MEMORIA

SOPRA ALCUNI PROBLEMI MECCANICI.

Del Medesimo.

UN celebre Problema di Meccanica è quello, in cui si cerca la pressione che soffrono i varj appoggi, dai quali un corpo è sostenuto sopra un piano orizontale. Il Sig. *Leonardo Euler* ha preso a risolvere questo Problema nel Tomo XVIII. dei nuovi Commentarj di Pietroburgo. Questo gran Geometra osservando, che i principj della Statica non erano sufficienti per determinarlo in tutti i casi, ebbe ricorso ad una ipotesi, che pare a prima vista esatta, ma poi esaminata attentamente si trova affatto insussistente. Suppone egli che, espressa la pressione sofferta da ciascuno appoggio con una retta perpendicolare al piano nel punto in cui cade l'appoggio, l'estremità di queste perpendicolari siano tutte in un piano. Infatti, se il piano orizontale, su cui si appoggia il corpo, invece di essere immobile, fosse la superficie di una materia cedevole, il corpo vi si affonderebbe: ora il cammino fatto dopo un dato tempuscolo da ciascuno appoggio è secondo l' *Euler* proporzionale alla pressione di lui, e gli appoggi si trovano tutti in un piano alla fine di questo tempuscolo: quindi espresse le pressioni, come sopra abbiamo detto, le loro estremità caderanno tutte in un piano. Questo discorso anderebbe bene se gli appoggi fossero tutti staccati, perchè allora lo spazio percorso da ciascuno appoggio sarebbe proporzionale alla di lui pressione. Ma siccome gli appoggi sono collegati insieme, e le loro distanze devono sempre mantenersi le medesime, ciascuno appoggio si risente dell'azione degli altri; onde il cammino fatto da esso in un dato tempuscolo non è più proporzionale alla pressione che soffre. Manca dunque il fondamento della supposizione di *Euler*; e quindi convien dire che egli non abbia pro-

vato ciò che assume. Ma ammessa una volta questa ipotesi riesce molto facile il determinare la pressione sofferta da un numero qualunque di appoggi. Più generalmente ancora se si suppone che, espresse le pressioni come sopra, le loro estremità cadano in una superficie curva, della quale (chiamate x ed y le coordinate orizontali prese sul piano in cui posa il corpo, e z la coordinata verticale) l'equazione sia $z =$ ad una funzione qualunque di x ed y che comprenda tre costanti, il problema delle pressioni sarà di ugualmente facile risoluzione, come si potrà riscontrare usando un metodo simile a quello del Sig. *Euler*. Ma i principj della Meccanica nulla ci offrono per determinar questa superficie. Riguardo poi all'ipotesi del Sig. *Euler*, oltre all'aver mostrato che manca di prova, possiamo anche *a posteriori* assegnar molti casi in cui essa non ha luogo. Sia (fig. I.) il corpo sostenuto da quattro appoggi A, B, C, D, e la direzione del di lui centro di gravità cada in G in diritto con i punti A e B, e chiamiamo le respettive pressioni con le medesime lettere A, B, C, D. Tirate le perpendicolari CC', DD' alla retta AB, la somma de' momenti per rispetto a questa retta, cioè $C.CC'+D.DD'$ dovrà essere zero, lo che a motivo de' due punti C e D situati dalla medesima parte della retta AB non può succedere, se le pressioni C e D non sono uguali a zero. Posto ciò il piano, in cui secondo l'ipotesi dell'*Euler* devono cadere l'estremità delle pressioni, passerà per C e D, e la retta CD sarà la comun sezione di questo piano e del piano della Tavola, e tirate le perpendicolari AA', BB' alla retta CD, le pressioni A e B staranno tra loro come le rette AA', BB'. Ma queste pressioni si sa esser tra loro come BG ad AG: dunque $AA' : BB' = BG : AG$, lo che non è vero che in una sola delle infinite situazioni, che può avere sulla retta AB' il punto G. Se oltre i punti C e D vi sarà un altro appoggio E situato dalla medesima parte, le pressioni C, D, E saranno tutte uguali a zero, onde il piano che passa per le loro estremità sarà il piano della Tavola, e l'estremità delle pressioni A e B dovranno cadere in questo medesimo piano, cioè saranno uguali a zero, lo che è falso.

Tra quelli, che hanno trattato di questa materia, si deve in particolar modo rammentare il Sig. *d'Alembert*, il

quale con la ſua ſolita acutezza nel Tomo VIII de' ſuoi Opuſcoli ha dimoſtrato, che con i ſoli principj della Meccanica non può determinarſi la preſſione eſercitata da un corpo ſu tre appoggi ſituati in diritto con la direzione del centro di gravità del corpo; ed il primo che io ſappia ha rilevato queſto paradoſſo Meccanico, che un problema determinato, quando i tre appoggi non ſono in diritto, diventa ſubito indeterminato quando gli appoggi ſono tutti ſituati in linea retta. Il Sig. Ab. *Boſſut* nel ſuo Trattato elementare di Meccanica, dopo di avere oſſervato che il Problema è indeterminato quando gli appoggi ſono più di tre, o quando i tre appoggi ſono in linea retta, dà una elegante ſoluzione del ſolo caſo determinato. Finalmente il Sig. *Delanges* nel Tomo V. della noſtra Società ha data una nuova ſoluzione di queſto Problema preſo in tutta l'eſtenſione, conſiderando un numero qualunque di appoggi.

Siccome queſte ſoluzioni ſembrano affatto differenti, ho penſato di prender nuovamente a trattare queſta materia con tutta la generalità. Tutti i Problemi, che hanno rapporto all'equilibrio, ſi poſſono invero conſiderare come riſoluti nella Meccanica Analitica del Sig. de la *Grange*; almeno in quell'Opera eccellente ſi trovano i principj neceſſarj per riſolverli tutti. Pure ſpero che i Geometri non ſgradiranno di vedere una ſoluzione di queſto Problema con quella ſempliſicazione, che le di lui particolari condizioni permettono, ed un ulteriore ſviluppo delle formule analitiche del Sig. de la *Grange* intrapreſo e per conciliare le diverſe ſoluzioni di queſto Problema, e per moſtrare evidentemente ciò che da' ſoli principj della Meccanica ſenza alcuna ipoteſi poſſa ſperarſi. Io mi varrò in queſte ricerche del principio delle velocità virtuali, il quale oltre gli altri pregi ha quello di dare tutte l'equazioni del Problema, e le ſole neceſſarie. Chi ſi vale di altri particolari principj, corre riſchio, ſenza il ſoccorſo di una fina Metafiſica, o di omettere alcuna dell'equazioni neceſſarie, o di ammetterne altre che ſiano contenute nelle già conſiderate, come potremmo darne degli eſempj.

Riſulta dall'Analiſi ſeguente, che il Problema è indeterminato quando gli appoggi ſono più di tre, o quando i tre appoggi ſono in linea retta; e nel caſo de' tre appoggi non

in diritto

in diritto che le ſoluzioni de' Signori *Euler*, *Boſſut*, e *Delanges* ſono eſatte, e ſon compreſe tra le infinite ſoluzioni che ſi poſſono dare di queſto problema differenti di aſpetto, ma in ſoſtanza conformi. Ho preſo in ſeguito a conſiderare il caſo, in cui il corpo ſi appoggia ſopra un piano inclinato, e ſupponendo applicata al centro di gravità del corpo una forza, che ne impediſca la diſceſa per lo piano inclinato, ho moſtrato che queſto problema ſi riduceva al primo. Dopo di queſto ho ſuppoſto che il corpo foſſe appoggiato a varj piani diverſamente inclinati, ed ho trovato che il problema è in tal caſo generalmente determinato per ſei appoggi, indeterminato per un numero di appoggi maggiore. Dico generalmente, perchè può eſiſtere qualche relazione tra le inclinazioni de' diverſi piani, che renda indeterminato il problema anche per ſei o per un numero minore di appoggi. E' facile dedurre da ciò la ſoluzione del problema, quando il corpo è appoggiato a ſuperficie curve, come ho in fine accennato, facendone l'applicazione al caſo delle ſuperficie sferiche, e cilindriche.

Della preſſione di un corpo ſopra varj punti di un piano orizontale.

I. Sia dato un corpo (fig. II) appoggiato ad un piano orizontale con un numero qualunque di ſoſtegni A, B, C, D, ec.; e ſi debba determinare la preſſione, che in ciaſcuno di queſti appoggi ſoffre il piano orizontale. Sia G il punto, in cui la direzione del centro di gravità del corpo, cioè la verticale che paſſa per queſto centro, incontra il piano orizontale, che per noi ſarà quello della Tavola: e ſe concepiamo il peſo del corpo P riunito nel centro di gravità, lo che è permeſſo, la forza P agirà ſul piano nel punto G perpendicolarmente ad eſſo, e ſarà quella forza, che produce le preſſioni ne' punti A, B, C, D, ec. Se adeſſo ſupponghiamo il piano mobile, e conſideriamo le preſſioni applicate ai punti A, B, C, D, ec. in parte oppoſta, cioè contro la direzione della gravità, il piano rimarrà in equilibrio. Quindi il problema ſi riduce a cercare, quali eſſer debbano le forze P', P'', P''', P'''', ec. applicate ai punti

A, B, C, D, ec. perpendicolarmente al piano e contro la direzione della gravità, perchè il piano aggravato in G dal peso del corpo, o da una forza P nella direzione della gravità sia in equilibrio.

