DEL MISURARE

L'ACQUA CHE ESCE DALLE CATERATTE CON MOTO LIBERO.

MEMORIA I.

Del Sig. CAVALIERE LORGNA.

CAPITOLO PRIMO

NOZIONI PRELIMINARI.

§. I.

NOn era al certo possibile lo stabilire alcuna regola sicura per misurare l'acqua ch'esce dalle aperture che si praticano in fianco delle conserve, e de' canali, sotto il carico di un corpo d'acqua soprastante che la incalza, mantenuto a costante altezza, se prima non erano tolte di mezzo le incertezze che ingombrano l'argomento. Non è già, che sin dai tempi di *Frontino* non si conoscesse da tutti, che la quantità dell' acqua derivata dipende e dalla condizione dell' aperture, e dalla velocità delle stille uscenti. Ma quanto è facile il prendere un partito intorno alle prime, soggette come sono le dimensioni delle aperture a meccanica misura, altrettanto misterioso è stato sempre il magistero dell' acqua in corso, e quant' altra mai delle operazioni naturali difficilissimo a scuoprirsi; ond' è che per molti versi si sono adoperati gli uomini intelligenti in farne cognizione chi per via di mentali ricerche, e chi spiando l'operar della natura ne' vasi col misurar di fatto tutto ciò che poteva a misura subordinarsi. E quanto al primo mezzo messo in opera per questa indagine, senza derogare al merito degli Autori che l'hanno impiegato, dotti e sapientissimi, convien dire francamente, che il soggetto maneggiato non è l'acqua de' nostri fiumi, e che più alla scienza matematica, o piuttosto a quella del calcolo, che a quella della natura appartengono le speculazioni che si son fatte su questo proposito. Il secondo ha fruttato assai più del primo; perchè non possono ricordarsi senza gratitudine i nomi di tanti illustri uomini, per la maggior parte Italiani, che hanno promosso le nostre cognizioni effettive in sì fatta materia coll' esperienza e col ragionamento, che sono i mezzi efficaci onde impetrare qualche secreto dalla natura. Ma siccome non può tutto discuoprirsi ad un tratto, succedendosi, come nel cammino, i passi l'uno all' altro, restò sempre oscura sino a' dì nostri la condizione vera, e il vero ufficio di quell' acqua, che soprasta al foro, e vien mantenuta a costante altezza, come dicemmo. E in oltre non si seppe giammai di certo, se fosse o no dovuta all' attuale discesa dell' acqua dalla superficie permanente sino al piano del foro la velocità dell' acqua uscente; ed essendo poi questa velocità dovuta o no alla discesa attuale, non si trovò mai alcun canone fisso e sicuro, onde determinare la vera altezza, cui in ogni caso fosse dovuta la velocità attuale ed effettiva dell' acqua, la quale altezza, secondo le sperienze di tutti, e di tutti i tempi. si trovò sempre non attignere nè pur la metà di detta altezza permanente sopra il foro. Sinchè dunque non si fosse tratto da queste tenebre il soggetto, e stabilito un tal canone conforme alle sperienze, la pratica non aveva norme sicure, onde misurare l'acqua uscente da sì fatte aperture sotto tale e tal altro carico d'acqua permanente sopra il foro.

Necessità pertanto aveva fatto adottare il sagacissimo ripiego della vena contratta trovato dal *Nevvton* per confermare il principio teorico, che l'acqua debba realmente la propria velocità all' attuale discesa. In conseguenza di che era obbligata la pratica a tener dietro, non già all' apertura reale, ma sì bene alla sezione della vena contratta fuor dell' apertura. Il che non essendo praticabile in grande, e non facilmente in piccolo, o la misura oltrepassava il dovere senza questa correzione del foro, o riusciva arbitrario il diffalco.

§. II.

La via dell'esperienza e dell'osservazione ha finalmente tolto di mezzo, se non erro, tutti questi ostacoli, come può vedersi nella mia Memoria intorno al moto de' liquidi uscenti da' fori delle conserve pubblicata nel IV. Tomo della Società Italiana. Imperciocchè, lasciando da parte tutto ciò che può essere in quella Memoria di mio concetto, a cui non vo' dare altro peso fuorchè quello che costrigneranno a concedergli le considerazioni avvenire, è intanto di fatto innegabile, che la condizione dell'acqua soprastante all'orificio e mantenuta a costante altezza è quella di un'acqua assolutamente ringorgata, ed è perciò di fatto, che non è ella nè stagnante, nè costituita in istato libero. In secondo luogo è deciso per le sperienze ivi esposte fatte col caricare di olio a varie altezze l'acqua sottoposta, a cui altr'acqua dava alimento attraverso l'olio, che la velocità dell'acqua uscente non è dovuta all'attuale discesa, come pensava coll' illustre *Nevvton* la maggior parte degl' idrodinamici. Contro questi fatti non v'ha specolazione, nè discorso in contrario che possa valere.

§. III.

Adunque non è più lecito di considerare l'acqua ch'esce, come se fosse caduta dalla superficie permanente, o dal limite del ringorgo, siccome dobbiamo dire più convenevolmente, e perciò non è necessario ricorrere alla vena contratta per conciliare co' fenomeni una tal sentenza, che non ha più luogo. Basta che nel calcolare gli esborsi pel foro effettivo si adoperi la vera velocità, ch'è propria del fluido all' origine della vena, cioè quella ch'è conforme all'esperienza.

