RIFLESSIONI

SULL' INTEGRAZIONE DI QUELL' EQUAZIONI, LE QUALI NON SODDISFANNO ALLE CONDIZIONI D' INTEGRABILITA'

DEL SIGNOR PIETRO PAOLI.

E' Noto che dell' equazioni differenziali tra tre o più variabili altre ammettono una equazione di un ordine inferiore, che ad esse soddisfà, e ne è l' integrale completo, altre nò. Dai Sigg. *Euler* e *Fontaine* per l' equazioni differenziali del prim' ordine, e dal Sig. Marchese di *Condorcet* per quelle degli ordini superiori sono state date le condizioni necessarie, perchè il primo caso abbia luogo. I Geometri hanno credute assurde ed impossibili tutte l' equazioni del secondo caso, perchè hanno pensato che una equazione differenziale non potesse esprimere una proprietà reale, se la medesima proprietà non era esprimibile da una equazione finita. Ma così pensando hanno attribuito ai criterj d' integrabilità più di quello, che loro conveniva in vigore de' principj, ond' erano stati dedotti. Poichè se in una data equazione queste condizioni non hanno luogo, non se ne può concludere che la proposta sia in qualunque senso assurda, ma che sia tale solo nell' ipotesi, alla quale è appoggiata la ricerca de' criterj medesimi, cioè che tutte le variabili dell' equazione, fuorchè una, siano tra loro indipendenti. Onde la conseguenza, che si deve dedurre dai criterj non soddisfatti, non è che la proposta sia assurda, ma che in essa tutte le variabili fuorchè una non possono essere indipendenti. E se si assumono tra queste variabili dei rapporti, che non essendo per alcuna parte determinati, sono perciò rilasciati al nostro arbitrio, la proposta esprimerà allora un rapporto reale tra tutte le variabili. Per fissar le idee supponghiamo che sia data una equazione differenziale tra le tre variabili x,

y, e z. Se essa soddisfà alle condizioni d'integrabilità, si potrà integrare nell'ipotesi, che le variabili x ed y siano tra loro indipendenti, e l'integrale riferito alla Geometria esprimerà una superficie curva. Se poi i criterj d'integrabilità non sono soddisfatti, la proposta non potrà sussistere, allorchè le variabili x ed y si riguardano come tra loro indipendenti, e non rappresenterà alcuna superficie. Ma poichè le variabili x ed y devono tra loro dipendere, se prendiamo una equazione qualunque tra x ed y, la proposta combinata con questa sarà integrabile, e l'integrale soddisfarà alla proposta, se insieme con esso avrà luogo l'equazione assunta tra x ed y. Cioè in questo caso la proposta non rappresenterà una superficie curva, ma una curva di doppia curvatura, espressa dalle due equazioni precedenti: e la curva di doppia curvatura risolverà il problema in questo caso, come nell'altro lo risolveva la superficie curva.

Il Sig. *Monge* il primo ha rilevata l'inesattezza di questo giudizio de' Geometri nelle Memorie della R. Accademia delle Scienze di Parigi per l'anno 1784. Questo gran Geometra ha osservato *a priori*, che l'equazioni riputate assurde, se si riferiscono alla Geometria, rappresentano proprietà reali dell'estensione, e perciò esse sono reali. Ma quella proprietà, che è espressa in una sola equazione differenziale, non si può rappresentare con una sola equazione finita, ma richiede necessariamente due o più equazioni. In fatti, allorchè quest'equazioni non comprendono che tre sole variabili, appartengono, come abbiam detto di sopra, ad una curva di doppia curvatura; ed ognun sa che le curve di doppia curvatura non si possono esprimere in termini finiti, che mediante due equazioni. Tutte pertanto l'equazioni differenziali, tanto quelle che soddisfanno alle condizioni d'integrabilità, che quelle, le quali non sono alle medesime condizioni soggette, ha trovato il Sig. *Monge* esser capaci di una vera integrazione, con questa differenza però, che l'integrale delle prime è espresso da una sola equazione, mentre quello delle seconde non può esprimersi che col sistema di più equazioni simultanee.

L'oggetto di queste ricerche è quello d'illustrare questo nuovo ramo di Calcolo Integrale, e di dedurre la teoria di

quest' equazioni da considerazioni puramente analitiche. Quantunque sia più luminosa la strada tenuta dal Sig. *Monge*, la quale fa subito vedere, che quell' equazioni esprimono una proprietà reale dell' estensione, e dalla natura di questa proprietà deduce l' integrale di quelle; pure sembra più diretto il ricavare la soluzione di un problema analitico dai soli principj del Calcolo, tanto più che non si può questo problema alla Geometria riferire, quando le variabili sono più di tre. Si può in questo modo più accuratamente giudicare del numero dell' equazioni integrali e della forma delle funzioni arbitrarie, che sono in esse comprese: su' quali due articoli son giunto ad alcuni risultati non conformi a quei del Sig. *Monge*, i quali sottopongo al giudizio de' Geometri.

ARTICOLO I.

Dell' equazioni del prim' ordine, nelle quali le differenze son lineari.

I. Supponghiamo che siano date due equazioni

$$\begin{aligned} dz - Mdz - Ndy &= 0 \\ dz - Pdx - \mathcal{Q}dy &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

ove M, N, P, e $\mathcal{Q}$ siano funzioni delle variabili x ed y. Quantunque in ciascuna di quest' equazioni le condizioni d' integrabilità non siano soddisfatte, pure considerate insieme esse sono reali, e determinano il valore di y e di z in x. Infatti se ne deduce

$$(M - P)dx + (N - \mathcal{Q})dy = 0,$$

e questa equazione, non contenendo che due sole variabili, è sempre integrabile, ed il di lei integrale ci dà il valore di y in x. Si sostituisca questo valore di y in una delle due prime equazioni, e questa dopo la sostituzione non conterrà che due variabili. Sarà dunque integrabile, e se ne potrà determinare il valore di z in x. Ne segue, che ciascuna delle due equazioni precedenti considerata da se sola non ci dà alcun rapporto tra le variabili x, y, e z: ma se si combina con l' altra, il sistema di quest' equazioni determina due delle variabili x, y, e z per la terza. Abbiamo supposto che nelle quantità M, N, P, e $\mathcal{Q}$ non sia contenuta la z;

se vi fosse compresa, ciò non farebbe altra differenza, se non che l'eliminazione di z non sarebbe così facile.

Se fosse data una sola dell'equazioni (a), quella da per se sola non ci darebbe alcuna relazione tra le variabili x, y, e z, poichè due di esse non possono essere tra loro indipendenti a motivo de' criterj d'integrabilità non soddisfatti, ma dovrebbe combinarsi con un'altra equazione. Questa seconda equazione non essendo data, il problema, in cui si cerca l'integrale della prima, sarà in certa maniera indeterminato, e potrà prendersi per seconda equazione quella, che più ci piacerà. Ma poichè l'oggetto di questa seconda equazione è di stabilire col mezzo di essa un rapporto tra due delle variabili, per esempio tra x ed y, potremo subito supporre che essa sia $y = \phi . x$, essendo $\phi . x$ una funzione qualunque arbitraria di x. Sostituito questo valore di y nella proposta, essa diventerà un'equazione tra due sole variabili z ed x, ed esprimerà un rapporto reale tra z ed x: e questo rapporto tra z ed x espresso in termini finiti, e combinato coll'equazione $y = \phi . x$ sarà l'integrale dell'equazione proposta. L'integrale pertanto di una equazione, nella quale le condizioni d'integrabilità non sono soddisfatte, è contenuto in due equazioni, che devono aver luogo nel medesimo tempo; e quest' equazioni contengono una funzione arbitraria.

Sia data per esempio l'equazione non integrabile da se sola, $dz = aydx + bdy$, ove a e b sono quantità costanti: facciamo $y = \phi . x$, e sostituendo questo valore, e ponendo $\frac{d . \phi . x}{dx} = \phi' . x$, $\frac{d . \phi' . x}{dx} = \phi'' . x$, ec. avremo $dz = adx\phi . x + bdx\phi' . x$, ed integrando $z = a\int dx\phi . x + b\phi . x$. Quindi l'integrale della proposta è compreso nelle due equazioni $z = a\int dx\phi . x + b\phi . x$, ed $y = \phi . x$, o sia (posto $\int dx\phi . x = \psi . x$ per evitare il segno sommatorio) nelle due seguenti $z = a\psi . x + b\psi' . x$, ed $y = \psi' . x$. Infatti sostituendo questo valore di z nell'equazione $dz = aydx + bdy$ avremo $adx\psi' . x + bdx\psi'' . x = aydx + bdy$, la qual equazione è identica a motivo di $y = \psi' . x$, e $dy = dx\psi'' . x$.