Primieramente adunque converrà che sia impedito al piano il moto progressivo, il quale non può essere che verticale; e quindi in vigore del principio delle velocità virtuali se si dà al piano un piccolo impulso in modo, che δz sia lo spazietto percorso verticalmente dal punto G, si avrà $P\delta z-(P'+P''+P'''+P''''+\text{ec.})\delta z=0$, perchè qui non consideriamo per ora che il solo moto verticale, e perciò δz è lo spazietto percorso da tutti i punti del piano. Abbiamo dunque l'equazione

$$(1)\quad P'+P''+P'''+P''''+\text{ec.}=P$$

la quale indica, che la somma di tutte le pressioni dev'essere eguale al peso del corpo.

Oltre il moto progressivo del piano deve anch'essere impedito il moto di rotazione. Prendiamo una retta qualunque EA' in questo piano, e da tutti i punti G, A, B, C, D, ec. tiriamo su di essa le perpendicolari GG', AA', BB', CC', DD', ec., che chiameremo rispettivamente y, y', y'', y''', y'''', ec. Adesso supponendo immobile l'asse EA' diamo un piccolo impulso al piano, e sia δu l'archetto dal punto G descritto intorno a quest'asse; saranno $\frac{y'\delta u}{y}$, $\frac{y''\delta u}{y}$, $\frac{y'''\delta u}{y}$, $\frac{y''''\delta u}{y}$, ec. gli archetti respettivamente descritti dai punti A, B, C, D, ec.: ed in forza del principio delle velocità virtuali avremo $P\delta u-\frac{Py'+P''y''+P'''y'''+P''''y''''+\text{ec.}}{y}\delta u=0$, cioè

$$(2)\quad Py'+P''y''+P'''y'''+P''''y''''+\text{ec.}=Py$$

la qual'equazione si poteva anche dedurre dalla Teoria de' momenti.

Similmente, se prendiamo un altro asse EF perpendicolare al primo, e chiamiamo le rette EG, EA', EB', EC', ED', ec. respettivamente x, x', x'', x''', x'''', ec., avremo

$$(3)\quad P'x'+P''x''+P'''x'''+P''''x''''+\text{ec.}=Px.$$

II. Se le tre equazioni precedenti avranno luogo, sarà impedito al piano qualunque moto progressivo e di rotazione, e quindi egli sarà in equilibrio. Si abbia infatti un al-

tro asse qualunque HA'', che incontri il primo in H, intorno al quale possa il piano girarsi; io dico che poste le precedenti equazioni sarà impedito il moto di rotazione anche intorno a questo asse. Poichè tirate su di esso le perpendicolari GG'', AA'', BB'', CC'', DD'', ec. per l'equilibrio dovrà essere

$$P'.AA'' + P''.BB'' + P'''.CC'' + P''''.DD'' + \text{ec.} = P.GG''.$$

Ora se chiamiamo a la retta EH, ed α l'angolo $A'HA''$ avremo $AA'' = y' cos.\alpha + (a - x') sen.\alpha$, $BB'' = y'' cos.\alpha + (a - x'') sen.\alpha$, $CC'' = y''' cos.\alpha + (a - x''') sen.\alpha$, $DD'' = y'''' cos.\alpha + (a - x'''') sen.\alpha$, ec. e $GG'' = y\, cos.\alpha + (a - x) sen.\alpha$; e sostituiti questi valori l'equazione precedente diventerà

$$(P'y' + P''y'' + P'''y''' + P''''y'''' + \text{ec.}) cos.\alpha - (P' + P'' + P''' + P'''' + \text{ec.}) a\, sen.\alpha$$
$$+ (P'x' + P''x'' + P'''x''' + P''''x'''' + \text{ec.}) sen.\alpha = Py\, cos.\alpha - Pa\, sen.\alpha + Px\, sen.\alpha.$$

la quale nasce dalle tre prime mediante la combinazione $(2)\, cos.\alpha - (1)\, a\, sen.\alpha + (3)\, sen.\alpha$. Se dunque hanno luogo le tre prime equazioni, sarà impedito nel piano qualunque moto, e perciò per determinare l'equilibrio del piano conviene a queste sole equazioni soddisfare.

III. Siccome pertanto i principj della Meccanica non ci danno per determinare le pressioni esercitate da varj appoggi di un corpo che tre equazioni, ne segue che il problema si potrà risolvere quando tre sono gli appoggi, ma resterà indeterminato, quando il numero degli appoggi è maggiore. E nel caso di tre appoggi i valori delle pressioni P', P'', P''' si dovranno dedurre dall'equazioni

$$P' + P'' + P''' = P$$
$$P'y' + P''y'' + P'''y''' = Py$$
$$P'x' + P''x'' + P'''x''' = Px.$$

Ma per avere queste pressioni espresse più semplicemente si osservi, che possiamo prendere ad arbitrio l'asse EH, e che l'angolo formato dalle coordinate x, y parallele ai due assi, invece di esser retto, può essere in qualunque modo obliquo. Se perciò facciamo passare l'asse EH per i punti A e B, e l'asse EF per i punti A e C, avremo $x' = 0$, $x''' = 0$, $y' = 0$, $y'' = 0$, e le pressioni si dovranno determinare dall'equazioni $P' + P'' + P''' = P$, $P'''y''' = Py$, $P''x'' = Px$, cioè sarà

$P''' = P\frac{y}{y'''}$, $P'' = P\frac{x}{x''}$, e $P' = P\left(1 - \frac{x}{x''} - \frac{y}{y'''}\right)$.

IV. Poichè, preso un asse qualunque HA'', l' equazione che ne deriva dipende dalle tre prime equazioni (1), (2), e (3); quindi potremo risolvere il problema, se prenderemo tre assi qualunque di rotazione, e l'equazioni, che ne otterremo, equivarranno all'equazioni (1), (2), e (3). Onde, siccome resta in nostro arbitrio la scelta de' tre assi, avremo infinite soluzioni del problema, in sostanza le stesse, ma di un aspetto diverso, tra le quali potremo sciegliere le più semplici. Ma se invece di tre assi ne prendessimo quattro o un maggior numero, siccome l'equazioni date dal quarto asse e dai seguenti, per ciò che abbiamo dimostrato, son comprese nelle prime tre, considerando insieme quattro o più equazioni giungeremmo a dei valori di P', P'', ecc. indeterminati, cioè della forma $\frac{0}{0}$, com'è noto dalla Teoria della eliminazione.

V. Abbiamo detto, che generalmente i tre assi si possono prendere in qualunque modo: se però essi passeranno tutti pel punto G, avremo due sole equazioni, perchè la terza dipenderà dalle due prime. Siano infatti (fig. III.) presi per assi le tre rette HG, $H'G$, $H''G$, che passano pel punto G, e siano le perpendicolari tirate dai punti A, B, C sul primo asse rispettivamente z', z'', $-z'''$, sul secondo r', r'', $-r'''$, sul terzo s', s'', $-s'''$; ove ponghiamo negative le perpendicolari, che nella figura cadono dalla parte dell'asse opposta a quella, in cui son prese le positive. Avremo l'equazioni

$$P'z' + P''z'' - P'''z''' = 0$$
$$P'r' + P''r'' - P'''r''' = 0$$
$$P's' + P''s'' - P'''s''' = 0.$$

Siccome manca la quantità P, non potremo avere il rapporto delle pressioni al peso, ma solamente dalle due prime equazioni il rapporto di due delle quantità P', P'', P''' alla terza, e la terza equazione ci darà una equazione di condizione tra z', z'', z''', r', r'', ecc.. Questa equazione di condizione non può aver luogo, perchè i punti A, B, C possono essere in qualunque modo situati: dunque la terza equa-

zione farà inclusa nelle due prime; e così è di fatto. Per dimostrar ciò si osservi che, facendo $EH = a$, $EH' = b$, $EH'' = c$, l'angolo $GHH' = \alpha$, l'angolo $GH'H'' = \beta$, e l'angolo $GH''M = \gamma$, avremo $z' = y' \cos.\alpha + (a - x') \, sen.\alpha$, $r' = y' \cos.\beta + (b - x') \, sen.\beta$, $s' = y' \cos.\gamma + (c - x') \, sen.\gamma$, $z'' = y'' \cos.\alpha + (a - x'') \, sen.\alpha$, $r'' = y'' \cos.\beta + (b - x'') \, sen.\beta$, $s'' = y'' \cos.\gamma + (c - x'') \, sen.\gamma$, $-z''' = y''' \cos.\alpha + (a - x''') \, sen.\alpha$, $-r''' = y''' \cos.\beta + (b - x''') \, sen.\beta$, $-s''' = y''' \cos.\gamma + (c - x''') \, sen.\gamma$. Ponghiamo $s' = mz' + nr' + p$, e sostituendo in questa equazione i valori di z', r', s' avremo $y' \cos.\gamma + (c - x') \, sen.\gamma = my' \cos\alpha + m(a - x') \, sen.\alpha + ny' \cos.\beta + n(b - x') \, sen\beta + p$. Questa equazione dovendo aver luogo, qualunque sia x' ed y', avremo

$$m \, sen.\alpha + n \, sen.\beta = sen.\gamma$$
$$m \cos.\alpha + n \cos.\beta = \cos.\gamma$$
$$p = c \, sen.\gamma - ma \, sen.\alpha - nb \, sen.\beta$$

e quindi dedurremo $m = -\dfrac{sen(\gamma - \beta)}{sen(\beta - \alpha)}$, $n = \dfrac{sen(\gamma - \alpha)}{sen(\beta - \alpha)}$, e

$$p = \frac{c \, sen.\gamma \, sen(\beta - \alpha) + a \, sen.\alpha \, sen(\gamma - \beta) - b \, sen.\beta \, sen(\gamma - \alpha)}{sen(\beta - \alpha)}.$$

