CONSIDERAZIONI

SOPRA UNA MANIERA DIVERSA DA QUELLA CHE SEGUE L'EULERO, DI TRARRE DAL CIRCOLO LE QUANTITA' TRASCENDENTI CHE ALLO STESSO APPARTENGONO; E DIMOSTRAZIONE D'UN TEOREMA ANALITICO.

Del Sig. Francesco Pezzi

Presentata

Dal Sig. Leonardo Salimbeni.

Le operazioni dell'analisi finita non meno che infinitesimale dimandano continuamente il soccorso delle quantità trascendenti, le quali a' tempi nostri consistono nelle sole quantità logaritmiche e circolari; ma quanto frequente ed utile, altrettanto dilicato e pieno di pericolo n'è l'uso: che se per avventura questa mia espressione sembrasse ardita di troppo, mi farei allora a ricordar solamente la tanto famosa quistione intorno ai logaritmi dei numeri negativi; quindi è che non si dee trascurar mai di fare ogni benchè piccolo passo, il quale vie maggiormente c'inoltri a ben conoscere l'indole ed il valore delle anzidette quantità. Questa riflessione mi ha dato il coraggio di presentare all'Illustre Società Italiana il seguente tenue lavoro, ad oggetto di rischiarire un punto d'analisi che forse sembrerà dilettevole ed interessante.

1. Nell'opera immortale che ha per titolo *Introductio in Analysin infinitorum*, il cui I. Tomo io ho trasportato in lingua Francese (*a*), il dottissimo *Eulero* ha trattato diffusamen-

(*a*) V. „Introduction à l'Analyse des „ infiniment petits de *M. Euler* tra- „ duite du latin par *M. M. Pezzi* & „ *Kramp*. A' Strasbourg aux dépens „ de la librairie Academique 1786.

te delle quantità traſcendenti; ed al capitolo VIII. intitolato *de quantitatibus tranſcendentibus ex circulo ortis* il lodato Autore vi getta i fondamenti del vaſto calcolo de' ſeni e coſeni, e vi ſpiega le maraviglioſe trasformazioni conoſciute da tutti i Geometri della ſomma o differenza delle quantità eſponenziali imaginarie in ſeni e coſeni d'archi reali, come ancora quelle degli archi reali in logaritmi di ſeni e coſeni moltiplicati dall'imaginario. Ora affine che il lettore vegga toſto lo ſcopo che qui mi ſono propoſto, mi ſia lecito di richiamargli brevemente a memoria il metodo uſato da quel grand' uomo onde ottenere le mentovate utiliſſime trasformazioni. Egli prende a queſt' oggetto i fattori del 1. membro dell' equazione $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ in queſto modo $\cos z + \sqrt{-1}\sin z$, $\cos z - \sqrt{-1}\sin z$, e facendo poi il prodotto di queſti altri due $\cos z + \sqrt{-1}\sin z$, $\cos y + \sqrt{-1}\sin y$, ha $(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y) = \cos z\cos y - \sin z\sin y + \sqrt{-1}(\cos y\sin z + \sin y\cos z)$, e ponendo mente che $\cos y\cos z - \sin y\sin z = \cos(y+z)$, e $\cos y\sin z + \cos z\sin y = \sin(y+z)$, il prodotto precedente gli diviene $(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)(\cos z + \sqrt{-1}\sin z) = \cos(y+z) + \sqrt{-1}\sin(y+z)$. Nello ſteſſo modo $(\cos y - \sqrt{-1}\sin y)(\cos z - \sqrt{-1}\sin z) = \cos(y+z) - \sqrt{-1}\sin(y+z)$.