Se vogliamo trasferire queste cose alla Geometria, e consideriamo x, y, e z come le tre coordinate di una superficie curva,

cie curva, le due equazioni $z = a\psi.x + b\psi'.x$, ed $y = \psi'.x$ esprimeranno due curve, una situata nel piano delle z ed x, l'altra nel piano delle x ed y. Queste due curve saranno le projezioni di una curva di doppia curvatura, i punti della quale soddisfaranno a quel problema, che ci ha condotti all' equazione proposta, perchè questi punti sono determinati dalle due equazioni, che considerate insieme soddisfanno all'equazione proposta, e ne formano l'integrale. Siccome $\psi.x$ è arbitraria, infinite saranno le curve di doppia curvatura, che soddisfanno; e ciò doveva succedere in un problema indeterminato, in cui possiamo prendere una equazione ad arbitrio, la quale secondochè diversa si assume, diverso ne deve nascere l'integrale delle due equazioni insieme combinate. Tutte però le soluzioni particolari sono comprese nelle due equazioni trovate, le quali hanno perciò il carattere d'integrale completo. Se per avere una soluzione particolare facciamo $\psi.z = x^2 + cx + e$, e quindi $\psi'.x = 2x + c$, avremo $z = ax^2 + (ac + ab)x + ae + bc$, $y = 2x + c$, le quali ci mostrano che al problema soddisfà la curva nata dall'intersezione di un piano condotto lungo la retta dell' equazione $y = 2x + c$ con la superficie dell'equazione $z = a(x^2 + cx + e) + by$. E quantunque questa curva sia di semplice curvatura, pure ritenendo le coordinate x, y, e z non possiamo rappresentarla che per mezzo di due equazioni.

Il problema dell' equazione precedente potrebbe enunciarsi così: trovare una curva di doppia curvatura, in cui sia $\frac{dz}{dx} = ay + b\frac{dy}{dx}$. Questa enunciazione ci fa vedere che il problema è indeterminato; poichè una curva di doppia curvatura è determinata, quando sono dati i rapporti $\frac{dz}{dx}$, e $\frac{dy}{dx}$. Ora questo problema dandoci il primo rapporto per il secondo, lascia questo pienamente al nostro arbitrio, e perciò possiamo supporlo qualunque. Se invece si proponesse di trovare una superficie, in cui fosse $\frac{dz}{dx} = ay + b\frac{dy}{dx}$, questa sola equazione basterebbe allora per determinare il problema;

ma l'equazione di condizione non soddisfatta ci avverte che una tal superficie non esiste.

II. Quantunque posta $y = \phi.x$ l'equazione differenziale tra tre variabili si riduca ad esser tra due sole, e perciò capace d'integrazione secondo i soliti metodi; pure questa integrazione sarà per lo più assai difficile, e la difficoltà in gran parte nascerà dalla funzione arbitraria $\phi.x$, che vi si è introdotta. Quindi per ottenere l'integrale in termini finiti converrà ricorrere ad altri artifizj. Incominciamo dal cercare un integrale particolare, perchè da quello potremo poi dedurre l'integrale completo. Data l'equazione $Adz + Bdx + Cdy = 0$ non integrabile da se sola, siccome possiamo prenderne un'altra ad arbitrio, che abbia luogo insieme con lei, prendiamo un'equazione qualunque $M = \alpha$, ove sia M una funzione determinata di x ed y, ed α una costante arbitraria. Per mezzo di questa equazione eliminiamo dalla proposta una delle variabili, ed il di lei integrale sia allora $N = \beta$, essendo β la costante arbitraria introdotta dalla integrazione. Le due equazioni $M = \alpha$, $N = \beta$ considerate insieme soddisfaranno alla proposta, e ne saranno perciò un integrale particolare. Riguardo alla funzione M, bisogna proccurare di prenderla in modo, che dalla proposta combinata coll'equazione $M = \alpha$, ne nasca una equazione facilmente integrabile. Ma in qualunque modo si prenda, si avrà sempre un'equazione tra due variabili, l'integrazione della quale si suppone data, quando si tratta dell'equazioni tra tre variabili.

Trovato un integrale particolare, potremo da questo dedurre l'integrale completo, usando il metodo immaginato dal Sig. *de la Grange* di far variar le costanti, il qual metodo ha tanto contribuito all'avanzamento dell'Analisi. A quest'oggetto si osservi, che l'equazioni $M = \alpha$, $N = \beta$ soddisfanno all'equazione proposta, allorchè α, e β sono quantità costanti; e perciò sostituiti i valori di dz, e di dy ricavati dall'equazioni $M = \alpha$, $N = \beta$ nella proposta, essa diventa identica. Se adesso supponghiamo α e β variabili, la proposta sostituendovi i valori di dz e di dy, non sarà più identica, ma diventerà della forma $md\alpha + nd\beta = 0$. Facciamo $\beta = \phi.\alpha$, e questa equazione ci darà $m + n\phi'.\alpha = 0$: e

quindi alla proposta soddisfanno l'equazioni $M=\alpha$, $N=\beta$, anche quando α e β son variabili, purchè abbia luogo l'equazione $m+n\phi'.\alpha=0$. L'integrale pertanto della proposta sarà espresso dalle tre equazioni $M=\alpha$, $N=\phi.\alpha$, $m+n\phi'.\alpha=0$, cioè eliminata α dalle due equazioni $N=\phi.M$, $m+n\phi'.M=0$.

Prendiamo per esempio l'equazione

$$ydy+ydx+xdz=0$$

nella quale non ha luogo la condizione d'integrabilità.

Ponghiamo $x+y=\alpha$, e sostituito il valore di x nella proposta, essa ci darà $dz=0$, cioè $z=\phi.\alpha$. Facendo adesso α variabile, e sostituendo nell'equazione data i valori di dx e di dz presi dall' equazioni $x+y=\alpha$, $z=\phi.\alpha$ troveremo $y+x\phi'.\alpha=0$. Quindi l'integrale della proposta è espresso dalle due equazioni $z=\phi(x+y)$, $y+x\phi'(x+y)=0$.

Ponghiamo $x-y=\alpha$, ed avremo $2ydy+(y+\alpha)dz=0$, cioè $2y-2\alpha$ log. $(y+\alpha)+z=\phi.\alpha$. Quindi una dell'equazioni integrali sarà $z+2y-2(x-y)$ log. $x=\phi(x-y)$, e l'altra si troverà $2x+y+2x$ log. $x+x\phi'(x-y)=0$.

Ponghiamo $x=\alpha y$, e sostituito questo valore di x la proposta diventerà $(1+\alpha)dy+\alpha dz=0$, cioè $\alpha z+(1+\alpha)y=\phi.\alpha$. Facendo variare α troveremo $z=\phi'.\alpha$: onde le due equazioni integrali della proposta saranno $x+(z+y)+y'=y\phi.\frac{x}{y}$, e $z=\phi'.\frac{x}{y}$. Assumendo altr'equazioni tra x ed y troveremo lo stesso integrale espresso in infinite forme diverse.

Se nell'equazione $M=\alpha$ noi facciamo $M=x$, $0=y$, $0=z$, il nostro metodo si ridurrà ad integrare la proposta nell' ipotesi, che una delle quantità x, y, z sia costante. Se l'integrale della proposta è in questa supposizione $N=\beta$, sarà $N=\phi.x$ (se per esempio x è stata supposta costante) una dell'equazioni integrali, e l'altra si dedurrà dal paragone del differenziale di $N-\phi.x=0$ preso nell'ipotesi che anche la x varj con la proposta. Questo metodo è quel medesimo, che si suole adoprare per l'equazioni da se sole integrabili, se non che la seconda equazione serve allora a determinare la funzione arbitraria.

Ma qualunque sia M, se il differenziale dell'equazione $N=\phi.M$ si paragona con la proposta, ne nascerà l'altra equazione $(m+n\phi'.\alpha)dx$, cioè poichè $\alpha=M$,

$(m+n\phi'.M)\frac{dM}{dx}dx+(m+n\phi'.M)\frac{dM}{dy}dy=0$, e perciò nella equazione, che se ne otterrà, anderanno a zero i coefficienti di dx e di dy. Quindi si ricava un altro metodo, il quale mostra più da vicino la relazione, che passa tra quest' equazioni da loro sole non integrabili, e quelle a differenze parziali. Ponghiamo che una dell' equazioni integrali di $Adz+Bdx+Cdy=0$ sia una relazione tra x, y, e z, che differenziata ci dia $dz=pdx+qdy$. Sostituendo questo valore di dz nella proposta avremo $(Ap+B)dx+(Aq+C)dy=0$, e siccome devono svanire i coefficienti di dx e di dy, avremo $Ap+B=0$, $Aq+C=0$, le quali due equazioni a differenze parziali dovranno aver luogo insieme. Quindi integrata una di esse, o una che da ambedue dipenda, sarà questa una dell'equazioni integrali cercate, e l'altra si troverà paragonando la prima con quella dell' equazioni $Ap+B=0$, $Aq+C=0$, che non è stata contemplata, o con una qualunque di esse, se ambedue sono state considerate. Questo è il metodo del Sig. *Monge*, il quale combina esattamente col nostro, e ci mostra che quantunque le due equazioni integrali possano variare infinitamente di aspetto, pure ci danno sempre il medesimo integrale, perchè qualunque esse siano, devono sempre soddisfare alle due equazioni $Ap+B=0$, ed $Aq+C=0$.

