CATERATTA IDROMETRICA

PROPOSTA

Dal Sig. Cavaliere Lorgna.

§. I.

POchiſſime ſono le derivazioni di acqua che ſi fanno dai fiumi per uſo degli uomini, le quali non ſieno di limitata quantità, sì perchè è limitato il biſogno che n'hanno coloro che ne fan uſo, e sì ancora perchè deve avere un limite l'impoverimento del tronco, e l'obbligazione de' terreni pe' quali è forza che tragittino le acque derivate. E tanto più geloſamente ſuol eſſere preſcritta la miſura delle erivazioni, quanto più ſi moltiplicano ſul medeſimo fiume, e ſi ſuddividono nel condotto le eſtrazioni. In tre modi adoperano gli uomini comunemente per limitare queſte miſure, laſciando da parte i ſifoni galleggianti, e altre artificioſe maniere che non poſſono felicemente praticarſi e aver effetto in grande, come l'hanno in piccolo. Il primo conſiſte nel praticare delle aperture di lume determinato nelle ſponde del fiume, ond'eſca l'acqua a ſua poſta. Il ſecondo nell'armare d'impoſte di legno, chiamate dagl'Italiani paratoje, dette aperture, onde calarle e rialzarle ſecondo che ſi alza e ſi abbaſſa il fiume, perchè nell'acqua del condotto abbia ſempre luogo la medeſima altezza ſenſibilmente: e finalmente una terza maniera v'ha ancora conſiſtente nel coſtruire nel medeſimo condotto a qualche diſtanza dalla prima un'altra apertura determinata, regolando la prima ſecondo le vicende del fiume in guiſa, che ſopraſtia ſempre alla ſoglia della ſeconda apertura una data altezza di acqua, cioè al dir noſtro comune un dato battente. Del primo modo è inutile che ſi faccia parola non avendo luogo che in quelle contrade, ove tuttora ſi miſura buonamente l' acqua per due dimensioni, trascurando il più e meno di velocità ond'è animata sotto il più e meno di altezza che ha il fiume sopra il medesimo foro. Degli altri due il terzo è il più esatto e corrispondente al fine dell' idrometria, di cui abbiamo in Lombardia e altrove più d' un esempio. A questo si riduce pure l' artificio con cui si estrae l' acqua da' così detti *Navigli* di Milano, descritto del 1779 dal Sig. *Francesco Bernardino Ferrari*, e contro di cui aveva per l' innanzi declamato a torto il fu d' altronde reputatissimo Sig. Ab. *Frisi*. Se qualche cosa avesse da desiderarsi in simili derivazioni, ella sarebbe una condizione nell' acqua interposta tra la prima e la seconda apertura più analoga a quella dell' acqua contenuta ne' vasi a costante altezza sopra i fori di efflusso, cioè la condizione dell' acqua perfettamente ringorgata. Senza questa uniformità di condizioni non può rigorosamente applicarsi alla derivazione la teorica de' vasi. Imperciocchè in tutti i casi che ho potuto esaminare non mi è accaduto giammai di riconoscere in quell' intervallo, e segnatamente in vicinanza della seconda bocca, l' acqua costituita in istato di ringorgamento, come ho dimostrato esser ella ne' vasi (Mem. della Soc. Italiana Tom. IV.), e però con la superficie orizzontale e quieta sensibilmente (§. IV. della I. Mem. di questo volume). Ho sempre veduto, che un' acqua si affacciava alla bocca a un bel circa corrente.

§. II.

