INTEGRAZIONE

IN SERIE FINITE

Delle Formole $\frac{x^{\pm q}\,dx}{(a+bx+cx^2)^p}$, $\frac{x^{\pm q}\,dx}{(a+bx+cx^2+fx^3)^p}$, $\frac{x^{\pm q}\,dx}{(a+bx+cx^2+fx^3+bx^4)^p}$; essendo p e q de' numeri qualunque interi

Del Sig. Francesco Pezzi.

Ho presentato all' Illustre Società Italiana l' integrale della formola $\frac{(A+Bz)\,dz}{(a^2-2abz\cos.\phi+b^2z^2)^p}$ sviluppato in una serie finita, essendo p un numero qualunque intero, ch' essa si è degnata d' inserire nel IV. Vol. delle sue Memorie; ed il metodo che ho tenuto per arrivare alla formola (7) (a) che esprime questo integrale fu da me rigorosamente dimostrato; accennai però sul principio della mia Memoria, ch' io avea già da gran tempo ottenuta sotto una forma differente la medesima cosa, argomentando per via d' induzione dalla traccia, e dai casi particolari, che il grande *Eulero* ha sviluppato nel Tomo

(a) V. Mem. della Soc. It. 4. Vol. pag. 577 alla pag. 585, lin. 1. invece di $\pm\frac{b^{p'}}{2(-D)^{\frac{p'+1}{2}}}\int\left(\frac{du}{bu+\sqrt{(-D)}}-\frac{du}{bu-\sqrt{(-D)}}\right)$ leggasi

$\pm\frac{b^{p'}}{2(-D)^{\frac{p'+1}{2}}}\int\left(\frac{\pm du}{bu-\sqrt{(-D)}}-\frac{du}{ub+\sqrt{(-D)}}\right)$; o più semplicemente

$-\frac{b^{p'}}{2(-D)^{\frac{p'+1}{2}}}\int\left(\frac{\pm du}{bu+\sqrt{(-D)}}-\frac{du}{bu-\sqrt{(-D)}}\right)$; + ovvero − secondo che p' sarà pari ovvero dispari.

Tomo I. pag. 42, 43 e fegg. delle fue Iftituzioni di calcolo integrale; ora ho giudicato di efporre l' anzi detta formola, onde altri tenendo la cofa degna di qualche attenzione, non la defideraffe trovata, o non fi occupaffe a ricercarla, tanto più che potendo confrontare di leggieri vedrà quale delle due fia la più femplice; mi fi conceda che qui io faccia quefta breve digreffione per la utilità che non di rado ne viene dimoftrando la fecondità dell' Analifi Matematica; verrò poi ad integrare fempre in ferie finite le formole $\frac{(A+Bx+Cx^2)\,dx}{(a+bx+cx^2+fx^3)^p}$, $\frac{(A+Bx+(Cx^2+Dx^3)\,dx}{(a+bx+cx^2+fx^3+hx^4)^p}$, o propriamente quefte

$$\frac{x^{\pm q}\,dx}{(a+bx+cx^2)^p},\ \frac{x^{\pm q}\,dx}{(a+bx+cx^2+fx^3)^p},\ \frac{x^{\pm q}\,dx}{(a+bx+cx^2+fx^3+hx^4)^p}$$

di gran lunga più generali, e perciò meritevoli di confiderazione. Spero che i Geometri gradiranno la mia fatica, particolarmente coloro che attendono a perfezionare il calcolo integrale, dal cui progreffo dipende, come è noto, quello delle noftre cognizioni ful fiftema del mondo; niuno, ch' io fappia, ha mai penfato a trattare delle accennate formole da i precetti in fuori che fi fono dati intorno al metodo d' integrare la frazione $\frac{Pdx}{Q}$, effendo P e Q delle funzioni razionali qualunque di x; precetti i quali benchè generali non han fervito fin qui che a far ritrovare pochi integrali particolari, perchè applicandoli s' hanno a vincere delle grandi difficoltà; di che fe ne incontrerà un efempio nel cafo che fvolgerò da ultimo: inoltre le inveftigazioni cui quefta materia dà luogo fono dilettevoli e vantaggiofe, indipendentemente dall' oggetto d' integrazione, perchè fovente conducono a quiftioni, e ad artifizj fingolari di Algebra finita, che fa d' uopo dichiarare con quella precifione, che fi può, maggiore. Quefte rifleffioni me ne porgono un' altra, ch' è tutta propria dell' analifi, cioè che in fomiglianti argomenti non bafta per la perfezione dell' opera il dare una formola che rinchiuda la foluzione del propofto problema, ma bifogna ancora ch' effa fia la più femplice di tutte quelle che naturalmente si potrebbono ritrovare. La Società Italiana al cui giudizio ho l' onore di sottoporre il presente opuscolo, il quale serve di continuazione al primo, decida se per avventura io v'ho conseguito una sì importante condizione.

Integrale della formola $\frac{(A+Bz)\,dz}{(a^2-2abz\cos\phi+b^2z^2)^p}$ *sviluppato in serie finita, essendo p un numero qualunque intero.*

I. Sia per maggiore brevità $a^2-2abz\cos\phi+b^2z^2=X$, si raccoglie dal citato metodo di *Eulero* $\int\frac{(A+Bz)\,dz}{X^p}=$

$$\text{Cost.}-\frac{B}{2(p-1)b^2X^{p-1}}+\frac{Ab+Ba\cos\phi}{2b^2}\Big\{(bz-a\cos\phi)$$

$$\Big(\frac{1}{(p-1)a^2\sin^2\phi\,.\,X^{p-1}}+\frac{2p-3}{2(p-1)(p-2)(a\sin\phi)^4.\,X^{p-2}}$$

$$+\frac{(2p-3)(2p-5)}{2^2(p-1)(p-2)(p-3)(a\sin\phi)^6.\,X^{p-3}}$$

$$+\frac{(2p-3)\ldots(2p-7)}{2^3(p-1)\ldots(p-4)(a\sin\phi)^8.\,X^{p-4}}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{(2p-3)(2p-5)\ldots3.1}{2^{p-2}(p-1)(p-2)\ldots2.1.(a\sin\phi)^{4.(p-1)}.X}\Big)$$

$$+\frac{(2p-3)(2p-5)\ldots.3.1}{2^{p-2}(p-1)(p-2)\ldots2.1.(a\sin\phi)^{2p-1}}\,\text{Arc. tan.}$$

$$\frac{bz\sin\phi}{a-bz\cos\phi}\Big\}\ldots\ldots(1)$$ il cui numero di termini è $=p+1$

Se si suppone in questa formola $p=2,3,4$, ecc. si troveranno per mezzo delle riduzioni necessarie i stessi integrali che si deducono immediatamente dalla mentovata formola (7) della precedente Memoria, come ivi l'ho dimostrato in alcuni esempj.

II. La formola $\frac{(A+Bx)\,dx}{(a+bx+cx^2)^p}$ è più generale della precedente quantunque quella a questa possa essere paragonata; in fatti a parlar propriamente la prima non rappresenta la seconda che nel caso di $4ac>b^2$, cioè quando i fattori

della formola del 2.° grado $a+bx+cx^2$ sono imaginarj; i Geometri essendo allora convenuti di esprimere il prodotto di tali fattori con una formola qualunque simile a questa $aa-2abz\cos\phi+bbzz$; pure volendo dedurre dalla formola (1) l' integrale di $\frac{(A+Bx)dx}{(a+bx+cx^2)^p}$, se ne confronterebbono i differenziali, e si avrebbe $z=x$, $a=\sqrt{a}$, $b=\sqrt{c}$
$\cos\phi=-\frac{b}{2\sqrt{ac}}$, $\sin\phi=\frac{\sqrt{(4ac-b^2)}}{2\sqrt{ac}}$, $bz-a\cos\phi=\frac{2cx+b}{2\sqrt{c}}$
$\frac{Ab+aB\cos\phi}{bz}=\frac{2Ac-Bb}{2c^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{bz-a\cos\phi}{a\sin\phi}=\frac{2cx+b}{\sqrt{(4ac-b^2)}}$

Ma invece di Arc. tan. $\frac{bz-a\cos\phi}{a\sin\phi}$ più Arc. tan. $\frac{\cos\phi}{\sin\phi}$ $=$ Arc. tan. $\frac{bz\sin\phi}{a-bz\cos\phi}$, come ha fatto *Eulero*, noi conserveremo l' Arc. tan. $\frac{bz-a\cos\phi}{a\sin\phi}$ che dà la semplice integrazione, e ciò per ritenere l' analogia che passa fra questo fattore dell' ultimo termine ed i fattori degli ultimi termini delle formole che daremo in appresso; onde $\frac{bz-a\cos\phi}{a\sin\phi}$ $=\frac{2cx+b}{\sqrt{(4ac-b^2)}}$. Ora tanto la formola (1) quanto la formola (7) della precedente Memoria non rinchiudono altro radicale, capace a divenire imaginario, che $a\sin\phi=\frac{\sqrt{(4ac-b^2)}}{2\sqrt{c}}$; ma $a\sin\phi$ vi ascende da per tutto, eccetto che all' ultimo termine, ad una dimensione pari, dunque le accennate formole non contengono alcuna quantità impossibile, sempre astraendo dall' ultimo termine, qualunque sia la natura de' fattori del trinomio $a+bx+cx^2$.

La quantità $a\sin\phi=\frac{\sqrt{(4ac-b^2)}}{2\sqrt{c}}$ è reale, quando $4ac>b^2$, cioè quando gli anzidetti fattori sono imaginarj; dunque l' ultimo termine è ancor egli reale, qualunque sia la dimensione che vi occupi la quantità $a\sin\phi$; dunque il caso, in cui i fattori di $a+bx+cx^2$ sono imaginarj, è sciolto da ciascheduna delle formole (1) e (7).

Se tali fattori sono reali ed ineguali fra di loro, cioè se $bb > 4ac$, l' ultimo termine di ciascheduna delle mentovate formole comprende degli imaginarj; dunque nessuna di esse scioglie quest' ultimo caso, come il richiede appunto la precisione del problema.

In quest' ipotesi l' ultimo termine è, non tenendo conto de' fattori numerici, $\frac{1}{(a \sin \phi)^{2p-1}}$ Arc. tan. $\frac{bz - a \cos \phi}{a \sin \phi}$ $= \frac{1}{(a \sin \phi)^{2(p-1)} a \sin \phi}$ Arc. tan. $\frac{bz - a \cos \phi}{a \sin \phi}$, in modo che non v'ha che il fattore $\frac{1}{a \sin \phi}$ Arc. tan. $\frac{bz - a \cos \phi}{a \sin \phi}$ il quale possa contenere degli imaginarj; ma allora invece di prendere l' integrale di $\frac{dz}{aa - 2abz \cos \phi + b^2 z^2}$ $= \frac{dx}{a + bx + cx^2}$ per mezzo di una funzione circolare, il si prenda per mezzo di una funzione logaritmica.

III. Si avrà in questa maniera $\int \frac{dx}{a+bx+cx^2}$ $= \frac{1}{\sqrt{(b^2 - 4ac)}} \log. \frac{b + 2cx - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{b + 2cx + \sqrt{(b^2 - 4ac)}} = \frac{2}{\sqrt{(4ac - b^2)}}$ Arc. tan. $\frac{2cx + b}{\sqrt{(4ac - b^2)}}$.

Dunque nel caso de' fattori reali ed ineguali della formola $a+bx+cx^2$. cioè quando $b^2 > 4ac$ per la quantità circolare che contiene degli imaginarj, si prenda la quantità reale logaritmica che le corrisponde; e reciprocamente quando il trinomio $a+bx+cz^2$ ha i suoi fattori imaginarj, cioè quando $4ac > b^2$, in luogo della quantità logaritmica che rinchiude degli imaginarj, si riterrà la nota quantità circolare reale; osservazione importante e fondamentale per l' analisi ch' esporremo nel corso di questa Memoria.

IV. Ma per procedere con ordine e affine di ottenere i più semplici risultati possibili, cercherò brevemente in due diverse maniere l'integrale della formola $\frac{(A+Bx)\,dx}{(a+bx+cx^2)^p}$, la quale mi condurrà naturalmente agli integrali di quelle che formano l'oggetto della presente Memoria.

Prima maniera. Sia la formola $\frac{(A+Bx)\,dx}{a+bx+cx^2)^p}$; supponga visi $x=y-\frac{b}{2c}$, inoltre $A-\frac{Bb}{2c}=C$, e $\frac{a}{c}-\frac{b^2}{4c^2}=D$, si avrà $\int\frac{(A+Bx)\,dx}{(a+bx+cx^2)^p}=-\frac{B}{2c(p-1)(a+bx+cx^2)^{p-1}}$ $+\frac{C}{c^p}\int\frac{dy}{(y^2+D)^p}$...... (2) trattone il caso di $p=1$.

V. Se $p=1$; si ha $\int\frac{(A+Bx)\,dx}{(a+bx+cx^2)^p}=\frac{B}{2c}\log.(a+bx+cx^2)+\frac{2Ac-Bb}{c\sqrt{(4ac-b^2)}}$ Arc. tan. $\frac{2cx+b}{\sqrt{(4ac-b^2)}}$ $+$ Cost. . . . . . (3)

Qualunque sia la natura de i fattori del trinomio $a+bx+cx^2$, essi non ci presentano più alcuna difficoltà in forza dell' osservazione del n.° 3. Ma qui sul principio giova prevenire una volta per sempre che non faremo mai menzione del caso in cui i fattori de i denominatori in quistione sono eguali fra di loro, comechè allora l' integrazione ne sia facile e conosciuta.

VI. Ritorno al caso generale, e pongo $\frac{1}{y^2+D}=\frac{a1}{y+\sqrt{(-D)}}$ $+\frac{a2}{y-\sqrt{(-D)}}$; si trova $a1=-\frac{1}{2\sqrt{(-D)}}$; $a2=\frac{1}{2\sqrt{(-D)}}$; sia $y+\sqrt{(-D)}=z$; dunque $y=z-\sqrt{(-D)}$, e $y-\sqrt{(-D)}$ $=z-2\sqrt{(-D)}$; se si suppone $b1=2\sqrt{(-D)}$, si avrà $y-\sqrt{(-D)}=z-b1$; ed in conseguenza $\frac{1}{(y^2+D)^p}$

$$=\left(\frac{a1}{z}+\frac{a2}{z-b1}\right)^p=\frac{a1^p}{z^p}+\frac{p}{1}\cdot\frac{a1^{p-1}}{zp^{p-1}}\cdot\frac{a2}{z-b1}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{p(p-1)\ldots(d-m+2)}{1.2\ldots\ldots m-1}\cdot\frac{a1^{p-m+1}}{z^{p-m+1}}\cdot\frac{a2^{m-1}}{(z-b1)^{m-1}}+\ldots$$

$+\dfrac{a2^p}{(z-b1)^p}$, ſignificando m il rango di ciaſchedun termine.

Dunque
$$\int\frac{dy}{(y^2+D)^p}=a1^p\int\frac{dz}{z^p}+a2^p\int\frac{dz}{(z-b1)^p}$$
$$+a1^{p-m+1}.a2^{m-1}.\frac{p(p-1)\ldots(pm+2)}{1.2\ldots.m-1}\int\frac{z^{m-p-1}dz}{(z-b1)^{m-1}}$$
$$=\text{Coſt.}+\frac{a1^p}{(1-p)z^{p-1}}+\frac{a2^p}{(1-p)(z-b1)^{p-1}}+a1^{p-m+1}.$$
$$a2^{m-1}.\frac{p(p-1)\ldots(p-m+2)}{1.2\ldots m-1}\int\frac{z^{m-p-1}dz}{(z-b1)^{m-2}}\ldots\ldots (4)$$
Prendendo $p-1$ volte queſt' ultimo termine ovvero queſt' ultimo integrale, ſoſtituendo a ciaſcheduna volta a m queſti valori ſucceſſivi $2, 3, 4\ldots p$.

VII. Ora per integrare la frazione $\dfrac{z^{m-p-1}dz}{(z-b1)^{m-1}}$ farò uſo della formola (3) del Sig Cav. *Lorgna* da me pure dimoſtrata nella precedente Memoria, e che per maggiore facilità traſcrivo qui come ſegue
$$\int\frac{x^m dx}{(b+cx^n)^p}$$
$$=-\frac{\big(m-n(p-1)+1\big)\big(m-n(p-2)+1\big)\ldots.(m-n+1)}{1.2.3\ldots.(p-1)(cn)^{p-1}}$$
$$\Bigg(\frac{x^{m-n(p-1)+1}}{\big(m-n(p-1)+1\big)(b+cx^n)}$$
$$+\frac{1.cnx^{m-n(p-2)+1}}{\big(m-n(p-1)+1\big)\big(m-n(p-2)+1\big)(b+cx^n)^2}$$
$$+\frac{1.2.c^2n^2x^{m-n(p-3)+1}}{\big(m-n(p-1)+1\big)\ldots\big(m-n(p-3)+1\big)(b+cx^n)^3}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{1.2.3\ldots(p-2)(cn)^{p-2}x^{m-n+1}}{\big(m-n(p-1)+1\big)\big(m-n(p-2)+1\big)\ldots(m-n+1)(b+cx^n)^{p-1}}$$
$$-\int\frac{x^{m-n(p-1)}dx}{b+cx^n}\Bigg).$$
La legge che vi regna è evidente; il numero de' termini $=p$, de' quali $p-1$ ſono algebraici, e liberi dal ſegno d' integrazione.

