC (H). Si cerchi la mutazione indotta nell'angolo variato B. Si vede subitamente, che la relazione appropriata (§. I.) in cui non entri che la *variante* F, le costanti G, A, e la parte *variata* B appartiene alla combinazione delle quattro lettere $A. B. F. G$, e che la quarta equazione

$$ang.\ B = ang.\ tang.\ \frac{sen.\ A}{sen.\ G\ cot.\ F - cos.\ G\ cos.\ A}$$

è quella che la somministra. Pertanto, variando stato da ambe le parti, si avrà

$$ang.\ B' = ang.\ tang.\ \frac{sen.\ A}{sen.\ G\ cot.\ F' - cos.\ G\ cos.\ A}\ ;$$ e

perciò immediatamente

$$\delta B = ang.\ tang.\ \frac{sen.\ A}{sen.\ G\ cot.\ (F + \Delta F) - cos.\ G\ cos.\ A} - ang.\ B$$

Nella X. combinazione $C. F. A. G$ si troverà la relazione appropriata per la variazione di C, e nella XIV. $A. F. G. H$ la relazione per la variazione del lato BC (H). Si veggano le analogie finite dal §. 541 al §. 564 della Trigonometria sferica del Sig. *Cagnoli*.

§. IX.

Variazioni indotte dalla variabilità di due parti nell' altre parti del Triangolo sferico.

Variabilità di due lati. Sia ABC (fig. VIII.) il triangolo, AB (G), BC (H) i due lati *varianti*, costante l'angolo BAC (A), e *variati* I. l'angolo ABC (B) II. l'angolo ACB (C) III. il lato AC (F).

Si cerchi la mutazione indotta nell' angolo ABC (B). Si comprende facilmente, che la relazione appropriata deve appartenere alla combinazione delle quattro lettere $A. B. G. H$, e che la terza equazione ce la somministra prontamente. Variando pertanto stato, e trasponendo si avrà

$$\delta B^{*} = ang.\ cot.\ (\ cos.\ G'\ tang.\ A\ ) \pm ang.\ cos.\ (\ cos.\ ang.$$

$$\text{cot.}\ (\text{cos}.\ G'\ \text{tang}.\ A)\ \frac{\text{tang}.\ G'}{\text{tang}.\ H'}\ ) - \text{ang}.\ B^*$$

Nella XII. combinazione poi si troverà la relazione appropriata per determinare la variazione dell' angolo C; e nella XIV. la relazione per la variazione del lato AC (F).

§. X.

Variazioni indotte dalla variabilità di tre parti nell' altre parti del Triangolo.

Variabilità di tre lati. Sia ABC (fig. VII.) il triangolo, in cui sono *varianti* i tre lati AB (G), AC (F), BC (H). Saranno *variati* tutti e tre gli angoli I. BAC (A) II. ABC (B) III. ACB (C). Se pertanto si cerchi la variazione dell' *ang.* A, la relazione appropriata dovrà appartenere alla combinazione delle quattro lettere $A.\ F.\ G.\ H$, e sarà ella espressa dalla prima equazione

$$\text{ang}.\ A = \text{ang}.\ \text{cos}.\ \left(\frac{\text{cos}.\ H - \text{cos}.\ F\ \text{cos}.\ G}{\text{sen}.\ F\ \text{sen}.\ G}\right)$$

Per la qual cosa, variando stato e trasponendo, sarà

$$\delta A = \text{ang}.\ \text{cos}.\ \left(\frac{\text{cos}.\ H' - \text{cos}.\ F'\ \text{cos}.\ G'}{\text{sen}.\ F'\ \text{sen}.\ G'}\right) - \text{ang}.\ A$$

Similmente nella XV. combinazione si troverà la relazione appropriata per la variazione dell' *ang.* B, e nella XIII. la relazione per la variazione dell' *ang.* C.

§. XI.

Non giova, che più oltre ci estendiamo su questo argomento. Le Tavole che esibiamo, mentre contengono epilogate tutte le risoluzioni de' Triangoli così rettilinei, come sferici, somministrano nel tempo stesso il modo di maneggiare e determinare esattamente e agevolmente tutte le variazioni finite che nella piana e sferica Trigonometria possono proporsi da investigare.

TAVOLA

Delle relazioni appropriate onde determinare la variazione indotta dalla variabilità di una, di due, e di tre parti in ciascheduna delle altre parti del Triangolo Sferico.