Posti questi medesimi valori di m, n, p sarà ancora $s'' = mz'' + nr'' + p$, e $-s''' = -mz''' - nr''' + p$. Ora io dico che $p = 0$: infatti se si riflette che il punto G cade su ciascuno dei tre assi, e perciò le perpendicolari tirate dal punto G su questi assi sono eguali a zero, è chiaro che si avrà

$$y \cos.\alpha + (a - x) \, sen.\alpha = 0$$
$$y \cos.\beta + (b - x) \, sen.\beta = 0$$
$$y \cos.\gamma + (c - x) \, sen.\gamma = 0$$

Dalle prime due equazioni si ricava

$x = \dfrac{b \, sen.\beta \cos.\alpha - a \, sen.\alpha \cos.\beta}{sen(\beta - a)}$, $y = \dfrac{(b - a) \, sen.\alpha \, sen.\beta}{sen(\beta - \alpha)}$, e sostituiti questi valori nella terza essa diventa

$$\frac{(b - a) \, sen.\alpha \, sen.\beta \cos.\gamma}{sen(\beta - \alpha)} + c \, sen\gamma$$
$$+ \frac{a \, sen\alpha \, sen\gamma \cos\beta - b \, sen\beta \, sen\gamma \cos\alpha}{sen(\beta - \alpha)} = 0 \text{ cioè}$$

$$\frac{a\,sen\,\alpha\,sen(\gamma-\beta)-b\,sen\,\beta\,sen(\gamma-\alpha)+c\,sen\,\gamma\,sen(\beta-\alpha)}{sen(\beta-\alpha)}=0.$$

Questo è appunto il valore di p; dunque $p=0$. Abbiamo pertanto $s'=mz'+nr'$, $s''=mz''+nr''$, $s'''=mz'''+nr'''$, e l'equazione $P's'+P''s''-P'''s'''=0$ sostituiti questi valori diventa

$$P'(mz'+nr')+P''(mz''+nr'')-P'''(mz'''+nr''')=0$$

cioè dipende dalle altre due equazioni $P'z'+P''z''-P'''z'''=0$, $P'r'+P''r''-P'''r'''=0$.

VI. Siccome è in nostro arbitrio la scelta degli assi, prendiamo per assi (fig. IV) le rette AB, AC, BC, che congiungono i punti A, B, C, ed otterremo una soluzione del problema semplicissima. Infatti per rapporto all'asse AB avremo l'equazione $P.'''CC'=P.GG'$, cioè la pressione esercitata sul punto C starà al peso del corpo, come GG': CC', o come il triangolo AGB al triangolo ACB. Facendo l'istesso discorso relativamente agli assi AC, e BC troveremo, che le pressioni su' punti A, B, C stanno tra loro come i triangoli BGC, AGC, AGB, il peso del corpo essendo rappresentato dal triangolo ABC. Il Sig. *Euler* è giunto a questo medesimo teorema, perchè la di lui ipotesi, che in generale non è vera, è esattissima nel caso di tre appoggi non situati in diritto.

Il Sig. Abate *Bossut* per risolvere questo problema suppone, che condotta (fig. V.) la retta AB, e dal punto C per G la retta CD, la quale incontri la prima in D, sia AB un vette, il di cui punto di appoggio sia in D; poi immaginando riunite in D le due pressioni sopra A e B suppone che CD sia un altro vette, e il di lui punto di appoggio in G. Per dimostrare che queste due supposizioni sono esatte consideriamo i due assi AB, CD, ed il terzo $A'B'$ condotto per C perpendicolarmente a CD; avremo l'equazioni (1) $P.'''CD=P.GD$, (2) $P'.AD=P''.BD$, (3) $P'.AA'+P''.BB'=P.CG$. L'equazione (2) ci mostra subito, che AB si può riguardare come un vette, il quale abbia il punto di appoggio in D: dipoi condotte AA'', BB'' perpendicolari a CD, è in vigore di questa medesima equazione $P'.DA''=P''.DB''$, e quindi per la terza equazione

$P'(AA'-DA'')+P''(BB'+DB'')=P.CG$, cioè (a) $(P'+P'')CD=P.CG$. Ora le due equazioni (1) ed (a) indicano che si può riguar-

dare CD come un vette che sia in equilibrio, avendo in G il punto di appoggio, ed essendo aggravato in C e D dalle potenze P''' e $P'+P''$.

Se tirate (fig. IV) le rette GA, GB, GC prendiamo per assi le rette a queste rispettivamente perpendicolari Aa, Bb, Cc, avremo la soluzione del Sig. *Delanges*.

Tutte queste soluzioni pertanto, e le altre infinite che si potrebbero dare prendendo tre assi qualunque, sono egualmente esatte, ed i loro resultati sono conformi.

VII. Se tutti i punti di appoggio A, B, C sono in diritto, converrà che sia nella medesima retta con essi anche il punto G, e svaniranno insieme (fig. IV) i triangoli AGB, AGC, BGC, ed il triangolo ABC; onde avremo il valore di ciascuna pressione espresso da $\frac{0}{0}$, cioè indeterminato. I Signori *d' Alembert* e *Bossut* avevano già osservato, che i principj della Statica lasciavano questo caso indeterminato. Ma siccome potrebbe dubitarsi, che l'espressione indeterminata $\frac{0}{0}$ avesse luogo nelle particolari soluzioni di questi Geometri, ed in quella che nasce dal teorema dell'*Euler*, e vi fosse qualche soluzione che dasse le pressioni sotto una forma determinata, risolviamo il problema nella massima generalità. Prendiamo adunque (fig. VI) tre assi qualunque LM, LN, MN, e tirando dai punti G, A, B, C su di essi le perpendicolari chiamiamo GG' x, GG'' y, GG''' z. Ora se α è l'angolo che la retta AC forma coll'asse LN avremo $AA'=x-AG\,sen\,\alpha$, $BB'=x+BG\,sen\,\alpha$, $CC'=x+CG\,sen\,\alpha$. Similmente chiamando β l'angolo, che la medesima retta AC forma coll'asse LM, otterremo $AA''=y-AG\,sen\,\beta$, $BB''=y+BG\,sen.\beta$, $GC''=y+CG\,sen.\beta$. E così pure, se γ è l'angolo formato dalla retta AC coll'asse MN, avremo $AA'''=z+AG\,sen.\gamma$, $BB'''=z-BG\,sen.\gamma$, $CC'''=z-CG\,sen.\gamma$. Posto ciò per determinare le pressioni esercitate su' punti A, B, C abbiamo per le cose precedenti l'equazioni

$$(1)\ P'(x-AG\,sen\,\alpha)+P''(x+BG\,sen\,\alpha)+P'''(x+CG\,sen\,\alpha)=Px$$
$$(2)\ P'(y-AG\,sen\,\beta)+P''(y+BG\,sen\,\beta)+P'''(y+CG\,sen\,\beta)=Py$$
$$(3)\ P'(z+AG\,sen\,\gamma)+P''(z-BG\,sen\,\gamma)+P'''(z-CG\,sen\,\gamma)=Pz$$

Adesso è facile il vedere che la terza equazione è inclusa nelle due prime: poiche $(1)\,sen\,\beta - (2)\,sen\,\alpha$ ci darà $P' + P'' + P''' = P$, e quindi $-P'.AG + P''.BG + P'''.CG = 0$; onde alle due equazioni (1) e (2) equivalgono le due seguenti

$$(a)\quad P' + P'' + P''' = P$$
$$(b)\quad P'.AG - P''.BG - P'''.CG = 0$$

ed è chiaro che l'equazione (3) nasce da $(a)\,z + (b)\,sen\,\gamma$. Siccome adunque la terza equazione è inclusa nelle due prime, o prendiamo le sole equazioni (1) e (2), o sia l'equivalenti (a) e (b), e queste non basteranno per determinare le tre quantità P', P'', P'''; o prendiamo le tre equazioni (1), (2), e (3), ed in tal caso, poichè la terza equazione dipende dalle altre due, giungeremo ad avere per P', P'', P''', dei valori della forma $\frac{0}{0}$.