Tutto dunque consiste l' artificio di questo metodo nell' alzare ed abbassare pazientemente l' imposta della prima cateratta, aumentando e scemando il foro per tentativi finchè il pelo dell' acqua tocchi un segno stabilito, e si riduca sopra la seconda apertura all' altezza modulare convenuta. Ma il magistero è alquanto difettoso, perchè oltre alla soggezione perpetua del caterattajo di cercare il segno aspettando ad ogni mossa dell' imposta la permanenza del nuovo stato d' acqua nel castello, è cosa indubitata, che le piccole variazioni nel fiume sfuggono, e sfugge anche gran parte delle maggiori, se accadano nottetempo, o in assenza del custode. Sarebbe dunque desiderabile

I. Che fosse tolta interamente la soggezione di tentare, e che si riducesse l'inspezione del custode a calare od alzare l'imposta tanto nè più, nè meno, quanto contrariamente si fosse alzato od abbassato il fiume, o secondo qualche determinata proporzione cogli alzamenti od abbassamenti del fiume.

II. E molto più che l' operazione fosse fatta dal fiume medesimo senza custode per qualche facile meccanismo, sicchè ogni minima crescenza o decrescenza nel fiume inducesse da sè il proporzionato scemamento o accrescimento di luce alla cateratta. Questo è l'oggetto utilissimo cui tende a soddisfare la presente Memoria.

§. III.

Cominciamo pertanto dal supporre nota e determinata in pollici cubici la quantità di acqua che si vuol estrarre dal fiume, a cagion di esempio per ogni minuto secondo. Siccome è stato mostrato nella Mem. precedente come vadano ridotti i così detti quadretti di acqua, le oncie ecc. secondo le denominazioni de' paesi in piedi e pollici cubici, così basterà che segniamo qui con la lettera $\mathfrak{Q}$ una tal misura ch' è proposito di derivare. Condizione del nostro assunto è, che l' apertura di efflusso riesca ad ogn' istante tanta, quanta occorre per tirar dal fiume costantemente la quantità di acqua $\mathfrak{Q}$ sotto l' altezza che ha il fiume in quell' istante. Ed è pure condizione assunta, che nella cateratta variabile così costituita tanto solamente debba calarsi ad ogni mutazione del fiume, od alzarsi verticalmente l' imposta o paratoja, quanto nè più nè meno si fosse contrariamente alzato od abbassato verticalmente in quella mutazione il pelo del fiume, o secondo qualche determinata proporzione con dette mutazioni. E' dunque mestieri, che livellata col fondo del fiume la soglia di questa cateratta, gli stipiti abbiano una figura tale, onde possa soddisfarsi a questa condizione puntualmente. Posto ciò sia l' orizzontale AB (*Fig. I.*) la soglia di questa cateratta, e le curve AP $B\mathfrak{Q}$ simili ed eguali rappresentino gli stipiti della cateratta. Condotta ovunque l' orizzontale IK, sia proprietà caratteristica di queste curve, che il prodotto dell'area $AIKB$ da esse compresa per la velocità v, onde debbono intendersi animate le stille uscenti sotto l'altezza attuale del fiume, come CE, uguagli la costante quantità $\mathfrak{Q}$. Divisa pertanto in due ugualmente in C la AB, sia l'indefinita CD perpendicolare ad AB l'asse delle ascisse, e C l'origine delle coordinate; e però, presa $CM = x$, $MI = y$, $Mm = dx$, e per m condotta la ab parallela alla IK, sarà l'elemento dell' area $MIam = ydx$, e $aIKB = 2ydx$; in conseguenza, essendo l'area $AIKB = 2\int ydx$ dovrà essere in qualunque sito $2v\int ydx = \mathfrak{Q}$. Ora per ridurre a due variabili quest' equazione bisogna trovare la relazione convenevole tra v ed x, giacchè sul medesimo asse delle x CD deve misurarsi anche l'altezza variabile del fiume CE imminente alla soglia AB. Per la qual cosa sia cd la superficie del fiume altissimo, onde CD riesca la massima altezza con cui può egli soprastare alla soglia. Tutte le mutazioni del fiume dovendo accadere sotto l'ultimo limite cd, si riferiscano gli abbassamenti e rialzamenti del pelo al punto D, e di là in giù si misurino sopra la DC. Si faccia perciò $CD = f$, qualunque mutazione $DE = z$, onde sia $f - z$ l' altezza attuale CE del pelo d' acqua sopra la soglia, $f - z - x = EM$ l'altezza attuale dell' acqua sopra il labbro dell' apertura IK, e le curve cardinali AL, BN abbiano quest' altra proprietà, che $f - z - x = EM$ rappresenti l'altezza dovuta alla velocità ragguagliata v delle stille uscenti dalla luce sottoposta $IKBA$. Secondo i principj noti della Dinamica sarà $v = \sqrt{(f - z - x)}$, e però combinando insieme le due proprietà di queste curve, dovrà aver luogo la seguente equazione