VIII. Ciò poſto abbiamo paragonando $x=z$; $n=1$; $p=m-1$; $m=m-p-1$; $c=1$; $b=-b1$, dunque fatte le sostituzioni necessarie si ha, chiamando S la serie de' $m-2$ termini algebraici, $\int \frac{z^{m-p-1}dz}{(z-b1)^{m-1}}$ $= \frac{(2-p)(3-p)(4-p)\dots(m-p-1)}{1.\,2.\,3\dots\dots m-2}\left(\int \frac{dz}{(z-b1)z^{p-1}}\right.$ $\left.-S\right)\dots(5)$. E $S = \frac{1}{(2-p)(z-b1)z^{p-2}}$ $+\frac{1}{(2-p)(3-p)(z-b1)^2z^{p-3}}+\frac{1}{(2-p)\dots(4-p)(z-b1)^3z^{p-4}}$ $+\dots\dots+\frac{1.\,2.\,3\dots\dots\dots m-3}{(2-p)(3-p)\dots(m-p-1)(z-1b)^{m-2}z^{p-m+1}}$

Sia $\frac{1}{(z-b1)z^{p-1}} = \frac{A}{z^{p-1}}+\frac{B}{z^{p-2}}+\frac{C}{z^{p-3}}+\dots+\frac{T}{z}+\frac{U}{z-b1}$ Riducendo allo stesso denominatore, e confrontando i termini omogenei si ha $A=-\frac{1}{b1}$; $B=-\frac{1}{b1^2}$; $C=-\frac{1}{b1^3}$; $D=-\frac{1}{b1^4}$; :::::::: $T=-\frac{1}{b1^{p-1}}$; $U=\frac{1}{b1^{p-1}}$. Dunque ponendo questi valori nella serie precedente e moltiplicandola per dz, se ne avrà l'integrale $\int\frac{dz}{(z-b1)z^{p-1}} = \frac{1}{(p-2)b1\,z^{p-2}}$ $+\frac{1}{(p-3)b1^2z^{p-3}}+\frac{1}{(p-4)b1^3z^{p-4}}+\dots\dots+\frac{1}{b1^{p-1}}$ log. $\frac{z-b1}{z}$ il cui numero di termini $=p-1$, de' quali $p-2$ sono algebraici.

Chiamo per abbreviare $S1$ la serie precedente, e moltiplico l'equazione (4) per $\frac{C}{c^p}$, ho $\frac{C}{c^p}\int\frac{dy}{(y^2+D)^p} = $ Cost. $+\frac{a1^pC}{c^p(1-p)z^{p-1}}+\frac{a2^pC}{c^p(1-p)(z-b1)^{p-1}}$ $+\frac{a1^{p-m+1}.\,a2^{m-1}.\,C}{c^p}\cdot\frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-m+2)}{1.\,2\dots.m-1}\cdot$ $\frac{(2-p)(3-p)(4-p)\dots(m-p-1)}{1.\,2.\,3\dots.m-2}(S1-S)\dots(6)$

Prendendo nel modo qui sopra indicato $p-1$ volte quest' ultimo termine.

Pongasi a cagion di brevità $g=\sqrt{(b^2-4ac)}$, si troveranno i valori di c, D, $a1$, $a2$, e $b1$, come segue $C=\frac{2Ac-Bb}{2c}$, $D=-\frac{g^2}{4c^2}$; $\sqrt{(-D)}=\frac{g}{2c}$; $a1=-\frac{c}{g}$; $a2=\frac{c}{g}$; $b1=\frac{g}{c}$; $z=\frac{b+2cx+g}{2c}$; $z-b1=\frac{b+2cx-g}{2c}$;

Dunque $\frac{a1^pC}{c^p(1-p)z^{p-1}}=\frac{(-1)^p(2c)^{p-2}(2Ac-Bb)}{(1-p)g^p(b+g+2cx)^{p-1}}$;

$\frac{a2^pC}{c^p(1-p)(z-b1)^{p-1}}=\frac{(2c)^{p-2}(2Ac-Bb)}{(1-p)g^p(b-g+2cx)^{p-1}}$;

$\frac{a1^{p-m+1}.a2^{m-1}.C}{c^p}=\frac{(-1)^{p-m+1}(2Ac-Bb)}{2cg^p}$; $S=(2c)^{p-2}$

$$\left(\frac{1}{(2-p)(b-g+2cx)(b+g+2cx)^{p-2}}\right.$$

$$+\frac{1}{(2-p)(3-p)(b-g+2cx)^2(b+g+2cx)^{p-3}}$$

$$+\frac{1.2}{(2-p)\ldots(4-p)(b-g+2cx)^3(b+g+2cx)^{p-4}}+\ldots$$

$$\left.+\frac{1.2.3\ldots m-3}{(2-p)(3-p)\ldots(m-p-1)(b-g+2cx)^{m-2}(b+g+2cx)^{p-m+1}}\right)$$

... (7); il numero de' termini $=m-2$; in guisa che si avrà $S=0$, quando $m=2$.

E $S1=c^{p-1}\left(\frac{2^{p-2}}{g(p-2)(b+2cx+g)^{p-2}}\right.$

$$+\frac{2^{p-3}}{g^2(p-3)(b+2cx+g)^{p-3}}+\frac{2^{p-4}}{g^3(p-4)(b+2cx+g)^{p-4}}+\ldots$$

$+\frac{1}{g^{p-1}}\log.\left.\frac{b+2cx-g}{b+2cx+g}\right)$....(8), il cui numero di termini è $=p-1$. Dunque l'integrale (2) diverrà

$$\int\frac{(A+Bx)dx}{(a+bx+cx^2)^p}=-\frac{B}{2c(p-1)(a+bx+cx^2)^{p-1}}$$

$$-\frac{(-1)^p(2c)^{p-2}(2Ac-Bb)}{g^p(p-1)(b+2cx+g)^{p-1}}-\frac{(2c)^{p-2}(2Ac-Bb)}{g^p(p-1)(b+2cx-g)^{p-1}}$$

$+(-1)$

$$+\frac{(-1)^{p-m+1}(2Ac-Bb)}{2cg^p}\cdot\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-m+2)}{1.2.3\ldots.m-1}\cdot$$

$\frac{(2-p)(3-p)\ldots(m-p-1)}{1.2\ldots m-2}(S1-S)+$ Cost.... (9) Prendendo sempre $p-1$ volte quest' ultimo termine nel modo già indicato.

IX. Riducendo allo stesso denominatore il 2.° e 3.° termine dell' integrale precedente, e facendo attenzione che $(b+2cx+g)(b+2cx-g)=4c(a+bx+cx^2)$, si avrà la somma di questi due termini $=\frac{2Ac-Bb}{c(1-p)(2g)^p}\cdot$
$\frac{(-1)^p(b+2cx+g)^{p-1}+(b+2cx+g)^{p-1}}{(a+bx+cx^2)^{p-1}}$

Sia per abbreviare $b+2cx=u$, ed il numeratore $(-1)^p$ $(b+2cx-g)^{p-1}+(b+2cx+g)^{p-1}=S2=(-1)^p(u-g)^{p-1}$ $+(u+g)^{p-1}$; p sarà o un numero pari, o un numero dispari; s'egli è pari si avrà $(-1)^p=1$; dunque $S2=(u-g)^{p-1}$ $+(u+g)^{p-1}$; ma $(u-g)^{p-1}=u^{p-1}-Au^{p-2}g+Bu^{p-3}g^2-\ldots.-g^{p-1}$ E $(u+g)^{p-1}=u^{p-1}+Au^{p-2}g+Bu^{p-3}g^2+\ldots\ldots+g^{p-1}$ A, B, C, ecc. essendo i coefficienti numerici del 2.°, 3.°, 4.°, ecc. termine del binomio di *Nevvton*; dunque sommando queste serie, poi dividendole per 2, come ancora il denominatore del fattore $\frac{2Ac-Bb}{2^pg^p(1-p)}$ che quindi diviene $\frac{2Ac-Bb}{2^{p-1}g^p(1-p)}$, si avrà, dopo aver messo per u il suo valore $b+2cx$, $S2=(b+2cx)^{p-1}+B(b+2cx^{p-3}g^2+D(b+2cx)^{p-5}$ $g^4+F(b+2cx)^{p-7}g^6+\ldots..+A(b+2cx)g^{p-2},\ldots..(10)$ il cui numero di termini $=\frac{p}{2}$.

Se p è un numero dispari, allora $(-1)^p=-1$, e si avrà

$$S2=-(u-g)^{p-1}+(u+g)^{p-1}=-u^{p-1}+Au^{p-2}g-Bu^{p-3}g^2+\ldots.-g^{p-1}$$
$$+u^{p-1}+Au^{p-2}g+Bu^{p-3}g^2+\ldots.+g^{p-1}$$

Dunque riducendo, dividendo per 2, e mettendo per u il suo valore si ha $S2=A(b+2cx)^{p-2}g+C(b+2cx)^{p-4}g^3+E$

$(b+2cx)^{p-6}g^{s}+\ldots+A(b+2cx)g^{p-2}\ldots(11)$ il cui numero di termini è $=\frac{p-1}{2}$

E $A=\frac{p-1}{1}$; $B=\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}$; $C=\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3}$; $D=\frac{(p-1)\ldots(p-4)}{1.2.3.4}$; ecc. Onde l' integrale (9) diviene dopo le riduzioni neceſſarie $\int\frac{(A+Bx)\,dx}{(a+bx+cx^2)^p}=$ Coſt.

$$-\frac{B}{2c(p-1)(a+bx+cx^2)^{p-1}}+\frac{2Ac-Bb}{2cg^p}$$
$$\left(\frac{S2}{2^{p-2}(1-p)(a+bx+cx^2)^{p-1}}+(-1)^{p-m+1}.\frac{p(p-1)(p-2)\ldots p(-m+2}{1.2.3\ldots m-1}.\right.$$
$$\left.\frac{(2-p)(3-p)\ldots(m-p-1)}{1.2\ldots m-2}(S1-S)\right)\ldots.(12)$$

In luogo di $S2$ ſi porrà il ſuo valore (10) ovvero (11) ſecondo che p ſarà pari o diſpari; e ſi prenderà l' ultimo termine dell' integrale precedente tante volte quante unità $p-1$ contiene, ſoſtituendo ſucceſſivamente a m tutti i numeri naturali intieri dopo $m=2$ inſino a $m=p$.

Abbiamo di già oſſervato che nel caſo di $m=2$, ſi ha $S=0$; allora per il fattore $\frac{(2-p)(3-p)\ldots(m-p-1)}{1.2\ldots.m-2}$ ſi metterà l'unità; perchè queſto fattore ſvaniſce in tal caſo, la formola (3) della prec. Mem. non dando alcuna riduzione per la formola $\int\frac{z^{m-1-p}\,dz}{(z-b1)^{m-1}}=\int\frac{dz}{(z-b1)\,z^{p-1}}$.

Il numero de' termini che compongono la ſerie S è $=m-2$; dunque quando $m=2,\ 3,\ 4,\ldots p$, ſi avrà queſta ſerie di termini $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots p-2$, la cui ſomma $=\frac{(p-1)(p-2)}{2}$; aggiungendo a queſto numero il numero de i termini della ſerie $S1$ preſo $p-1$ volte, ſi avrà il numero totale de i termini del 3.° ovvero dell' ultimo termine dell'integrale (12), $=\frac{(p-1)(p-2)}{2}+(p-1)^2$ $=\frac{(p-1)(3p-4)}{2}$

Qualunque siano i fattori del trinomio $a+bx+cx^2$ la formola (12) dà per mezzo dell'osservazione del n.° 3 l'integrale cercato, libero da qualunque forma imaginaria.

X Applichiamo la formola (12) ad alcuni esempj, che possono essere d'un uso frequente nell'analisi.

Sia dunque primieramente $p=2$; la formola (12) dà dopo le riduzioni necessarie $\int\frac{(A+Bx)\,dx}{(a+bx+cx^2)^2}=\text{Cost.}$

$$-\frac{B}{2c(a+bx+cx^2)}-\frac{2Ac-Bb}{b^2-4ac}\Big(\frac{b+2cx}{2c(a+bx+cx^2)}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{(b^2-4ac)}}\log.\frac{b+2cx-\sqrt{(b^2-4ac)}}{b+2cx+\sqrt{(b^2-4ac)}}\Big)\;\ldots\ldots(13)$$

Sia in 2.° luogo $p=3$; si avrà, rappresentando per $S1^3$ l'espressione (7) di S, quando vi si suppone $m=3$

$$\int\frac{(A+Bx)\,dx}{(a+bx+cx^2)^3}=\text{Cost.}-\frac{B}{4c(a+bx+cx^2)^2}-\frac{2Ac-Bb}{2cg^2}$$
$$\Big(-\frac{g(b+2cx)}{2(a+bx+cx^2)^2}+bS1-3S'^3\Big).$$ Ma il valore (8) di $S1$ diviene $S1=\frac{2c^2}{g(b+2cx+g)}+\frac{c^2}{g^2}\log.\frac{b+2cx-g}{b+2cx+g}$;

e quello di S'^3, $S'^3=\frac{-4c^2}{(b+2cx-g)(b+2cx+g)}$. Dunque sostituendo, e riducendo, si ha $\int\frac{(A+Bx)\,dx}{(a+bx+cx)^3}=\text{Cost.}$

$$-\frac{B}{4c(a+bx-cx^2)^2}+\frac{2Ac-Bb}{2cg^2}\Big(\frac{-g(b+2cx)}{2(a+bx+cx^2)^2}$$
$$+\frac{3c(b+2cx)}{g(a+bx+cx^2)}+\frac{bc^2}{g^2}\log.\frac{b+2cx-g}{b+2cx+g}\Big)\;\ldots\ldots(14)$$

Se si riducono allo stesso denominatore le frazioni $\frac{-g(b+2cx)}{2(a+bx+cx^2)^2}$, $\frac{3c(b+2cx)}{g(a+bx+cx^2)}$ si avrà la loro somma

$$=\frac{10abc-b^3+4c(b^2+5ac)x+18c^2bx^2+12c^3x^3}{2g(a+bx+cx^2)^2}$$

Sia in 3.° luogo $p=4$, e S'^3, S'^4 i valori di S quando si fa successivamente nella serie (7) $m=3$, $m=4$; si avrà

$$\int \frac{(A+Bx)\,dx}{(a+bx+cx^2)^4} = \text{Cost.} - \frac{B}{bc(a+bx+cx^2)^3} + \frac{2Ac-Bb}{2cg^4}$$
$$\left(- \frac{(b+2cx)^3 + 3(b+2cx)g^2}{12(a+bx+cx^2)^3} - 20S1 + 12S'^3 + 4S'^4 \right)$$

Ma $S'^3 = \dfrac{-4c^3}{(b+2cx-g)(b+2cx+g)^2}$

$$S'^4 = \frac{-4c^3}{(b-g+2cx)(b+2cx+g)^3} + \frac{4c^3}{(b-g+2cx)^2(b+g+2cx)^2}$$

E $S1 = \dfrac{2c^3}{g(b+2cx+g)^2} + \dfrac{2c^3}{g^2(b+2cx+g)} + \dfrac{c^3}{g^3}\log.\dfrac{b+2cx-g}{b+2cx+g}$

Dunque sostituendo e riducendo allo stesso denominatore tutte le frazioni Algebraiche ch' entrano in S'^3, S'^4, $S1$, si avrà dopo aver fatto per abbreviare $\alpha - b(9ac-b^2)$; $\beta = 3c(b^2+bac)$, $\displaystyle\int \frac{(A+Bx)\,dx}{(a+bx+cx^2)^4} = \text{Cost.} - \frac{B}{bc(a+bx+cx^2)^3}$
$$- \frac{2Ac-Bb}{g^4}\left(\frac{b+2cx}{24c} \cdot \frac{3g^2+(b+2cx)^2}{(a+bx+cx^2)^3} \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha+\beta x+15bc^2x^2+10c^3x^3}{g^2(a+bx+cx^2)^2} + \frac{10c^3}{g^3}\log.\frac{b+2cx-g}{b+2cx+g} \right) \ldots$$
(15) ecc.

XI. *Seconda Maniera*. Questo secondo metodo ci servirà di base, per la sua grande semplicità, alle integrazioni che daremo nel corso di questa Memoria.

Ripiglio l'equazione (2) ch'è $\displaystyle\int \frac{(A+Bx)\,dx}{(a+bx+cx^2)^p} =$
$$- \frac{B}{2c(p-1)(a+bx+cx^2)^{p-1}} + \frac{C}{c^p}\int \frac{dy}{(y^2+D)^p}.$$ Si ha

$\dfrac{1}{(y^2+D)} = \dfrac{1}{(y+\sqrt{(-D)})(y-\sqrt{(-D)})}$; suppongo

$\dfrac{1}{(y+\sqrt{(-D)})(y-\sqrt{(-D)})} = \dfrac{u}{y+\sqrt{(-D)}}$; dunque

$u = \dfrac{1}{y-\sqrt{(-D)}}$; e $y = \dfrac{1+u\sqrt{(-D)}}{u}$, e $y+\sqrt{(-D)}$

$= \dfrac{1+b1u}{u}$, ponendo come sopra $2\sqrt{(-D)} = b1$; dunque

$dy = -\frac{du}{u^2}$; e $\frac{1}{(y^2+D)^p} = \frac{u^{2p}}{(1+b1u)^p}$; onde $\frac{dy}{(y^2+D)^p} = -\frac{u^{2(p-1)}du}{(1+b1u)^p}$. Sia $1+b1u=z$; si avrà $u=\frac{z-1}{b1}$; $du=\frac{dz}{b1}$; e $u^{2(p-1)} = \frac{(z-1)^{2(p-1)}}{b1^{2(p-1)}}$, dunque $-\frac{u^{2(p-1)}du}{(1+b1u)^p} = -\frac{1}{b1^{2p-1}} : \frac{(z-1)^{2(p-1)}dz}{z^p}$. Ma $(z-1)^{2(p-1)} = 1+z^{2(p-1)}$ $\pm \frac{(2p-2)(2p-3)(2p-4)\ldots(2p-n-1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots n} z^{2p-n-1}$ $n+1$ esprime il rango di ciaschedun termine; si prenderà il 3.° termine, che rappresento per T, del 2.° membro dell'equazione precedente tante volte quante unità contiene il numero $2p-3$, sostituendo successivamente a n questi valori 1, 2, 3, 4, ... $2p-3$, e si conserverà il segno $+$ ovvero il segno $-$; secondo che n sarà un numero pari ovvero un numero dispari; dunque $(z-1)^{2(p-1)}\frac{dz}{z^p} = \frac{dz}{z^p} + z^{p-2}dz \pm Tz^{p-n-1}$;

ed in conseguenza $-\frac{1}{b1^{2p-1}}\int (z-1)^{2(p-1)}\frac{dz}{z^p} = \frac{1}{(p-1)b1^{2p-1}}$ $\left(\frac{1}{z^{p-1}} - z^{p-1}\right) \mp \frac{Tz^{p-n-1}}{(p-n-1)b1^{2p-1}}$ Si prenderà nella maniera indicata l'ultimo termine di questo integrale in $-$ ovvero $+$ secondo che n sarà pari o dispari.