L'istesso possiamo più facilmente dedurre dal n.° I. mostrando che nel caso de' tre appoggi in diritto le tre equazioni si riducono a due sole, qualunque si prendano gli assi delle coordinate. Infatti, siccome i tre appoggi sono in diritto, se chiamiamo a e b le distanze del primo appoggio dagli altri due, ed α l'angolo che la retta degli appoggi forma coll'asse della x, avremo $x'' = x' + a\cos.\alpha$, $x''' = x' + b\cos.\alpha$, $y'' = y' + a\,sen\,\alpha$, $y''' = y' + b\,sen.\alpha$. Sostituiti questi valori le tre equazioni del n.° I diventeranno

$$(1)\quad P' + P'' + P''' = P$$
$$(2)\quad (P' + P'' + P''')y' + P''\,a\,sen\,\alpha + P'''\,b\,sen.\alpha = Py$$
$$(3)\quad (P' + P'' + P''')x' + P''\,a\cos.\alpha + P'''\,b\cos\alpha = Px.$$

Da queste si deduce $\frac{y - y'}{sen\,\alpha} = \frac{x - x'}{\cos\alpha}$, cioè dev'essere in diritto con gli appoggi anche il punto corrispondente al centro di gravità del corpo; e quindi, chiamata c la distanza di questo punto dal primo appoggio, sarà $x = x' + c.\cos\alpha$, $y = y' + c\,sen\,\alpha$. Posti questi valori di x ed y è evidente che la terza equazione nasce da $(1)(x' - y'\cot.\alpha) + (2)\cot.\alpha$, cioè è inclusa nelle due prime.

VIII. Il problema pertanto è indeterminato, e quando i punti di appoggio sono più di tre, e quando i tre punti sono in diritto. Abbiamo pienamente dimostrata la seconda

parte;

parte; per dare un ulteriore ſchiarimento riguardo alla prima conſideriamo la ſoluzione del Sig. *Delanges*, ove ſiccome (fig. VII) i tre aſſi Aa, Bb, Cc ci hanno date tre equazioni, pare a prima viſta che, ſe avremo un altro punto D, l'aſſe Dd ſia per darci una quarta equazione; in modo che il problema ſia determinato anche per quattro e più appoggi. Per eſaminare queſta queſtione prendiamo una retta qualunque AP, a cui riferiremo i quattro aſſi Aa, Bb, Cc, Dd, e queſta retta per maggior ſemplicità facciamola paſſare pel punto A. Siano α, β, γ, δ gli angoli che reſpettivamente formano con la retta AP i quattro aſſi Aa, Bb, Cc, Dd nei quattro punti A, b, c, d, ov'eſſi la incontrano, e ſia $Ab=a$, $Ac=b$, $Ad=c$. Prendendo un punto qualunque M, tiriamo da eſſo la perpendicolare MP ſulla retta AP, e le perpendicolari MP', MP'', MP''', MP'''' ſu i quattro aſſi. Poſto ciò, è evidente dalla teoria della permutazione delle coordinate, che avremo

$$MP' = AP \operatorname{sen} \alpha + MP \cos.\alpha$$
$$MP'' = (a + AP) \operatorname{sen} \beta - MP \cos \beta$$
$$MP''' = (b - AP) \operatorname{sen} \gamma - MP \cos \gamma$$
$$MP'''' = (c - AP) \operatorname{sen} \delta - MP \cos \delta.$$

Facciamo (a) $MP'''' = m.MP' + n.MP'' + p.MP'''$, e ſoſtituendo i valori di MP', MP'', ec. avremo

$$c \operatorname{sen}\delta - AP \operatorname{sen}\delta - MP \cos\delta = n\, a \operatorname{sen} \beta + pb \operatorname{sen}\gamma + AP(m \operatorname{sen} \alpha + n \operatorname{sen}\beta - p \operatorname{sen}\gamma)$$
$$+ MP(m \cos \alpha - n \cos \beta - p \cos \gamma).$$

Eguagliando i coefficienti di AP e di MP avremo per determinare le quantità m, n, p le tre equazioni

$$n\, a \operatorname{sen} \beta + p\, b \operatorname{sen} \gamma = c \operatorname{sen} \delta$$
$$m \operatorname{sen} \alpha + n \operatorname{sen} \beta - p \operatorname{sen} \gamma = - \operatorname{sen} \delta$$
$$m \cos \alpha - n \cos \beta - p \cos \gamma = - \cos \delta.$$

I valori di m, n, p, che ſe ne ricaveranno, ſarano indepenenti dalla ſituazione del punto M, e perciò l'equazione (a) avrà luogo, ovunque ſi prenda il punto M. Onde ſe chiamiamo z, z', z'', z''' le diſtanze dall'aſſe Aa de' punti G, B, C, D; u, u', u'', u''' le diſtanze dall'aſſe Bb de' punti G, A, C, D; t, t', t'', t''' le diſtanze dall'aſſe Cc de' punti G, A, C, D; e finalmente r, r', r'', r''' le diſtanze dall'aſſe Dd de' punti G, A, B, C; avremo $r = mz + nu + pt$; $r' = nu' + pt'$, $r'' = mz'' + pt''$, $r''' = mz''' + nu'''$.

Ora i quattro assi Aa, Bb, Cc, Dd ci danno le quattro seguenti equazioni

$$(1)\ P'z'' + P'''z''' + P''''z'''' = Pz$$
$$(2)\ P'u' + P'''u''' + P''''u'''' = Pu$$
$$(3)\ P't' + P'''t''' + P''''t'''' = Pt$$
$$(4)\ P'r' + P'''r''' + P''''r'''' = Pr$$

Sostituiti nell'equazione (4) i valori di r, r', r'', ecc. essa diventerà

$$P'(nu' + pt') + P''(mz'' + pt'') + P''''(mz'''' + nu'''') = P(mz + nu + pt)$$

la quale è già compresa nelle prime tre, e nasce dalla combinazione $(1)\ m + (2)n + (3)p$, poichè $mz'''' + nu'''' + pt''''$ = alla distanza del punto D dall'asse Dd è $= 0$.

Quindi l'equazioni indipendenti non saranno che tre, e perciò il problema non sarà determinato che per tre punti di appoggio. Che se volessimo prendere tutte e quattro l'equazioni precedenti, ne ricaveremmo i valori delle pressioni P', P'', ecc. sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Questo medesimo discorso si può applicare a qualunque posizione di assi, e serve a comprovare, che tre soli assi (purchè non passino tutti pel punto G (V)) danno l'equazioni del problema, e un numero maggiore di assi dà dell'equazioni inutili.

Della pressione di un corpo sopra un piano inclinato.

IX. Se un corpo posa su varj punti di un piano inclinato, acciò non scorra su questo piano, converrà applicargli una certa forza al centro di gravità. Questa forza dovrà esser tale, che la risultante di essa e del peso del corpo sia perpendicolare al piano. Considerando adunque questa forza composta avremo il caso precedentemente trattato di un piano spinto da una forza perpendicolare ad esso da una parte, e dalle pressioni in ciascun punto di appoggio dalla parte opposta, il quale in vigor di queste forze dovrà stare in equilibrio. Onde anche in questo caso troveremo il valore di ciascuna pressione quando gli appoggi sono tre, e dimostreremo che il problema è indeterminato, quando gli appoggi sono più di tre, e quando i tre sono in diritto.

Della pressione di un corpo sopra diversi piani inclinati.

X. Preso un piano qualunque orizontale riferiamo a questo per mezzo di tre coordinate ciascun punto di appoggio. Si tiri in questo piano una retta qualunque, e su di essa si prendano le x assumendone l'origine ad arbitrio, le y saranno nel piano orizontale perpendicolari a questa retta, e le z verticali tirate da ciascun punto del sistema sul piano orizontale. E per distinguere i diversi punti del sistema chiameremo x, y, e z le coordinate del centro di gravità del corpo, x', y', e z' quelle del primo punto di appoggio, x'', y'', e z'' quelle del secondo punto di appoggio, ecc. Siano inoltre α', α'', α''', ecc. respettivamente le inclinazioni de' diversi piani all'assunto piano orizontale, e β', β'', β''', ecc. gli angoli che coll'asse delle x formano nel piano orizontale le intersezioni di esso con i diversi piani inclinati. Per togliere ogni ambiguità prenderemo gli angoli α', α'', α''' ecc. sempre dalla medesima parte per rapporto all'origine delle x, e sempre acuti; poichè se fossero ottusi, considereremo questi angoli come formati dalla parte di sotto del piano orizontale, e gli prenderemo negativi. Al contrario prenderemo gli angoli β', β'', β''', ecc. o acuti o ottusi quali essi sono, ma gli misureremo tutti dalla parte dell'origine delle x. Nelle formule seguenti tutti gli angoli α', α'', α''', ecc. sono considerati acuti, e positivi: se ne' diversi casi alcuno di essi sarà ottuso, o (ciò che per noi è lo stesso) acuto e negativo, non si dovrà fare altro che mutare il segno al di lui seno, rimanendo lo stesso il segno del coseno.