$$2\sqrt{(f-z-x)} \times \int y\,dx = \mathfrak{Q}$$

Ma per condizione del Problema alle mutazioni verticali z del fiume sotto il pelo altissimo debbono rispondere in data proporzione contrariamente le mutazioni delle altezze verticali delle luci all' emissario; è dunque necessario, che si determini un punto per origine di queste mutazioni nelle aperture, com' è fisso il punto D da cui si misurano le mutazioni nel fiume. Il punto C nella soglia non può esserlo, altrimenti sotto l' altezza massima non sarebbe preparato

alcuna

alcuna uscita, e in tal caso dovrebbe star chiusa la cateratta, che può essere, e può non essere necessario. Laonde bisogna determinare una luce, come $AGHB$, la quale, quando il fiume è altissimo, trasmetta la data quantità di acqua $\mathfrak{Q}$. Sia dunque presa $CF = a$, e si trasporti in F l'origine delle mutazioni $FM = t$, che debbono corrispondere contrariamente a quelle del fiume, onde sarà $x - a = t$, e sia stabilito ch'esser debba generalmente $DE(z) : FM(t) = n : 1$, secondo la condizione del Problema, posto n numero intero. Per la qual cosa sarà $z = nt = n(x-a)$. Sostituito questo valore di z nell'equazione fondamentale, avremo

$$2\sqrt{(f-n(x-a)-x)} \times \int ydx = \mathfrak{Q}$$

Ma $f - n(x-a) - x$ non è in fatto un'altezza libera a cui sia dovuta la velocità $v = \sqrt{(f-n(x-a)-x)}$. Ella è un'altezza di acqua che soprasta al foro attuale, e di acqua che deve supporsi in istato di ringorgamento perchè possa cadere sotto la legge de' vasi, sicchè sotto un tal carico non hanno le stille uscenti velocità dovuta a tutta l'intera altezza soprastante; perciò l'equazione trovata ha bisogno di correzione. Inerendo pertanto a quanto abbiamo stabilito nella Mem. preced. §. §. IV. V. sarà

$2(f-n(x-a)-x)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3$ la vera altezza ridotta, e la nostra equazione prenderà questa forma, facendo $K = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{(\sqrt{5}-1)}$

$$2\int ydx = \frac{\mathfrak{Q}}{K\sqrt{(f-n(x-a)-x)}}.$$

Differenziando, e dividendo per $2dx$, si avrà l'equazione ad un ramo della curva AL della forma seguente

$$(A) \ldots y = \frac{(n+1)\mathfrak{Q}}{2K(f-n(x-a)-x)\sqrt{(f-n(x-a)-x)}}$$

la quale appartiene ad un'Iperboloide, di cui è uno degli assintoti la CD, che descriveremo per punti assai facilmente qui appresso.

§. IV.

Veggiamo dunque primamente della luce $AGHB$ che abbiamo ſtabilito per l'acqua giunta al più alto ſegno D. Cominciando gl' incrementi verticali delle aperture dal punto F, è certo, che da C ſino al punto F è coſtante l'altezza $CD = f$, e il pelo dell'acqua cd non s'alza, nè ſi abbaſſa, ſtante che ſi ſuppone la luce $AGHB$ traſmettere la quantità di acqua $\mathfrak{Q}$ ſotto l'altezza maſſima. E' dunque in queſto caſo $n(x-a) = z = nt = o$, e vale per queſto tratto l'equazione