III. Può succedere che l'equazioni, le quali formano l'integrale della proposta, sian tali, che dato un valore determinato alla funzione arbitraria in esse contenuta si riducano ad una sola. In questo caso avremo un integrale della proposta espresso in una sola equazione, ma questo sarà particolare senza alcuna costante arbitraria, perchè per ipotesi la proposta non è suscettibile d'integrale completo espresso in una sola equazione. Così data l'equazione

$$(y-z)dz+xdy+(z-y)dx=0,$$

di cui l'integrale è formato dalle due equazioni

$$z=x+\phi y$$

$$z=y+\frac{x}{\phi' y},$$

è chiaro che posta $\phi y=y$ queste due equazioni si riducono alla medesima $z=x+y$, la quale da se sola soddisfà alla

propoſta. Ed ecco ſpiegata l'origine di quelle ſoluzioni particolari, che alcune volte ſi trovano ſoddisfare all'equazioni da loro ſteſſe non integrabili, e che vengono indicate dai criterj d'integrabilità. Poichè è evidente che eſſe hanno luogo, quando le due equazioni componenti l'integrale completo poſſono ridurſi ad una ſola, e ſono perciò compreſe nel medeſimo integrale completo.

IV. Se l'equazioni ſaranno tra quattro variabili, il Sig. *Monge* ſtabiliſce, che non ſi potrà generalmente ad eſſe ſoddisfare, che per mezzo di tre equazioni, le quali comprendano una funzione arbitraria di due variabili. Egli eccettua però alcuni caſi, ne' quali ſi può ad eſſe ſoddisfare con due equazioni, che contengono una funzione arbitraria di una ſola variabile, come ſuccede nell'integrale dell'equazioni a tre variabili. Pure vedremo in breve, che in tutti i caſi ſi può ad eſſe ſoddisfare con due ſole equazioni. Data qualunque equazione $Adu + Bdz + Cdy + Ddx = 0$, che non ſoddisfaccia alle condizioni d'integrabilità, ponghiamo $M = \alpha$, $N = \beta$, ove ſiano M ed N due funzioni determinate di x, y, e z, ed α e β coſtanti arbitrarie. Da queſt'equazioni ricavato il valore di z e di y in x, ſi ſoſtituiſca nella propoſta, ed eſſa diventerà una equazione tra due ſole variabili u ed x, che integrata ci darà $P = \gamma$. L'equazioni $M = \alpha$, $N = \beta$, e $P = \gamma$ preſe inſieme ſoddisfanno alla propoſta, e perciò ſoſtituiti i valori di du, dz, e dy ricavati da eſſe nella propoſta, la rendono identica. Ciò è vero quando α, β, e γ ſon coſtanti; ma ſe ſon riguardate come variabili, la ſoſtituzione dei valori di du, dz, e dy non renderà più identica la propoſta, ma ci darà una equazione della forma $mdy + ndx + pd\beta = 0$. Facciamo $\gamma = \phi(\alpha, \mu)$, e queſta equazione diventerà $(m\frac{d\phi}{dx} + n)dx + (m\frac{d\phi}{d\beta} + p)\,d\beta = 0$. Quindi alla propoſta ſoddisfarà l'equazione $P = \phi(M, N)$, purchè con eſſa abbian luogo anche l'equazioni $m\frac{d\phi}{dM} + n = 0$, $m\frac{d\phi}{dN} + p = 0$. Se noi facciamo $M = x$, ed $N = y$, queſto metodo ſi ridurrà ad integrar la propoſta nella ipoteſi di x

e di y costanti, ed a completar poi l'integrale con una funzione arbitraria di x ed y. Le altre due equazioni si ricaveranno dal paragone del differenziale della prima con la proposta, posti $=0$ i coefficienti di dx e di dy dopo l'eliminazione di du e di dz.

Avremo adunque tre equazioni integrali tra x, y, z, u, ed una funzione ϕ di due variabili x, ed y. Per mezzo di esse potremo sempre eliminare z ed u, ed otterremo una equazione a differenze parziali tra x, y, e ϕ. Integrata questa equazione avremo ϕ espressa per una funzione di una sola variabile, e la sostituzione di questo valore di ϕ nelle tre equazioni integrali le ridurrà a due sole, perchè due qualunque di esse comporteranno la terza.

Prendiamo per esempio l'equazione

$$udu + xdz + zdy + ydx = 0$$

per esprimer l'integrale della quale il Sig. *Monge* crede necessarie tre equazioni. Supposte x ed y costanti, avremo integrando $u^2 + 2xz = \phi(x, y)$.

Il differenziale di questa equazione ci dà

$2udu + 2xdz + 2zdx = \frac{d\phi}{dx}dx + \frac{d\phi}{dy}dy$; e paragonato questo differenziale con la proposta, ne otterremo $2z + \frac{d\phi}{dy} = 0$, $2z - 2y - \frac{d\phi}{dx} = 0$. Quindi l'integrale della proposta è espresso dalle tre equazioni

$$u^2 + 2xz = \phi(x, y)$$
$$2z - 2y - \frac{d\phi}{dx} = 0$$
$$2z + \frac{d\phi}{dy} = 0.$$

Per ridurle a due, si elimini z dalle due ultime equazioni, e si avrà $\frac{d\phi}{dx} + \frac{d\phi}{dy} + 2y = 0$. Questa equazione integrata ci darà $\phi = \psi(x - y) - y^2$, e sostituendo questo valore di ϕ avremo

$$u^2 + 2xz = \psi(x - y) - y^2$$
$$2z - 2y = \psi'(x - y),$$

poichè la terza equazione è identica con la seconda. E' facile il vedere che queste due equazioni soddisfanno alla proposta; perchè la prima differenziata ci dà

$$2udu + 2xdz + 2zdx = \psi' dx - \psi' dy - 2ydy,$$

e sostituitovi il valore di ψ' ricavato dalla seconda

$$2udu + 2xdz = -2ydx - 2zdy,$$

che è la proposta.

Sia data in secondo luogo l'equazione

$$xdu + ydz - xdx - ydy = 0.$$

Integrando nella ipotesi di x ed y costanti avremo $xu + yz = \phi(x, y)$, e dal paragone del differenziale di questa equazione con la proposta ne dedurremo $u + x = \frac{d\phi}{dx}$, $z + y = \frac{d\phi}{dy}$. Dunque l'integrale della proposta è espresso dalle tre equazioni

$$xu + yz = \phi(x, y)$$

$$u + x = \frac{d\phi}{dx}$$

$$z + y = \frac{d\phi}{dy}.$$

Da quest'equazioni eliminiamo u e z, ed avremo l'equazione a differenze parziali $x\frac{d\phi}{dx} + y\frac{d\phi}{dy} = \phi + x^2 + y^2$. L'integrale di questa equazione ci darà $\phi = x^2 + y^2 + x\psi.\frac{x}{y}$: il qual valore di ϕ se si sostituisce nelle tre equazioni integrali, esse diventeranno

$$xu + yz = x^2 + y^2 + x\psi.\frac{x}{y}$$

$$u = x + \psi.\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\psi'.\frac{x}{y}$$

$$z = y - \frac{x^2}{y^2}\psi'.\frac{x}{y}.$$

Poste due qualunque di quest'equazioni ne segue necessariamente la terza: quindi due qualunque di esse esprimono l'integrale della proposta.

Sia data finalmente l'equazione

$$3u^2du + x^2dz + \left(\frac{x^2z^2}{y^2} - xz\right)dy + y^2dx.$$

Poste x ed y costanti avremo integrando $u^3 + x^2z = \phi(x,y)$, e paragonando il differenziale di questa equazione, allorchè tutto varia, con la proposta troveremo $2xz - y^2 = \frac{d\phi}{dx}$, e $xz - \frac{x^2z^2}{y^2} = \frac{d\phi}{dy}$. Quindi l'integrale della proposta è rappresentato dalle tre equazioni

$$u^3 + x^2z = \phi(x,y)$$

$$2xz - y^2 = \frac{d\phi}{dx}$$

$$xz - \frac{x^2z^2}{y^2} = \frac{d\phi}{dy}.$$

Per ridurle a due eliminiamo z dalla seconda e dalla terza, ed avremo l'equazione a differenze parziali $y^4 - 4y^2\frac{d\phi}{dy} = \frac{d\phi^2}{dx^2}$. Questa non essendo lineare, non potremo con i soliti metodi esprimerne l'integrale in una sola equazione, ma in due, le quali si troveranno nel modo seguente. E' chiaro che all'equazione $y^4 - 4y^2\frac{d\phi}{dy} = \frac{d\phi^2}{dx^2}$ si soddisfà ponendo $\frac{d\phi^2}{dx^2} = \alpha^2 = y^4 - 4y^2\frac{d\phi}{dy}$, ed α costante. Ora l'equazione $\frac{d\phi^2}{dx^2} = \alpha^2$ ci dà $\phi = \alpha x + f.y$, e sostituendo questo valore di ϕ nell'equazione $y^4 - 4y^2\frac{d\phi}{dy} = \alpha^2$ ne ricaviamo $y^4 - 4y^2f'.y = \alpha^2$, cioè $f.y = \frac{\alpha^2}{4y} + \frac{y^2}{12} + \beta$, e quindi $\phi = \alpha x + \frac{\alpha^2}{4y} + \frac{y^3}{12} + \beta$. Ma questo valore di ϕ, che soddisfà all'equazione precedente allorchè α e β son costanti,