Ora $z = 1+b1u = 1+\frac{b1}{y-\sqrt{(-D)}}$; dunque $\int\frac{dy}{(y^2+D)^p}$ $= -\int\frac{u^{2(p-1)}du}{(1+b1u)^p} = -\frac{1}{b1^{2p-1}}\int(z-1)^{2(p-1)}\frac{dz}{z^p}$ $= \frac{1}{(p-1)b1^{2p-1}}\left(\frac{1}{z^{p-1}}-z^{p-1}\right)\mp\frac{Tz^{p-n-1}}{(p-n-1)b1^{2p-1}} = \frac{1}{b1^{2p-1}}$ $\left(\frac{(y-\sqrt{(-D)})^{2(p-1)}-(y+\sqrt{(-D)})^{2(p-1)}}{(p-1)(y^2+D)^{p-1}}\mp\frac{T}{p-n-1}\left(\frac{y+\sqrt{(-D)}}{y-\sqrt{(-D)}}\right)^{p-n-1}\right)$; sempre prendendo il termine ov'entra il fattore T nel modo accennato.

Sia a cagion di brevità $p-1=s$; e $\sqrt{(-D)}=P$; ſi ha $(y-P)^{2s}=y^{2s}-Ay^{2s-1}P+By^{2s-2}P^2-\ldots\ldots+P^{2s}$ ed $(y+P)^{2s}=y^{2s}+Ay^{2s-1}P+By^{2s-2}P^2+\ldots\ldots+P^{2s}$; dunque $(y-P)^{2s}-(y+P)^{2s}=-2y\sqrt{(-D)}\big(Ay^{2s-2}-Cy^{2s-4}D+Ey^{2s-6}D^2-Gy^{2s-8}D^3+\ldots+A(-D)^{s-1}\big)$. Ma $\sqrt{(-D)}=\frac{g}{2c}$, (n.° 7); dunque ſoſtituendo a y il ſuo valore $\frac{2cx+b}{2c}$; e facendo per abbreviare $2cx+b=u$, e $(y-P)^{2s}-(y+P)^{2s}=S3$, ſi avrà dopo le riduzioni neceſſarie $S3=-\frac{gu}{2^{2p-3}c^{2(p-1)}}$
$$\left(Au^{2p-4}+Cu^{2p-6}g^2+Eu^{2p-8}g^4+Gu^{2p-10}g^6+\ldots\ldots+Ag^{2(p-2)}\right)\ldots(16)$$
Il numero de i termini di queſta ſerie è $=p-1$. A, B, C, ecc. ſono, come ſi vede, i coefficienti del binomio di *Newton*, cioè $A=\frac{2(p-1)}{1}$, $B=\frac{(2p-2)(2p-3)}{1.\ 2}$, $C=\frac{(2p-2)(2p-3)(2p-4)}{1.\ 2.\ 3}$ ecc. Dunque
$$\frac{C}{c^p}\int\frac{dy}{(y^2+D)^p}=\frac{2Ac-Bb}{2(b^2-4ac^{\frac{2p-1}{2}}}\left(\frac{c^{2p-3}S3}{(p-1)(a+bx+cx^2)^{p-1}}\pm\frac{Tc^{p-2}}{p-n-1}\left(\frac{b+2cx+\sqrt{(b^2-4ac)}}{b+2cx-\sqrt{(b^2-4ac)}}\right)^{p-n-1}\right)$$
Onde facendo per abbreviare $a+bx+cx^2=X$, ſi ottiene $\int\frac{(A+Bx)dx}{X^p}$
$$=-\frac{B}{2c(p-1)X^{p-1}}+\frac{2Ac-Bb}{2g^{2p-1}}\left(\frac{c^{2p-3}S3}{(p-1)X^{p-1}}\mp\frac{c^{p-2}}{p-n-1}\cdot\frac{(2p-2)(2p-3)2p-4)\ldots(2p-n-1)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots n}\left(\frac{b+2cx+g}{b+2cx-g}\right)^{p-n-1}\right)\ldots(17)$$
Si prenderà il 3.° cioè l' ultimo termine di queſto integrale $2p-3$ volte ſoſtituendo ſucceſſivamente a n queſti valori 1, 2, 3, ... $2p-3$, e ſi conſerverà a ciaſcheduna di tali ſoſtituzioni — ovvero +, ſecondo che n ſarà pari o diſpari.

Ogni qual volta ſi avrà $p-n-1=0$, ſi porrà nell' integrale precedente invece del fattore $\frac{1}{p-n-1}\left(\frac{b+2cx+g}{b+2cx-g}\right)^{p-n-1}$, la quantità log. $\frac{b+2cx+g}{b+2cx-g}$; poichè queſto fattore era rappresentato da questo $\frac{1}{p-n-1} z^{p-n-1} = \int z^{p-n-2} dz$; ma quando $p-n-1=0$, allora $\int z^{p-n-2} dz = \log. z$; dunque ecc.

XII. La formola precedente (17) ci sembra degna di attenzione; essa è il più semplice risultato che abbiamo potuto trovare per l' integrale in quistione; crediamo dunque di non far dispiacere al lettore, se l' illustriamo brevemente con quei medesimi esempj che abbiam di sopra spiegati.

Sia dunque $p=2$, si avrà per il valore (16) di $S3 = -\frac{g(2cx+b)}{c^2}$; dunque $\int \frac{(A+Bx)dx}{X^2} = -\frac{B}{2cX} + \frac{2Ac-Bb}{2g^3} \left(\frac{-g(2cx+b)}{cX} + 2 \log. \frac{b+2cx+g}{b+2cx-g}\right)$ ch' è identicamente lo stesso che quello segnato (13)

Se $p=3$; si ha $\int \frac{(A+Bx)dx}{X^3} = -\frac{B}{4cX^2} + \frac{2Ac-Bb}{2g^5} \left(\frac{c^2}{2X^2} \cdot \frac{-g(2cx+b)}{2^2c^4}(4(b+2cx)^2+4g^2) + \frac{4c}{1} \cdot \frac{b+2cx+g}{b+2cx-g} - \frac{4.3.c}{1.2} \log. \frac{b+2cx+g}{b+2cx-g} - \frac{4.3.2.c}{1.2.3} \cdot \frac{b+2cx-g}{b+2cx+g}\right) = \frac{2Ac-Bb}{2g^5} \left(\frac{-g(b+2cx)(g^2+(b+2cx)^2)}{4cX^2} + \frac{16g(b+2cx)}{4X} - 6c \log. \frac{b+2cx+g}{b+2cx-g}\right) - \frac{B}{4cX^2}$. Ma $-g(b+2cx)(g^2+(2cx+b)^2) + 16cgX(b+2cx) = 2g(b+2cx)(-g^2+6cX)$; dunque l' integrale precedente diviene $\int \frac{(A+Bx)dx}{X3} = -\frac{B}{4cx^2} + \frac{2Ac-Bb}{2g^5} \left(\frac{-g^3(b+2cx)}{2cX^2} + \frac{3g(b+2cx)}{X} - 6c \log. \frac{b+2cx+g}{b+2cx-g}\right)$

Integrale identico con quello segnato (14)

Sia $p=4$; si avrà $\int \frac{(A+Bx)dx}{X^4} = -\frac{B}{6cX^3} + \frac{2Ac+Bb}{2g^7} \left(\frac{c^5}{2X^3} \cdot \frac{-g(b+2cx)}{2^5c^6}(6(2cx+b)^4+20g^2(b+2cx)^2+6g^4) + \frac{c^2}{2} \cdot \frac{6}{1}\left(\frac{b+2cx+g}{b+2cx-g}\right)^2 - \frac{c^2}{1} \cdot \frac{6.5}{1.2} \cdot \frac{b+2cx+g}{b+2cx-g} + \frac{c^2}{1} \cdot \right.$

$$\frac{6.5.4}{1.2.3}\log.\frac{b+2cx+g}{b+2cx-g}+\frac{c^2}{1}.\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}.\frac{b+2cx-g}{b+2cx+g}-\frac{c^2}{2}.$$
$$\left.\frac{6.5\ldots2}{1.2\ldots5}\left(\frac{b+2cx-g}{b+2cx+g}\right)^2\right)=-\frac{B}{6cX^3}+\frac{2Ac-Bb}{2g^7}$$
$$\left(\frac{-g(b+2cx)(3g^4+10g^2(b+2cx)^2+3(b+2cx)^4)}{3.16cX^3}+3c^2\right.$$
$$\left(\left(\frac{b+2cx+g}{b+2cx-g}\right)^2-\left(\frac{b+2cx-g}{b+2cx+g}\right)^2\right)+15c^2\left(\frac{b+2cx-g}{b+2cx+g}\right.$$
$$\left.\left.-\frac{b+2cx+g}{b+2cx-g}\right)+20c^3\log.\frac{b+2cx+g}{b+2cx-g}\right)$$

Si tratta di dimoſtrare che queſto integrale è identicamente lo ſteſſo che quello ſegnato (15); a queſto oggetto pongo mente che $\left(\frac{b+2cx+g}{b+2cx-g}\right)^2-\left(\frac{b+2cx-g}{b+2cx+g}\right)^2$ $=\frac{(b+2cx+g)^4-(b+2cx-g)^4}{((b+2cx-g)(b+2cx+g))^2}$.

Sia per abbreviare $b+2cx=u$; ſi avrà $(u+g)^4-(u-g)^4$ $=8ug(u^2+g^2)=16ug(g^2+2cX)$; dunque $3c^2\left(\left(\frac{b+2cx+g}{b+2cx-g}\right)^2\right.$ $\left.-\left(\frac{b+2cx-g}{b+2cx+g}\right)^2\right)=\frac{3ug(g^2+2cX)}{X^2}$; e $15c^2\left(\frac{b+2cx-g}{b+2cx+g}\right.$ $\left.-\frac{b+2cx+g}{b+2cx-g}\right)=\frac{15cgu}{X}$; dunque $\int\frac{(A+Bx)dx}{X^4}=-\frac{B}{6cX^3}$ $+\frac{2Ac+Bb}{g^4}\left(\frac{-u(g^4+4cg^2X+3c^2X^2)}{2.3.cg^2X^3}+\frac{3u(g^2+2cX)}{2g^2X^2}\right.$ $\left.-\frac{15cu}{2g^2X}+\frac{10c^2}{g^3}\log.\frac{u+g}{u-g}\right)$. Riducendo allo ſteſſo denominatore le tre prime frazioni del 2.° termine dell' integrale precedente ſi ha $\frac{-u(g^4+4g^2cX+3c^2X^2)+9cuX(g^2 2cX)-3.15c^2uX^2}{2.3.cg^2X^3}$ $=(1)$ per maggior brevità.

Ma le frazioni $\frac{-u(3g^2+u^2)}{24cX^3}-\frac{\alpha+\beta x+15bc^2x^2+10c^3x^3}{g^2X^2}$ dell'integrale (15) divengono $-\frac{u(3g^2+u^2)}{24cX^3}+\frac{u(g^2-5cX)}{g^2X^2}$

$=-g^2u$

$$= \frac{-g^3u(3g^2+u^2)+24cuX(g^2-5cX)}{24cX^3g^2}$$

$$= \frac{-g^3u(g^2+cX)+6cuX(g^2-5cX)}{bcg^2X^3} = (2)$$; fa dunque di mestieri che l'equazione $(1)=(2)$ sia identica, cioè

$$\frac{-u(g^4+4g^2cX+3c^2X^2)+9cuX(g^2+2cX)-45c^2uX^2}{6cg^2X^3}$$

$$= \frac{-g^2u(g^2+cX)+6cuX(g^2-5cX)}{6cg^2X^3}$$. Infatti sviluppando i numeratori dopo averli divisi per u, si ha

$$\left.\begin{array}{l} -g^4-4cg^2X-3c^2X^2 \\ +18c^2X^2 \\ +g^4+9cg^2X-45c^2X^2 \\ +cg^2X+30c^2X^2 \\ -6cg^2X \end{array}\right\} = 0$$

Integrazione in serie finita della formola $\frac{x^{\pm q}dx}{(a+bx+cx^2)^p}$

XIII. Primieramente considero il caso di $+q$; e suppongo come lo richiede la generalità del problema $q > 2p$; allora q non può essere che della forma $q=\alpha p+\beta$; essendo α e β de' numeri interi positivi qualunque, purchè si abbia $\beta<p$, e che non si ponga mai $\alpha<2$. Il caso di $q=2p$ è compreso nondimeno nella forma $q=\alpha p+\beta$ in cui α diverrebbe $=2$, e $\beta=0$; se $q<2p$, allora il problema non ha alcuna difficoltà ed è egualmente sciolto da quel che segue.

E' quistione presentemente di ridurre la frazione $\frac{x^q}{X^p}$, X essendo sempre per abbreviare $=a+bx+cx^2$, in guisa che la più alta potenza di x nel numeratore sia minore di due unità della più alta potenza di x nel denominatore; per ottenere quest' intento comincio a sviluppare la potenza X^p, ed ho $X=c(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}x+x^2)$. Sia per brevità $\frac{a}{c}=a'$, $\frac{b}{c}=b'$; e $a'+b'x=Z$; si avrà $X=c(Z+x^2)$; e $(x^2+Z)^p=x^{2p}$

$+\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}x^{2(p-n)}Z^n$; $n+1$ esprime il rango di ciaſchedun termine; ſi prenderà l' ultimo termine del 2.° membro dell' equazione precedente p volte, ſoſtituendo ſucceſſivamente a n queſti valori $1, 2, 3, \ldots p$. Ma
$$Z^n=(a'+b'x)^n=a'^n+\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.\ldots\ldots m}a'^{n-m}b'^m x^m;$$
$m+1$ eſprime il rango di ciaſchedun termine; ſi prenderà n volte l'ultimo termine ſoſtituendo ſucceſſivamente a m queſti valori $1, 2, 3, \ldots n$; dunque $(a'+b'x+x^2)^p=x^{2p}$
$$+\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1.2.\ldots\ldots n}a'^n x^{2(p-n)}+\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1.2\ldots\ldots n}\left(\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.\ldots\ldots m}a'^{n-m}b'^m x^{2(p-n)+m}\right)\ldots\ldots(18)$$

Si prenderà p volte il 2.° e 3.° termine ſoſtituendo a n queſti valori ſucceſſivi $1, 2, 3, \ldots\ldots p$; e di più a ciaſchedun valore particolare di n, ſi prenderà n volte il fattore dell'ultimo termine che giace entro i ſegni ( ), ſupponendo ſucceſſivamente $m=1, 2, 3, 4\ldots\ldots n$.

In queſta maniera ſi otterrà per via di ſemplici ſoſtituzioni lo ſviluppo d' una potenza intera qualunque d' un trinomio qualunque; forſe ci occuperemo in altro tempo d'una materia tanto importante preſa nella ſua generalità; queſto baſti dunque per ora, tanto più che i Geometri conoſcono altri metodi che conducono all' oggetto in quiſtione. Onde ſi avrà $(a'+b'x+x^2)^p=x^{2p}+a1x^{2p-1}+a2x^{2p-2}+a3x^{2p-3}+\ldots\ldots+a(2p-1)x+a(2p)$

XIV. Dividendo il numeratore per il denominatore della frazione $\frac{x^{\alpha p+\zeta}}{x^{2p}+a1x^{2p-1}+\ldots\ldots+a(2p)}$, eſtraggo la funzione intera di x che vi ſi trova; ho dunque $+x^{p(\alpha-2)+\zeta}$ per 1.° termine del quoto, ed $-a1x^{\alpha p+\zeta-1}-a2x^{\alpha p+\zeta-2}-\ldots\ldots-a(2p)x^{p(\alpha-2)+\zeta}$ per 1.° reſto; il 2.° termine del quoto è $-a1x^{p(\alpha-2)+\zeta-1}$; avendo fatto la moltiplicazione e la ſottrazione neceſſarie eſprimo per $c1, c2, c3, \ldots c(2p-1), c(2p)$ i coefficienti ſuceſſivi de i termini che formano il 2.° reſto; ho per 3.° termine del quoto $+c1x^{p(\alpha-2)+\zeta-2}$; ed eſprimo per $c(2p+1), c(2p+2), c(2p+3), \ldots c(4p-1), c(4p)$

i coefficienti preſi negativamente del 3.° reſto, dopo di che ho $-c(2p+1)x^{p(\alpha-2)+\zeta-3}$ per 4.° termine del quoto; prendo il 4.° reſto, e ne eſprimo per $c(4p+1)$, $c(4p+2)$, ... $c(6p-1)$, $c(6p)$ i coefficienti ſucceſſivi, ciò che dà $+c(4p+1)$ $x^{p(\alpha-2)+\zeta-4}$ per 5.° termine del quoto; e così diſcorrendo.

Oſſervo che il coefficiente dell' ultimo termine del 4.° reſto eſſendo $=c(6p)$, il coefficiente del 1.° termine del reſto ſeguente ſarà in virtù di queſta *notazione*, $=c(6p+1)$, in modo che avrò per il 6.° termine del quoto $-c(6p+1)$ $x^{p(\alpha-2)+\zeta-5}$; dunque a miſura che gli eſponenti di x vanno diminuendo dopo il 4.° termine $-c(2p+1)x^{p(\alpha-2)+\zeta-3}$, ciaſcheduno d'un' unità, i coefficienti de' termini ſeguenti ſono eguali al coefficiente di queſto medeſimo 4.° termine aumentato nella ſua *notazione* del prodotto di $2p$ per il numero delle unità di cui le potenze di x, le quali ſi trovano in queſti termini, ſono diminuite ſucceſſivamente; quindi rappreſentando per $x^{p(\alpha-2)+\zeta-3-n}$ il termine generale del quoto numerato dal 5.° termine incluſivamente, il ſuo coefficiente ſarà ſecondo queſta *notazione* $c(1+2p+2pn)=c(1+2p(1+n))$ facendo per un momento aſtrazione dal ſegno che lo deve precedere.