E $(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)(\cos y \pm \sqrt{-1}\sin y)(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z) = \cos(x+y+z) \pm \sqrt{-1}\sin(x+y+z)$: d' onde ſiegue dopo aver poſto $x = y = z$, prima $(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^2 = \cos 2z \pm \sqrt{-1}\sin 2z$, e poi $(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^3 = \cos 3z \pm \sqrt{-1}\sin 3z$, e quindi generalmente $(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz$

La quale formola riſoluta in due per mezzo dell' uno e dell' altro ſegno $\pm$, gli ſomminiſtra per addizione e per ſottrazione,

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2}, \ldots (1)$$

$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}}, \ldots (2)$$

Le quali ſono per l'appunto quelle formole che, trattate dalla mano maeſtra del noſtro celebre Autore, conducono alle indicate trasformazioni,

2. Ma or qui nasce la curiosità di sapere, perchè $\sin z + \sqrt{-1}\cos z$, e $\sin z - \sqrt{-1}\cos z$ essendo al pari di $\cos z + \sqrt{-1}\sin z$ e $\cos z - \sqrt{-1}\sin z$ i fattori del primo membro dell'equazione $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, l'Illustre *Eulero* abbia fatto uso ne' suoi calcoli dei secondi anzi che dei primi?

Per trovare la ragione di tale preferenza, cerchiamo a quali conseguenze l'avrebbono condotto i primi fattori $\sin z + \sqrt{-1}\cos z$ e $\sin z - \sqrt{-1}\cos z$.

Si ha $(\sin z + \sqrt{-1}\cos z)(\sin z - \sqrt{-1}\cos z) = 1$; e $(\sin z + \sqrt{-1}\cos z)(\sin y + \sqrt{-1}\cos y) = \sin z \sin y + \sqrt{-1}(\cos z \sin y + \sin z \cos y) - \cos z \cos y$. Ma $\sin z \sin y - \cos z \cos y = -\cos(z+y)$, e $\cos z \sin y + \sin z \cos y = \sin(z+y)$; dunque $(\sin z + \sqrt{-1}\cos z)(\sin y + \sqrt{-1}\cos y) = -\cos(z+y) + \sqrt{-1}\sin(z+y)$.

Si troverà nello stesso modo $(\sin z - \sqrt{-1}\cos z)(\sin y - \sqrt{-1}\cos y) = -\cos(z+y) - \sqrt{-1}\sin(z+y)$, quindi riunendo i due casi, $(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)(\sin y \pm \sqrt{-1}\cos y) = -\cos(z+y) \pm \sqrt{-1}\sin(z+y)$; dunque ponendo $z = y$, si ha $(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^2 = -\cos 2z \pm \sqrt{-1}\sin 2z$: in simile guisa si troverà $(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)(\sin y \pm \sqrt{-1}\cos y)(\sin x \pm \sqrt{-1}\cos x) = -\sin(z+y+x) \mp \sqrt{-1}\cos(z+y+x)$; dunque supponendo $x = y = z$, si ha $(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^3 = -\sin 3z \mp \sqrt{-1}\cos 3z$.

Se si fa allo stesso modo il prodotto di $(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)(\sin y \pm \sqrt{-1}\cos y)(\sin x \pm \sqrt{-1}\cos x)(\sin u \pm \sqrt{-1}\cos u)\ldots\ldots$, prendendo primieramente 4 poi 5, poi 6, ecc. fattori e supponendo inoltre nelle moltiplicazioni di già ridotte, $z = y = x = u = \ldots\ldots$, si otterranno i valori seguenti dalle potenze successive di $\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z$,

$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^1 = +\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z$$
$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^2 = -\cos 2z \pm \sqrt{-1}\sin 2z$$
$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^3 = -\sin 3z \mp \sqrt{-1}\cos 3z$$
$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^4 = +\cos 4z \mp \sqrt{-1}\sin 4z$$
$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^5 = +\sin 5z \pm \sqrt{-1}\cos 5z$$
$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^6 = -\cos 6z \pm \sqrt{-1}\sin 6z$$
$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^7 = -\sin 7z \mp \sqrt{-1}\cos 7z$$
$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^8 = +\cos 8z \mp \sqrt{-1}\sin 8z$$
$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^9 = +\sin 9z \pm \sqrt{-1}\cos 9z$$
$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^{10} = -\cos 10z \pm \sqrt{-1}\sin 10z \quad \text{ecc.}$$

Si ha dunque in generale quando l' eſponente è un numero pari $= 2m$,

$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^{2m} = \mp \cos 2mz \mp (\mp) \sqrt{-1} \sin 2mz \ldots (3)$$

Si prenderà il ſegno ſuperiore quando m ſarà un numero diſpari, ed il ſegno inferiore quando m ſarà un numero pari.