vi sod-

vi soddisfarà ancora supposte α e β variabili, purchè ciò che nasce dalla variazione di queste due quantità sia $= 0$. Quindi posta $\beta = \psi.\alpha$, l'integrale dell' equazione $y^4 - 4y^2 \frac{d\phi}{dy} = \frac{d\phi^2}{dx^2}$ sarà espresso dalle due equazioni $\phi = \alpha x + \frac{\alpha^2}{4y} + \frac{y^3}{12} + \psi.\alpha$, e $x + \frac{\alpha}{2y} + \psi'.\alpha = 0$, (ove la seconda è $= \frac{d\phi}{d\alpha}$), cioè nascerà dall'eliminazione di α da queste due equazioni. Sostituiamo adesso il valore di ϕ nelle tre equazioni integrali, ed esse diventeranno

$$u^3 + x^2 z = \alpha x + \frac{\alpha^2}{4y} + \frac{y^3}{12} + \psi.\alpha$$

$$2xz - y^2 = \alpha$$

perchè la terza combina con la seconda; ma con queste due dovrà aver luogo anche l'equazione

$$x + \frac{\alpha}{2y} + \psi'.\alpha = 0.$$

L'integrale pertanto della proposta nascerà dall'eliminazione di α da queste tre equazioni: ma la seconda ci dà $\alpha = 2xz - y^2$; quindi sostituendo questo valore di α nelle altre due avremo l'integrale della proposta espresso dalle due equazioni

$$u^3 = x^2 z - xy^2 + \frac{(2xz - y^2)^2}{4y} + \frac{y^3}{12} + \psi(2xz - y^2)$$

$$x + \frac{2xz - y^2}{2y} + \psi'(2xz - y^2) = 0$$

com'è facile di verificare. Infatti prendendo il valore di du dalla prima di quest'equazioni, e sostituendolo nella proposta avremo

$$(2zdx - 2ydy + 2xdz)\left(x + \frac{2xz - y^2}{2y} + \psi'(2xz - y^2)\right) = 0.$$

la qual' equazione è identica a motivo di $x + \frac{2xz - y^2}{2y} + \psi'(2xz - y^2) = 0$.

V. Se l'equazione sarà tra cinque variabili r, u, z, y, ed x, poste x, y, e z costanti, il di lei integrale conterrà

una funzione arbitraria ϕ delle tre variabili x, y, e z. Col metodo precedente si troveranno le altre tre equazioni, che devono aver luogo insieme con questa per esprimere l'integrale della proposta. Per mezzo di queste quattro equazioni eliminando r ed u avremo due equazioni a differenze parziali tra x, y, z e ϕ. Integrata una di esse, o una che da ambedue dipenda, avremo ϕ espressa per una funzione ψ di due sole variabili, e la sostituzione di ϕ nelle quattro equazioni integrali le ridurrà a tre sole, perchè tre qualunque di esse comporteranno la quarta. Ciò è vero in generale, perchè se eliminate r ed u da queste tre ultime equazioni ne risultasse una equazione a differenze parziali, nella quale non avessero luogo che le variabili della funzione ψ, questa equazione potrebbe integrarsi, e le tre equazioni integrali per la sostituzione del valore di ψ si ridurrebbero a due sole, come vedremo negli esempj seguenti.

Sia proposta l'equazione

$$zdr + ydu - xdz - ydx - zdy = 0.$$

Poste x, y, e z costanti troveremo integrando

$$zr + yu = \phi(x, y, z)$$

e dal paragone del differenziale di questa equazione con la proposta avremo le altre tre equazioni

$$r + x = \frac{d\phi}{dz}$$

$$u + z = \frac{d\phi}{dy}$$

$$y = \frac{d\phi}{dx}$$

La quarta equazione, che non contiene nè r, nè u, integrata ci darà $\phi = xy + \psi(y, z)$, e questo valore di ϕ sostituito nell'equazioni integrali le ridurrà alle tre seguenti

$$zr + yu = xy + \psi(y, z)$$

$$r + x = \frac{d\psi}{dz}$$

$$u + z = x + \frac{d\psi}{dy}$$

perchè la quarta è identica. Per vedere se quest'equazioni si posson ridurre a due, si elimini da esse r ed u, e si avrà

$z\frac{d\psi}{dz}+y\frac{d\psi}{dy}-z(x+y)=\psi$. Siccome in questa equazione si trova la x, che non è compresa tra le variabili della funzione ψ, essa non si potrà integrare, e perciò l'integrale della proposta non si potrà esprimere che per mezzo di tre equazioni.

Ma se nella proposta il coefficiente di dz invece di essere $-x$ fosse y, in luogo di $r+x=\frac{d\psi}{dz}$ avremmo $r-y=\frac{d\psi}{dz}$, le altre equazioni restando le medesime, ed eliminando r ed u, avremmo l'equazione $z\frac{d\psi}{dz}+y\frac{d\psi}{dy}=\psi$, la quale non contiene che le variabili y e z della funzione ψ. Il di lei integrale è $\psi=zF.\frac{y}{z}$, e sostituito questo valore avremo

$$zr+yu=xy+zF.\frac{y}{z}.$$

$$r-y=F.\frac{y}{z}-\frac{y}{z}F'.\frac{y}{z}$$

$$u+z=x+F'.\frac{y}{z}$$

due qualunque delle quali equazioni comportano la terza: perciò due di esse esprimono l'integrale dell'equazione

$$zdr+ydu+ydz-ydx-zdy=0.$$

Sia data adesso l'equazione

$$xydr+y^2du-y^2dx+(xy-yu)dz+(yu+uz-xz)dy=0.$$

Facilmente troveremo le quattro equazioni

$$xr+yu=\phi(x,y,z)$$

$$r+y=\frac{d\phi}{dx}$$

$$x-u=\frac{y}{z}\cdot\frac{d\phi}{dy}$$

$$u-x=\frac{d\phi}{dz}$$

le quali esprimono l'integrale della proposta. Dalle due ul-

time eliminando u ottenghiamo $\frac{d\phi}{dz}+\frac{y}{z}\frac{d\phi}{dy}=0$, e quindi ϕ $=\psi(x,\frac{y}{z})$: e sostituito questo valore di ϕ le quattro precedenti equazioni diventeranno tre, cioè

$$xr+yu=\psi(x,\frac{y}{z})$$

$$r+y=\frac{d\psi}{dx}$$

$$x-u=\frac{y}{z}\cdot\frac{d\psi}{dy}$$

perchè la quarta è la medesima che la terza. Per vedere se si possono ridurre a due, eliminiamone r ed u, ed avremo $x\frac{d\psi}{dx}-\frac{y^2}{z}\cdot\frac{d\psi}{dy}=\psi$. Facciamo $\frac{y}{z}=m$, in modo che $\psi(x,\frac{y}{z})$ divenga $\psi(x,m)$; e poichè $\frac{d\psi}{dy}=\frac{d\psi}{dm}\cdot\frac{dm}{dy}$ $=\frac{1}{z}\cdot\frac{d\psi}{dm}$, l'equazione trovata diventerà $x\frac{d\psi}{dx}-\frac{y^2}{z^2}\cdot\frac{d\psi}{dm}=\psi$, cioè $x\frac{d\psi}{dx}-m^2\frac{d\psi}{dm}=\psi$. Siccome in questa non si trovano, che le quantità x ed m contenute nella funzione ψ, essa potrà integrarsi, ed il di lei integrale sarà $\psi=xF(\log.x-\frac{1}{m})$ $=xF(\log.x-\frac{z}{y})$. Se adesso sostituiamo nelle tre equazioni integrali questo valore di ψ avremo

$$xr+yu=xF(\log.x-\frac{z}{y})$$

$$r+y=F+F'$$

$$x-u=\frac{x}{y}F',$$

ove la terza dipende dalle due prime. Dunque l' integrale dell' equazione

$$xydr+y^2du-y^2dx+(xy-yu)dz+(yu+uz-xz)dy=0$$

è espresso dal sistema delle due equazioni

$$xr + yu = xF\left(\log. x - \frac{z}{y}\right)$$

$$x - u = \frac{x}{y} F'.$$

Per verificare questo integrale non si ha da fare altro, che differenziare la prima di quest' equazioni, e sostituirvi poi i valori di F e di F' dedotti dalla prima e dalla seconda, e ne risulterà la medesima equazione proposta.

Si può concludere dalle cose precedenti, che l'equazioni tra tre e quattro variabili, le quali non soddisfanno alle condizioni d' integrabilità, ammettono un integrale espresso in due equazioni, le quali devono aver luogo nel medesimo tempo. Se poi il numero delle variabili sarà maggiore di quattro, l'integrale dell'equazioni sarà generalmente espresso in tante equazioni simultanee, quanto è il numero delle variabili diminuito di due unità, quantunque spesso possa essere espresso in un numero minore di equazioni. Queste equazioni comprenderanno una funzione arbitraria, la quale conterrà tante variabili tra loro indipendenti, quanto è il numero dell'equazioni integrali diminuito di una unità.

ARTICOLO II.

Dell' equazioni del prim' ordine, nelle quali le differenze sono elevate.