Ma ſi dee ſpingere queſta diviſione inſino al termine in cui l'eſponente di x ſia $=0$; dunque pongo $p(\alpha-2)+\zeta-3-n=0$; d'onde ſi trae $n=p(\alpha-2)+\zeta-3$; e poichè $n+4$ è il rango di ciaſchedun termine n eſſendo contato dal 5.° termine incluſivamente, il numero totale de' termini della funzione razionale, di cui ſi tratta, ſarà $n+4=p(\alpha-2)+\zeta+1$; ciò poſto, ecco il proſpetto di queſta ſerie $\frac{x^{\alpha p+\zeta}}{X^p}=\frac{1}{c^p}$

$$\Big(x^{p(\alpha-2)+\zeta}-a1x^{p(\alpha-2)+\zeta-1}+c1x^{p(\alpha-2)+\zeta-2}-c(2p+1)x^{p(\alpha-2)+\zeta-3}$$
$$+c(4p+1)x^{p(\alpha-2)+\zeta-4}-c(6p+1)x^{p(\alpha-2)+\zeta-5}+\ldots\ldots\ldots$$
$$\pm c\big(1+2p(1+n)\big)x^{p(\alpha-2)+\zeta-3-n}\pm\ldots\ldots\pm c\big(1+2p(\zeta+p(\alpha-2)-2)\big)\Big)$$
$$\mp\frac{c\big(1+2p(n+2)x^{2p-1}+c(2+2p(n+2))x^{2p-2}+c(3+2p(n+2)x^{2p-3}+\ldots+a(2p)c\big(1+2p(\zeta+p(\alpha-2)-2)\big)}{X^p}$$

in cui il numero de' termini è $=p(\alpha-2)+\zeta+2$. Si prenderà l' ultimo termine della funzione razionale di x.

positivamente o negativamente secondo che $n+3$ sarà un numero pari o un numero dispari, e ciò ch'è lo stesso, secondo che n sarà dispari o pari. Il segno della funzione frazionaria è contrario a quello dell'ultimo termine in quistione.

Si avranno i valori di $c1$, $c2$, $c3$, ... per mezzo delle seguenti equazioni.

$$\begin{array}{ll}
a1^2 - a2 = c1 & a1.c1 - c2 = c(2p+1) \\
a1.a2 - a3 = c2 & c1.a2 - c3 = c(2p+2) \\
a1.a3 - a4 = c3 & c1.a3 - c4 = c(2p+3) \\
\vdots & \vdots \\
a1.a(2p-3) - a(2p-2) = c(2p-3) & c1.a(2p-2) - c(2p-1) = c(2p-2) \\
a1.a(2p-2) - a(2p-1) = c(2p-2) & c1.a(2p-1) - c(2p) = c(4p-1) \\
a1.a(2p-1) - a(2p) = c(2p-1) & c1.a(2p) = c(4p) \\
a1.a(2p) = c(2p) &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
c(2p+1).a1 - c(2p+2) = c(4p+1) & c(4p+1).a1 - c(4p+2) = c(6p+1) \\
c(2p+1).a2 - c(2p+3) = c(4p+2) & c(4p+1).a2 - c(4p+3) = c(6p+2) \\
\vdots & \vdots \\
c(2p+1).a(2p-1) - c(4p) = c(6p-1) & c(4p+1)a(2p-1) - c(6p) = c(8p-1) \\
c(2p+1).a(2p) = c(6p) & c(4p+1)a(2p) = c(8p)
\end{array}$$

E generalmente

$$c(mp+1) = a1.c\big(1+p(m-2)\big) - c\big(2+p(m-2)\big)$$
$$c(mp+2) = a2.c\big(1+p(m-2)\big) - c\big(3+p(m-2)\big)$$
$$c(mp+3) = a3.c\big(1+p(m-2)\big) - c\big(4+p(m-2)\big)$$
$$\vdots$$
$$c\big(p(m+2)-2\big) = a(2p-2).c\big(1+p(m-2)\big) - c(mp-1)$$
$$c\big(p(m+2)-1\big) = a(2p-1).c\big(1+p(m-2)\big) - c(mp)$$
$$c\big(p(m+2)\big) = a(2p).c\big(1+p(m-2)\big)$$

Il numero di questi sistemi di equazione è eguale al numero de' termini meno uno di cui è composta la funzione razionale di x, cioè $= p(\alpha-2)+\zeta$.

Dunque $\displaystyle\int \frac{x^q dx}{X^p} = \int \frac{x^{\alpha p+\zeta} dx}{X^p} = \frac{1}{c^p}\Big(\frac{x^{p(\alpha-2)+\zeta+1}}{p(\alpha-2)+\zeta+1}$

$\displaystyle - \frac{a1 x^{p(\alpha-2)+\zeta}}{p(\alpha-2)+\zeta} + \frac{c1 x^{p(\alpha-2)+\zeta-1}}{p(\alpha-2)+\zeta-1} - \frac{c(2p+1) x^{p(\alpha-2)+\zeta-2}}{p(\alpha-2)+\zeta-2}$

$$+\frac{c(4p+1)x^{p(\alpha-2)+\zeta-3}}{p(\alpha-2)+\zeta-3}-\ldots\ldots\pm\frac{c\big(1+2p(1+n)\big)x^{p(\alpha-2)+\zeta-n-2}}{p(\alpha-2)+\zeta-n-2}\pm\ldots\ldots$$

$$\pm c\big(1+2p(\zeta+p(\alpha-2)-2)\big)x\mp\int dx\Big(c(1+2p(n+2))x^{2p-1}$$

$$+c\big(2p(n+2)+2\big)x^{2p-2}+c\big(3+2p(n+2)\big)x^{2p-3}+\ldots\ldots\ldots$$

$$+a(2p).c\big(1+2p(\zeta+p(\alpha-2)-2)\big)\Big):X^p+\text{Cost.},\ldots(19)$$

XV. Per integrare questa frazione, suppongo per abbreviare il suo numeratore $=M$, ed il suo denominatore $c^p\big(x^{2p}+a1x^{2p-1}+a2x^{2p-2}+\ldots.+a(2p-1)x+a(2p)\big)=N$; e $\frac{Mdx}{N}=\frac{Mdx}{X^p}=dU$; si ha $dN=c^pdx\big(2px^{2p-1}+a1.(2p-1)x^{2p-2}+\ldots.+a(2p-1)\big)$; sia per brevità $c\big(1+2p(n+2)\big)-c(1)$; dunque

$$\frac{c(1)dN}{2pc^pN}=\frac{dx}{N}\Big(c(1)x^{2p-1}+\frac{a1.c(1).(2p-1)x^{2p-2}}{2p}$$

$$+\frac{a2.c(1).(2p-2)x^{2p-3}}{2p}+\ldots..+\frac{a(2p-1).c(1)}{2p}\Big)$$

Dunque $dU-\frac{c(1)dN}{2pc^pN}=\frac{dx}{N}\Big\{\Big(c\big(2+2p(n+2)\big)$

$$-\frac{a1.c(1).(2p-1)}{2p}\Big)x^{2p-1}+\Big(c\big(3+2p(n+2)\big)$$

$$-\frac{a2.c(1).(2p-2)}{2p}\Big)x^{2p-3}+\ldots.+a(2p).c\big(1+2p(\zeta+p(\alpha-2)-2)\big)$$

$$-\frac{a(2p-1.c(1)}{2p}\Big\}$$

Sia per maggiore semplicità

$$c\big(2+2p(n+2)\big)-\frac{a1.c(1).(2p-1)}{2p}=(1)$$

$$c\big(3+2p(n+2)\big)-\frac{a2.c(1).(2p-2)}{2p}=(2)$$

$$c\big(4+2p(n+2)\big)-\frac{a3.c(1).(2p-3)}{2p}=(3)$$

:
:
:

$$c\left(K+2p(n+2)\right)-\frac{a(K-1).c(1).(2p-K+1)}{2p}=(K-1)$$

$$\vdots$$

$$a(2p).c\left(1+2p(\zeta+p(\alpha-2)-2)\right)-\frac{a(2p-1).c(1)}{2p}=(2p-1)$$

Dunque $U=\frac{c(1)}{2pc^p}$ log. N

$$+\int\frac{dx\left((1)x^{2p-2}+(2)x^{2p-3}+(3)x^{2p-4}+\ldots+(K-2)x^{2p-K}+\ldots+(2p-1)\right)}{X^p}$$

$=\frac{c(1)}{2c^p}$ log. $X+(K-1)\int\frac{x^{2p-K}dx}{X^p}$. Si prenderà $2p-1$ volte l' integrale di $\frac{(K-1)x^{2p-K}dx}{X^p}$, sostituendo successivamente a K i valori $2, 3, 4, 5, \ldots 2p$.

Sia la funzione razionale di x moltiplicata per c^p la quale entra nell' integrale (19) della formola $\frac{x^q dz}{X^p}, = X1$; si avrà $\int\frac{x^q dx}{X^p}=\int\frac{x^{\alpha p+\zeta}dx}{X^p}=X1\mp\frac{c(1)}{2c^p}$ log. $X\mp(K-1)$ $\int\frac{x^{2p-K}dx}{X^p}, \ldots (20) +$ Cost. Prendendo l'ultimo termine ch' è sotto il segno d' integrazione, come l' abbiam detto di sopra.

XVI. Cerco di presente l' integrale della frazione $\frac{x^{2p-K}dx}{X^p}$; prendo per quest' oggetto i due fattori di X diviso da c; essi sono $x+\frac{b-g}{2c}$, $x+\frac{b+g}{2c}$; essendo $g=\sqrt{(b^2-4ac)}$; suppongo per abbreviare $\frac{b+g}{2c}=g1$, e $\frac{b-g}{2c}=g2$; pongo $\frac{1}{(x+g1)(x+g2)}=\frac{u}{x+g1}$; dunque $u=\frac{1}{x+g2}$; e $x=\frac{1-ug2}{u}$; dunque $dx=-\frac{du}{u^2}$; e $x+g1=\frac{1+ug3}{u}$ avendo fatto per abbreviare $g1-g2=g3$; dunque $\frac{1}{(x+g1)(x+g2)}$ $=\frac{u^2}{1+ug3}$; e $\frac{x^{2p-K}dx}{X^p}=-\frac{(1-ug2)^{2p-K}u^{K-2}du}{c^p(1+ug3)^p}$.

Sia $2p-K=q'$; si avrà $(1-ug2)^{q'}$ $=\pm\frac{q'(q'-1)(q'-2)\ldots(q'-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}u^n g2^n$; $n+1$ indica il rango di ciaschedun termine; e si prenderà il 2.° membro dell' equazione precedente $q'+1$ volte sostituendo successivamente a n i valori $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots\ldots q'$; ponendo però l' unità invece del coefficiente $\pm\frac{q'(q'-1)\ldots\ldots}{1.2\ldots\ldots}$ quando $n=0$: per gli altri valori di n si conserverà il segno superiore quando $n+1$ è un numero dispari, ed il segno inferiore quando $n+1$ è un numero pari; si ha dunque con queste condizioni $-\frac{u^{K-2}(1-ug2)^{q'}du}{(1+g3u)^p}=\mp\frac{q'(q'-1)\ldots\ldots(q'-n+1)}{1.2\ldots\ldots n}$. $\frac{g2^n u^{K+n-2}du}{(1+ug3)^p}$ — ovvero + secondo che n è un numero pari ovvero un numero dispari.

Sia $1+ug3=z$; si avrà $du=\frac{dz}{g3}$; e $u=\frac{z-1}{g3}$; sia a cagione di brevità $K+n-2=r$: si avrà $u^r=\frac{(z-1)^r}{g3^r}$; r sarà sempre un numero intero positivo; perchè i più piccoli valori di K e di n sono $K=2$ e $n=0$; dunque il minimo valore di r è $r=0$; dunque gli altri valori saranno de' numeri positivi.

Ma $(z-1)^r=z^r\pm\frac{r(r-1)\ldots(r-m+1)}{1.2\ldots\ldots m}z^{r-m}$; prendendo questo termine r volte, sostituendo successivamente a m questi valori $1,\ 2,\ 3,\ldots r$; si riterrà + ovvero — secondo che m sarà un numero pari ovvero un numero dispari; $m+1$ esprime, com' è chiaro, il rango di ciaschedun termine.

Dunque $\frac{u^{K+n-2}du}{(1+ug3)^p}=\frac{(z-1)^r dz}{g3^{r+1}z^p}=\frac{1}{g3^{r+1}}\Big(z^{r-p}dz$

$\pm \frac{r(r-1)\ldots(r-m+1)}{1.2\ldots\ldots m} z^{r-m-p}dz\Big)$. Ma $r-p \pm K+n-p-2=r'$; dunque $\int \frac{u^{K+n-2}du}{(1+g3u)^p} = \frac{1}{g3^{r+1}} \int \frac{(z-1)^r dz}{z^p}$
$= \frac{1}{g3^{r+1}}\Big(\frac{1}{r'+1} z^{r'+1} \pm \frac{r(r-1)\ldots(r-m+1)}{1.2\ldots\ldots m} \cdot \frac{1}{r'-m+1} z^{r'-m+1}\Big)$; dunque $\int \frac{x^{2p-K}dx}{(a+bx+cx^2)^p} = -\frac{1}{c^p}$
$\int \frac{(1-ug2)^{q'}u^{K-2}du}{(1+ug3)^p} = \text{Cost.} \mp \frac{g2^n}{g3^{r+1}c^p}$.
$\frac{q'(q'-1)(q'-2)\ldots(q'-n+1)}{1.2\ldots\ldots n}\Big(\frac{1}{r'+1} z^{r'+1}$
$\pm \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots m} \cdot \frac{1}{r'-m+1} z^{r'-m+1}\Big) \ldots\ldots (21)$
Integrale che deve essere preso colle seguenti regole.

1.° Si prenderà l'anzidetto integrale (21) $q'+1$ volte sostituendo successivamente a n questi valori $0, 1, 2, 3, \ldots q'$; quando $n=0$, si porrà per lo coefficiente $\frac{q'(q'-1)\ldots}{1.2\ldots}$ l'unità; e si riterrà $-$ ovvero $+$ secondo che $n+1$ sarà dispari o pari.

2.° Per ciascheduno valore particolare di n si prenderà r volte il termine $\pm \frac{r(r-1)\ldots(r-m+1)}{1.2\ldots\ldots m} \cdot \frac{1}{r'-m+1} z^{r'-m+1}$, sostituendo successivamente a m i valori $1, 2, 3, \ldots\ldots r$; si conserverà il segno $+$ ovvero il segno $-$ secondo che m sarà un numero pari o dispari.

3.° Finalmente tutte le volte che si avrà $r'+1=0$, e $r'-m+1=0$, si metterà log. z invece di $\frac{1}{r'+1} z^{r'+1}$, e di $\frac{1}{r'-m+1} z^{r'-m+1}$.

Vi saranno $2p-1$ integrali (21) a prendere; ciò che non dimanda che delle semplici sostituzioni; in questa guisa si otterrà il valore *actu* sviluppato dell'integrale (20).

Aggiungo

Aggiungo qui i valori delle quantità ch' entrano nell' integrale precedente, perchè ſe ne poſſa fare un uſo facile e pronto quando il richiegga il caſo; eccoli $g = \sqrt{(b^2 - 4ac)}$, $g1 = \frac{b+g}{2c}$, $g2 = \frac{b-g}{2c}$, $g3 = \frac{g}{c}$, $q' = 2p - K$, $r = K + n - 2$, $r' = K + n - p - 2$, $z = \frac{2cx + b + g}{2cx + b - g}$.

XVII. Dalla ſoluzione del caſo di $q = \alpha p + \zeta > 2p$ ſegue facilmente quella de' caſi in cui $q = 2p$, e $q < 2p$; ſe $q = 2p$, ſi ha $\zeta = 0$; e $\alpha = 2$; ed il numero de i termini della funzione razionale di x ch' entra nell' equazione (19) è $n + 4 = p(\alpha - 2) + \zeta + 1 = 1$; ed il numero de i ſiſtemi di equazioni atti a dare il valore delle quantità c^1, c^2, ecc. è $= p(\alpha - 2) + \zeta = 0$; dunque $X1 = \frac{x}{c^p}$; ed il numeratore della frazione ch' entra nell' integrale (19) è $= -\left(a1 x^{2p-1} + a2 x^{2p-2} + a(2p)\right)$; dunque $c(1) = -a1$; dunque i valori (1), (2), ecc. divengono

$$(1) = -a2 + \frac{a1^2 . (2p-1)}{2p}, \quad (2) = -a3 + \frac{a1 . a2 . (2p-2)}{2p}$$

$$\vdots$$

$$(K-1) = -aK + \frac{a1 . a(K-1) . (2p-K+1)}{2p} \text{ ecc.}$$

Se $q < 2p$, allora $\alpha = 1$; e ζ ſarà un numero qualunque intero poſitivo $< p$; e ſi avrà $\int \frac{x^q dx}{X^p} = \int \frac{x^{p+\zeta} dx}{X^p}$. Sia dunque $p + \zeta = 2p - K$, allora $K = p - \zeta$; ſe K è un numero qualunque > 1, l' integrale della propoſta frazione è dato immediatamente dalla formola (21); ſe $K = 1$, ſi ridurrà la frazione $\frac{x^{p+\zeta} dx}{X^p}$ a queſta $\frac{x^{2p-K'} dx}{X}$ in cui il più piccolo valore di K' ſia $= 2$; come appunto abbiam fatto di ſopra; ed il problema ſarà ſciolto.

XVIII. Vengo al 2.° caſo in cui q è un numero qualunque negativo intero; la frazione che ſi deve integrare è questa $\frac{dx}{x^q X^p}$; la riduzione del n°. 16 dà $\frac{dx}{x^q X^p}$ $= -\frac{u^{2(p-1)+q}du}{c^p(1-g2u)^q(1+ug3)^p}$; q essendo $= K - 2p$; sia come sopra $1 + ug3 = z$; si avrà $u^{2(p-1)+q} = \frac{(z-1)^{2(p-1)+q}}{g3^{2(p-1)+q}}$; ed in conseguenza $-\frac{u^{2(p-1)+q}du}{c^p(1-ug2)^q(1+ug3)^p} = -\frac{g3^q}{c^p g3^{2(p-1)+q+1}}$. $\frac{dz(z-1)^{2(p-1)+q}}{z^p(g4-g2z)^q} = -\frac{1}{c^p g3^{2p-1}} \cdot \frac{dz(z-1)^{2(p-1)+q}}{z^p(g4-g2z)^q}$; poichè $1-ug2$ $= \frac{g4-g2z}{g3}$, essendo $g3 + g2 = g4$.