$$(A') \ldots\ldots y = \frac{\mathfrak{Q}}{2K(f-x)\sqrt{(f-x)}}$$

Sicchè poſto $x = o$, ſarà $CA = y = \frac{\mathfrak{Q}}{2Kf\sqrt{f}}$, e poſto $x = a = CF$, ſarà $FG = y = \frac{\mathfrak{Q}}{2K(f-a)\sqrt{(f-a)}}$, e prendendo per x valori ſucceſſivi da $x = o$ ſino ad $x = a$, ſi troveranno le ſemiordinate intermedie della curva da A ſino in G. Dal punto F poi dell'aſſintoto verſo D vale per tutti i punti della curva GL l'equazione (A) (§. III.), dovendo creſcere in altezza le aperture ſopra il punto F ſecondo che ſi abbaſſa il fiume ſotto il pelo altiſſimo cd con la legge ſtabilita, che ſia l' incremento FM la $n.^{ma}$ parte del decremento DE del fiume, e così contrariamente, tornando a rialzarſi il fiume. Se ſia dunque gb il pelo infimo del fiume, e ſi prenda Fq parte $n.^{ma}$ del maſſimo decremento $Dp = b$, ſarà definito il limite dell'altezza verticale di tutta la cateratta, la qual altezza ſarà $Cq = a + \frac{Dp}{n} = a + \frac{b}{n}$, onde pigliando ſucceſſivamente tutti i valori per x nell'equazione (A) maggiori di a, e minori di $a + \frac{b}{n}$, ſi avranno le ſemiordinate intermedie della curva da G ſino in P, e ſarà la ſemiordinata maſſima

$$qP = y = \frac{(n+1)\mathfrak{Q}}{2K\left(f-a-\frac{n+1}{n}b\right)\sqrt{\left(f-a-\frac{n+1}{n}b\right)}}$$

posto $x = a + \frac{b}{n}$. Costrutti similmente i rami negativi BH, $H\mathfrak{Q}$, la cateratta intera sarà $AP\mathfrak{Q}B$.

§. V.

E per la pratica ci gioveremo del modo facile che l'equazione ci addita, onde descrivere questi rami per punti con le tavole de' logaritmi. In fatto l'equazione (A') per gl'infimi AG, BH, si riduce a questa forma

$$y(f-x)^{1:2} = \mathfrak{Q}:2K, \text{ e però}$$

$$l.y = l.\mathfrak{Q} - l.2K - \tfrac{1}{2}l.(f-x)$$

Così l'equazione (A) pe' rami GP, $H\mathfrak{Q}$ si riduce a questa

$$y\left(f+na-(n+1)x\right)^{1:2} = (n+1)\mathfrak{Q}:2K,$$

da cui risulta

$$l.y = l.(n+1)\mathfrak{Q} - l.2K - \tfrac{1}{2}l.\left(f+na-(n+1)x\right),$$

onde non può avervi uomo appena iniziato in sì fatte materie, che non possa secondo l'occorrenza descrivere sopra un cartone entrambi i rami della nostra curva, che debbono essere gli stipiti della cateratta, perchè dall'artefice sieno poscia in pietra o legno incavati sull'esemplare facilmente.

§. VI.

La lettera K è già determinata, ed è uguale alla frazione $\frac{65}{96}$ assai prossimamente. E quanto alla lettera a, cioè all'altezza CF della luce che trasmette la quantità di acqua $\mathfrak{Q}$ sotto la massima altezza del fiume, ella è in arbitrio nostro. Ma siccome la posizione della soglia è sempre determinata da detta altezza massima $CD = f$, essendo $AB = 2CA = \frac{\mathfrak{Q}}{Kf\sqrt{f}}$ così potrebbe farsi dipendere l'altezza $CF = a$ dal valore convenevole che ſi voleſſe dare alla maſſima larghezza della cateratta

$$P\mathfrak{Q} = 2\,qP = \frac{(n+1)\mathfrak{Q}}{K(f+na-(n+1)x)\sqrt{(f+na-(n+1)x)}}\,,$$

diſimpegnando il ſimbolo a dall' equazione. Gioverà però ſempre il dargli un piccolo valore relativamente all' altezza f, affinchè rieſca la cateratta di diſcreta ampiezza, influendo queſto valore eſſenzialmente in quello delle ordinate della curva.