VI. Passiamo all'equazioni tra tre variabili, nelle quali le differenze non sono lineari. E noto, che esse non potranno integrarsi da se sole, quando non saranno riducibili ad una forma, in cui i differenziali siano lineari. Tale sarebbe l'equazione

$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2)$$

perchè mediante l' estrazione della radice quadrata non si può ridurre alla forma $dz = pdx + qdy$. Pure se in questa equazione ponghiamo y eguale ad una funzione qualunque arbitraria di x, essa diventerà un'equazione tra due sole variabili, e perciò capace da se sola d'integrazione. L'integrale pertanto di quest' equazioni, come quello dell'equazioni lineari tra tre variabili, sarà espresso dal sistema di due equa-

zioni ſimultanee, le quali comprenderanno una funzione arbitraria.

Per integrare queſta ſorte di equazioni ſi potranno uſare i medeſimi artifizj, che per l' equazioni lineari; ma non ſarà ſpeſſo poſſibile per mezzo di eſſi di eſprimerne gl' integrali in termini finiti. Prendiamo per eſempio l' equazione

$$dz^2 = a^2dx^2 + b^2dy^2$$

e ſupponendo dx coſtante avremo $dz = bdy$, ed integrando $z = by + \phi.x$. Differenziamo queſta equazione facendo variare anche x, e paragonandone il reſultato con la propoſta avremo $2bdxdy\phi'.x + dx^2(\phi'.x)^2 = a^2dz^2$, cioè $2bdy = \frac{a^2dx}{\phi'.x} - dx\phi'.x$, ed integrando $2by = a^2\int\frac{dx}{\phi'.x} - \phi.x$. Dunque l' integrale della propoſta ſarà eſpreſſo dalle due equazioni ſimultanee

$$z = by + \phi.x$$

$$2by + \phi.x = a^2\int\frac{dx}{\phi'.x}.$$

Prendiamo in ſecondo luogo l' equazione

$$z^2dz^2 = (a^2 - z^2)(dx^2 + dy^2).$$

Poſta x coſtante, queſta equazione ci darà $\frac{zdz}{\sqrt{(a^2 - z^2)}} = dy$, ed integrando avremo $-\sqrt{(a^2 - z^2)} = y + \phi.x$. Differenziamo queſta equazione facendo variare anche x, e paragonandone il riſultato con la propoſta troveremo l' equazione $2dy\phi'.x + dx(\phi'.x)^2 = dx$, cioè integrando $2y + \phi.x = \int\frac{dz}{\phi'.x}$: e queſta equazione combinata con l' altra $y + \phi.x + \sqrt{(a^2 - z^2)} = 0$ formerà l' integrale della propoſta.

Nei due precedenti eſempj la ſeconda equazione tra x ed y era ſeparabile, e perciò facilmente ſe ne otteneva l' integrale. Ma il più delle volte queſta equazione non ſarà ſeparabile; onde quantunque il problema ſia ridotto alla integrazione di una equazione tra due ſole variabili, pure queſta equazione non è generalmente integrabile per i metodi cogniti a motivo della funzione arbitraria, giacchè queſti metodi per lo più ſuppongono che i coeſficienti dei differenziali

dx, e dy siano determinati ed abbiano una certa forma. Inoltre anche ne' casi, ne' quali la separazione delle variabili succede, siccome questo metodo ci conduce a dell' espressioni, che contengono la funzione arbitraria sotto il segno integrale, niun vantaggio ne abbiamo ricavato, perchè potevamo subito una simile forma d' integrale ottenere ponendo $y=\phi.x$. Infatti mediante questa istituzione l' equazione $dz^2=a^2dx^2+b^2dy^2$ per esempio diventa $dz=dx\sqrt{(a^2+b^2(\phi'.x)^2)}$, e quindi $z=\int dx\sqrt{(a^2+b^2(\phi'.x)^2)}$. Più generalmente l' equazione $dz^n=a^ndx^n+b^ndy^n$ posta $y=\phi.x$ diventa $dz=dx\sqrt[n]{(a^n+b^n(\phi'.x)^n)}$, la quale integrata ci dà $z=\int dx\sqrt[n]{(a^n+b^n(\phi'.x)^n)}$; e quindi l' integrale dell' equazione $dz^n=a^ndx^n+b^ndy^n$ è espresso dalle due equazioni simultanee

$$\begin{aligned} z &= \int dx\sqrt[n]{(a^n+b^n(\phi'.x)^n)} \\ y &= \phi.x \end{aligned}$$

VII. Il Sig. *Monge* facendo delle riflessioni sulle proprietà delle curve di doppia curvatura, che conosceva *a priori* dover soddisfare a questa sorte di equazioni, è giunto ad esprimerne con molta eleganza l' integrale in termini finiti mediante tre equazioni, le quali contengono un' altra variabile non compresa nella proposta, che deve poi eliminarsi per avere le due equazioni integrali. Per esporre i principj analitici di questo metodo prendiamo la precedente equazione $dz^2=a^2dx^2+b^2dy^2$, e supponghiamo che una delle di lei equazioni integrali differenziata ci dia $dz=pdx+qdy$, ove si osservi che $p=\frac{dz}{dx}$, e $q=\frac{dz}{dy}$. Sostituiamo questo valore di dz, e la proposta diventerà

$$(A)\quad p^2-a^2+2pq\frac{dy}{dx}+(q^2-b^2)\frac{dy^2}{dx^2}=0.$$

E' in nostro arbitrio di prendere un' altra equazione che abbia luogo insieme coll' equazione (A), e se noi prendessimo o $p^2-a^2=0$, o $q^2-b^2=0$, caderemmo nel metodo precedente. Supponghiamo adunque che questa nuova equazione sia quella che nasce dal differenziale di (A) allorchè si fa solamente variare $\frac{dy}{dx}$, la quale si troverà essere

$$(B)\quad pq+(q^2-b^2)\frac{dy}{dx}=0.$$

Siccome le due equazioni (A) e (B) devono aver luogo insieme, eliminiamone $\frac{dy}{dx}$, ed otterremo

$$(C)\quad b^2p^2+a^2q^2=a^2b^2.$$

L'equazione (C), che è a differenze parziali, ci darà una equazione tra z, x, ed y, che sarà una dell'equazioni integrali della proposta, e l'altra poi troveremo integrando l'equazione $pq+(q^2-b^2)\frac{dy}{dx}=0$, dopo di avervi sostituiti i valori di p e q in x ed y. Poichè queste due equazioni finite soddisfaranno alle due (B) e (C), e quindi all'equazione (A) che è l'istessa che la proposta. E quantunque abbiamo presa arbitrariamente l'equazione (B), si vede che questo integrale sarà completo, perchè quello dell'equazione (C) comprenderà una funzione arbitraria. Pare a prima vista, che questo metodo non sia migliore de' precedenti, anzi più complicato; perchè primieramente conviene integrare l'equazione (C) a differenze parziali, e poi integrare l'equazione (B), la quale contiene una funzione arbitraria. A ciò si aggiunga, che l'equazione (C) non essendo lineare, il di lei integrale non si può con i metodi cogniti esprimere che in due equazioni, dal che risultano nuove difficoltà per l'integrazione dell'equazione (B). Ma qui riesce fortunatamente, che data una certa forma all'integrale dell'equazione (C), si può far di meno d'integrare l'equazione (B).

Questa forma otterremo adoprando il metodo immaginato dal Sig. de la *Grange* per dedurre l'integrale completo di una equazione a differenze parziali da un di lei integrale particolare. Per aver un integrale particolare dell'equazione (C) faccio $p^2=\alpha^2$, ed in conseguenza $a^2(b^2-q^2)=b^2\alpha^2$ essendo α costante. L'equazione $p^2=\alpha^2$ integrata mi dà $z=\alpha x+\phi y$, e quindi deduco $q=\phi' y$, e sostituendo questo valore di q nell'equazione $a^2(b^2-q^2)=b^2\alpha^2$ ne ricavo $\phi y=\frac{by\sqrt{(a^2-\alpha^2)}}{a}+\beta$, essendo β una costante: onde l'integrale particolare cercato sarà

$z-\alpha x-$

$z - \alpha x - \frac{by\sqrt{(a^2-\alpha^2)}}{a} - \beta = 0$. Ora osservo che questa equazione sarà sempre l'integrale di $b^2p^2 + a^2q^2 = a^2b^2$ anche supposte α e β variabili, purchè il differenziale di essa preso per rapporto ad α e β sia eguale a zero. Quindi se facciamo $\beta = \phi.\alpha$, ed $M = z - \alpha x - \frac{by\sqrt{(a^2-\alpha^2)}}{a} - \phi.\alpha$, l' integrale dell' equazione $b^2p^2 + a^2q^2 = a^2b^2$ sarà espresso dalle due equazioni

$$M = 0$$

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = -x + \frac{by\alpha}{a\sqrt{(a^2-\alpha^2)}} - \phi'.\alpha = 0,$$

cioè nascerà eliminata α dalle due equazioni $M = 0$, e $\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0$, e sarà completo perchè conterrà la funzione arbitraria ϕ.