Sia per abbreviare $2(p-1)+q = r''$; si avrà $(z-1)^{r''}$ $= \pm \frac{r''(r''-1)\ldots(r''-m+1)}{1.2\ldots\ldots m} z^{r''-m}$, prendendo questo termine $r''+1$ volte, sostituendo successivamente a m questi valori 0, 1, 2, 3, ... r''; e quando $m = 0$, si porrà $+1$ per il coefficiente $\pm\frac{r''(r''-1)\ldots(r''-m+1)}{1.2\ldots m}$; e si conserverà per gli altri valori di m $+$ ovvero $-$, secondo che m sarà un numero pari, ovvero un numero dispari. Dunque

$$-\frac{1}{c^p g3^{2p-1}}(z-1)^{2(p-1)+q} \cdot \frac{dz}{z^p(g4-g2z)^q} = \mp\frac{1}{c^p g3^{2p-1}} \cdot \frac{r''(r''-1)\ldots(r''-m+1)}{1.2\ldots\ldots m} z^{r''-m-p} \cdot \frac{dz}{(g4-g2z)^q}$$

prendendo questo termine $r''+1$ volte nel modo già prescritto, positivamente o negativamente secondo che m sarà un numero dispari o un numero pari.

Sia $r''-m-p = p+q-2-m = r'''$; e $g4-zg2 = s$; si avrà $g2z = g4-s$; e $z = -\frac{1}{g2}(s-g4)$; dunque $dz = -\frac{ds}{g2}$; dunque $\frac{z^{r'''}dz}{(g4-g2z)^q} = \left(-\frac{1}{g2}\right)^{r'''+1} \cdot \frac{(s-g4)^{p+q-2-m}ds}{s^q}$.

Ma $r''' = p+q-m-2$ non sarà un numero intero negativo dopo il valore di $m = 0$ insino a quello che darà $r''' = 0 = p+q-m-2$, cioè insino a $m = p+q-2$; si avrà dunque $(s-g4)^{r'''}=s^{r'''}\pm\frac{r'''(r'''-1)\ldots(r'''-\mu+1)}{1.\ 2.\ldots\ldots\mu}s^{r'''-\mu}g4^{\mu}$;

$\mu+1$ esprime il rango di ciaschedun termine; si prenderà r''' volte l'ultimo termine ponendo successivamente, invece di μ, questi valori $1, 2, 3, \ldots. r'''$; $+$ ovvero $-$ secondo che μ sarà pari ovvero dispari; e r''' sarà contenuto fra i limiti 0, e $p+q-2$.

Dunque $\int\frac{z^{r'''}dz}{(g4-g2z)^q}=(-\frac{1}{g2})^{r'''+1}\int\frac{(s-g4)^{r'''}ds}{s^q}$

$$=(-\frac{1}{g2})^{r'''+1}\int\left(s^{r'''-q}ds\pm\frac{r'''(r'''-1)\ldots(r'''-\mu+1)}{1.\ 2.\ldots\ldots\mu}g4^{\mu}s^{r'''-\mu-q}ds\right)$$

$$=(-\frac{1}{g2})^{r'''+1}\left(\frac{1}{r'''-q+1}s^{r'''-q+1}\pm\frac{g4^{\mu}}{r'''-q-\mu+1}\cdot\frac{r'''(r'''-1)\ldots(r'''-\mu+1)}{1.\ 2.\ldots\ldots\mu}s^{r'''-\mu-q+1}\right)+\text{Cost.}$$

Dunque $\int\frac{dx}{x^qX^p}=-\frac{1}{c^p}\int\frac{u^{2(p-1)+q}du}{(1-ug2)^q(1+ug3)^p}=\mp\frac{1}{c^pg3^{2p-1}}\cdot$

$$\frac{r''(r''-1)\ldots(r''-m+1)}{1.\ 2.\ldots\ldots m}\int\frac{z^{r'''}dz}{(g4-g2z)^q}=\mp(-\frac{1}{g2})^{r'''+1}\cdot$$

$$\frac{1}{c^pg3^{2p-1}}\cdot\frac{r''(r''-1)\ldots(r''-m+1)}{1.\ 2.\ldots\ldots m}\left(\frac{1}{r'''-q+1}s^{r'''-q+1}\pm\frac{g4^{\mu}}{r'''-q-\mu+1}\cdot\frac{r'''(r'''-1)\ldots(r'''-\mu+1)}{1.\ 2.\ldots\ldots\mu}s^{r'''-\mu-q+1}\right)+X2+\text{Cost.}\ldots(22).$$

Ho rappresentato per $X2$ la 2.ª parte di questo integrale, cioè la funzione di x che dipende da i valori di m i quali seguono immediatamente quello cui ci siamo fermati, ch'era $m=p+q-2$.

La 1.ª parte dell'integrale precedente dev'essere presa colle seguenti regole.

1.° Si prenderà questa 1.ª parte $p+q-1$ volte, sostituendo successivamente a m i valori $0, 1, 2, 3, \ldots., p+q-2$; quando $m=0$, si porrà -1 per il coefficiente $\pm\frac{r''(r''-1)\ldots}{1.\ 2.\ldots.}$; e si riterrà per gli altri valori di m il segno $-$ ovvero il segno $+$ secondo che m sarà pari ovvero dispari.

2.° Per ciascheduno valore di m si prenderà r''' volte l'ultimo termine di questa 1.ª parte, il quale rinchiude μ, mettendo successivamente per μ questi valori $0, 1, 2, 3, \ldots r'''$; r''' essendo contenuto fra i limiti 0, e $p+q-2$; si conserverà $+$ ovvero $-$, secondo che μ sarà pari o dispari.

3.° Ogni volta che si avrà $r'''-q+1=0$, e $r'-\mu-q+1=0$; si metterà log. s invece di $\frac{1}{r'''-q+1}\,s^{r'''-q+1}$ e di $\frac{1}{r'''-q-\mu+1}\,s^{r'''-\mu-q+1}$.

Ciò posto si sostituiranno da ultimo nell'integrale trovato i valori di $g4$, r'', r' e s che sono $g4=\frac{b+g}{2c}$; $r''=2(p-1)+q$; $r'''=p+q-m-2$; ed $s=\frac{2gx}{b+2xc-g}$.

XIX. Fa d'uopo al presente di determinare la funzione integrale $X2$; richiamiamoci a memoria per quest' oggetto che dovevamo prendere l'integrale $\mp\frac{1}{c^p g3^{2p-1}}\cdot$
$\frac{r''(r''-1)\ldots(r''-m+1)}{1.\,2.\ldots m}\cdot\int\frac{z^{r''-m-p}dz}{(g4-g2z)^q}$, $r''+1=2(p-1)+q+1$ volte; noi l'abbiam già preso ossia prescritto di prenderlo col metodo precedente $p+q-1$; resta dunque a calcolarlo p volte; ed in conseguenza si sostituiranno a m questi valori successivi $m=p+q-1, p+q, p+q+1, p+q+2, \ldots 2(p-1)+q$; in guisa che r''' diverrà successivamente $r'''=p+q-2-m=-1,-2,-3,-4,-\ldots\ldots-p$; dunque bisogna integrare la frazione $\mp\frac{1}{c^p g3^{2p-1}}\cdot\frac{r''(r''-1)\ldots(r''-m+1)}{1.\,2.\ldots.m}\int\frac{dz}{z^K(g4-g2z)^q}=X2$; essendo successivamente $K=1, 2, 3, \ldots p$.

Paragonando la frazione $\frac{dz}{z^K(g4-g2z)^q}$ colla formola trascritta al n.° 7, rappresento per $S4$ la serie dei $q-1$ termini algebraici che vi entrano, ed ottengo $x=z$; $c=-g2$;

$b = g4$; $p = q$; $m = -K$; $n = 1$; dunque $\int \frac{dz}{z^K (g4 - g2z)^q}$

$$= -\frac{(2-q-K)(3-q-K)(4-q-K)\ldots(-K)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots(q-1)(-g2)^{q-1}} \left(S4 - \int \frac{z^{1-q-K} dz}{g4 - g2z} \right)$$

E $S4 = \frac{z^{2-q-K}}{(2-q-K)(g4-g2z)} + \frac{1.\ (-g2) z^{3-q-K}}{(2-q-K)(3-q-K)(g4-g2z)^2}$

$+ \frac{1.\ 2.\ (-g2)^2 z^{4-q-K}}{(2-q-K)(3-q-K)(4-q-K)(g4-g2z)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$+ \frac{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots(q-2)(-g2)^{q-2} z^{-K}}{(2-q-K)(3-q-K)\ldots(-K)(g4-g2z)^{q-1}}$, ... (23). In cui il numero de' termini è $= q - 1$.

Ma $\int \frac{dz}{z^{K+q-1}(g4 - g2z)} = \frac{1}{g4(2-q-K) z^{q+K-2}}$

$+ \frac{g2}{g4^2 (3-q-K) z^{q-K-3}} + \frac{g2^2}{g4^3 (4-q-K) z^{q+K-4}} + \ldots\ldots$

$+ \frac{g2^{K+q-2}}{g4^{K+q-1}} \log. \frac{z}{g4 - g2z}$, ... (24). Il cui numero de' termini è $= K + q - 1$.

XX. Dunque $X2 = \mp \frac{1}{c^p\, g3^{2p-1}} \cdot \frac{r''(r''-1)\ldots(r''-m+1)}{1.\ 2.\ldots\ldots m} \cdot$
$\frac{(2-q-K)(3-q-K)\ldots(-K)}{1.\ 2.\ldots\ldots(q-1)(-g2)^{q-1}} \left(-S4 + \int \frac{dz}{(g4-g2z) z^{q+K-1}} \right) \ldots$
(25). Le funzioni $S4$, $\int \frac{dz}{(g4-g2z) z^{q+K-1}}$, ſono date ciaſcheduna in una ſerie finita di termini finiti per le formole (23) e (24).

Si prenderà p volte queſt' integrale ſoſtituendo ſucceſſivamente a K i valori $K = 1, 2, 3, \ldots p$; ed a ciaſcheduno de i valori di K ſi farà corriſpondere ciaſcheduno de i valori ſeguenti di $m = p + q - 1$, $p + q$, $p + q - 1$, $p + q - 2, \ldots\ldots 2(p-1) + q$; e ſi conſerverà il ſegno — ovvero il ſegno +, ſecondo che m ſarà pari ovvero diſpari.

XXI. Si avrebbe ottenuto l' integrale di $\frac{dx}{x^q X^p}$ in queſt' altra maniera, ſupponendo $x = \frac{1}{y}$; d'onde riſulta dopo le ſoſtituzioni, e riduzioni neceſſarie $\int \frac{dx}{x^q X^p}$ $= - \int \frac{y^{2(p-1)+q} dy}{(ay^2 + by^2 + c)^p}$, frazione ch'è della forma $\frac{x^q dx}{X^p}$.

XXII. Se i fattori del denominatore ſono immaginarj, è ſempre quiſtione d'integrare la frazione $\frac{x^{2p-K} dx}{X^p}$; le funzioni $X1$ e log. X ch'entrano nell'integrale (20) non contenendo alcuna eſpreſſione immaginaria; allora invece di $X = a + bx + cx^2$ prendo $X = a^2 - 2abx \cos\phi + b^2 x^2$; e pongo $x = z + \frac{a \cos\phi}{b}$; ho, ſoſtituendo queſto valore di x, $X = (a \sin\phi)^2 + b^2 z^2$; ſia $\frac{b}{a \cos\phi} = D$; e $2p - K = q'$; ſi avrà $x^{q'} = \frac{1}{Pq'} (1 + Pz)^{q'} = P^{n-q'}$. $\frac{q'(q'-1) \ldots (q'-n+1)}{1.\ 2 \ldots\ldots n} z^n$; $n + 1$ indica il rango di ciaſchedun termine del *binomio*; ſi prenderà il termine precedente $q' + 1$ volte, ſoſtituendo ſucceſſivamente a n i valori 0, 1, 2, 3, ... q'; quando $n = 0$, ſi porrà l'unità in luogo del coefficiente $\frac{q'(q'-1)\ldots}{1.\ 2 \ldots\ldots}$; onde ſi avrà con queſte condizioni

$$\int \frac{x^{2p-K} dx}{X^p} = P^{n-q'} . \frac{q'(q'-1) \ldots (q'-n+1)}{1.\ 2 \ldots\ldots n} \int \frac{z^n dz}{(a^2 \sin^2\phi + b^2 z^2)^p}.$$

Per ottenere queſt' integrale ricorro alla formola del n.° 7, ed ho, paragonando, $x = z$; $m = n$; $b = (a \sin\phi)^2$; $c = b^2$; $n = 2$; quindi $\int \frac{z^2 dz}{(a^2 \sin^2\phi + b^2 z^2)^p}$

$$= - \frac{(n - 2p + 3)(n - 2p + 5)(n - 2p + 7) \ldots (n - 1)}{1.\ 2.\ 3 \ldots (p - 1)(2b^2)^{p-1}}$$

$$\left(\frac{z^{n-2p+3}}{(n-2p+3)(a^2 \sin^2\phi + b^2 z^2)} + \frac{1.\ (2b^2) z^{n-2p+5}}{(n-2p+3)(n-2p+5)(a^2 \sin^2\phi + b^2 z^2)^2} \right.$$

$$+ \frac{1.\ 2.\ (2b^2)^2 z^{n-2p+7}}{(n - 2p + 3) \ldots (n - 2p + 7)(a^2 \sin^2\phi + b^2 z^2)^3} + \ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1.2.3\ldots.(p-2)(2b^2)^{p-1}z^{n-1}}{(n-2p+3)(n-2p+5)\ldots(n-1)(a^2\sin^2\phi+b^2z^2)^{p-1}}$$

$-\int\frac{z^{n-2(p-1)}dz}{a^2\sin^2\phi+b^2z^2}\Big)$, ... (26). Il cui numero di termini è $=p$.

Il più grande valore di n è quello di $n=q'=2p-K$; dunque in tal caſo $n-2(p-1)=2-K$; ma il minimo valore di K è $K=2$; dunque $n-2(p-1)$ ſarà o zero o ſempre un numero negativo; ſia dunque $2(p-1)-n=p'$; ſi avrà $\int\frac{z^{n-2(p-1)}dz}{(a\sin\phi)^2+b^2z^2}=\int\frac{dz}{(a^2\sin^2\phi+b^2z^2)z^{p'}}$.

Ora il valore di queſt' integrale è dato per la formola (6) (a) della precedente Memoria, formola di cui ſi dee leggere l'ultimo termine nella maniera indicata da principio; ma avanti di andar oltra, noi le daremo una forma più facile e inſieme più vantaggioſa per la ricerca degl' integrali che ne dipendono.

Quando p' è pari, il termine $\left(\frac{-1\pm1}{2}\right)\frac{b^{p'-1}}{(-D)^{\frac{p'+1}{2}}}$ log. u della mentovata ſerie ſvaniſce, ed i termini $\frac{+du}{bu+\sqrt{(-D)}}-\frac{du}{bu-\sqrt{(-D)}}$ divengono $\frac{-2du\sqrt{(-D)}}{b^2u^2+D}$; onde $-\frac{b^{p'}}{2(-D)^{\frac{p'+1}{2}}}\int\left(\frac{+du}{bu+\sqrt{(-D)}}-\frac{du}{bu-\sqrt{(-D)}}\right)=\frac{b^{p'}}{(-D)^{\frac{p'}{2}}}$ $\int\frac{du}{b^2u^2+D}=\pm\frac{b^{p'-1}}{D^{\frac{p'+1}{2}}}$ Arc. tan. $\frac{bu}{\sqrt{D}}$. $+$ ovvero $-$ ſecondo che $\frac{p'}{2}$ è un numero pari ovvero diſpari.

Se p' è un numero diſpari, ſi avrà $-\frac{b^{p'}}{2(-D)^{\frac{p'+1}{2}}}$

(a) V. Mem. della Soc. It. 4.° Vol. pag. 577.

$$\int\left(\frac{-du}{bu+\sqrt{(-D)}}-\frac{du}{bu-\sqrt{(-D)}}\right)=+\frac{b^{p+1}}{(-D)^{\frac{p'+1}{2}}}$$

$\int\frac{udu}{D+b^2u^2}$. Ma il differenziale del termine $\left(\frac{-1\pm 1}{2}\right)$ $\frac{b^{p'}-1}{(-D)^{\frac{p'+1}{2}}}$ log. u diviene in questa ipotesi $=-\frac{b^{p'}-1}{(-D)^{\frac{p'+1}{2}}}$. $\frac{du}{u}$. Dunque $\frac{b^{p'+1}}{(-D)^{\frac{p'+1}{2}}}\int\frac{udu}{b^2u^2+D}-\frac{bp'-1}{(-D)^{\frac{p'+1}{2}}}\int\frac{du}{u}$ $=\frac{b^{p'}-1}{(-D)^{\frac{p'-1}{2}}}\int\frac{du}{u(D+b^2u^2)}=\pm\frac{b^{p'}-1}{D^{\frac{p'+1}{2}}}$ log. $\frac{u}{\sqrt{(D+b^2u^2)}}$ $+$ ovvero $-$ secondo che $\frac{p'-1}{2}$ è pari ovvero dispari.

Dunque facendo nella serie mentovata (6) queste sostituzioni, si ha

1.° Quando p' è un numero pari $p'=2p''$

$$\int\frac{du}{(D+b^2u^2)u^{2p''}}=-\frac{1}{(2p''-1)Du^{2p''-1}}+\frac{b^2}{(2p''-3)D^2u^{2p''-3}}$$
$$-\frac{b^4}{(2p''-5)D^3u^{2p''-5}}+\ldots\ldots\pm\frac{b^{2(p''-1)}}{D^{p''}u}\pm\frac{b^{2p''-1}}{D^{\frac{2p''+1}{2}}}$$

Arc. tan. $\frac{bu}{\sqrt{(D)}}$,... (27). Il numero de' termini è $=p''+1$; si riterrà il segno superiore quando p'' sarà pari, ed il segno inferiore quando p'' sarà dispari.