XI. Posto ciò sia P il peso del corpo, il quale agisce lungo la direzione della coordinata z, e tende a diminuire questa coordinata, e siano P', P'', P''', ecc. le pressioni esercitate dal corpo su' dati piani ne' punti di appoggio. Se a queste pressioni sostituiamo forze uguali in direzioni opposte, tutto il sistema di questi piani insieme collegati supposto mobile dovrà rimanere in equilibrio, essendo spinto da queste forze, e dal peso P del corpo. Risolviamo questa forza P', P'', ecc. in altre tre parallele ai tre assi delle coordinate x, y, z, ed in luogo della forza P' avremo $P' \cos \alpha'$, $P' \operatorname{sen} \alpha' \cos \beta'$,

$P' \, sen \, \alpha' \, sen \, \beta'$ nella direzione delle coordinate z', y', x', e tendenti ad accrescere queste coordinate. Similmente invece della forza P'' avremo le forze $P'' \cos \alpha''$, $P'' \, sen \, \alpha'' \cos'' \beta''$, $P'' \, sen \, \alpha'' \, sen \, \beta''$, e così delle altre. Tutto il sistema adunque spinto dalle forze $P' \cos \alpha'$, $P'' \cos \alpha''$, $P''' \cos \alpha'''$, ec. e $-P$ nella direzione delle z, dalle forze $P' \, sen \, \alpha' \cos \beta'$, $P'' \, sen \, \alpha' \cos \beta''$, $P''' \, sen \, \alpha''' \cos \beta'''$, ec. nella direzione delle y, e dalle forze $P' \, sen \, \alpha' \, sen \, \beta'$, $P'' \, sen \, \alpha'' \, sen \, \beta''$, $P''' \, sen \, \alpha''' \, sen \, \beta'''$, ec. nella direzione delle x dovrà restare in equilibrio.

XII. Considerando in primo luogo il solo moto progressivo ponghiamo che il sistema riceva un piccolo impulso qualunque, mediante il quale le coordinate x, y, z del centro di gravità vengano respettivamente accresciute di δx, δy, δz; e siccome supponghiamo per ora che nel sistema non vi sia alcun moto di rotazione, δx, δy, δz saranno li spazietti percorsi da ciascun punto del sistema. Quindi in vigore del principio delle velocità virtuali avremo

$$(P' \cos \alpha' + P'' \cos . \alpha'' + P''' \cos . \alpha''' + \text{ec.} - P) \, \delta z$$
$$+ (P' \, sen \, \alpha' \cos \beta' + P'' \, sen \, \alpha'' \cos \beta'' + P''' \, sen \, \alpha''' \cos \beta''' + \text{ec.}) \, \delta y$$
$$+ (P' \, sen \, \alpha' \, sen \, \beta' + P'' \, sen \, \alpha'' \cos \beta'' + P''' \, sen \, \alpha''' \cos \beta''' + \text{ec.}) \, \delta x = 0$$

e siccome le quantità δx, δy, δz sono tra loro independenti, avremo le tre equazioni

$$(1) \quad P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + \text{ec.} = P$$
$$(2) \quad P' \, sen \, \alpha' \cos \beta' + P'' \, sen \, \alpha'' \cos \beta'' + P''' \, sen \, \alpha''' \cos \beta''' + \text{ec.} = 0$$
$$(3) \quad P' \, sen \, \alpha' \, sen \, \beta' + P'' \, sen \, \alpha'' \, sen \, \beta'' + P''' \, sen \, \alpha''' \, sen \, \beta''' + \text{ec.} = 0$$

le quali tre equazioni contengono le condizioni necessarie, perchè il moto progressivo del sistema rimanga impedito.

XIII. Ponghiamo adesso che intorno all'asse delle x considerato come fisso riceva il sistema un piccolo impulso, che gli faccia descrivere un angolo δu. Sarà $y \delta u$ lo spazietto percorso dal punto in cui è applicata la forza P nella di lei direzione, e così pure $y' \delta u$, $y'' \delta u$, $y''' \delta u$, ec. li spazietti percorsi da ciascun punto di appoggio nella direzione delle forze $P' \cos \alpha'$, $P'' \cos \alpha''$, $P''' \cos \alpha'''$, ec. Similmente $z' \delta u$, $z'' \delta u$, $z''' \delta u$, ec. faranno li spazietti descritti dai punti di appoggio nella direzione delle forze $P' \, sen \, \alpha' \cos \beta'$, $P'' \, sen \, \alpha'' \cos \beta''$, $P''' \, sen \, \alpha''' \cos \beta'''$, ec. Prendendo adunque la somma delle forze moltiplicate negli spazietti da esse nella loro direzione descritti avremo l'equazione

$$(P'y'\cos\alpha'+P''y''\cos\alpha''+P'''y'''\cos\alpha'''+\text{ec.}-Py)\,\delta u$$
$$-(P'z'\,sen\,\alpha'\cos\beta'+P''z''\,sen\,\alpha''\cos\beta''+P'''z'''\,sen\,\alpha'''\cos\beta'''+\text{ec.})\delta u=0$$

ove abbiamo preso il secondo membro negativo, perchè se li spazietti $y'\delta u$, $y''\delta u$, ec. accrescono o diminuiscono le coordinate z', z'', ec., viceversa li spazietti $z'\delta u$, $z''\delta u$, ec. diminuiscono o accrescono le coordinate y', y'', ec.: onde se gli uni cospirano con la direzione delle rispettive forze, gli altri alla direzione di esse si oppongono. Avremo pertanto l'equazione

$$(4)\quad P'(y'\cos\alpha'-z'\,sen\,\alpha'\cos\beta')+P''(y''\cos\alpha''-z''\,sen\,\alpha''\cos\beta'')$$
$$+P'''(y'''\cos\alpha'''-z'''\,sen\,\alpha'''\cos\beta''')+\text{ec.}=Py$$

la quale esprime che la somma de' momenti rispetto all'asse delle x è uguale a zero.

Col medesimo discorso troveremo rapporto agli assi delle y e delle z l'equazioni

$$(5)\quad P'(x'\cos\alpha'-z'\,sen\,\alpha'\,sen\,\beta')+P''(x''\cos\alpha''-z''\,sen\,\alpha''\,sen\,\beta'')$$
$$+P'''(x'''\cos\alpha'''-z'''\,sen\,\alpha'\,sen\,\beta''')+\text{ec.}=Px$$
$$(6)\quad P'(x'\,sen\,\alpha'\cos\beta'-y'\,sen\,\alpha'\,sen\,\beta')+P(x''\,sen\,\alpha''\cos\beta''-y''\,sen\,\alpha''\,sen\,\beta'')$$
$$+P'''(x'''\,sen\,\alpha'''\cos\beta'''-y'''\,sen\,\alpha'''\,sen\,\beta''')+\text{ec.}=0.$$

Quest'equazioni (4), (5) e (6) contengono le condizioni necessarie, perchè sia distrutto il moto di rotazione del sistema intorno ai tre assi delle x, y, e z; e quindi, com'è noto, perchè sia impedito qualunque moto rotatorio del sistema. Tutte queste sei equazioni combinano con quelle, che ha date il Sig. de la *Grange* nella sua eccellente Meccanica per l'equilibrio di un sistema qualunque, e contengono la piena risoluzione del problema.

XIV. Siccome abbiamo sei equazioni, potremo in generale determinare le pressioni P', P'', P''', ec. quando il corpo è appoggiato a sei sostegni; ma se li appoggi saranno più di sei, il problema resterà indeterminato. Convien però riflettere che, se vi sarà qualche relazione tra gli angoli α', α'', ec. β', β', ec., la quale faccia dipendere alcuna delle precedenti equazioni dalle altre, in tal caso, perchè il problema sia determinato, bisognerà che il numero degli appoggi sia eguale al numero dell'equazioni tra loro indipendenti, che rimangono. Così, se per esempio gli angoli β', β', ec. saranno tutti eguali, l'equazioni (2) e (3) saranno affatto simili, ed il problema non sarà determinato che per cinque appoggi.

Se gli angoli α', α'', α''', ec. ſono tutti zero, cioè ſe i piani ſono tutti paralleli all'orizonte, l'equazioni (2), (3), e (6) ſvaniranno da loro ſteſſe, e rimarranno l'equazioni (1), (4) e (5) ſotto la forma

$$P' + P'' + P''' + \text{ec.} = P$$
$$P'y' + P''y'' + P'''y''' + \text{ec.} = Py$$
$$P'x' + P''x'' + P'''x''' + \text{ec.} = Px$$

onde il problema non ſarà determinato, che per tre appoggi, lo che combina con le coſe precedenti.