Da questo integrale si ricava $p = \alpha$, $q = \frac{b\sqrt{(a^2-\alpha^2)}}{a}$; e sostituiti questi valori l'equazione (B) diventa $\frac{ba\sqrt{(a^2-\alpha^2)}}{a} - \frac{b^2\alpha^2}{a^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$, cioè $dy = \frac{adx\sqrt{(a^2-\alpha^2)}}{b\alpha}$. Per ridurre questa equazione tra due sole variabili, sostituiamoci il valore di dy ricavato dall'equazione $\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0$, cioè $dy = \frac{adx\sqrt{(a^2-\alpha^2)}}{b\alpha} - \frac{a\sqrt{(a^2-\alpha^2)}}{b\alpha}\left(\frac{d^2M}{d\alpha^2}\right)d\alpha$, ed essa diventerà $0 = -\frac{a\sqrt{(a^2-\alpha^2)}}{b\alpha} \cdot \left(\frac{d^2M}{d\alpha^2}\right)d\alpha$, cioè sarà soddisfatta dall' equazione $\left(\frac{d^2M}{d\alpha^2}\right) = 0$. Quindi l' integrale dell' equazione $dz^2 = a^2dx^2 + b^2dy^2$ nasce dalla eliminazione di α dalle tre equazioni

$$M = z - \alpha x - \frac{by\sqrt{(a^2-\alpha^2)}}{a} - \phi.\alpha = 0$$

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = -x + \frac{by\alpha}{a\sqrt{(a^2-\alpha^2)}} - \phi.\alpha = 0$$

$$\left(\frac{d^2M}{d\alpha^2}\right) = \frac{aby}{(a^2-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} - \phi''.\alpha = 0.$$

Questo metodo, che sembra particolare all' equazione proposta, è stato dal Sig. *Monge* generalizzato in modo, che ricavata in qualunque caso dalla proposta la corrispondente equazione a differenze parziali, che sopra abbiamo chiamata (C), se il di lei integrale è della forma

$$M = 0$$

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0$$

l' integrale dell' equazione proposta sarà sempre espresso dalle tre equazioni

$$M = 0$$

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0$$

$$\left(\frac{d^2M}{d\alpha^2}\right) = 0$$

cioè nascerà dalla eliminazione di α da queste tre equazioni. Anche senza conoscere l' integrale dell' equazioni a differenze parziali ha trovato il Sig. *Monge* alcuni Teoremi molto generali, i quali danno l' integrale di una infinità di questa sorte di equazioni, che è quanto si può sperar di meglio in questa materia.

ARTICOLO III.

Dell' equazioni del secondo ordine, nelle quali un qualch' elemento è supposto costante.

VIII. Consideriamo adesso l' equazioni del second' ordine tra tre variabili x, y, z, le quali non soddisfanno alle condizioni d' integrabilità, e sia in esse supposta dx costante. E' chiaro che posta $y = \phi.x$ quest' equazioni si ridurranno ad essere tra due sole variabili, e perciò capaci da se sole d' integrazione. L' integrale primo di esse, in qualunque modo si trovi, sarà dunque composto di due equazioni, le quali con-

terranno una funzione arbitraria. Trovate queste due equazioni tra le tre variabili x, y, e z, la ricerca dell' integrale finito si ridurrà ai metodi ordinarj. Poichè, come abbiamo osservato in principio (I), qualunque siano quest' equazioni, o integrali da esse sole o no, esse ci daranno z ed y espresse in x in quantità finite, e questa seconda integrazione non introdurrà alcuna nuova funzione arbitraria indipendente dalla prima. Pertanto l' integrale finito di quest' equazioni del second' ordine sarà espresso in due equazioni, le quali conterranno una funzione arbitraria. Quindi sembra non essere esatto ciò che asserisce il Sig. *Monge*, che quest' equazioni cioè ammettono due integrali primi, ciascuno de' quali contiene una funzione arbitraria, ed un integrale finito, il quale comprende due funzioni arbitrarie tra loro indipendenti, come vedremo più chiaramente in seguito.

IX. Tutto adunque si riduce alla ricerca dell' integrale primo, per trovare il quale si useranno degli artifizj analoghi a quelli impiegati di sopra per l' equazioni di prim' ordine. Ma siccome non saprei proporre alcun metodo che sempre riescisse, mi limiterò a dare alcuni casi molto generali. Posto $dy = pdx$, $dz = p'dx$, se l' equazione data diventerà una funzione di x, p, p', dx, dp, dp', sarà ridotta al prim' ordine, e si potranno usare i metodi precedenti. Ove si osservi che, se le differenze dx, dp, dp' saranno lineari, converrà sempre integrare supposta x costante, per evitare così facendo di avere i differenziali sotto la funzione arbitraria. Più generalmente l' integrazione succederà, se essendo X ed Y due quantità in qualunque modo composte di x, y, z, dx, dy, dz, sarà data una equazione tra x, X, Y, dx, dX, e dY.

Sia proposta per esempio l' equazione

$$xd^2z - 2\frac{dy}{dx}d^2y + x\,dx^2 = 0.$$

Posta x costante avrò integrando $xdz - \frac{dy^2}{dx} = dx\phi.x$, e paragonando il differenziale di questa nella ipotesi che varj anche x con la proposta otterrò $dz - xdx = dx\phi'.x$. Quindi l' integrale primo della proposta sara espresso dalle due equazioni simultanee

$$xdz - \frac{dy^2}{dx} = dx\phi.x$$

$$dz - xdx = dx\phi'.x.$$

La seconda equazione integrata mi dà $z = \frac{x^2}{2} + \phi.x$, ove tralascio la costante, perchè è contenuta in $\phi.x$. Si sostituisca nella prima questo valore di z, ed essa diventerà $dx\sqrt{(x^2 + x\phi'.x - \phi.x)} = dy$, onde integrando si ricava $y = \int dx\sqrt{(x^2 + x\phi'.x - \phi.x)} + c$. Quindi l' integrale finito della proposta è espresso dalle due equazioni

$$2z = x^2 + 2\phi.x$$

$$y = \int dx\sqrt{(x^2 + x\phi'x - \phi.x)} + c.$$

Prendiamo per secondo esempio l'equazione

$$xzd^2z + xyd^2y + xdz^2 + xdy^2 + yzdxdz + y^2dxdy + x(1+y)dx^2 = 0.$$

Posta x costante, questa equazione divisa per x diventa $zd^2z + yd^2y + dz^2 + dy^2 = 0$, e quindi abbiamo integrando $zdz + ydy = dx\phi'.x$. Differenziamo questa equazione facendo variare anche la x, e paragonando il resultato con la proposta otterremo $yzdz + y^2dy + x(1+y)dx + xdx\phi''.x = 0$. Quindi l' integrale primo della proposta è espresso dalle due equazioni simultanee

$$zdz + ydy = dx\phi'.x$$

$$yzdz + y^2dy + x(1+y)dx + xdx\phi''.x = 0.$$

Per passare adesso all' integrale finito, osservo che sostituito il valore di dz ricavato dalla prima equazione nella seconda, spariscono da questa i differenziali, e diventa $y\phi'x + x(1+y) + x\phi''.x = 0$. Inoltre la prima equazione è da per se stessa integrabile, e ci dà $z^2 + y^2 = 2\phi.x$: quindi l'integrale finito della proposta è espresso dalle due equazioni

$$z^2 + y^2 = 2\phi.x$$

$$y(\phi'.x + x) + x(\phi''.x + 1) = 0.$$

In questa seconda equazione svanirà la y se farò $\phi'.x + x = 0$, o sia $\phi.x = -\frac{x^2}{2} + a$: ma questa medesima supposizione dandomi $\phi''.x + 1 = 0$ toglie di mezzo la seconda equazione. Rimane la sola equazione $z^2 + y^2 + x^2 = a$, che soddisfà alla proposta: dunque essa ammette un integrale espresso da una sola equazione, ma questo integrale è particolare, perchè contiene una sola costante.

Sia data in terzo luogo l'equazione

$$dyd^2z - dzd^2y - xdx^2dy = 0.$$

Facendo x costante e dividendo per dy^2 avremo $\frac{dyd^2z - dzd^2y}{dy^2} = 0$, ed integrando $\frac{dz}{dy} = \phi.x$. Differenziamo questa equazione facendo variare anche la x, e paragonandone il resultato con la proposta avremo $xdx = dy\phi'.x$. Quindi l' integrale primo della proposta è rappresentato dalle due equazioni

$$(1)\ dz = dy\phi.x$$
$$(2)\ xdx = dy\phi'.x.$$

La seconda integrata ci dà $y = \int \frac{xdx}{\phi'.x}$, e sostituendo il valore di dy nella prima ed integrando avremo $z = \int \frac{xdx\phi.x}{\phi'.x}$. Quindi l'integrale finito della proposta è espresso dalle due equazioni simultanee

$$z = \int \frac{xdx\phi.x}{\phi'.x}$$
$$y = \int \frac{xdx}{\phi'.x}.$$

Se si osserva che $\int \frac{xdx\phi.x}{\phi'.x} = \phi x \int \frac{xdx}{\phi'.x} - \int dx\phi'.x \int \frac{xdx}{\phi'.x}$, alla prima di quest'equazioni si potrà dar la forma

$$z = y\phi.x - \int dx\phi'.x \int \frac{xdx}{\phi'.x}.$$

Dei due segni integrali, che entrano ne' valori di z e di y uno si potrà togliere dando un'altra forma a $\phi.x$, che però gli mantenga tutta la sua generalità, ma l' altro sempre vi rimarrà.