§. VII.

Ed ecco la cateratta idrometrica propoſta nel titolo di queſta operetta. Imperciocchè incavata che ſia la figura $PAB\mathfrak{Q}$ (Fig. I. II.) in pietra o in legno, e murato l' emiſſario con queſta bocca armata d' impoſta che s' alza ed abbaſſa pe' ſuoi canali ſecondo il coſtume, s' intende facilmente come vada moderata la luce ſecondando la condizione del fiume. Immaginiamo ſegnata verſo il fiume la ſcala delle ſue mutazioni (Fig. III.) dal punto ſommo D fino all' infimo p; biſogna contraſſegnarne un' altra qF, nella quale ſia notato il cammino della paratoja contrariamente dal punto infimo F fino al ſommo q per modo che, come Fq deve eſſere la n.^{ma} parte di Dp, così ciaſcun ſegamento della Fq rieſca la n.^{ma} parte della corriſpondente mutazione del fiume ſegnata nell' altra ſcala. Come per eſempio, ſe le mutazioni nel fiume doveſſero eſſere ſempre doppie delle mutazioni contrarie nella paratoja, ſicchè per ogni miſura di abbaſſamento o rialzamento nel fiume doveſſe contrariamente rialzarſi o abbaſſarſi di mezza miſura la paratoja, biſognerebbe prendere per ſeconda ſcala la qF metà della Dp, e dividerla in tante parti eguali in quante foſſe diviſa la Dp, e ſegnare le diviſioni della medeſima qF cogli ſteſſi numeri della Dp, ma contrariamente poſti. Così eſſendo il fiume al punto ſommo D, la ſommità o altro punto fiſſo della paratoja dovrebbe eſſere in F, perchè il labbro inferiore foſſe nella linea GH (Fig. I.); e trovandoſi il fiume in p, il punto fiſſo della paratoja dovrebbe eſſere in q, e così degli altri punti intermedj, ben intendendosi, che quando non si volesse trasmettere acqua nelle massime piene, basterebbe calare la paratoja oltre il punto F, e farla riposare su la soglia AB.

§. VIII.

E' dunque soddisfattò il primo assunto di costruire una cateratta, che trasmetta in ogni stato del fiume la stessa quantità di acqua $\mathfrak{Q}$, senza necessità che la si governi a tentoni, ma sì bene per determinate misure abbassando e alzando la paratoja secondo le condizioni del fiume. E' raro il caso, che tanta sia la differenza tra la massima e minima altezza, onde, per non dar luogo a cateratta di smodata elevazione, convenga assumere per n numero maggiore del 4, o del 6; anzi ne' moderati canali potrebbe anche accadere, che tanto bastasse calare o alzare la paratoja, quanto nè più nè meno si fosse alzato od abbassato il fiume. Ma già la regola nostra è fatta per tutti i casi.

§. IX.