Per l' eſpreſſione $\mp(\mp)$ intendo che l' uno de' ſegni $-$ e $+$ fuori de' cancelli ( ) moltiplica l' uno e l' altro ſegno $\mp$ entro gli ſteſſi cancelli; onde $-(\mp) = \pm$; e $+(\mp) = \mp$.

E quando l' eſponente è un numero diſpari $= 2m+1$, ſi ha generalmente

$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^{2m+1} = \mp \sin(2m+1)z \mp (\pm) \sqrt{-1}\cos(2m+1)z \ldots (4).$$

$-$ ovvero $+$ ſecondo che m è un numero diſpari ovvero pari.

3. Sviluppiamo queſti caſi, e ponghiamo nelle formole (3) (4) prima $m = 2n$, e poi $m = 2n+1$, eſſe diverranno ſucceſſivamente

$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^{4n} = +\cos 4nz \mp \sqrt{-1}\sin 4nz$$

$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^{4n+2} = -\cos(4n+2)z \pm \sqrt{-1}\sin(4n+2)z$$

$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^{4n+1} = +\sin(4n+1)z \pm \sqrt{-1}\cos(4n+1)z$$

$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^{4n+3} = -\sin(4n+3)z \mp \sqrt{-1}\sin(4n+3)z$$

dalle quali ſi tragge in virtù del doppio ſegno $\pm$ per addizione e per ſottrazione

$$\cos 4nz = \frac{(\sin z + \sqrt{-1}\cos z)^{4n} + (\sin z - \sqrt{-1}\cos z)^{4n}}{2}, \ldots (5)$$

$$\sin 4nz = \frac{(\sin z - \sqrt{-1}\cos z)^{4n} - (\sin z + \sqrt{-1}\cos z)^{4n}}{2\sqrt{-1}}, \ldots (6)$$

$$\cos(4n+1)z = \frac{(\sin z + \sqrt{-1}\cos z)^{4n+1} - (\sin z - \sqrt{-1}\cos z)^{4n+1}}{2\sqrt{-1}}, \ldots (7)$$

$$\sin(4n+1)z = \frac{(\sin z + \sqrt{-1}\cos z)^{4n+1} + (\sin z - \sqrt{-1}\cos z)^{4n+1}}{2}, \ldots (8)$$

$$\cos(4n+2)z = -\frac{(\sin z + \sqrt{-1}\cos z)^{4n+2} + (\sin z - \sqrt{-1}\cos z)^{4n+2}}{2}, \ldots (9)$$

$$\sin(4n+2)z = \frac{(\sin z + \sqrt{-1}\cos z)^{4n+2} - (\sin z - \sqrt{-1}\cos z)^{4n+2}}{2\sqrt{-1}}, \ldots (10)$$

$$\cos(4n+3)z = \frac{(\sin z - \sqrt{-1}\cos z)^{4n+3} - (\sin z + \sqrt{-1}\cos z)^{4n+3}}{2\sqrt{-1}}, \ldots (11)$$

$$\sin(4n+3)z = -\frac{(\sin z + \sqrt{-1}\cos z)^{4n+3} + (\sin z - \sqrt{-1}\cos z)^{4n+3}}{2}, \ldots (12)$$

Ma ſi ſa che tutti i numeri interi poſſibili ſono contenuti nell' una o nell' altra delle quattro formole $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$; dunque le otto equazioni precedenti rappreſentano la ſomma o la differenza di tutte le potenze intiere poſſibili dei fattori $\sin z+\sqrt{-1}\cos z$, $\sin z-\sqrt{-1}\cos z$ eſpreſſa nel ſeno o coſeno dell'arco z moltiplicato dall'eſponente delle ſteſſe potenze.