2.° Se p' è un numero dispari $p'=2p''+1$, si ha

$$\int\frac{du}{(D+b^2u^2)u^{2p''+1}}=-\frac{1}{2p''Du^{2p''}}+\frac{b^2}{2(p''-1)D^2u^{2(p''-1)}}$$
$$-\frac{b^4}{2(p''-2)D^3u^{2(p''-2)}}+\ldots\ldots\pm\frac{b^2p''}{Dp''+1}\text{ log. }\frac{u}{\sqrt{(D+b^2u^2)}},$$

. . . . (28). Il numero de' termini è $=p''+1$; $+$ ovvero $-$ secondo che p'' è pari ovvero dispari.

Dunque quando $p'=2(p-1)-n$ è un numero pari $=2p''$, sostituendo per D, $D+b^2u^2$, $u=z$, $du=dz$, i

loro

loro valori $a^2 \sin^2\phi$, X, $\frac{bx - a\cos\phi}{b}$, dx, e riducendo, si ha

$$b\int\frac{dx}{X(bx+a\cos\phi)^{2p''}} = -\frac{1}{(2p''-1)(a\sin\phi)^2(bx-a\cos\phi)^{2p''-1}}$$
$$+\frac{1}{(2p''-3)(a\sin\phi)^4(bx-a\cos\phi)^{2p''-3}}$$
$$-\frac{1}{(2p''-5)(a\sin\phi)^6(bx-a\cos\phi)^{2p''-5}}+\ldots\ldots\ldots$$
$$\pm\frac{1}{(a\sin\phi)^{2p''}(bx-a\cos\phi)}\pm\frac{1}{(a\sin\phi)^{2p''+1}}\ \text{Arc. tan.}\ \frac{bx-a\cos\phi}{a\sin\phi}\ldots(29).$$

Il numero de' termini è $= p''+1$; il segno superiore quando p'' è pari, l'inferiore quando p'' è dispari.

Se p' è dispari $p' = 2(p-1)-n = 2p''+1$, si ha

$$b\int\frac{dx}{X(bx-a\cos\phi)^{2p''+1}} = -\frac{1}{2p''(a\sin\phi)^2(bx-a\cos\phi)^{2p''}}$$
$$+\frac{1}{2(p''-1)(a\sin\phi)^4(bx-a\cos\phi)^{2(p''-1)}}$$
$$-\frac{1}{2(p''-2)(a\sin\phi)^6(bx-a\cos\phi)^{2(p''-2)}}+\ldots\ldots\ldots$$
$$\pm\frac{1}{(a\sin\phi)^{2(p''+1)}}\log.\frac{bx-a\cos\phi}{b\sqrt{X}},\ \ldots(30).$$

Il numero de' termini $= p''+1$; si prenderà $+$ ovvero $-$ secondo che p'' sarà pari ovvero dispari.

Dunque facendo le sostituzioni necessarie si ha finalmente

$$\int\frac{x^{2p-K}dx}{X^p} = -\frac{(a\cos\phi)^{q'-n}}{2^{p-1}b^{q'+1}}\cdot\frac{q'(q'-1)\ldots(q'-n+1)}{1.2.\ldots\ldots n}\cdot$$
$$\frac{(n-2p+3)(n-2p+5)(n-2p+7)\ldots(n-1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots(p-1)}$$
$$\left(\frac{(bx-a\cos\phi)^{n-2p+3}}{(n-2p+3)X}+\frac{1.(2)(bx-a\cos\phi)^{n-2p+5}}{(n-2p+3)(n-2p+5)X^2}\right.$$
$$+\frac{1.2.(2)^2(bx-a\cos\phi)^{n-2p+7}}{(n-2p+3)\ldots(n-2p+7)X^3}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1.\,2.\,3\ldots\ldots(p-2)(2)^{p-2}(bx-a\cos\phi)^{n-1}}{(n-2p+3)(n-2p+5)\ldots(n-1)\,X^{p-1}}\;.$$

$$-b\int\frac{dx}{X(bx-a\cos\phi)^{p'}}\Big),\ \ldots\ (31).$$ Il numero de' termini è $=p$.

Si prenderà $q'+1$ volte questo integrale, sostituendo successivamente a n i valori $0, 1, 2, 3, \ldots q'$; essendo $q'=2p-K$, e K mai <2; quando $n=0$, si porrà l'unità in luogo del coefficiente $\frac{q'(q'-1)\ldots}{1.\,2\ldots}$; e quando $n=1$, invece della serie ch' esprime l'integrale di $\frac{z^n dz}{(a^2\sin^2\phi+b^2z^2)^p}$ $=\frac{(bx-a\cos\phi)\,dx}{bX^p}$ si metterà l'integrale $\frac{1}{2b^2(1-p)X^{p-1}}$ ch'è dato immediatamente per la regola d'integrazione, cioè la formola (31) diverrà nel caso di $n=1$, $=\frac{q'(a\cos\phi)q'^{-1}}{2b^{q'+1}(1-p)X^{p-1}}$.

L'integrale di $b\int\frac{dx}{X(bx-a\cos\phi)^{p'}}$ è dato per la formola (29) o per la formola (30) secondo che $p'=2(p-1)-n$ è pari o dispari, ma nessuna delle precedenti formole contiene degli imaginarj; dunque il problema è sciolto.

XXIII. Se fosse d'uopo d'integrare nella stessa ipotesi la formola $\frac{dx}{x^qX^p}$, X essendo $=a^2-2abx\cos\phi+b^2x^2$, si farebbe $x=\frac{1}{y}$, e si avrebbe dopo le sostituzioni e riduzioni necessarie $\int\frac{dx}{x^qX^p}=-\int\frac{y^{2(p-1)+q}dy}{(a^2y^2-2aby\cos\phi+b^2)^p}$ ch' è della forma $\int\frac{x^q dx}{X^p}$; ciò che non ha in conseguenza alcuna difficoltà.

Integrazione in serie finita della formola $\frac{x^{\pm q}dx}{(a+bx+cx^2+fx^3)^p}$.

XXIV. Considero primieramente per maggiore semplicità la formola $\frac{(A+Bx+Cx^2)\,dx}{(a+bx+cx^2+fx^3)^p}$. Sia $a+bx+cx^2+fx^3=X$; suppongo $x=y-\frac{c}{3f}$ affine di distruggere il 2.° termine di X; onde si avrà dopo aver posto per abbreviare $\frac{b}{f}-\frac{c^2}{3f^2}=a1$; $\frac{a}{f}-\frac{bc}{3f^2}+\frac{2c^3}{27f^3}=b1$; $\frac{a}{f}+\frac{b}{f}x+\frac{c}{f}x^2+x^3=b1+a1y+y^3$; ed il numeratore della proposta diviene nella stessa ipotesi $=(A1+B1y+cy^2)\,dy$; $A1$ e $B1$ essendo date per mezzo delle equazioni $A1=A-\frac{Bc}{3f}+\frac{Cc^2}{9f^2}$, e $B1=B-\frac{2Cc}{3f}$; onde la funzione che bisogna integrare sarà $\frac{(A1+B1y+Cy^2)dy}{Y^p}$, essendo $Y=f(b1+a1y+y^3)$.

XXV. Sviluppiamo brevemente il caso di $p=1$; si avranno i tre fattori dell' espressione $y^3+a1y+b1$, moltiplicando i termini del trinomio $y-\sqrt[3]{(-\frac{b1}{2}+\sqrt{(\frac{b1^2}{4}+\frac{a1^3}{27})})}$ $-\sqrt[3]{(\frac{b1}{2}-\sqrt{(\frac{b1^2}{4}+\frac{a1^3}{27})})}$ primieramente per l' unità, poi il 2.° termine per $\alpha=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, ed il 3.° per $\beta=\frac{-1-\sqrt{(-3)}}{2}$, in seguito il 2.° termine per β ed il 3.° per α; 1, α, e β essendo, com'è noto, le radici cubiche dell' unità, o dell' equazione $y^3-1=0$.

Siano $r1$, $r2$, $r3$ le parti conosciute e rispettive de i fattori in quistione, e pongasi per maggiore brevità $-\frac{b1}{2}$

$= P$; $\frac{b1^2}{4} + \frac{a1^3}{27} = \mathcal{Q}$; si avrà $r1 = \sqrt[3]{(P+\sqrt{\mathcal{Q}})} + \sqrt[3]{(P-\sqrt{\mathcal{Q}})}$, $r2 = \alpha\sqrt[3]{(P+\sqrt{\mathcal{Q}})} + \beta\sqrt[3]{(P-\sqrt{\mathcal{Q}})}$, $r3 = \beta\sqrt[3]{(P+\sqrt{\mathcal{Q}})} + \alpha\sqrt[3]{(P-\sqrt{\mathcal{Q}})}$. Dunque $y^3 + a1y + b1 = (y-r1)(y-r2)(y-r3 = (y-r1)(y^2-(r2+r3)y + r2r3)$; sia per abbreviare $r2 + r3 = r4$; $r2r3 = r5$; si troverà $r4 = -\sqrt[3]{(P+\sqrt{\mathcal{Q}})} - \sqrt[3]{(P-\sqrt{\mathcal{Q}})}$; e $r5 = \sqrt[3]{(P+\sqrt{\mathcal{Q}})^2} + \sqrt[3]{(P-\sqrt{\mathcal{Q}})^2} + \frac{a1}{3}$. Suppongo $\frac{A1 + B1y + Cy^2}{y^3 + a1y + b1} = \frac{A'}{y - r1} + \frac{B' + C'y}{y^2 - r4y + r5}$; si troverà $A' = \frac{r1(r1C + B1) + A1}{r5 - r1(r4 - r1)}$, $B' = \frac{A1(r4 - r1) + r5(B1 + r1C)}{r5 - r1(r4 - r1)}$, $C' = \frac{c(r5 - r1r4) - A1 - B1r1}{r5 - r1(r4 - r1)}$. Dunque

$$\int \frac{(A1 + B1y + Cy^2)\,dy}{y^3 + a1y + b1} = \text{Cost.} + A' \log.(y - r1) + \frac{c'}{2} \log. (y^2 - r4y + r5) + \frac{2B' + r4c'}{\sqrt{(4r5 - r4^2)}} \text{ Ar. tan. } \frac{2y - r4}{\sqrt{(4r5 - r4^2)}}.$$

Sostituendo in questo integrale il valore di $y = x + \frac{c}{3f}$ si avrà

$$\int \frac{(A + Bx + (x^2)\,dx}{a + bx + cx^2 + fx^3} = \text{Cost.} + \log.\left(x - r1 + \frac{c}{3f}\right)^{\frac{A'}{f}}. \left(x^2 + x\left(\frac{2c}{3f} - r4\right) + \frac{c}{3f}\left(\frac{c}{3f} - r4\right) + r5\right)^{\frac{c'}{3f}} + \frac{2B' + r4C'}{\sqrt{(4r5 - r4^2)}} \text{ Arc. tan. } \frac{2x - r4 + \frac{2c}{3f}}{\sqrt{(4r5 - r4^2)}}, \ldots. (32).$$

Qualunque sia la natura de' fattori $r1$, $r2$, $r3$, l' integrale precedente non presenta alcuna difficoltà in virtù delle riflessioni già fatte, e del prodotto sempre reale di due de' detti fattori presi nel debito modo.

XXVI. Ritorno al caso generale, e pongo $\frac{1}{(y - r1)(y^2 - r4y + r5)} = \frac{u}{y^2 - r4y + r5}$; dunque $u = \frac{1}{y - r1}$; $y = \frac{1 + ur1}{u}$; $dy = -\frac{du}{u^2}$; e $y^2 - r4y + r5 = \frac{1 + r6u + r7u^2}{u^2}$, facendo per maggiore brevità $r6 = 2r1 - r4$; $r7 = r5 + r1(r1 - r4)$; dunque $\frac{1}{(y - r1)(y^2 - r4y + r5)} = \frac{u^3}{1 + r6u + u^2r7}$; dunque $\frac{1}{(y^3 + a1y + b1)^p} = \frac{u^{3p}}{(1 + r6u + u^2r7)^p}$. Ora $A1 + B1y + Cy^2 = \frac{C + B2u + A2u^2}{u^2}$, avendo supposto per abbreviare $A2 = A1 + r1(B1 + Cr1)$; e $B2 = B1 + 2Cr1$. Dunque $\frac{(A1 + B1y + Cy^2)dy}{(y^3 + a1y + b1)^p} = -\frac{(A2u^2 + B2u + C)u^{3p-4}du}{(1 + rbu + u^2r7)^p}$, ch' è la frazione che fa d' uopo integrare.

XXVII. Ma osservo avanti di andar oltra, che in virtù del metodo ossia dell' artifizio che adopro nella ricerca di questi integrali, non è più difficile l' integrare $\frac{(A + Bx + Cx^2)dx}{X^p}$ che quest' altra di gran lunga più generale $\frac{x^q dx}{(a + bx + cx^2 + fx^3)^p}$; q essendo un numero qualunque intero positivo (scioglierò in appresso il caso in cui q è un numero qualunque intero negativo); perciò cercherò qui l' integrale di quest' ultima frazione, da cui si potrà dedurre come un caso particolare quello della prima; e in questa maniera verrò a riempiere l' oggetto che mi sono proposto.

Si ha $\frac{dx}{X^p} = \frac{dy}{Y^p} = -\frac{u^{3p-2}du}{f^p(1 + r6u + u^2r7)^p}$; ma $x = y - \frac{c}{3f} = \frac{1 + f1u}{u}$, ponendo per abbreviare $f1 = r1 - \frac{c}{3f}$; dunque $\frac{x^q dx}{X^p} = \frac{(y - \frac{c}{3f})^q dy}{Y^p} = -\frac{(1 + f1u)^q u^{3p-p-2}du}{f^p(1 + r6u + r7u^2)^p}$. Ora $(1 + f1u)^q = \frac{q(q-1)\ldots(q = n' + 1)}{1.2\ldots n'} f1^{n'} u^{n'}$, prendendo questo termine $q + 1$ volte, sostituendo a n' i valori successivi $0, 1, 2, 3, \ldots q$; si porrà l' unità invece del coefficiente $\frac{q(q-1)\ldots}{1.2\ldots}$ quando n' sarà $= 0$.

Onde la frazione che si deve integrare è questa $\frac{q(q-1)\ldots(q-n'+1)}{1.2\ldots n'} \cdot \frac{f1^{n'}}{f^p} \cdot \frac{u^{3p+n'-q-2}du}{(1+r6u+r7u^2)^p}$. Il numero $3p+n'-q-2$ sarà o positivo o negativo, lo rappresento dunque in generale per $\pm K'$; dunque $\int \frac{x^q dx}{(a+bx+cx^2+fx^3)^p} = -\frac{f1^{n'}}{f^p} \cdot \frac{q(q-1)\ldots(q-n'+1)}{1.2\ldots n'}$ $\int \frac{u^{\pm K'}du}{(1+r6u+r7u^2)^p}$, ... (33). Ma l' integrale del 2.° membro dell' equazione precedente il quale dev' essere preso $q+1$ volte sostituendo successivamente a n' i valori 0, 1, 2, 3, ...q, è dato per le formole (20) e (21) ovvero (22) e (25) secondo che K' sarà positivo ovvero negativo; dunque il problema è sciolto.

Paragonando fra di loro i denominatori $a+bx+cx^2$, $1+r6u+u^2r7$, si ha $x=u$; $a=1$; $b=r6$; $c=r7$; $g=\sqrt{(r6^2-4r7)}$; $g1=\frac{r6+g}{2r7}$; $g2=\frac{r6-g}{2r7}$; $g3=\frac{g}{r7}$; $z=\frac{2r7u+r6+g}{2r7u+r6-g}$; $s=\frac{2gu}{2r7u+r6-g}$; ma $u=\frac{1}{xf1}$; $f1=r1-\frac{c}{3f}$; dunque $z=\frac{2r7+(r6+g)(x-f1)}{2r7+(r6-g)(x-f1)}$; e $s=\frac{2g}{2r7+(r6-g)(x-f1)}$; e $rs=\frac{a1}{3}+\sqrt[3]{(P+\sqrt{Q})^2}+\sqrt[3]{(P-\sqrt{Q})^2}$; $r6=3\sqrt[3]{(P+\sqrt{Q})}+3\sqrt[3]{(P-\sqrt{Q})}$; $r7=3\sqrt[3]{(P+\sqrt{Q})^2}+3\sqrt[3]{(P-\sqrt{Q})^2}-a1$.

XXVIII. Per integrare la formola $\frac{dx}{x^qX^p}$; q, p e X esprimendo sempre le medesime quantità, considero la riduzione del n.° 24, che dà $\frac{dx}{x^qX^p}=-\frac{u^{3p+q-2}du}{f^p(1+r6u+u^2r7)^p(1+f1u)^q}$; suppongo $1+f1u=s'$; si avrà $n=\frac{s'-1}{f1}$; $du=\frac{ds'}{f1}$; e $1+r6u+u^2r7=\frac{r8+r9s'+r7s'^2}{f1^2}$ avendo fatto per maggiore brevità $r8=r7+f1(f1-r6)$; e $r9=r6f1-2r7$;

Dunque $\frac{u^{3p+q-2}du}{f^p(1+f1u)^q(1+r6u+r7u^2)^p} = \frac{(-1)^{3p+q-2}}{f^p f1^{p+q-1}} \cdot \frac{(1-s')^{3p+q-2}ds'}{s'^q(r8+r9s'+r7s'^2)^p}$. Sia per maggiore semplicità $3p+q-2=K''$; si avrà $(1-s')^{K''} = \pm \frac{K''(K''-1)\ldots(K''-n''+1)}{1.2\ldots\ldots.n''} s'^{n''}$. Si prenderà questo termine $K''+1$ volte sostituendo successivamente a n'' i valori $0, 1, 2, 3, \ldots K''$; quando $n''=0$, si porrà $+1$ invece del coefficiente $\pm\frac{K''(K''-1)\ldots}{1.2\ldots}$; per gli altri valori di n'' si conserverà $+$ ovvero $-$, secondo che n'' sarà pari ovvero dispari. Dunque $\int \frac{dx}{x^q(\alpha+bx+cx^2+fx^3)^p}$
$= \mp \frac{(-1)^{K''}}{f^p f1^{p+q-1}} \cdot \frac{K''(K''-1)\ldots(K''-n''-1)}{1.2\ldots\ldots.n''}$
$\int \frac{s'^{n''-q}ds'}{(r8+r9s'+r7s'^2)^p}, \ldots\ldots (34)$. Si cercherà il valore di questo integrale per mezzo delle formole (20) e (21) ovvero (22) e (25) secondo che $n''-q$ sarà un numero positivo ovvero negativo, e si prenderà $K''+1$ volte mettendo successivamente per n'' questi valori $0, 1, 2, 3, \ldots K''$; e si conserverà il segno $-$ ovvero il segno $+$ secondo che n'' sarà pari o dispari; nel caso di $n''=0$, si porrà -1 in luogo del coefficiente $\mp\frac{K''(K''-1)\ldots}{1.2\ldots\ldots}$.