All' equazione data supposta x costante possiamo anche dar la forma $\frac{ydyd^2z - ydzd^2y}{dy^2} = 0$, e troveremo le due equazioni

$$(3)\ ydz - zdy = dy\psi.x$$
$$(4)\ xydx = dy\psi'.x$$

ove $\psi.x$ è una funzione arbitraria, le quali esprimono l'integrale primo della proposta. Da queste due equazioni potremo come sopra dedurre l'integrale finito, il quale non conterrà che la funzione arbitraria $\psi.x$, e potrà facilmente ridursi all'altro data una certa forma a $\psi.x$, che nulla togliendo alla generalità di questa funzione introdurrà nell'integrale $\phi.x$ in luogo di $\psi.x$.

Ma poichè abbiamo le quattro equazioni (1), (2), (3), e (4) possiamo eliminar da esse dz e dy, ed ottenghiamo le due equazioni

$$(a)\ z = y\phi.x - \psi.x$$
$$(b)\ y\phi'.x = \psi'.x.$$

Queste due equazioni trovate col metodo proposto dal Sig. *Monge*, nelle quali le due funzioni $\phi.x$ e $\psi.x$ sono arbitrarie ed indipendenti, pare a prima vista che in tutta la loro generalità rappresentino l'integrale finito dell'equazione proposta. Infatti differenziata l'equazione (a), ed eliminata col mezzo dell'equazioni (a) e (b) una delle funzioni arbitrarie si giunge all'una o all'altra dell'equazioni (1), e (3). Ma convien riflettere che l'equazione (1) per esempio non soddisfà da se sola alla proposta, ma deve aver luogo insieme con lei anche l'equazione (2). Quindi le due equazioni (a) e (b) per soddisfare alla proposta bisogna che comportino l'equazione (2). Ora l'equazione (b) differenziata ci dà $dy = d.\frac{\psi'.x}{\phi'.x}$, e sostituendo questo valore nell'equazione (2) abbiamo $\frac{xdx}{\phi'.x} = d.\frac{\psi'.x}{\phi'.x}$: dunque la funzione $\psi.x$ dipende dall'altra $\phi.x$. Integrando quest'ultima equazione troveremo $\frac{\psi'.x}{\phi'.x} = \int\frac{xdx}{\phi'.x}$, e $\psi.x = \int dx\phi'.x\int\frac{xdx}{\phi'.x}$, e sostituito questo valore l'equazioni (a) e (b) diventeranno

$$z = y\phi.x - \int dx\phi'.x\int\frac{xdx}{\phi'.x}$$

$$y = \int\frac{xdx}{\phi'.x},$$

il quale integrale è quel medesimo, che abbiamo trovato di sopra, e comprende una sola funzione arbitraria.

X. Che l'integrale finito di quest' equazioni ammetta una sola funzione arbitraria e non due, come pensa il Sig. *Monge*, si renderà più chiaro, se alcune riflessioni faremo sull'integrale assegnato da questo gran Geometra ad una data equazione, dal quale ha poi dedotta la sua regola generale. Proposta l'equazione

$$(A)\ \left(dx^2+dy^2+dz^2\right)^3=a^2\left\{\begin{array}{l}(dxd^2y-dyd^2x)^2\\+(dzd^2x-dxd^2z)^2\\+(dyd^2z-dzd^2y)^2\end{array}\right\}$$

il Sig. *Monge* guidato da un'analisi ugualmente profonda che elegante stabilisce, che poste

$$N=(x-\alpha)^2(dz^2+dx^2)+2(x-\alpha)(y-\phi.\alpha)dxdy+(y-\phi.\alpha)^2(dy^2+dz^2)-a^2dz^2$$

$$N'=(x-\alpha')^2(dy^2+dx^2)+2(x-\alpha')(z-\psi.\alpha')dxdz+(z-\psi.\alpha')^2(dy^2+dz^2)-a^2dy^2$$

i due integrali primi della proposta sono il resultato dell' eliminazione di α e di α' tra l'equazioni

$$N=0 \qquad N'=0$$

$$\left(\frac{dN}{d\alpha}\right)=0 \qquad \left(\frac{dN'}{d\alpha'}\right)=0$$

$$\left(\frac{d^2N}{d\alpha^2}\right)=0 \qquad \left(\frac{d^2N'}{d\alpha'^2}\right)=0$$

e l'integrale finito e completo della medesima è il resultato dell'eliminazione delle quattro quantità α, α', $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dx}{dy}$ tra le stesse sei equazioni, il quale integrale finito comprenderà le due funzioni arbitrarie ϕ e ψ. Siccome non si possono in generale eseguire l'eliminazioni di α e di α', così non è facile il dimostrar qui come nell' esempio precedente, che le due funzioni ϕ e ψ non sono ambedue arbitrarie, ma una dall'altra dipende. Ma questa dipendenza viene indicata dall' analisi medesima del Sig. *Monge* (pag. 539): onde deve sussistere e ne' due integrali primi, e nell' integrale finito, che da quell' analisi sono stati dedotti. Il Sig. *Monge* ha osservato, che tra α, $\phi.\alpha$, e $\psi.\alpha$ esiste una equazione simile all'equazione (A) tra x, y, e z: ma il dedurre da ciò la relazione tra $\phi.\alpha$ e $\psi.\alpha$ è lo stesso che integrar la proposta.

Per convincersi della necessità di determinare questa re-

lazione si rifletta, che l'eliminazioni precedenti in generale non succedendo, non potremo ottenere esplicitamente che degl'integrali finiti particolari della proposta. Ora se per aver questi diamo dei valori particolari a capriccio alle funzioni ϕ e ψ, come potremmo fare se queste funzioni fossero tra loro indipendenti, avremo dall'equazioni, le quali non soddisfaranno alla proposta, che nel caso che i valori dati a ϕ e ψ soddisfacciano alla relazione che tra loro deve aver luogo. Quindi l'espressione precedente dell'integrale finito sarà affatto illusoria, se non si assegnerà la relazione tra ϕ e ψ in modo, che dato un valore a volontà a ϕ si sappia quello che necessariamente si deve dare all'altra funzione ψ.

Per le medesime ragioni invece di affermare che i due integrali primi trovati sono tra loro diversi, sembra più esatto il dire che il secondo è lo stesso integrale che il primo, ma presentato sotto una forma differente. Infatti acciò fossero due integrali diversi, converrebbe che le due funzioni ϕ e ψ fossero ambedue arbitrarie: come riguardo all'equazioni del second'ordine, che sono da loro stesse integrabili, noi diciamo che esse hanno due diversi integrali primi, perchè questi contengono due costanti tra loro indipendenti. Ma qui la funzione ϕ essendo arbitraria, non lo è l'altra ψ, perchè dalla prima dipende.

Oltre le due forme date all'integrale primo della proposta dal Sig. *Monge*, se ne potranno assegnare varie altre. Si osservi che nell'equazione (A) le variabili x, y, e z sono permurabili; onde se noi facciamo

$$N'=(y-\alpha'')^2(dz^2+dy^2)+2(y-\alpha'')(x-F.\alpha'')dxdy+(x-F\alpha'')^2(dx^2+dz^2)-a^2dz^2$$
$$N''=(y-\alpha''')^2(dx^2+dy^2)+2(y-\alpha''')(z-F1.\alpha''')dydz+(z-F1.\alpha''')^2(dx^2+dz^2)-a^2dx^2$$
$$N'''=(z-\alpha'''')^2(dx^2+dz^2)+2(z-\alpha'''')(y-F2.\alpha'''')dydz+(y-F2.\alpha'''')^2(dy^2+dx^2)-a^2dx^2$$
$$N''''=(z-\alpha'''''')^2(dy^2+dz^2)+2(z-\alpha'''''')(x-F3.\alpha'''''')dxdz+(x-F3.\alpha'''''')^2(dy^2+dx^2)-a^2dy^2$$

le quali quantità nascono dalle precedenti N ed N' se in luogo di x vi ponghiamo y, o z, ciascuna di esse ci darà l'integrale primo della proposta rappresentato sotto una nuova forma. Se adopriamo per esempio la prima, sarà questo integrale il resultato dell'eliminazione di α'' tra le tre equazioni

$N'=0$

$$N''=0$$
$$\left(\frac{dN''}{d\alpha''}\right)=0$$
$$\left(\frac{d^2N''}{d\alpha''^2}\right)=0;$$

e così delle altre. Sarebbe assurdo, che una equazione del second'ordine avesse sei integrali primi: onde da questo ancora si rileva che le funzioni in essi contenuti sono tra loro dipendenti.

Siccome l'equazione (A) non contiene che i differenziali delle variabili x, y, z, posto $dy=mdx$, e $dz=m'dx$ essa si abbasserà al prim'ordine e diventerà della forma

$$(B)\ (1+m^2+m'^2)^3dx^2=a^2dm^2+a^2dm'^2+a^2(mdm'-m'dm)^2.$$

Qualunque sia la forma dell'integrale di questa equazione (B), è certo per ciò che abbiamo veduto all'articolo II, che egli sarà espresso da due equazioni, le quali comprenderanno una sola funzione arbitraria. In vigore di queste due equazioni saranno m ed m' espresse per x; e quindi l'equazioni $y=\int mdx$, e $z=\int m'dx$, le quali esprimeranno l'integrale finito dell'equazione (A), non conterranno che una sola funzione arbitraria.