I. A.B.C.G	$\mathrm{arc.}\ G = \mathrm{arc.\ cos.}\ \dfrac{\mathrm{cos.}\ C + \mathrm{cos.}\ A\ \mathrm{cos.}\ B}{\mathrm{sen.}\ A\ \mathrm{sen.}\ B}$
	$\mathrm{ang.}\ C = \mathrm{ang.\ cos.}\ (\mathrm{cos.}\ G\ \mathrm{sen.}\ A\ \mathrm{sen.}\ B - \mathrm{cos.}\ A\ \mathrm{cos.}\ B)$
	$\mathrm{ang.}\ A^{*} = \mathrm{ang.\ cot.}\ (\mathrm{cos.}\ G\ \mathrm{tang.}\ B) \pm \mathrm{ang.\ sen.}\ \left(\mathrm{sen.\ ang.\ cot.}\ (\mathrm{cos.}\ G\ \mathrm{tang.}\ B) \times \dfrac{\mathrm{cos.}\ C}{\mathrm{cos.}\ B}\right)$
	$\mathrm{ang.}\ B^{*} = \mathrm{ang.\ cot}\ (\mathrm{cos.}\ G\ \mathrm{tang}\ A) \pm \mathrm{ang.\ sen.}\ \left(\mathrm{sen.\ ang.\ cot.}\ (\mathrm{cos.}\ G\ \mathrm{tang.}\ A) \times \dfrac{\mathrm{cos.}\ C}{\mathrm{cos.}\ A}\right)$
II. A.B.C.F	$\mathrm{arc.}\ F = \mathrm{arc.\ cos.}\ \dfrac{\mathrm{cos.}\ B + \mathrm{cos}\ A\ \mathrm{cos.}\ C}{\mathrm{sen.}\ A\ \mathrm{sen.}\ C}$
	$\mathrm{ang.}\ B = \mathrm{ang.\ cos.}\ (\mathrm{cos.}\ F\ \mathrm{sen.}\ A\ \mathrm{sen.}\ C - \mathrm{cos.}\ A\ \mathrm{cos.}\ C)$
	$\mathrm{ang.}\ A^{*} = \mathrm{ang.\ cot.}\ (\mathrm{cos.}\ F\ \mathrm{tang.}\ C) \pm \mathrm{ang.\ sen.}\ \left(\mathrm{sen.\ ang.\ cot.}\ (\mathrm{cos.}\ F\ \mathrm{tang.}\ C) \times \dfrac{\mathrm{cos.}\ B}{\mathrm{cos.}\ C}\right)$
	$\mathrm{ang.}\ C^{*} = \mathrm{ang.\ cot.}\ (\mathrm{cos.}\ F\ \mathrm{tang.}\ A) \pm \mathrm{ang.\ sen.}\ \left(\mathrm{sen.\ ang.\ cot.}\ (\mathrm{cos.}\ F\ \mathrm{tang}\ A) \times \dfrac{\mathrm{cos.}\ B}{\mathrm{cos.}\ A}\right)$
III. A.B.C.H	$\mathrm{arc.}\ H = \mathrm{arc.\ cos.}\ \dfrac{\mathrm{cos.}\ A + \mathrm{cos.}\ B\ \mathrm{cos.}\ C}{\mathrm{sen.}\ B\ \mathrm{sen.}\ C}$
	$\mathrm{ang.}\ A = \mathrm{ang.\ cos.}\ (\mathrm{cos.}\ H\ \mathrm{sen.}\ B\ \mathrm{sen.}\ C - \mathrm{cos.}\ B\ \mathrm{cos.}\ C)$