Paragonando fra di loro i denominatori $a+bx+cx^2$, $r8+r9s'+r7s'^2$ si avrà $x=s'$; $a=r8$; $b=r9$; $c=r7$, e $z=\frac{2r7s'+r9+g}{2r7s'+r9-g}$. Ma $s'=1+f1u=\frac{x}{x-f1}$; dunque
$z=\frac{x(2r7+g+r9)-f1(g+r9)}{x(2r8+r9-g)-f1(r9-g)}$; e $s=\frac{2gs'}{r9+2r7s'-g}$
$=\frac{2gx}{x(2r7+r9-g)-f1(r9-g)}$; $r8=r7+f1(f1-r6)$;
e $r9=r6f1-2r7$.

E' inutile di osservare che per $r1$ abbiamo inteso di esprimere il fattore reale che ha necessariamente il trinomio $y^2 + a1y + b1$; d' altronde si può ancora avvertire di ciò *a posteriori*, poichè denotando per $r1$, $r2$, $r3$ le espressioni cardaniche come abbiam fatto, si sa che ciascheduna di esse indifferentemente presa è atta a rappresentare una qualunque delle tre radici dell' equazione del 3.° grado $y^3 + a1y + b1 = 0$. (*a*)

Si sarebbe ottenuto il medesimo intento ponendo $x = \frac{1}{y}$, ed allora la formola da integrare sarebbe divenuta della formola $\frac{x^q dx}{X^p}$ che abbiam di già sviluppata. Se i trinomj $1 + r6u + r7u^2$, $r8 + r9s' + r7s'^2$ hanno i loro fattori immaginarj, allora si ritornerà alla formola (31).

Integrazione in serie finita della formola

$$\frac{x^{\pm q} dx}{(a + bx + cx^2 + fx^3 + hx^4)^p}.$$

XXIX. Sia $x = y - \frac{f}{4h}$; si avrà $\frac{a}{h} + \frac{b}{h}x + \frac{c}{h}x^2 + \frac{f}{h}x^3 + x^4 = b^3 + b2y + b1y^2 + y^4$, dopo aver fatto per abbreviare $\frac{1}{h}\left(a + \frac{f}{4h}\left(-b + \frac{cf}{4h} - \frac{3f^3}{4^3h^2}\right)\right) = b3$, $\frac{1}{h}\left(b + \frac{f}{2h}\left(-c + \frac{f^2}{4h}\right)\right) = b2$, $\frac{1}{h}\left(c - \frac{3f^2}{8h}\right) = b1$.

Suppongo conformemente a i principj della risoluzione delle equazioni del 4. grado, che il *quadrinomio* $y^4 + b1y^2 + b2y + b3$ sia eguale al prodotto di questi due trinomj $y^2 + \delta y + \beta$, $y^2 - \delta y + \gamma$; si ha, com'è noto in questa ipotesi $\delta^6 + 2b1\delta^4 + (b1^2 - 4b3)\delta^2 - b3 = 0$, equazione riduttibile al 3.° grado, ponendo $\delta^2 = D$; le quantità γ e β sono date

(*a*) Veggasi intorno a ciò una bell' opera del Sig. *Canterzani*, che ha per titolo: *Osservazioni del Sig.* Canterzani *sul valor cardanico esposte in una lettera diretta al Nobil Uomo Sig. Canonico* Girolamo Saladini, ecc. In Bologna 1787. nella Stamperia dell' istituto delle Scienze.

date per mezzo delle seguenti equazioni $\gamma=\frac{b1+\delta^2}{2}+\frac{b2}{2\delta}$;
$\beta=\frac{b1+\delta^2}{2}-\frac{b2}{2\delta}$; ciò posto, i fattori del quadrinomio $y^4+b1y^2+b2y+b3$ sono:

$$y-\frac{\delta}{2}-\sqrt{(-\frac{\delta^2}{4}-\frac{1}{2}(b1+\frac{b2}{\delta}))}$$
$$y-\frac{\delta}{2}+\sqrt{(-\frac{\delta^2}{4}-\frac{1}{2}(b1+\frac{b2}{\delta}))}$$
$$y+\frac{\delta}{2}-\sqrt{(-\frac{\delta^2}{4}-\frac{1}{2}(b1-\frac{b2}{\delta}))}$$
$$y+\frac{\delta}{2}+\sqrt{(-\frac{\delta^2}{4}-\frac{1}{2}(b1-\frac{b2}{\delta}))}$$

Se si mette in ciascheduno de' fattori precedenti il valore $x+\frac{f}{4^b}$ di y, e che si rappresentino successivamente per $r1'$, $r2'$, $r3'$, $r4'$ i termini conosciuti di questi fattori, si avrà $(x+r1')(x+r2')(x+r3')(x+r4')=\frac{a}{b}+\frac{b}{b}x+\frac{c}{b}x^2+\frac{f}{b}x^3+x^4$.

XXX. Sviluppiamo primieramente il caso di $p=1$, prendendo per numeratore la quantità $A+Bx+Cx^2+Dx^3$; e supponghiamo i quattro fattori ineguali fra di loro; i trinomj $y^2+\delta y+\beta$, $y^2-dy+\gamma$ divengono in forza della sostituzione di $x+\frac{f}{4b}$ ad y, $x^2+\delta1x+\beta1$, $x^2+\delta1x+\gamma1$, dopo aver fatto per abbreviare $\beta+\frac{f}{4b}(\delta+\frac{f}{4b})=\beta1$;
$\frac{f}{2b}+\delta=\delta1$; $\gamma+\frac{f}{4b}(\frac{f}{4b}-\delta)=\gamma1$; $\frac{f}{2b}-\delta=\delta2$; sia
$$\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3}{a+bx+cx^2+fx^3+hx^4}=\frac{1}{b}\left(\frac{A'+B'x}{x^2+\delta x1+\beta1}+\frac{C'+D'x}{x^2+\delta2x+\gamma1}\right)$$
Si avrà, confrontando le quantità omogenee: $A'\gamma1+C'\beta1=A$,

$B'+D'=D$, $\delta_2 A'+\gamma_1 B'+\delta_1 C'+\beta_1 D'=B$, $A'+B'\delta_2+C'+D'\delta_1=C$.

Da cui si deduce

$$A'=\frac{\beta_1((\beta_1)C-B(\delta_1-\delta_2)+D(\gamma_1\delta_1-\beta_1\delta_2))+A(\gamma_1-\beta_1+\delta_1(\delta_1-\delta_2))}{(\beta_1-\gamma_1)^2+(\delta_1-\delta_2)(\gamma_1\delta_1-\delta_2\beta_1)}$$

$$B'=\frac{A(\delta_1-\delta_2)+B(\gamma_1-\beta_1)-C(\gamma_1\delta_1-\beta_1\delta_2)+D(\delta_1(\gamma_1\delta_1-\beta_1\delta_2)+\beta_1(\beta_1-\gamma_1))}{(\beta_1-\gamma_1)^2+(\delta_1-\delta_2)(\gamma_1\delta_1-\delta_2\beta_1)}$$

$$C'=\frac{A(\beta_1-\gamma_1-\delta_2(\delta_1-\delta_2))+B\gamma_1(\delta_1-\delta_2)-\gamma_1 C(\beta-\gamma')+\gamma_1 D(\beta'\gamma_1\delta_2-\gamma_1\delta_1)}{(\beta_1-\gamma_1)^2+(\delta_1-\delta_2)(\gamma_1\delta_1-\delta_2\beta_1)}$$

$$D'=\frac{A(\delta_2-\delta_1)+C(\gamma_1\delta_1-\beta_1\delta_2)+B(\beta_1-\gamma')+D(\gamma_1(\gamma_1-\beta_1)-\delta_2(\gamma_1\delta_1-\beta_1\delta_2))}{(\beta_1-\gamma_1)^2+(\delta_1-\delta_2)(\gamma_1\delta_1-\delta_2\beta_1)}$$

Si avrà dunque nel caso de i 4 fattori ineguali del denominatore $\int\frac{(A+Bx+Cx^2+Dx^3)dx}{a+bx+cx^2+fx^3+hx^4}=\frac{1}{h}\int\frac{(A'+B'x)dx}{x^2+\delta_1 x+\beta_1}$ $+\frac{1}{h}\int\frac{(C'+D'x)}{x^2+\delta_2 x+\gamma_1}$, ... (35). Integrali che non presentano veruna difficoltà, e che sono dati al n.° (5).

XXXI. Se due de i quattro fattori del denominatore diviso da h fossero eguali fra di loro, per es., se $r_1'=r_2'$, non si farebbe allora altro cambiamento nelle determinazioni precedenti che di porvi $2r_1'$ invece di δ_2, e $r_1'^2$ per γ_1; e γ sarebbe $=\frac{\delta^2}{4}$, δ essendo dato immediatamente da questa equazione del 3.° grado $\delta^3+2b_1\delta+2b_2=0$, e le frazioni da integrare sarebbono $\frac{1}{h}\int\frac{(A'+B'x)dx}{x^2+\delta_1 x+\beta_1}+\frac{1}{h}$ $\int\frac{(C'+D'x)dx}{(x+r_1')^2}$.

Se tre de i quattro fattori del denominatore sempre diviso per h fossero eguali fra di loro, se, per esempio, $r_1'=r_2'=r_3'$, si avrebbe $\int\frac{(A+Bx+Cx^2+Dx^3)dx}{a+bx+cx^2+fx^3+hx^4}$ $=\frac{1}{h}\int\frac{(A'+B'x+C'x^2)dx}{(x+r_1')^3}+\frac{1}{h}\int\frac{D'dx}{x+r_4'}$.

E le seguenti equazioni darebbero il valore di A', B', C' e D', $A'r_4'+r_1'^3 D'=A$, $A'+B'r_4'+3r_1'^2 D'=B$, $3r_1'D'+C'r_4'+B'=C$, $C'+D'=D$, cioè

$$A' = \frac{r4'r1'^2(r4'D - C) + r1'^3 B + A\left(r4'(3r1' - r4') - 3r1'^2\right)}{r4'^2(3r1' - r4') - r1'^2(3r4' - r1')}$$

$$B' = \frac{r1'^2(3r4' - r1')(r4'D - C) - (3r1' - r4')(A - r4'B)}{r4'^2(3r1' - r4') - r1'^2(3r4' - r1')}$$

$$C' = \frac{r1'D\left(3r4'^2 - r1'(3r4' - r1')\right) + r4'(B - r4'C) - A}{r4'^2(3r1' - r4') - r1'^2(3r4' - r1')}$$

$$D' = \frac{A - r4'\left(B + r4'(r4'D - C)\right)}{r4'^2(3r1' - r4') - r1'^2(3r4' - r1')}.$$

Il resto non ha nessuna difficoltà.

XXXII. Vengo al caso generale, e suppongo che i fattori del quinomio $\frac{1}{h}(a + bx + cx^2 + fx^3 + x^4)$ siano reali ed ineguali fra di loro. Si ha $\frac{1}{a + bx + cx^2 + fx^3 + hx^4}$ $= \frac{1}{h(x + r1')(x^3 + r5'x^2 + r6'x + r7')}$ dopo di aver fatto per abbreviare $r2' + r3' + r4' = r5'$; $r2'r3' + r2'r4' + r3'r4' = r6'$; e $r2'r3'r4' = r7'$. Sia $\frac{1}{(x + r1')(x^3 + r5'x^2 + r6'x + r7')} = \frac{u}{x^3 + r5'x^2 + r6'x + r7'}$; si ha $u = \frac{1}{x + r1'}$; $x = \frac{1 - ur1'}{u}$; $dx = -\frac{du}{u^2}$; e $x^3 + r5'x^2 + r6'x + r7'$ $= \frac{1 + r8'u + r9'u^2 + r10'u^3}{u^3}$, dopo aver posto sempre a cagione di maggiore semplicità $r5' = 3r1' = r8'$, $r1'(3r1' - 2r5')$ $+ r6' = r9'$, $r7' + r1'\left(-r6' + r1'(r5' - r1')\right) = r10'$.

Dunque $\frac{x^{\pm q}dx}{(a + bx + cx^2 + fx^3 + hx^4)^p} = -\frac{1}{h^p}.$ $\frac{u^{4p \mp q - 2}(1 - r1'u)^{\pm q}du}{(1 + r8'u + r9'u^2 + r10'u^3)^p}$. Considero in primo luogo il caso di $+q$; la frazione che si dovrà integrare sarà $-\frac{1}{h}\int \frac{u^{4p - 2 - q}(1 - r1'u)^q du}{(1 + r8'u + r9'u^2 + r10'u^3)^p}$; ma $(1 - r1'u)^q$ $= \pm \frac{q(q-1)\ldots(q - n''' + 1)}{1.2\ldots\ldots n'''} r1'^{n'''}u^{n'''}$, prendendo $q+1$ volte questo termine, sostituendo successivamente per n''' questi valori o, 1, 2, ... q; quando $n'''=0$, si porrà $+1$ per il coefficiente $\frac{q(q-1)\ldots}{1.2\ldots}$, e per gli altri valori di n''' si conserverà il segno superiore, ovvero il segno inferiore, secondo che n''' sarà pari ovvero dispari.

Onde la frazione precedente diverrà $\mp\frac{r1'^{n'''}}{h^p}$. $\frac{q(q-1)\ldots(q-n'''+1)}{1.2\ldots\ldots n'''}\int\frac{u^{4p+n'''-q-2}du}{(1+r8'u+r9'u^2+r10'u^3)^p}$. Sia per maggiore brevità $4p+n'''-q-2=K'''$, si avrà

$$\int\frac{x^q dx}{(a+bx+cx^2+fx^3+hx^4)^p}=\mp\frac{r1'^{n'''}}{h^p}\cdot\frac{q(q-1)\ldots(q-n'''+1)}{1.2\ldots\ldots n'''}$$
$$\int\frac{u^{K'''}du}{(1+r8'u+r9'u^2+r10'u^3)^p}, \ldots. (36).$$

Si prenderà $q+1$ volte questo integrale ch'è dato per le formole (27) o (28) secondo che K''' è positivo o negativo, sostituendo successivamente per n''' i valori o, 1, 2, 3, ... q; ponendo mente di mettere -1 invece del coefficiente $\mp\frac{q(q-1)\ldots}{1.2\ldots}$ quando $n'''=0$; il segno superiore quando n''' è pari; e l'inferiore quando n''' è dispari.

XXXIII. Se q è un numero negativo, si ha $\int\frac{dx}{x^q X^p}$ $=-\frac{1}{h^p}\int\frac{u^{2(2p-1)+q}du}{(1-r1'u)^q(1+r8'u+r9'u^2+r10'u^3)^p}$. Sia $1-r1'u=s''$, si avrà $u=\frac{1-s''}{r1'}$, e $1+r8'u+r9'u^2+r10'u^3$ $=\frac{r11-r12s''+r13s''^2-r10's''^3}{r1'^3}$ dopo di aver fatto per abbreviare $r1'(r9'+r1'(r8'+r1'))+r10'=r11$; $r1'(2r9'+r1'r8')+3r10'=r12$; e $r1'r9'+8r10'=r13$. Dunque $\int\frac{dx}{x^q X^p}=\frac{1}{h^p r1'^{p+q-1}}\int\frac{(1-s'')^{2(2p-1)+q}ds''}{s''^q(r11-r12s''+r13s''^2-r10's''^3)^p}$. Sia $2(2p-1)+q=K^{IV}$ si avrà nel modo più volte accennato $(1-s'')^{K^{IV}}=\pm\frac{K^{IV}(K^{IV}-1)\ldots(K^{IV}-n^{IV}+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots n^{IV}}s''^{n^{IV}}$. Dunque

$$\int \frac{dx}{x^q(a+bx+cx^2+fx^3+hx^4)^p} = \pm \frac{1}{h^p r1^{p-q-1}} \cdot$$

$$\frac{K^{IV}(K^{IV}-1)\ldots(K^{IV}-n^{IV}+1)}{1.\,2.\,\ldots\ldots n^{IV}} \int \frac{s''^{K^V}\, ds''}{r11 - r12s'' + r13s''^2 - r10's'^3)^p}$$

.... (37), essendo $K^V = n^{IV} - q$.

Si prenderà $K^{IV} + 1$ volte questo integrale per mezzo delle formole (27), ovvero (28), secondo che K^V sarà positivo ovvero negativo, sostituendo successivamente a n^{IV} i valori $0, 1, 2, \ldots K^{IV}$; si conserverà il segno superiore, ovvero il segno inferiore, secondo che n^{IV} sarà pari ovvero dispari, e quando $n^{IV} = 0$ si porrà $+ 1$ in luogo del coefficiente $\frac{K^{IV}(K^{IV}-1)\ldots}{1.\,2.\,\ldots}$.

XXXIV. Egli è evidente che le formole (36) e (37) possono ancora fornire in virtù delle formole antecedenti, da cui esse dipendono, la soluzione del caso in cui due de' quattro fattori del *quinomio* $a + bx + cx^2 + fx^3 + hx^4$ sono reali, gli altri due immaginarj.