Una condizione generalmente neceſſaria è, che tutte le preſſioni P', P'', ec. rieſcano poſitive, lo che per ottenere converrà prendere degli angoli α', α'', ec. alcuni poſitivi altri negativi, come ſi vede dalla ſola iſpezione dell'equazione (3); cioè biſognerà (*X*) che gli angoli d'inclinazione de' diverſi piani miſurati dalla medeſima parte ſiano alcuni acuti, altri ottuſi.

Se non ſarà data alcuna relazione tra gli angoli α', α'', ec. β', β'', ec. ed il numero de' punti di appoggio ſarà minore di ſei, in tal caſo l'equazioni rimanenti, oltre quelle che ſervono a determinare i valori delle preſſioni, ſaranno equazioni di condizione tra gli angoli α', α'', ec., acciò l'equilibrio ſuſſiſta.

XV. Prima di cercare i valori delle preſſioni, vediamo di render più ſemplici l'equazioni trovate. A queſto oggetto ſia (fig. VIII) il piano orizontale aſſunto quello della Tavola, e conſideriamo uno qualunque de' punti di appoggio, per eſempio quello a cui è applicata la forza P', e ſiano $x' = MP$, $y' = P\mathcal{Q}$, e z' le coordinate di queſto punto. Si concepiſca che la direzione della forza P' prolungata incontri il piano nel punto $\mathcal{Q}'$, e ſiano $MP' = t'$, $P'\mathcal{Q}' = u'$ le coordinate del punto $\mathcal{Q}'$: tirata $\mathcal{Q}\mathcal{Q}'$ ſarà $\frac{\mathcal{Q}\mathcal{Q}'}{z'} = tang.\alpha'$, $y' - u' = \mathcal{Q}\mathcal{Q}' \cos \beta' = z' \, tang \, \alpha' \cos \beta'$, $x' - t' = z' \, tang \, \alpha' \, sen \, \beta'$. Da queſte due equazioni ſi deduce

$$x' \cos \alpha' - z' \, sen \, \alpha' \, sen \, \beta' = t' \cos \alpha'$$
$$y' \cos \alpha' - z' \, sen \, \alpha' \cos \beta' = u' \cos \alpha'$$
$$x' \, sen \, \alpha' \cos \beta' - y' \, sen \, \alpha' \, sen \, \beta' = t' \, sen \, \alpha' \cos \beta' - u' \, sen \, \alpha' \, sen \, \beta'$$

Simili equazioni troveremo per gli altri punti di appoggio, ne' quali indicheremo per t'', u'', t''', u''', ec. reſpettivamente

quelle rette, che abbiamo chiamate t', u' per il primo appoggio. Se adesso sostituiamo questi valori nelle tre ultime equazioni del problema, esse diventeranno

$$P' t' \cos\alpha' + P'' t'' \cos\alpha'' + P''' t''' \cos\alpha''' + \text{ec.} = Pt$$

$$P' u' \cos\alpha' + P'' u'' \cos\alpha'' + P''' u''' \cos\alpha''' + \text{ec.} = Pu$$

$$P' \operatorname{sen}\alpha' (t' \cos\beta' - u' \operatorname{sen}\beta') + P'' \operatorname{sen}\alpha'' (t'' \cos\beta'' - u'' \operatorname{sen}\beta'') + \text{ec.} = 0.$$

A quest' equazioni saremmo subito giunti, se riflettendo che in un sistema di punti collegati insieme si possono riguardare le forze come applicate a qualunque punto della loro direzione, avessimo considerate le forze applicate tutte ad un piano orizontale, ed avessimo cercato l'equilibrio di questo piano.

XVI. Ma per render quest' equazioni anche più semplici osserviamo che è in nostro arbitrio la scelta degli assi, e dell' origine delle coordinate. Prendiamo dunque il principio delle coordinate nel punto $\mathfrak{Q}'$, e facciamo passare uno degli assi pel punto corrispondente alle coordinate t'', u'', e l'altro sia a questo perpendicolare. Se chiamiamo x', y', x'', y'', x''', y''', ecc. le nuove coordinate avremo $x' = 0$, $y' = 0$, $y'' = 0$; e quindi l'equazioni del problema diventeranno

$$(1)\quad P' \cos\alpha' + P'' \cos\alpha'' + P''' \cos\alpha''' + \text{ecc.} = P$$

$$(2)\quad P' \operatorname{sen}\alpha' \cos\beta' + P'' \operatorname{sen}\alpha'' \cos\beta'' + P''' \operatorname{sen}\alpha''' \cos\beta''' + \text{ecc.} = 0$$

$$(3)\quad P' \operatorname{sen}\alpha' \operatorname{sen}\beta' + P'' \operatorname{sen}\alpha'' \cos\beta'' + P''' \operatorname{sen}\alpha''' \cos\beta''' + \text{ecc.} = 0$$

$$(4)\quad P'' x'' \cos\alpha'' + P''' x''' \cos\alpha''' + P'''' x'''' \cos\alpha'''' + \text{ecc.} = Px$$

$$(5)\quad P''' y''' \cos\alpha''' + P'''' y'''' \cos\alpha'''' + Py$$

$$(6)\quad P'' x'' \operatorname{sen}\alpha'' \cos\beta'' + P''' \operatorname{sen}\alpha''' (x''' \cos\beta''' - y''' \operatorname{sen}\beta''') + P'''' \operatorname{sen}\alpha'''' (x'''' \cos\beta'''' - y'''' \operatorname{sen}\beta'''') + \text{ecc.} = 0$$

Se i punti, ne' quali le direzioni delle forze incontrano il piano orizontale, saranno tutti in diritto, oltre ad $y' = 0$, $y'' = 0$ avremo ancora $y''' = 0$, $y'''' = 0$, ecc. e l' equazione (5) ci darà $0 = Py$, cioè anche il punto corrispondente al centro di gravità del corpo dovrà essere in linea retta con gli altri punti. E siccome in questo caso rimangono cinque equazioni, si vede che il problema non sarà determinato che per cinque appoggi.

XVII. Consideriamo in primo luogo due soli appoggi, e siano (fig. IX) A e B i punti, ne' quali le direzioni delle pressioni su' piani inclinati incontrano il piano orizontale. Avremo l'equazioni

(1) $P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' = P$
(2) $P' \operatorname{sen} \alpha' \cos \beta' + P'' \operatorname{sen} \alpha'' \cos \beta'' = 0$
(3) $P' \operatorname{sen} \alpha' \operatorname{sen} \beta' + P'' \operatorname{sen} \alpha'' \operatorname{sen} \beta'' = 0$
(4) $P'' x'' \cos \alpha'' = Px$
(5) $0 = Py$
(6) $P'' x'' \operatorname{sen} \alpha'' \cos \beta'' = 0$

L'equazione (5) ci dà $y = 0$ cioè il punto G corrispondente al centro di gravità in diritto con A e B: l'equazione (6) ci dà $\cos \beta'' = 0$, e la (2) perciò $\cos \beta' = 0$, cioè gli angoli β' e β'' son retti, e quindi le direzioni delle forze P' e P'' sono nel piano verticale che passa per la retta AB. Adesso dalla (4) abbiamo $P'' = P \frac{x}{x'' \cos \alpha''}$ e dalla (1) $P' = P \frac{x'' - x}{x'' \cos \alpha'}$, e sostituendo questi valori nella equazione (3) avremo $(x'' - x) \operatorname{tang} \alpha' + x \operatorname{tang} \alpha'' = 0$. Siccome dev' essere $x'' > x$ perchè il valore di P' riesca positivo; acciò quella equazione sussista, conviene che siano gli angoli α', α'' di diverso segno, cioè uno positivo e l'altro negativo; onde (X) le direzioni delle due forze P', P'' s' incontreranno, e dal punto d'intersezione tirata una perpendicolare alla retta AB che la incontri in M sarà $\operatorname{tang.} \alpha' : - \operatorname{tang} \alpha'' = AM : BM$. Ma dall'equazione precedente abbiamo $\operatorname{tang.} \alpha' : - \operatorname{tang} \alpha'' = x : x'' - x$; dunque il punto M caderà sul punto G, o sia gli angoli α', α'' dovranno esser tali che le direzioni delle due pressioni P', P'' s'incontrino nel medesimo punto della direzione del centro di gravità.

XVIII. Passiamo al caso di tre appoggi, ai quali corrispondano nel piano orizontale (fig. X) i punti A, B, C presi nella direzione delle forze, e G sia nella direzione del centro di gravità del corpo. L' equazioni di questo caso saranno

(1) $P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' = P$
(2) $P' \operatorname{sen} \alpha' \cos \beta' + P'' \operatorname{sen} \alpha'' \cos \beta'' + P''' \operatorname{sen} \alpha''' \cos \beta''' = 0$
(3) $P' \operatorname{sen} \alpha' \operatorname{sen} \beta' + P'' \operatorname{sen} \alpha'' \operatorname{sen} \beta'' + P''' \operatorname{sen} \alpha''' \operatorname{sen} \beta''' = 0$
(4) $P'' x'' \cos \alpha'' + P''' x''' \cos \alpha''' = Px$
(5) $P''' y''' \cos \alpha''' = Py$
(6) $P'' x'' \operatorname{sen} \alpha'' \cos \beta'' + P''' \operatorname{sen} \alpha''' (x''' \cos \beta''' - y''' \operatorname{sen} \beta''') = 0$.