Resta ora che indichiamo, come potrebbe ottenersi, che anche senza custode, per mezzo di un facile meccanismo, obbedisse la paratoja da sè alle mutazioni del fiume. Ancorchè io estimi, che la pratica possa e debba contentarsi del modo sopra esposto, il quale non altro richiede dal custode fuorchè un momento di osservazione alla scala del fiume per collocare al segno corrispondente la paratoja; ciò non ostante, non essendo impraticabile quello pure che son per esporre, mi fo qui a dichiararlo per soddisfare anche al secondo assunto. Supponghiamo pertanto conosciuto il peso assoluto della paratoja compiuta, che diremo P, e sia P' la $n.^{ma}$ parte del peso P, essendo n il simbolo adoperato qui innanzi per gli abbassamenti e alzamenti della paratoja relativamente alle mutazioni verticali del fiume. S' intenda sospesa la paratoja A ad un sistema di carrucole BB (Fig. IV. , tante di numero quante occorrono, secondo i principj della Statica, perchè il peso $P' = P : n$ applicato in F faccia equilibrio con la paratoja o col peso P, ch'è cosa facile da conoscere. Messa a suo luogo la paratoja con le taglie, si sperimenti quanto debba aggiugnersi al contrappeso P', onde alzare effettivamente la paratoja immersa nell'acqua verticalmente, come deve stare, vincendo gli sfregamenti, la rigidezza delle funi, e la resistenza dell'acqua che le sta accollata, e sia p la giunta necessaria. Ciò supposto, si prepari una cassetta di legno a conca, la quale gravata oltre al proprio peso anche dal peso p galleggi tuttavia sull'acqua; di tale forma però che possa contenere nella sua capacità il peso $P'+p$, e la si commetta al fiume come in DD. Applicato ora alla fune in F il contrappeso unito $P'+p$, e riposto nella conca, è certo che crescerà l'immersione naturale della medesima per conto del solo peso p, giacchè il peso P' è in equilibrio col peso della paratoja, e non può agire sul galleggiante. In questa condizione di cose non può nè la paratoja alzare il contrappeso cioè abbassarsi, perchè è contrabbilanciata dal peso P', nè il contrappeso alzare la paratoja, perchè la giunta p è tenuta in equilibrio dall'acqua scacciata coll' immersione della cassetta. Dunque tutto si comporrà in equilibrio. Si alzi ora per giunta d'acqua il fiume, o si abbassi per iscemamento, e sia m la mutazione verticale; bisogna che la paratoja si abbassi da sè, o si alzi per l' intervallo verticale $\frac{m}{n}$. Imperciocchè per natura delle taglie è mestieri, che per un tratto di fune corso dalla resistenza verticalmente, cioè nel caso nostro dalla paratoja, cammini per contrario verso per n tratti verticali di fune la potenza, vale a dire nel nostro caso il galleggiante col contrappeso, come richiede per appunto la ragione reciproca de' pesi equilibrati. Stabiliti per tanto nel dato emissario i limiti delle mutazioni estreme del fiume per un verso, e delle reciproche mutazioni della paratoja per l' altro nelle debite respettive posizioni, sarà facile l'adattare al caso, secondo il numero delle carrucole, la lunghezza della fune che occorre per l'effetto contemplato. Ben inteso che sia questo artifizio, che è de' semplici, non si troverà impraticabile, che il fiume possa andar moderando da sè le luci nella nostra cateratta, perchè venga trasmessa in ogni caso la data quantità di acqua $\mathfrak{Q}$.

§. X.

E' superfluo l'avvertire, che, come per l' altre cateratte comuni, è pur necessario per la nostra, che l'acqua vi si accolli in istato di ringorgamento, e non mai corrente: altrimenti la teorica de' vasi non vi può aver luogo. E similmente è d' uopo che si osservi se l' acqua uscente sia libera, o se debba sboccare sommersa; nel qual caso bisognerà introdurre le correzioni indicate nella seconda delle Memorie precedenti.

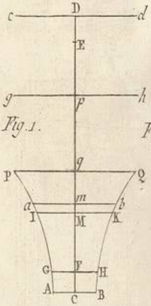

Fig. 1.

Fig. 3.

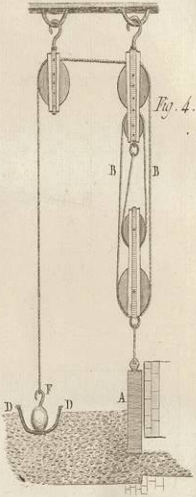

Fig. 4.

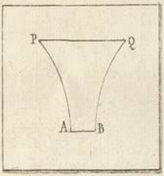

Fig. 2.