	$\mathrm{ang.}\ B^{*} = \mathrm{ang.\ cot.}\ (\mathrm{cos.}\ H\ \mathrm{tang.}\ C) \pm \mathrm{ang.\ sen.}\ \left(\mathrm{sen.\ ang.\ cot.}\ (\mathrm{cos.}\ H\ \mathrm{tang.}\ C) \times \dfrac{\mathrm{cos.}\ A}{\mathrm{cos.}\ C}\right)$
	$\mathrm{ang.}\ C^{*} = \mathrm{ang.\ cot.}\ (\mathrm{cos.}\ H\ \mathrm{tang.}\ B) \pm \mathrm{ang.\ sen.}\ \left(\mathrm{sen.\ ang.\ cot.}\ (\mathrm{cos.}\ H\ \mathrm{tang.}\ B) \times \dfrac{\mathrm{cos.}\ A}{\mathrm{cos.}\ B}\right)$
IV. A.B.F.G	$\mathrm{arc.}\ F = \mathrm{arc.\ tang.}\ \dfrac{\mathrm{sen.}\ G}{\mathrm{sen.}\ A\ \mathrm{cot.}\ B + \mathrm{cos.}\ G}$
	$\mathrm{arc.}\ G^{*} = \mathrm{arc.\ tang.}\ (\mathrm{tang.}\ F\ \mathrm{cos.}\ A) \pm \mathrm{arc.\ sen.}\ \left(\mathrm{sen.\ arc.\ tang.}\ (\mathrm{tang}\ F.\ \mathrm{cos.}\ A) \times \dfrac{\mathrm{tang.}\ A}{\mathrm{tang.}\ B}\right)$
	$\mathrm{ang.}\ A^{*} = \mathrm{ang.\ cot.}\ (\mathrm{cos.}\ G\ \mathrm{tang.}\ B) \pm \mathrm{ang.\ cos.}\ \left(\mathrm{cos.\ ang.\ cot.}\ (\mathrm{cos.}\ G\ \mathrm{tang.}\ B) \times \dfrac{\mathrm{tang.}\ G}{\mathrm{tang.}\ F}\right)$
	$\mathrm{ang.}\ B = \mathrm{ang.\ cot.}\ \dfrac{\mathrm{sen.}\ G - \mathrm{tang.}\ F\ \mathrm{cos.}\ A\ \mathrm{cos.}\ G}{\mathrm{tang.}\ F\ \mathrm{sen.}\ A} = \mathrm{ang.\ tang.}\ \dfrac{\mathrm{sen.}\ A}{\mathrm{sen.}\ G.\ \mathrm{cot.}\ F. - \mathrm{cos.}\ G\ \mathrm{cos.}\ A}$
V. A.B.F.H	$\mathrm{arc.}\ F^{*} = \mathrm{arc.\ sen.}\ \dfrac{\mathrm{sen.}\ B\ \mathrm{sen.}\ H}{\mathrm{sen.}\ A}$
	$\mathrm{arc.}\ H^{*} = \mathrm{arc.\ sen.}\ \dfrac{\mathrm{sen.}\ F.\ \mathrm{sen.}\ A}{\mathrm{sen.}\ B}$
	$\mathrm{ang.}\ A^{*} = \mathrm{ang.\ sen.}\ \dfrac{\mathrm{sen.}\ B\ \mathrm{sen.}\ H}{\mathrm{sen.}\ F}$
	$\mathrm{ang.}\ B^{*} = \mathrm{ang.\ sen.}\ \dfrac{\mathrm{sen.}\ F\ \mathrm{sen.}\ A}{\mathrm{sen.}\ H}$