Dall'

Dall' equazioni (5), (4), e (1) si ricaverà $P''' = P\frac{y}{y''' \cos \alpha'''}$, $P'' = P\frac{xy''' - x'''y}{x''y'' \cos \alpha''}$, $P' = P\frac{(x'' - x)y''' - (x'' - x''')y}{x''y''' \cos \alpha'}$; i quali valori saranno tutti positivi, com' esser devono, se condotte le rette AB, AC, BC il punto G sarà dentro il triangolo ACB. Dal punto G si tirino su' lati di questo triangolo le perpendicolari GG', GG'', GG''', dal punto A la perpendicolare AA' sul lato BC, dal punto B BB' perpendicolare sul lato AB, e CC' dal punto C perpendicolare sul lato AB, e sarà $AG' = x$, $GG' = y$, $AB = x''$, $AC' = x'''$, $CC' = y'''$, $BB' = AB \operatorname{sen} BAC = \frac{x''y'''}{AC}$, $GG'' = AG' \operatorname{sen} BAC - GG' \cos BAC = \frac{xy''' - x'''y}{AC}$, $AA' = AB \operatorname{sen} ABC = \frac{x''y'''}{BC}$, $GG''' = BG' \operatorname{sen} ABC - GG' \cos ABC = \frac{(x'' - x)y''' - (x'' - x''')y}{BC}$, e quindi $\frac{GG''}{BB'} = \frac{xy''' - x'''y}{x''y'''}$, $\frac{GG'''}{AA'} = \frac{(x'' - x)y''' - (x'' - x''')y}{x''y'''}$. Se dunque chiamiamo GG'' z, GG''' t, BB' z'', AA' t', avremo le pressioni espresse più semplicemente così: $P''' = \frac{y}{y''' \cos \alpha'''}$, $P'' = \frac{z}{z'' \cos \alpha''}$, $P' = \frac{t}{t' \cos \alpha'}$. Questi valori si potevano subito dedurre dal considerare, che siccome $\frac{y}{y''' \cos \alpha'''}$ è il valore di P''', quando si prende per asse la retta AB, così presa per asse AC si troverà $P'' = \frac{z}{z'' \cos \alpha''}$, e $P' = \frac{t}{t' \cos \alpha'}$ se si prende per asse BC.

Sostituendo adesso i valori di P', P'', P''' nell' equazioni (2), (3), e (6) otterremo

$$\frac{t}{t'} \operatorname{tang} \alpha' \cos \beta' + \frac{z}{z''} \operatorname{tang} \alpha'' \cos \beta'' + \frac{y}{y'''} \operatorname{tang} \alpha''' \cos \beta''' = 0$$

$$\frac{t}{t'} tang\, \alpha' \, sen\, \beta' + \frac{z}{z''} tang\, \alpha'' \, sen\, \beta'' + \frac{y}{y'''} tang\, \alpha''' \, sen\, \beta''' = 0$$

$$\frac{x''z}{z''} tang\, \alpha'' \cos \beta'' + \frac{y}{y'''} tang\, \alpha''' (x''' \cos \beta''' - y''' \, sen\, \beta''') = 0$$

Dalle prime due si ricava

$$\frac{t}{t'} tang\, \alpha' \, sen (\beta' - \beta''') + \frac{z}{z''} tang\, \alpha'' \, sen (\beta'' - \beta''') = 0$$

$$\frac{t}{t'} tang\, \alpha' \, sen (\beta' - \beta'') - \frac{y}{y'''} tang\, \alpha''' \, sen (\beta'' - \beta''') = 0$$

e quindi

$$(a) \quad \frac{tang\, \alpha''}{tang\, \alpha'} = - \frac{z''t \, sen (\beta' - \beta''')}{zt' \, sen (\beta'' - \beta''')},$$

$$(b) \quad \frac{tang\, \alpha'''}{tang\, \alpha'} = \frac{y'''t \, sen (\beta' - \beta'')}{yt' \, sen (\beta' - \beta''')}.$$

Sostituendo questi valori nella terza equazione avremo

$$x'' \, sen (\beta' - \beta''') \cos \beta' - sen (\beta' - \beta'') (x''' \cos \beta''' - y''' \, sen\, \beta''') = 0,$$

onde si ricava $tang.\beta''' = \frac{x'' \, tang\, \beta' - x''' (tang\, \beta' - tang\, \beta'')}{x'' - y''' (tang\, \beta' - tang\, \beta'')}$; la quale equazione ci mostra come l'angolo β''' dipende dagli altri due β' e β'', e l'equazioni (a) e (b) indicano qual rapporto devono avere le tangenti di due degli angoli α', α'', α''' alla tangente del terzo.

Se supponghiamo $\beta' = \beta''$, avremo anche $\beta''' = \beta'$, e l'equazioni (a) e (b) ci daranno $\frac{tang\, \alpha''}{tang\, \alpha'} = \frac{0}{0}$, $\frac{tang\, \alpha'''}{tang\, \alpha'} = \frac{0}{0}$, cioè il valore di questi rapporti sarà indeterminato. Ciò dovea succedere; poichè, come abbiamo osservato di sopra (XIV), in questo caso non dobbiamo soddisfare alle tre equazioni (2), (3), e (6), ma alle sole (2) e (6), giacchè l'equazione (3) è affatto simile alla (2). Ora l'equazioni (2) e (6) diventano

$$\frac{t}{t'} tang\, \alpha' + \frac{z}{z''} tang\, \alpha'' + \frac{y}{y'''} tang\, \alpha''' = 0$$

$$\frac{x''z}{z''} tang\, \alpha'' \cos \beta' + \frac{y}{y'''} tang\, \alpha''' (x''' \cos \beta' - y''' \, sen\, \beta') = 0,$$

la prima delle quali dati due degli angoli α', α'', α''' c'in-

segna a trovare il terzo, la seconda ci dà il valore dell'angolo β'.

Coll'istesso metodo si potranno svolgere i casi di quattro, cinque, e sei appoggi: noi non lo facciamo, perchè il calcolo ci condurrebbe ad espressioni troppo complicate.

Della pressione di un corpo appoggiato a superficie curve qualunque.

XIX. Se invece di piani inclinati sono superficie curve quelle, alle quali il corpo è appoggiato, il problema non riesce più complicato, e vien risoluto dalle medesime equazioni dei numeri XVI, e XVII: solo conviene dedurre i valori degli angoli α', α'', ecc. β', β'', ecc. dall'equazioni delle superficie date. Per ciò ottenere si osservi che $\cos\alpha$ è il seno dell'angolo, che la perpendicolare tirata alla superficie curva nel punto del primo appoggio forma col piano orizontale delle x ed y, e $\cos\beta'$ è il seno dell'angolo che la projezione di questa perpendicolare nel medesimo piano orizontale forma coll'asse delle x. Posto ciò, se $dz' + p'dx' + q'dy' = 0$ è l'equazione della superficie curva, nella quale è situato il primo appoggio, la perpendicolare tirata alla superficie in questo punto, e prolungata finchè incontri il piano delle x ed y è $= z'\sqrt{(1+p'^2+q'^2)}$; e quindi

$\cos\alpha' = \frac{z'}{z'\sqrt{(1+p'^2+q'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+p'^2+q'^2)}}$, e

$\operatorname{sen}\alpha' = \frac{\sqrt{(p'^2+q'^2)}}{\sqrt{(1+p'^2+q'^2)}}$. Se adesso chiamiamo a, e b le coordinate del punto, in cui la perpendicolare incontra il piano delle x ed y, troveremo $a = x' - z'p'$, $b = y' - z'q'$: e perciò $\cot.\beta' = \frac{y'-b}{x'-a} = \frac{q'}{p'}$; onde $\cos\beta' = \frac{q'}{\sqrt{(p'^2+q'^2)}}$, e

$\operatorname{sen}\beta' = \frac{p'}{\sqrt{(p'^2+q'^2)}}$. Nella istessa maniera, se $dz'' + p''dx'' + q''dy'' = 0$ è l'equazione della superficie curva, in cui è posto il secondo appoggio, avremo $\operatorname{sen}\alpha'' = \frac{\sqrt{(p''^2+q''^2)}}{\sqrt{(1+p''^2+q''^2)}}$,

$\cos\alpha'' = \frac{1}{\sqrt{(1+p''^2+q''^2)}}$, $\operatorname{sen}\beta'' = \frac{p''}{\sqrt{(p''^2+q''^2)}}$, $\cos\beta'' = \frac{q''}{\sqrt{(p''^2+q''^2)}}$;

e così in seguito per rapporto agli altri appoggi. Sostituendo adesso i valori di questi angoli nell'equazioni dei numeri XVI e XVII, e facendo per più semplicità $\sqrt{(1+p'^2+q'^2)} = m'$, $\sqrt{(1+p''^2+q''^2)} = m''$, ec. avremo

$$(1)\ \frac{P'}{m'} + \frac{P''}{m''} + \frac{P'''}{m'''} + \text{ec.} = P$$

$$(2)\ P'\frac{q'}{m'} + P''\frac{q''}{m''} + P'''\frac{q'''}{m'''} + \text{ec.} = 0$$

$$(3)\ P'\frac{p'}{m'} + P''\frac{p''}{m''} + P'''\frac{p'''}{m'''} + \text{ec.} = 0$$

$$(4)\ P'\frac{y'-z'q'}{m'} + P''\frac{y''-z''q''}{m''} + P'''\frac{y'''-z'''q'''}{m'''} + \text{ec.} = Py$$

$$(5)\ P'\frac{x'-z'p'}{m'} + P''\frac{x''-z''p''}{m''} + P'''\frac{x'''-z'''p'''}{m'''} + \text{ec.} = Px$$

$$(6)\ P'\frac{x'q'-y'p'}{m'} + P''\frac{x''q''-y''p''}{m''} + P'''\frac{x'''q'''-y'''p'''}{m'''} + \text{ec.} = 0$$

le quali sono l'equazioni del problema.