Se si fosse posto $x = \frac{1}{y}$, l'integrale di $\frac{dx}{x^q X^p}$ sarebbe divenuto quello di una frazione di questa forma $\frac{x^q dx}{X^p}$, come abbiamo di già osservato.

XXXV. Resta a dare la soluzione del caso, in cui i quattro fattori del mentovato quinomio sono immaginarj; noi conseguiremo questo scopo coll'analisi seguente, la quale abbraccia ancora l'ipotesi di due reali, e di due immaginarj de' fattori in quistione.

Abbiamo di già rappresentato il quinomio $a + bx + cx^2 + fx^3 + hx^4$ per lo prodotto di due fattori del 2.° grado; se i fattori *semplici* di uno di questi fattori *doppj* sono immaginarj, si sa ch'essi hanno necessariamente questa forma $x - l - i\sqrt{-1}$, $x - l + i\sqrt{-1}$, in modo che il loro prodotto divenga una quantità reale $= x^2 - 2lx + l^2 + i^2$; ed il prodotto degli altri due fattori semplici reali sarà $= x^2 + bx + a$; se poi questi fossero ancora immaginarj, ciascheduno di loro avrebbe similmente questa forma $x - l'$

$+i'\sqrt{-1}$, $x-l'-i'\sqrt{-1}$, essendo il loro prodotto una quantità reale $= x^2 - 2l'x + l'^2 + i'^2$. Supponendo dunque $a + bx + cx^2 + fx^3 + bx^4 = b(x^2 + ix + i2)(x^2 + i3x + i4)$, ciascheduno de' trinomj $x^2 + ix + i2$, $x^2 + i3x + i4$ potrà rappresentare il prodotto de i quattro fattori semplici, reali o immaginarj, presi però due a due come si conviene. Si ha dunque nel caso di due fattori semplici reali, e di due immaginarj, ovvero di tutti i quattro fattori immaginarj

$$\frac{x^{\pm q}dx}{(a+bx+cx^2+fx^3+bx^4)^p} = \frac{x^{\pm q}dx}{b^p((x^2+ix+i2)(x^2+i3x+i4))^p}.$$

Egli è quistione di trovare le frazioni parziali, che hanno per denominatore ciascheduno de' fattori precedenti; ma giova proporsi un problema ancor più generale di questo, cioè di determinare le frazioni parziali, che nascono da questa $\frac{1}{(x^2+ix+i2)^q(x^2+i3x+i4)^s}$; essendo q e s de' numeri qualunque interi, pongo $s > q$, in guisa che $x^2 + i3x + i4$ sia la formola del 2.° grado alzata a una potenza maggiore di q; ipotesi che non limita in alcun modo la generalità del problema, dalla cui soluzione trarrò poi quella di $s = q = p$, la quale forma propriamente il nostro caso.

Si ha $(x^2+ix+i2)^q = x^{2q} + q1x^{2q-1} + q2x^{2q-2} + q3x^{2q-3} + \ldots\ldots + q(2q-1)x + q(2q)$. Il numero de' termini è $= 2q+1$, ed i coefficienti $q1$, $q2$, $q3$, ecc. sono dati per le leggi conosciute della potenza q sviluppata del trinomio $x^2 + ix + i2$; alla stessa maniera $(x^2 + i3x + i4)^s = x^{2s} + s1x^{2s-1} + s2x^{2s-2} + s3x^{2s+3} + \ldots\ldots + s(2s-1)x + s(2s)$; essendo il numero de' termini $= 2s+1$, e $s1$, $s2$, $s3$, ecc. i coefficienti della potenza s sviluppata del trinomio $x^2 + i3x + i4$.

Fingo $\frac{1}{(x^2+ix+i2)^q(x^2+i3x+i4)^s}$

$$= \frac{c(2q)+c(2q-1)x+c(2q-2)x^2+\ldots+c4x^{2q-4}+c3x^{2q-3}+c2x^{2q-2}+c1x^{2q-1}}{q(2q)+q(2q-1)x+\ldots\ldots\ldots+q2x^{2q-2}+q1x^{2q-1}+x^{2q}}$$

$$+ \frac{f(2s)+f(2s-1)x+f(2s-2)x^2+\ldots+f4x^{2s-4}+f3x^{2s-3}+f2x^{2s-2}+f1x^{2s-1}}{s(2s)+s(2s-1)x+\ldots\ldots\ldots\ldots+s2x^{2s-2}+s1x^{2s-1}+x^{2s}}$$

essendo $c1$, $c2$, $c3$, ecc; $f1$, $f2$, $f3$, ecc. delle indeterminate, che troveremo fra poco.

Nell' ipotesi sempre di $s>q$ moltiplico il denominatore della 2.ª frazione per il denominatore della prima, e ne dispongo il prodotto come segue.

$$c(2q)s(2s)+c(2q-1)s(2s-1)x+c(2q)s(2s-2)x^2+\ldots+c(2q)x^{2s}+c(2q-1)x^{2s+1}+\ldots+c1x^{2(s+q)-1}$$
$$+c(2q-1)s(2s)x+c(2q-1)s(2s-1)x^2+\ldots+c(2q-1)s1x^{2s}+\ldots$$
$$c(2q-2)s(2s)x^2+\ldots\ldots+c(2q-2)s2x^{2s}+\ldots\ldots$$
$$\text{ecc.} \qquad\qquad \text{ecc.}$$

Abbiamo moltiplicato $2s+1$ termini per $2q$ termini, vediamo dunque come nel nostro prodotto si contengono $2q(2s+1)$ termini; il numero de' termini della prima serie orizzontale è $=2(q+s)$, quello della 2.ª serie orizzontale è $=2(s+q)-2$, quello della 3.ª serie orizzontale è $=2(s+q)-4$, e così del resto; ma vi sono $2q$ serie, dunque il numero de' termini dell'ultima serie orizzontale è $2(s-q+1)$; dunque il numero totale de' termini è $=2q(2s+1)$ $=$ al numero necessario.

Se si considerano attentamente i coefficienti de' termini omogenei, che formano delle serie verticali nel prodotto precedente, si vedrà che il coefficiente di x^K, prendendo K da $K=0$ insino a $K=2q-1$, è $=c(2q)s(2s-K)+c(2q-1)s(2s-K+1)+c(2q-2)s(2s-K+2)+\ldots\ldots c(2q-K)s(2s)$; il cui numero de' termini è evidentemente $=K+1$.

Similmente si troverà che il coefficiente di $x^{2q+K'}$, prendendo K' da $K'=0$ insino a $X'=2s-2q$, è $=c(2q)s(2s-2q-K')+c(2q-1)s(2s-2q-K'+1)+c(2q-2)s(2s-2q-K'+2)+\ldots+c1s(2s-K'-1)$; il cui numero di termini è $=2q$.

Si troverà nella stessa maniera che il coefficiente di $x^{2s+K''}$, prendendo K'' da $K''=0$ insino a $K''=2q-1$, è $=c(2q-K''+c(2q-K''-1)s1+c(2q-K''-2)s2+\ldots\ldots+c1s(2q-K''-1)$, il cui numero di termini è $=2q-K''$.

Moltiplicando ora il numeratore della 2.ª frazione per il denominatore della 1.ª ne descrivo il prodotto come segue:

$$q(2q)f(2s)+q(2q)f(2s-1)xq(2q)f(2s-2)x^2+\ldots+q(2q)f1x^{2s-1}+q(2q-1)f1x^{2s}+\ldots+f1x^{2(q+s)-2}$$
$$q(2q-1)f(2s)x+q(2q-1)f(2s-1)x^2+\ldots+q(2q-1)f2x^{2s-1}+\ldots\ldots$$
$$+q(2q-2)f(2s)x^2+\ldots+q(2q-2)f3x^{2s-1}+\ldots$$
$$\text{ecc.} \qquad\qquad \text{ecc.}$$

Abbiamo moltiplicato $2s$ termini per $2q-1$ termini; vediamo se il nostro prodotto contiene $2s(2q+1)$ termini; il numero de i termini della 1.ª, 2.ª, 3.ª, ecc. serie orizzontale è rispettivamente $= 2(q+s)$, $2(q+s)-2$, $2(q+s)-4$, ecc. ma vi sono $2q+1$ serie orizzontali; dunque l'ultima contiene $2(s-q)$ termini; dunque il numero totale de i termini è $= 2s(2q+1) =$ al numero necessario.

Se si pon mente a i coefficienti de' termini omogenei che giacciono in colonne verticali nel prodotto precedente si troverà facilmente, 1.° che il coefficiente di x^K, prendendo K da $K=0$ infino a $K=2q$, è $= q(2q)f(2s-K)+q(2q-1)f(2s-K+1) + q(2q-2)f(2s-K+2)+\ldots\ldots+q(2q-K)f(2s)$, il cui numero de' termini $= K+1$; 2.° che il coefficiente di $x^{2q+K'}$, prendendo K' da $K'=1$ infino a $K'=2(s-q)-1$, è $= q(2q)f(2s-2q-K')+q(2q-1)f(2s-2q-K'+1) + q(2q-2)f(2s-2q-K'+2)+\ldots\ldots+f(2s-K')$, il cui numero de' termini è $= 2q+1$; 3.° che il coefficiente di $x^{2s+K''}$, prendendo K'' da $K''=0$ infino a $K''\,2q-1$, è $= q(2q-K''-1)f1+q(2q-K''-2)f2+q(2q-K''-3)f3 +\ldots\ldots+f(2q-K'')$, il cui numero de' termini è $= 2q-K''$.

XXXVI. Paragonando finalmente i coefficienti trovati delle medesime potenze di x, si ha questa serie di equazioni:

COEFFICIENTE di x^0.

$$(38)\ldots,\quad c(2q)\,s(2s) - q(2q)\,f(12s) = .$$

COEFFICIENTE di x^K

prendendo K da $K=1$ infino a $K=2q-1$; il numero de' termini positivi è eguale a quello de' termini negativi $= K+1$.

$$(39)\ldots\ldots \begin{array}{l} c(2q)s(2s-K)+c(2q-1)s(2s-K+1)+c(2q-2)s(2s-K+2)+\ldots+c(2q-K)s(2s) \\ \hfill =0 \\ -q(2q)f(2s-K)-q(2q-1)f(2s-K+1)-q(2q-2)f(2s-K+2)+\ldots-q(2q-K)f(2s) \end{array}$$

COEFFICIENTE di x^{2q}

il numero de' termini positivi è $= 2q$; il numero de' termini negativi $= 2q+1$.

$c(2q)s$

$$(40)\ldots \begin{array}{l} c(2q)s(2s-2q)+c(2q-1)s(2s-2q+1)+c(2q-2)s(2s-2q+2)+\ldots+c1s(2s-1) \\ \qquad = 0 \\ -q(2q)f(2s-2q)-q(2q-1)f(2s-2q+1)-q(2q-2)f(2s-2q+2)-\ldots\ldots-f(2s) \end{array}$$

COEFFICIENTE di $x^{2q+K'}$

prendendo K' da $K'=1$ insino a $K'=2s-2q-1$, il numero de' termini positivi è $=2q$; quello de' termini negativi è $=2q+1$.

$$(41)\ldots \begin{array}{l} c(2q)s(2s-2q-K')+c(2q-1)s(2s-2q-K'+1)+c(2q-2)s(2s-2q-K+2)+\ldots+c1s(2s-K'-1) \\ \qquad = 0 \\ -q(2q)f(2s-2q-K')-q(2q-1)f(2s-2q-K'+1)-q(2q-2)f(2s-2q-K'+2)-\ldots-f(2s-K') \end{array}$$

COEFFICIENTE di x^{2s}

il numero de' termini positivi è eguale a quello de i termini negativi, $=2q$.

$$(42)\ldots \begin{array}{l} c(2q)+c(2q-1)s1+c(2q-2)s2+c(2q-3)s3+\ldots+c1s(2q-1) \\ \qquad = 0 \\ -q(2q-1)f1-q(2q-2)f2-q(2q-3)f3-\ldots-f(2q) \end{array}$$

COEFFICIENTE di $x^{2s+K''}$

prendendo K'' da $K''=1$ insino a $K''=2q-1$; il numero de' termini positivi è eguale al numero de' termini negativi, $=2q-K''$.

$$(43)\ldots \begin{array}{l} c(2q-K'')+c(2q-K''-1)s1+c(2q-K''-2)s2+\ldots+c1s(2q-K''-1) \\ \qquad = 0 \\ -q(2q-K''-1)f1-q(2q-K''-2)f2-q(2q-K''-3)f3-\ldots-f(2q-K'') \end{array}$$

Abbiamo $2(s+q)$ incognite a determinare; ma i sistemi di equazioni (38), (39), (40), (41), (42) e (43) danno rispettivamente 1, $2q-1$, 1, $2s-2q-1$, 1, $2q-1$, cioè $2(s+q)$ equazioni; dunque il numero di queste è eguale al numero delle incognite.

XXXVII. Egli è facile di trarre dalla ſoluzione precedente quella del problema in quiſtione. Sia dunque $s = q = p$; ſuppongo $(x^2 + ix + i2)^p = x^{2p} + q1x^{2p-1} + q2x^{2p-2} + \ldots + q(2p-1)x + q(2p)$; e $(x^2 + i3x + i4)^p = x^{2p} + p1x^{2p-1} + p2x^{2p-2} + \ldots + p(2p-1)x + p(2p)$; e la frazione $\frac{1}{((x^2+ix+i2)(x^2+i3x+i4))^p}$

$$= \frac{c(2p) + c(2p-1)x + c(2p-2)x^2 + \ldots + c2x^{2p-2} + c1x^{2p-1}}{q(2p) + q(2p-1)x + \ldots + q1x^{2p-1} + x^{2p}}$$

$$+ \frac{f(2p) + f(2p-1)x + f(2p-2)x^2 + \ldots + f2x^{2p-2} + f1x^{2p-1}}{p(2p) + p(2p-1)x + \ldots + p1x^{2p-1} + x^{2p}}.$$

Dunque ponendo, come conviene di fare, nelle equazioni precedenti p invece di s, e di q, ſi avrà queſta ſerie di equazioni.

COEFFICIENTE di x^0.

$$(44) \ldots\ldots c(2p)p(2p) - q(2p)f(2p) = 1.$$

COEFFICIENTE di x^K

prendendo K da $K = 1$ inſino a $K = 2p - 1$, il numero de' termini poſitivi è eguale a quello de' negativi $= K + 1$.

$$(45) \ldots\ldots \begin{matrix} c(2p)p(2p-K) + c(2p-1)p(2p-K+1) + p(2p-K+2)c(2p-2) + \ldots + c(2p-K)p(2p) \\ -q(2p)f(2p-K) - q(2p-1)f(2p-K+1) - f(2p-K+2)q(2p-2) - \ldots - q(2p-K)f(2p) \end{matrix} = 0$$

COEFFICIENTE di x^{2p}

il numero de' termini poſitivi è eguale a quello de' termini negativi $= 2p$.

$$(46) \ldots\ldots \begin{matrix} c(2p) + c(2p-1)p1 + c(2p-2)p2 + \ldots + c1p(2p-1) \\ -q(2p-1)f1 - q(2p-2)f2 - q(2p-3)f3 - \ldots - f(2p) \end{matrix} = 0$$

COEFFICIENTE di $x^{2p+K'}$.

prendendo K' da $K' = 1$ insino a $K' = 2p - 1$, il numero de' termini positivi è eguale a quello de' negativi $= 2p - K'$.

$$\begin{aligned} &c(2p-K') + c(2p-K'-1)p1 + c(2p-K'-2)p2 + \ldots + c1p(2p-K'-1) \\ &\qquad = 0 \\ (47)\ldots\ &-q(2p-K'-1)f1 - q(2p-K'-2)f2 - q(2p-K'-3)f3 - \ldots - f(2p-K') \end{aligned}$$

I sistemi di equazioni (44) e (45) sono dedotti da i sistemi di equazioni (38) e (39); e i sistemi (46) e (47) da i sistemi (42) e (43). Egli è evidente, che allora i sistemi (40) e (41) divengono nulli, o eguali a zero.

Si hanno dunque $4p$ equazioni, per mezzo delle quali si troveranno i valori delle $4p$ incognite; ma il procedere dell' eliminazione, da cui dipende questa ricerca, è lungo d'assai, e capace a presentare sovente de' grandi ostacoli, malgrado gli artifizj insigni usati per sormontargli da i più celebri Geometri del nostro secolo; ciò non ostante si può con diritto affermare aver noi conseguito l'intento proposto, per aver ridotto l'unico lavoro che resta da eseguirvi a delle pure operazioni di Algebra finita, le quali in generale sono sempre possibili. Si ha dunque nel caso di due, o di quattro fattori immaginarj della quantità $a + bx + cx^2 + fx^3 + hx^4$,

$$\int \frac{x^{\pm q}dx}{(a + bx + cx^2 + fx^3 + hx^4)^p} = \text{Cost.} + \frac{c(2p-t)}{h^p}\int \frac{x^{t\pm q}dx}{(x^2 + ix + i2)^p} + \frac{f(2p-t)}{h^p}\int \frac{x^{t\pm q}dx}{(x^2 + i3x + i4)^p}, \quad \ldots\ldots (48).$$

Si sostituiranno successivamente in questi integrali, che sono dati per le formole precedenti, a t i valori 0, 1, 2, 3, ... $2p - 1$.

XXXVIII. Da questi principj si potrebbe prendere argomento di alzarsi ad una maggiore generalità, tentando l'integrazione delle formole, i cui denominatori fossero potenze qualunque di formole superiori al 4.° grado; ora esso fissando a' dì nostri il termine della risoluzione delle equazioni, i nostri risultati sarebbero propriamente ipotetici. Ma oltre a che i metodi di approssimazione per ottenere le radici delle equazioni sono moltiplici, e perfezionati di molto, una simile considerazione non c' impedirà mai di occuparci ulteriormente di questa maniera, ben sapendo, come ha ricordato più volte l' immortale Eulero, che il calcolo integrale giungerebbe ad un grado altissimo di perfezione, se si potessero ridurre le difficoltà a quelle, che la sola Algebra finita ci presenta.