4 Ora egli è facile di dimoſtrare che ciaſcheduna delle otto formole precedenti è la ſteſſa di ciaſcheduna corriſpondente delle due (1) e (2) trovate dall'immortale *Eulero* per mezzo dei ſecondi fattori $\cos z+\sqrt{-1}\sin z$, $\cos z-\sqrt{-1}\sin z$; la qual coſa ſi potrebbe ottenere in due modi diverſi, l'uno ſviluppando le mentovate formole in ſerie, l' altro paragonandole immediatamente fra di loro. Ci ſerviremo di queſt' ultimo mezzo perchè più ſemplice del primo. Sia dunque per maggiore brevità $\sin z=a$; $\cos z=b$, e pongaſi mente che $\sqrt{-1}=-\frac{1}{\sqrt{-1}}$; $(\sqrt{-1})^{4n}=+1$; $(\sqrt{-1})^{4n+1}=+\sqrt{-1}$; $(\sqrt{-1})^{4n+2}=-1$; $(\sqrt{-1})^{4n+3}=-\sqrt{-1}$, ſi avrà ponendo ſuceſſivamente nella formola (1) d' *Eulero* il numero arbitrario $n=4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, ſi avrà dico l'equazione (1) = (5) = (7) = (9) = (11), cioè (1) = (5) ovvero $(b+a\sqrt{-1})^{4n}+(b-a\sqrt{-1})^{4n}=(a+b\sqrt{-1})^{4n}+(a-b\sqrt{-1})^{4n}$; moltiplico il 2° membro di queſta equazione per $(\sqrt{-1})^{4n}=1$, ed ho $(a\sqrt{-1}-b)^{4n}+(a\sqrt{-1}+b)^{4n}$, onde eſſa diviene $(b-a\sqrt{-1})^{4n}=(a\sqrt{-1}-b)^{4n}$ moltiplicando il 1° o il 2° membro di queſta equazione per $(-1)^{4n}=+1$, eſſo ſi traſforma preciſamente nel 2° o 1° membro della ſteſſa equazione. E (1) = (7) ovvero $(b+a\sqrt{-1})^{4n+1}+(b-a\sqrt{-1})^{4n+1}$ $=\frac{(a+b\sqrt{-1})^{4n+1}-(a-b\sqrt{-1})^{4n+1}}{\sqrt{-1}}$; moltiplicando il 2° membro per $\frac{(\sqrt{-1})^{4n+1}}{\sqrt{-1}}=1$, ſi ha $-(a\sqrt{-1}-b)^{4n+1}$ $+(a\sqrt{-1}+b)^{4n+1}$. Ma $-(a\sqrt{-1}-b)^{4n+1}=(-1)^{4n+1}$ $(a\sqrt{-1}-b)^{4n+1}=(b-a\sqrt{-1})^{4n+1}$; dunque (1) = (7); ſimilmente (1) = (9), cioè $(b+a\sqrt{-1})^{4n+2}+(b-a\sqrt{-1})^{4n+2}$ $=-(a+b\sqrt{-1})^{4n+2}-(a-b\sqrt{-1})^{4n+2}$. Moltiplico il

2° membro per $\frac{(\sqrt{-1})^{4n+2}}{-1} = 1$, ed ho $(a\sqrt{-1}-b)^{4n+2}$ $+(a\sqrt{-1}+b)^{4n+2}$; moltiplico $(a\sqrt{-1}-b)^{4n+2}$ per $(-1)^{3n+2}=1$ ed ho $(b-a\sqrt{-1})^{4n+2}$; dunque $(1)=(9)$.