Quindi risulta, che il problema è determinato, quando gli appoggi non sono più di sei, se però per la natura delle diverse superficie non sono alcune di quest'equazioni soddisfatte, o se alcuna di esse dall'altre non dipende.

XX. Per applicare questa teoria a qualch' esempio, supponghiamo che sia il corpo appoggiato a diversi punti di una medesima superficie sferica. Presa l'origine delle coordinate nel centro della sfera, ed a essendo il di lei raggio, sarà $z^2 + x^2 + y^2 = a^2$ l'equazione della superficie sferica. Quindi sarà $p' = \frac{x'}{z'}$, $q' = \frac{y'}{z'}$, $m' = \frac{a}{z'}$, $p'' = \frac{x''}{z''}$, $q'' = \frac{y''}{z''}$, $m'' = \frac{a}{z''}$, ec.; e sostituiti questi valori l'equazioni generali diventeranno

$$(1)\ P'z' + P''z'' + P'''z''' + \text{ec.} = Pa$$
$$(2)\ P'y' + P''y'' + P'''y''' + \text{ec.} = 0$$
$$(3)\ P'x' + P''x'' + P'''x''' + \text{ec.} = 0$$
$$(4)\ 0 = Py$$
$$(5)\ 0 = Px$$

e l'equazione (6) sarà da se stessa soddisfatta. L'equazioni

(4) e (5) ci mostrano che la direzione del centro di gravità del corpo deve passare pel centro della sfera; e così dovea essere, perchè pel medesimo centro passano le direzioni di tutte le pressioni P', P'', P''', ec. Ma siccome per determinar queste pressioni non rimangono che tre equazioni, il problema non sarà determinato che per tre appoggi. Inoltre, acciò i valori di queste pressioni riescano positivi, converrà che delle y', y'', y''', e similmente delle x', x'', x''' alcune siano positive altre negative, cioè situate oppostamente per rapporto agli assi rispettivi.

Per svolgere con più facilità il caso di tre appoggi si osservi, che essendo la posizione dell'asse della x in nostro arbitrio, la possiamo prendere in modo, che uno degli appoggi, per esempio quello corrispondente all'ascissa x''' sia nel piano verticale che passa per questo asse; e in tal caso sarà $y'''=0$. Fatto ciò avremo dalle precedenti equazioni

$$P'=P\frac{a x''' y''}{x'''(z'y''-z''y')-z'''(x'y''-x''y')},$$

$$P''=-P\frac{a x''' y'}{x'''(z'y''-z''y')-z'''(x'y''-x''y')},$$

$$P'''=-P\frac{a(x'y''-x''y')}{x'''(z'y''-z''y'')-z'''(x'y''-x''y')}.$$

Acciò il corpo stia in equilibrio, queste pressioni devono esser positive; se fossero negative il corpo non starebbe fermo, sostenuto essendo da questi tre appoggi. Abbiamo già osservato, che una delle y', y'', ed una almeno delle x', x'', x''' dev'esser negativa le altre essendo positive; ed in ciascun caso sarà facile il verificare quando l'equilibrio sussista e quando nò. Siano per esempio negative x' ed y' e le altre coordinate positive: acciò i valori delle pressioni riescano tutti positivi, converrà di più che sia $x'y''>x''y'$.

Se il corpo non è sostenuto che da due appoggi, e manca quello dell'ascissa x''', facciamo $P'''=0$, ed avremo $x'y''=x''y'$, e i valori delle pressioni P', P'' saranno

$P'=P\frac{ay''}{z'y''-z''y'}$, $P''=-P\frac{ay'}{z'y''-z''y'}$. Converrà dunque, che una delle y', y'' sia positiva, l'altra negativa, e così pure, in vigore dell'equazione $x'y''=x''y'$ una delle x', x''

positiva e l'altra negativa. Inoltre l'equazione $x'y''=x''y'$ ci mostra che i due appoggi devono esser situati in un piano verticale che passi pel centro della sfera, come dovea accadere. Ho supposto finora le z positive, cioè li appoggi sulla concavità della sfera, se qualche z sarà negativa, cioè se qualche appoggio caderà sulla convessità della sfera, la pressione corrispondente dovrà esser negativa, perchè è diretta dalla superficie al centro, mentre la positiva al contrario va dal centro alla superficie. Così nel caso di due appoggi, se z' è positiva, e z'' è negativa, le y', y'' dovranno essere o ambedue positive, o ambedue negative, acciò sia la pressione P' positiva, e la pressione P'' negativa.

Se invece di essere i tre appoggi sopra la medesima superficie sferica, saranno situati sopra tre superficie di raggio diverso ma del medesimo centro, chiamati a, b, c i tre raggi, l'equazioni che otterremo saranno tali, che le precedenti si cangeranno in esse posto $\frac{az''}{b}$ in luogo di z'', $\frac{az'''}{c}$ in luogo di z''', $\frac{ax''}{b}$ in luogo di x'', $\frac{ax'''}{c}$ in luogo di x''', ed $\frac{ay''}{b}$ in luogo di y''. Se dunque facciamo questi cangiamenti ne' valori di P', P'', P''', e chiamiamo $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{Q}''$, $\mathfrak{Q}'''$ le quantità nelle quali si mutano, troveremo $\mathfrak{Q}'=P'$, $\mathfrak{Q}''=\frac{bP''}{a}$, $\mathfrak{Q}'''=\frac{cP'''}{a}$, e $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{Q}''$, $\mathfrak{Q}'''$ saranno le pressioni esercitate sulle tre superficie sferiche.

XXI. Sia il corpo appoggiato alle superficie di varj cilindri, i quali abbiano l'asse comune, e sia questi orizontale. Prese le x in questo asse, l'equazioni delle superficie cilindriche saranno $z'^2+y'^2=a^2$, $z''^2+y''^2=b^2$, $z'''^2+y'''^2=c^2$, ec. essendo a, b, c, ec. i raggi delle sezioni perpendicolari all'asse. Sarà perciò $p'=0$, $p''=0$, $p'''=0$, ec., $q'=\frac{y'}{z'}$, $q''=\frac{y''}{z''}$, $q'''=\frac{y'''}{z'''}$, ec.; $m'=\frac{a}{z'}$, $m''=\frac{b}{z''}$, $m'''=\frac{c}{z'''}$, ec. Onde l'equazioni di questo problema saranno

$$(1)\ P'\frac{z'}{a}+P''\frac{z''}{b}+P'''\frac{z'''}{c}+\text{ec.}=P$$

$$(2)\ P'\frac{y'}{a}+P''\frac{y''}{b}+P'''\frac{y'''}{c}+\text{ec.}=0$$

$$(4)\ 0=Py$$

$$(5)\ P'\frac{x'z'}{a}+P''\frac{x''z''}{b}+P'''\frac{x'''z'''}{c}+\text{ec.}=Px$$

$$(6)\ P'\frac{x'y'}{a}+P''\frac{x''y''}{b}+P'''\frac{x'''y'''}{c}+\text{ec.}=0$$

l'equazione (3) svanendo da se stessa. Dalla (4) sappiamo, che la direzione del centro di gravità del corpo deve passare per l'asse de' cilindri, e le rimanenti quattro equazioni ci mostrano il problema esser determinato per quattro appoggi, e ci danno i valori delle quattro pressioni sostenute da questi appoggi. Se gli appoggi saranno meno di quattro, rimarranno dell'equazioni di condizione, alle quali converrà soddisfare, perchè l'equilibrio sussista.

In questo Articolo e nel precedente abbiamo supposto che il corpo fosse aggravato dal solo suo peso: se egli sarà o spinto o sostenuto da altre forze date, le quali siano applicate al centro di gravità del corpo o altrove, le medesime equazioni de' numeri XVI e XVII, e le corrispondenti del numero XIX risolveranno il problema, purchè agli altri termini si aggiungano quelli, che nascono dalle forze date.