TAVOLA

Delle relazioni appropriate onde determinare la variazione indotta dalla variabilità di una, di due, e di tre parti in ciascheduna delle altre parti del Triangolo Sferico.

VI. A. B. G. H	$\text{arc. } H = \text{arc. tang. } \dfrac{\text{sen. } G}{\text{sen. } B \cot. A + \cos. B \cos. G}$
	$\text{arc. } G^* = \text{arc. tang. } (\text{tang. } H \cos. B) \pm \text{arc. sen. } \left(\text{sen. arc. tang. } (\text{tang. } H \cos. B) \times \dfrac{\text{tang. } B}{\text{tang. } A}\right)$
	$\text{ang. } B^* = \text{ang. cot. } (\cos. G \text{ tang. } A) \pm \text{ang. cos. } \left(\cos. \text{ ang. cot. } (\cos. G \text{ tang. } A) \times \dfrac{\text{tang. } G}{\text{tang. } H}\right)$
	$\text{ang. } A = \text{ang. cot. } \dfrac{\text{sen. } G - \text{tang. } H \cos. B \cos. G}{\text{tang. } H \text{ sen. } B} = \text{ang. tang. } \dfrac{\text{sen. } B}{\text{sen. } G \cot. F - \cos. G \cos. B}$
VII. B. C. F. G	$\text{arc. } G^* = \text{arc. sen. } \dfrac{\text{sen. } F \text{ sen. } C}{\text{sen. } B}$
	$\text{arc. } F^* = \text{arc. sen. } \dfrac{\text{sen. } G \text{ sen. } B}{\text{sen. } C}$
	$\text{ang. } B^* = \text{ang. sen. } \dfrac{\text{sen. } C \text{ sen. } F}{\text{sen. } G}$
	$\text{ang. } C^* = \text{ang. sen. } \dfrac{\text{sen. } G \text{ sen. } B}{\text{sen. } F}$
VIII. B. C. F. H	$\text{arc. } F = \text{arc. tang. } \dfrac{\text{sen. } H}{\text{sen. } C \cot. B + \cos. C \cos. H}$
	$\text{arc. } H^* = \text{arc. tang. } (\text{tang. } F \cos. C) \pm \text{arc. sen. } \left(\text{sen. arc. tang. } (\text{tang. } F \cos. C) \times \dfrac{\text{tang. } C}{\text{tang. } B}\right)$
	$\text{ang. } C^* = \text{ang. cot. } (\cos. H \text{ tang. } B) \pm \text{ang. cos. } \left(\cos. \text{ ang. cot. } (\cos. H \text{ tang. } B) \times \dfrac{\text{tang. } H}{\text{tang. } F}\right)$
	$\text{ang. } B = \text{ang. cot. } \dfrac{\text{sen. } H - \text{tang. } F \cos. C \cos. H}{\text{tang. } F \text{ sen. } C} = \text{ang. tang. } \dfrac{\text{sen. } C}{\text{sen. } H \cos. F - \cos. H \cos. C}$
IX. B. C. G. H	$\text{arc. } G = \text{arc. tang. } \dfrac{\text{sen. } H}{\text{sen. } B \cot. C + \cos. B \cos. H}$
	$\text{arc. } H^* = \text{arc. tang. } (\text{tang. } G \cos. B) \pm \text{arc. sen. } \left(\text{sen. arc. tang. } (\text{tang. } G \cos. B) \times \dfrac{\text{tang. } B}{\text{tang. } C}\right)$
	$\text{ang. } B^* = \text{ang. cot. } (\cos. H \text{ tang. } C) \pm \text{ang. cos. } \left(\cos. \text{ ang. cot. } (\cos. H \text{ tang. } C) \times \dfrac{\text{tang. } H}{\text{tang. } G}\right)$
	$\text{ang. } C = \text{ang. cot. } \dfrac{\text{sen. } H - \text{tang. } G \cos. B \cos. H}{\text{tang. } G \text{ sen. } B} = \text{ang. tang. } \dfrac{\text{sen. } B}{\text{sen. } H \cot. G - \cos. H \cos. B}$
X. C. F. A. G	$\text{arc. } G = \text{arc. tang. } \dfrac{\text{sen. } F}{\text{sen. } A \cot. C + \cos. B \cos. H}$
	$\text{arc. } F = \text{arc. tang. } (\text{tang. } G \cos. A) \pm \text{arc. sen. } \left(\text{sen. arc. tang. } (\text{tang. } G \cos. A) \times \dfrac{\text{tang. } A}{\text{tang. } C}\right)$
	$\text{ang. } A = \text{ang. cot. } (\cos. F \text{ tang } B) \pm \text{ang. cos. } \left(\cos. \text{ ang. cot. } (\cos. F \text{ tang. } B) \times \dfrac{\text{tang. } F}{\text{tang. } G}\right)$
	$\text{ang. } C = \text{ang. cot. } \dfrac{\text{sen. } F - \text{tang. } G \cos. A \cos. F}{\text{tang. } G \text{ sen. } A} = \text{ang. tang. } \dfrac{\text{sen. } A}{\text{sen. } F \cot. G - \cos. F \cos. A}$

TAVOLA

Delle relazioni appropriate onde determinare la variazione indotta dalla variabilità di una, di due, e di tre parti in ciascheduna delle altre parti del Triangolo Sferico.