Finalmente $(1)=(11)$ ovvero $(b+a\sqrt{-1})^{4n+3}+(b-a\sqrt{-1})^{4n+3}$ $= \frac{(a-b\sqrt{-1})^{4n+3}-(a+b\sqrt{-1})^{4n+3}}{\sqrt{-1}}$ moltiplico il 2° membro per $\frac{(\sqrt{-1})^{4n+3}}{-\sqrt{-1}} = 1$; ed ho $(a\sqrt{-1}+b)^{4n+3}$ $-(a\sqrt{-1}-b)^{4n+3}$; ma $-(a\sqrt{-1}-b)^{4n+3}=(-1)^{4n+3}$ $(a\sqrt{-1}-b)^{4n+3}=(b-a\sqrt{-1})^{4n+3}$; dunque $(1)=(11)$.

Paragonando nello ſteſſo modo l'eſpreſſione (2) del ſeno trovata da *Eulero* in cui n diventa ſucceſſivamente $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$ a ciaſcheduna delle noſtre quattro eſpreſſioni de' ſeni ſi dimoſtrerà che $(2)=(6)=(8)=(10)=(12)$.

5 Quindi la ragione per cui la formola $\sin^2 z+\cos^2 z$ dev' eſſere ſciolta nei fattori $\cos z+\sqrt{-1}\sin z$, $\cos z-\sqrt{-1}\sin z$, che ſono quelli del non mai abbaſtanza lodato *Eulero* anzi che in queſti da noi conſiderati $\sin z+\sqrt{-1}\cos z$, $\sin z-\sqrt{-1}\cos z$, e perchè i primi conducono ad una ſola eſpreſſione del ſeno e del coſeno d'un arco qualunque multiplo di z, la quale è generale e coſtante; quando gli ultimi fattori danno de' valori differenti per i ſeni e coſeni dello ſteſſo arco ſecondo ch' egli è moltiplicato da' numeri *parimente* pari ovvero *diſparimente* pari, e dai numeri diſpari che da queſti derivano; ciò non oſtante noi abbiamo ſiſſata la variazione di queſte eſpreſſioni per mezzo di quattro formole differenti, e neceſſarie a ſciogliere in queſt' ultimo modo il problema in tutta la ſua generalità.

Che poi il noſtro celebre *Eulero* abbia impiegato nelle ingegnoſiſſime ſue operazioni analitiche i migliori fattori per forza, dirò così, d' azzardo, o di previo eſame, non ardirei deciderlo: parmi ſolamente che ſe aveſſe conſiderato gli altri, non ſi ſarebbe rimaſto dal rilevarne l' irregolarità, e di trarne com' era ſuo coſtume di fare in ogni parte delle matematiche che imprendeſſe a trattare, delle conſeguenze utili e ſingolari; ma ſe è azzardo, deſſo è quel tatto ſuperiore, quell' iſtinto ſublime, che forma propriamente l' anima de' grandi uomini.

6. Mi si permetta di osservare da ultimo, che se fosse proposto di trasformare le quattro formole (5), (7), (9) e (11), le quali sono necessarie a sciogliere in questo sistema di fattori il problema in tutta la sua estensione, come ancora le quattro altre (6), (8), (10) e (12) in una sola formola generale (1) per le quattro prime, e in quella segnata (2) per le quattro ultime, come ha fatto subitamente l'immortale *Eulero*, forse la soluzione *a priori* di questo problema si presenterebbe difficilmente; onde se l'esempio analitico intorno a cui versa la presente breve Memoria prova da una parte la generalità dell' algebra, ne rileva però dall'altra la somma semplicità, nella quale unicamente consiste il pregio di questa mirabil arte.

DIMOSTRAZIONE

D'un teorema Analitico.