Da tutto ciò sembra che si possa rilevare, non essere esatto l'integrale finito completo assegnato dal Sig. *Monge* all'equazione (A). Per ottenere questo integrale, bisognerebbe che si potesse eliminare α dalle tre equazioni

$$N=0$$
$$\left(\frac{dN}{d\alpha}\right)=0$$
$$\left(\frac{d^2N}{d\alpha^2}\right)=0;$$

ed allora si potrebbero applicare all'integrazione delle due risultanti equazioni in x, y, e z i metodi ordinarj. Ma se questa eliminazione non è in generale eseguibile, potrà però riescire allorchè si danno dei valori alla funzione ϕ, e si potranno così ritrovare degl' integrali finiti particolari dell' equazione (A).

XI. Si può concludere da quello che abbiamo detto sull' equazioni del second'ordine, che qualunque sia l'ordine di

una equazione tra tre variabili, la quale non soddisfaccia ai criterj d'integrabilità, essa ammetterà sempre un solo integrale primo espresso in due equazioni, e contenente una funzione arbitraria, quantunque questo integrale possa presentarsi sotto varie forme tra loro diverse. Trovato l'integrale primo, il sistema delle due equazioni, ond'è composto, soddisfarà sempre alle condizioni d'integrabilità, e la ricerca degli integrali inferiori dipenderà da' metodi ordinarj. Onde gl'integrali di tutti gli ordini non conterranno, che quella sola funzione arbitraria che è nel primo. Se le variabili sono più di tre, il numero dell'equazioni, che compongono l'integrale primo, e quello delle funzioni arbitrarie, si può rilevare da ciò che abbiamo detto per l'equazioni del prim'ordine.

ARTICOLO IV.

Dell'equazioni del second'ordine, nelle quali niuno elemento è supposto costante.

XII. Abbiamo fin qui supposta dx costante, consideriamo adesso quell'equazioni, nelle quali niuno elemento sia supposto costante. Data l'equazione del second'ordine

$$Pd^2y + Qd^2x + Rdy^2 + Sdxdy + Tdx^2 = 0$$

tra le due variabili x ed y, nella quale niun differenziale primo si pone costante, stabiliscono i Geometri, che questa equazione è assurda, cioè non significa niente, e non ammette integrale completo, che quando $Pdy + Qdx = 0$ è una equazione identica. Se poi l'equazione $Pdy + Qdx = 0$ non essendo identica, soddisfà però alla proposta, ne è un integrale, ma particolare, perchè non contiene alcuna costante arbitraria. Pure vedremo adesso, che quell'equazione è sempre reale, ed ammette un integrale alcune volte espresso in una sola equazione, per lo più in due. L'errore di crederla assurda è nato dal supporre, che siccome nell'equazione differenziale non vi sono che le due variabili x ed y, così le medesime sole variabili debbano aver luogo nell'integrale. Eppure è ovvio il caso, in cui non avendo luogo nell'equazione differenziale che la sola variabile y, nell'integrale però entra ancora un'altra variabile x, che vien dalla differenzia-

zione eliminata. Perchè se Y e P sono due funzioni di y, data l' equazione $Pd^2Y = 0$, si stabilisce che abbia luogo in essa un' altra variabile x, di cui il differenziale primo sia stato supposto costante, e si trova l' integrale primo di quell' equazione essere $dY = adx$, e l' integrale finito $Y = ax + b$. Così se sarà data l' equazione $Md(Pdx + Qdy) = 0$, ove M, P, e Q sono funzioni di x ed y, e nel differenziare la quantità $Pdx + Qdy$ niuno elemento si suppone costante, avrà luogo nel problema, che ha condotto a quella equazione, un' altra variabile u, di cui il differenziale primo sarà costante. Quindi l' integrale primo della proposta sarà

$$Pdx + Qdy = adu$$

ove a è una costante arbitraria. Per passare all' integrale finito convien notare due casi; 1.° se $Pdx + Qdy$ è una differenziale esatta, di cui l' integrale sia R, avremo integrando di nuovo

$$R = au + b$$

ed in questo caso soddisfarà al problema una superficie: 2.° se $Pdx + Qdy$ non è una differenziale esatta, sia N il fattore che la rende tale, ed allora l' integrale finito della proposta sarà espresso dalle due equazioni

$$\int N(Pdx + Qdy) = \phi.u$$
$$aN = \phi'.u$$

cioè soddisfarà al problema una curva di doppia curvatura.

L istesso avrà luogo nell' equazioni della forma $Md^2P = 0$, qualunque sia il numero delle variabili in esse contenute, delle quali l' integrale primo sarà $dP = adu$, e l' integrale finito sarà espresso da una o più equazioni, che si troveranno con i metodi esposti nel primo e nel secondo articolo. Sia data per esempio l' equazione

$$y^2zd^2z + y^2dz^2 + ydxdy + xyd^2y - xdy^2 + y^2dxdz + y^2zd^2x = 0$$

Dividendola per y^2 troveremo il suo integrale primo essere

$$zdz + \frac{xdy}{y} + zdx = adu.$$

Siccome questa equazione non soddisfà ai criterj d' integrabilità, applicandovi i metodi dell' art. I. vedremo il di lei integrale esser rappresentato dalle tre equazioni

$$z^2 + 2x \log. y = \phi(x, u).$$

$$2 \log. y - 2z = \frac{d\phi}{dx}$$

$$2a = \frac{d\phi}{du}.$$

La terza ci dà $\phi = 2au + \psi.x$, e sostituito questo valore di ϕ nelle altre due esse diventeranno

$$z^2 + 2x \log. y = 2au + \psi.x$$

$$2 \log. y - 2z = \psi'.x$$

e formeranno l' integrale finito completo della precedente equazione del second' ordine. Infatti se differenziamo la prima di quest' equazioni due volte supposta du costante, e vi sostituiamo i valori di $\psi'.x$, e $\psi''.x$ presi dalla seconda, ne nascerà la medesima equazione proposta.

XIII. Consideriamo adesso l'equazione generale

$$Pd^2y + Qd^2x + Rdy^2 + Sdxdy + Tdx^2 = 0,$$

e se essa non sarà riducibile alla forma $Md(Pdx + Qdy) = 0$, le due equazioni che ne formano l' integrale primo, si troveranno nel modo seguente. Facciamo $N(Pdy + Qdx) = du\phi.u$, e differenziando questa equazione nell' ipotesi di du costante, paragoniamone il resultato con la proposta, ed avremo $dyd.NP + dxd.NQ - NRdy^2 - NSdxdy - NTdx^2 = du^2\phi'.u$, e quindi le due equazioni

$$NPdy + NQdx = du\phi.u$$

$$dyd.NP + dxd.NQ - N(Sdxdy + Tdx^2 + Rdy^2) = du^2\phi'.u$$

formeranno l' integrale primo della proposta, com' è facile di verificare mediante la differenziazione. La ricerca dell' integrale finito dipenderà dai metodi ordinarj; ma qui si osservi che la quantità N è pienamente rilasciata al nostro arbitrio, e perciò possiamo prenderla in modo da render più facile questa seconda integrazione. Prendiamo dunque per N il moltiplicatore che rende la quantità $Pdy + Qdx$ una differenziale esatta, e in tal guisa si renderà integrabile la prima di quest' equazioni. E' facile il vedere come si debba operare, se l' equazioni proposte conterranno più di due variabili.

Sia data per esempio l' equazione

$$x^2d^2x + x^2yd^2y - y^2dx^2 + x^2dy^2 + a^2dx^2 = 0.$$

Prendendo $N = \frac{1}{x^2}$ troveremo che l'integrale primo della proposta si esprime con le due equazioni

$$xdx + ydy = du\phi'.u$$

$$\frac{x^2 + y^2 - a^2}{x^2} dx^2 = du^2\phi''.u.$$

La prima equazione integrata ci dà $x^2 + y^2 = 2\phi.u$, e sostituito questo valore di $x^2 + y^2$ nella seconda essa diventa $\frac{2\phi.u - a^2}{x^2} dx^2 = du^2\phi''.u$, cioè $\frac{dx}{x} = du\sqrt{\frac{(\phi''.u)}{2\phi.u - a^2}}$, e quindi $\log. x = \int du \sqrt{\frac{\phi''.u}{2\phi.u - a^2}}$. Pertanto l'integrale finito della proposta sarà espresso dalle due equazioni

$$x^2 + y^2 = 2\phi.u$$

$$\log. x = \int du \sqrt{\frac{\phi''.u}{2\phi.u - a^2}}.$$

Se facciamo $2\phi.u = a^2$, la prima equazione diventa $x^2 + y^2 = a^2$, e la seconda $\frac{x^2 + y^2 - a^2}{x^2} dx^2 = du^2\phi''.u$ ci dà similmente $x^2 + y^2 = a^2$: dunque la proposta ammette un integrale particolare espresso dalla sola equazione $x^2 + y^2 - a^2 = 0$.

Nei quattro articoli precedenti abbiamo percorsi tutti i casi dell' equazioni riputate assurde; perciò adesso possiamo francamente conchiudere che niuna dell' equazioni non soddisfaccenti ai criterj d'integrabilità sia assurda, ma che tutte ammettano un vero integrale espresso in due o più equazioni.