XI. C. F. A. H	$\text{arc. } H = \text{arc. tang. } \dfrac{\text{sen. } F}{\text{sen. } C \text{ cot. } A + \text{cos. } C \text{ cos. } F}$ $\text{arc. } F^* = \text{arc. tang. } (\text{tang. } H \text{ cos. } C) \pm \text{arc. sen. } \left(\text{sen. arc. tang. } (\text{tang. } H \text{ cos. } C) \times \dfrac{\text{tang. } C}{\text{tang. } A} \right)$ $\text{ang. } A = \text{ang. cot. } \dfrac{\text{sen. } F - \text{tang. } H \text{ cos. } C \text{ cos. } F}{\text{tang. } H \text{ sen. } A} = \text{ang. tang. } \dfrac{\text{sen. } C}{\text{sen. } F. \text{ cot. } H - \text{cos. } F \text{ cos. } C}$ $\text{ang. } C^* = \text{ang. cot. } (\text{cos. } F \text{ tang. } A) \pm \text{ang. cos. } \left(\text{cos. ang. cot. } (\text{cos. } F \text{ tang. } A) \times \dfrac{\text{tang. } F}{\text{tang. } H} \right)$
XII. G. H. A. C	$\text{arc. } G^* = \text{arc. sen. } \dfrac{\text{sen. } H \text{ sen. } C}{\text{sen. } A}$ $\text{arc. } H^* = \text{arc. sen. } \dfrac{\text{sen. } A \text{ sen } G}{\text{sen. } C}$ $\text{ang. } A^* = \text{ang. sen. } \dfrac{\text{sen } H \text{ sen. } C}{\text{sen. } G}$ $\text{ang. } C^* = \text{ang. sen. } \dfrac{\text{sen. } A \text{ sen. } G}{\text{sen } H}$
XIII. C. F. G. H	$\text{ang. } C = \text{ang. cos. } \dfrac{\text{cos. } G - \text{cos. } F \text{ cos. } H}{\text{sen. } F \text{ sen. } H}$ $\text{arc. } G = \text{arc. cos. } (\text{cos. } C \text{ sen. } F \text{ sen. } H + \text{cos. } F \text{ cos. } H)$ $\text{arc. } F^* = \text{arc. tang. } (\text{tang. } H \text{ cos. } C) \pm \text{arc. cos. } \left(\text{cos. arc. tang. } (\text{tang. } H \text{ cos. } C) \times \dfrac{\text{cos. } G}{\text{cos. } H} \right)$ $\text{arc. } H^* = \text{arc. tang. } (\text{tang. } F \text{ cos. } C) \pm \text{arc. cos. } \left(\text{cos. arc. tang. } (\text{tang. } F \text{ cos. } C) \times \dfrac{\text{cos. } G}{\text{cos. } F} \right)$
XIV. A. F. G. H	$\text{ang. } A = \text{ang. cos. } \dfrac{\text{cos. } H - \text{cos. } F \text{ cos. } G}{\text{sen. } F \text{ sen } G}$ $\text{arc. } H = \text{arc. cos. } (\text{cos. } A \text{ sen. } F \text{ sen. } G + \text{cos. } F \text{ cos. } G)$ $\text{arc. } F^* = \text{arc. tang. } (\text{tang. } G \text{ cos. } A) \pm \text{arc. cos. } \left(\text{cos. arc. tang. } (\text{tang. } G \text{ cos. } A) \times \dfrac{\text{cos. } H}{\text{cos. } G} \right)$ $\text{arc. } G^* = \text{arc. tang. } (\text{tang. } F \text{ cos. } A) \pm \text{arc. cos. } \left(\text{cos. arc. tang. } (\text{tang. } F \text{ cos. } A) \times \dfrac{\text{cos. } H}{\text{cos. } F} \right)$
XV. F. G. H. B	$\text{ang. } B = \text{ang. cos. } \dfrac{\text{cos. } F - \text{cos. } G \text{ cos. } H}{\text{sen. } G \text{ sen. } H}$ $\text{arc. } F = \text{arc. cos. } (\text{cos. } B \text{ sen. } G \text{ sen. } H + \text{cos. } G \text{ cos. } H)$ $\text{arc. } H^* = \text{arc. tang. } (\text{tang. } G \text{ cos. } B) \pm \text{arc. cos. } \left(\text{cos. arc. tang. } (\text{tang. } G \text{ cos. } B) \times \dfrac{\text{cos. } F}{\text{cos. } G} \right)$ $\text{arc. } G^* = \text{arc. tang. } (\text{tang } H \text{ cos. } B) \pm \text{arc. cos. } \left(\text{cos. arc. tang. } (\text{tang. } H \text{ cos. } B) \times \dfrac{\text{cos. } F}{\text{cos. } H} \right)$

ISTORIA

FIG. I

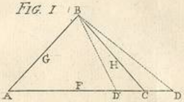

FIG. II

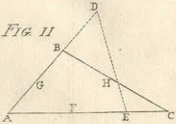

FIG. III

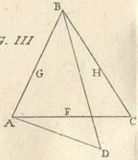

FIG. IV

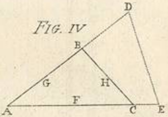

FIG. V

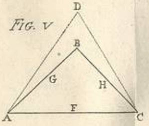

FIG. VI

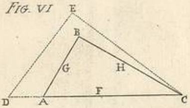

FIG. VII