Nel §. 139 della sopraccitata opera di *Eulero*, quest' illustre Geometra deduce dalle formole (1) e (2) la bellissima trasformazione de' logaritmi imaginarj negli archi circolari reali in questo modo. Egli *(a)* suppone nelle accennate formole (1) e (2) n eguale ad un numero infinitamente piccolo $n = \frac{1}{i}$, i essendo un numero infinitamente grande, in modo che

$\cos nz = \cos\frac{z}{i} = 1$, e $\sin nz = \sin\frac{z}{i} = \frac{z}{i}$, e dopo aver os-

servato che $l(1+x) = i(1+x)^{\frac{1}{i}} - i$ ossia $y^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i}\,ly$,

e posto da una parte $\cos z + \sqrt{-1}\sin z$, e dall'altra $\cos z - \sqrt{-1}\sin z$ invece di y, le formole (1) e (2) gli divengo-

(a) In questo luogo, invece delle formole (1) e (2), *Eulero* cita quelle del §. 130; ma ciò è evidentemente un errore o del copista o dello stampatore, perchè dal §. 130 non si possono trarre in nessuna maniera, se non m'inganno, i risultati analitici qui esposti, i quali chiaramente derivano dalle formole da noi segnate (1) e (2) contenute nel §. 133.

no la prima, $1 = \dfrac{1+\frac{1}{i}l.(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)+1+\frac{1}{i}l(\cos z-\sqrt{-1}\sin z)}{2} = 1$

per i logaritmi che ſvaniſcono, e la ſeconda

$$\frac{z}{i} = \frac{\frac{1}{i}l.(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)-\frac{1}{i}l.(\cos z-\sqrt{-1}\sin z)}{2\sqrt{-1}},$$ cioè

$z = \dfrac{1}{2\sqrt{-1}}\, l.\dfrac{\cos z+\sqrt{-1}\sin z}{\cos z-\sqrt{-1}\sin z}$; ma $\dfrac{\sin z}{\cos z} = \tan . z$, dunque l' arco z verrà eſpreſſo dalla ſua tangente in modo che $z = \dfrac{1}{2\sqrt{-1}}\, l.\dfrac{1+\sqrt{-1}\tan . z}{1-\sqrt{-1}\tan . z}$.

2. Ma le formole (1) e (2) derivando per addizione e per ſottrazione dalla formola fondamentale $(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz$, e queſta non eſſendo dimoſtrata dall' immortale *Eulero* che nel caſo di $n =$ ad un numero qualunque intero, di più il metodo uſato da queſto grand' uomo e da noi eſpoſto nella prima parte di queſta Memoria n. 1, non potendo condurre ad altra generalità fuori di quella di $n =$ ad un numero qualunque intero, relativamente all' anzidetta formola fondamentale, ne ſiegue che nè pure l' equazione $z = \dfrac{1}{2\sqrt{-1}}\, l.\dfrac{1+\sqrt{-1}\tan . z}{1-\sqrt{-1}\tan . z}$, e le belle conſeguenze che da eſſa derivano, reſtano dimoſtrate, perchè dipendenti dalla condizione di $n =$ a un numero frazionario $= \frac{1}{i}$. E ciò coſtituiſce un caſo importantiſſimo di cui neſſun Geometra ha mai dato, a mia notizia, una dimoſtrazione. Mi ſi permetta dunque di eſporne qui una che non potrà forſe non ſembrare ſemplice.

Si ha $(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz$, n eſſendo un numero qualunque intero poſitivo, e z un arco qualunque arbitrario; perciò invece dell' arco z conſidero l' arco $\frac{s}{r}z$; s e r eſſendo de' numeri qualunque interi, ed ho

(cos

$$\left(\cos\frac{s}{r}z \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{s}{r}z\right)^r = \cos sz \pm \sqrt{-1}\,\sin sz$$

Ma $\cos sz \pm \sqrt{-1}\,\sin sz = (\cos z \pm \sqrt{-1}\,\sin z)^s$; dunque

$$\left(\cos\frac{s}{r}z \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{s}{r}z\right)^r = (\cos z \pm \sqrt{-1}\,\sin z)^s, \text{ ovvero}$$

$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\,\sin z)^{\frac{s}{r}} = \cos\frac{s}{r}z \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{s}{r}z$$

Mi riserbo ad altra occasione a mostrare per mezzo di qualche applicazione l' utilità di questo elegantissimo teorema.