§. IV.

Ed eccoci al nodo del determinare l'altezza dovuta alla velocità che ha l'acqua effettivamente al foro naturale della conserva, altezza, ch'è molto minore, come s'è detto, che non è quella dal limite del ringorgo al foro. Per quest'oggetto avendo riflettuto, che i margini del foro fanno, per rispetto all'acqua ch'esce della conserva, quello per appunto che fanno i respignenti per rispetto all'acqua corrente ne' canali, e che per conseguenza, come in questi, così ai margini del foro dee stabilirsi un'inflessione di corso con perdita di forza, facendosi ivi necessariamente un'impulsione obbliqua che va calcolata, mi sono industriato (Veggasi quella Memoria alla pag. 387.) di conoscere prima la misura dell'obbliquità del corso che dee stabilirsi sotto un'altezza indeterminata d'acqua, per cui ho preso l'unità. Determinata questa, sono andato in traccia della forza composta che risulta dalla coazione simultanea delle pressioni circonfuse al foro. Finalmente mi riuscì di trovare, che l'altezza dovuta alla velocità effettiva, che ha l'acqua all'origine della vena sotto un carico d'acqua permanente che ha l'unità per altezza, è uguale a questa funzione dell'unità

$$2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$$

precisamente, altezza che diremo ridotta per distinguerla dall'altezza attuale dell'acqua sopra il foro; e che in conseguenza la velocità effettiva è uguale a questa espressione

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{(\sqrt{5}-1)}$$

Svolgendo perciò queste espressioni, e adoperando un maggior numero di decimali che non s'è fatto alla pag. 397. di quella Memoria per una maggiore approssimazione al vero, troveremo

I. Che, presa l'unità per altezza permanente, l'altezza ridotta non è che $\frac{11}{25}$ dell'unità, e però sta la permanente alla ridotta come 25 a 11.

II. Che la velocità, che sarebbe dovuta all'altezza attuale permanente, sta alla velocità dovuta all'altezza ridotta, come 8 a $5\frac{5}{12}$, o come 96 a 65, e che però l'esborso d'acqua, che si farebbe dal medesimo foro, se la velocità fosse dovuta all'altezza attuale, sta all' esborso effettivo parimente come 8 a $5\frac{5}{12}$, o come 96 a 65.

Il che è per appunto ciò che risulta a un bel circa da tutte le sperienze antiche e moderne, dovendo attribuirsi agl' inevitabili errori, or in più or in meno, dello sperimentare il divario che può ravvisarsi tra l'esperienze e la legge.

§. V,

Questo è il canone, che dicemmo, desiderato (§. I.), onde trovare in ogni caso l'altezza ridotta a cui è dovuta la velocità attuale dell'acqua uscente da' fori. Imperciocchè se sia A un' altezza permanente qualunque, e si faccia, come 25 a 11, così A ad un quarto proporzionale, sarà $\frac{11}{25}A$ l' altezza ridotta a cui è dovuta la celerità attuale dell'acqua uscente da un foro sotto l' altezza permanente A. Il che posto, aperta è la via onde risolvere tutti i problemi, che possono venir in campo per l'erogazione dell'acqua dalle cateratte. Sia però conceduto di premettere alcune avvertenze preliminari a lume della pratica, e perchè si sappia ben distinguere da tutti gli altri il caso che alle conserve si riduce, e va per conseguenza soggettato al metodo che son per esporre.

§. VI.

Poichè dunque è dimostrato, che l'acqua mantenuta nelle conserve ad una costante altezza, mentr' esce da qualche foro aperto nel fondo o ne' fianchi, è un' acqua ringorgata essenzialmente distinta dall' acqua libera, e dalla stagnante, è indubitata cosa, che non deve confondersi cogli altri questo stato, perchè a lui solo possano appropriarsi le leggi stabilite qui sopra. Bisogna dunque primamente, che il lume sia terminato per ogni verso, vale a dire, che presenti all' acqua un' apertura determinata in altezza e larghezza, come sono i fori ne' vasi. Se l'emissario è aperto di basso in alto, la derivazione appartiene al sistema dell'acque correnti per canali, non a quello de' vasi di cui è proposito in questo luogo. Secondariamente bisogna, che la superficie dell'acqua imminente all' apertura dell'emissario sormonti il labbro superiore della bocca, e si mantenga orizzontale e quieta sensibilmente: condizione dell' acqua ringorgata che la distingue dalla corrente. E questo è quel rialto permanente che gl' Italiani chiamano *Battente*, e lo misurano da detta superficie dell'acqua all' orlo o labbro, che dicemmo, superiore della bocca, espressione convenuta di cui farò uso liberamente.

§. VII.

Cautamente pertanto dee procedere l' idrometra nell' applicare le regole fatte pe' vasi alle cateratte, dinanzi alle quali non sia l' acqua perfettamente ringorgata, ed orizzontale e permanente la superficie del ringorgo. Tutto è sconvolto, e la teorica de' vasi non ha più luogo, qualora sia imboccato il lume della cateratta da un' acqua corrente. E mal giudicherebbe pure se tenesse per soddisfatta la seconda condizione indicata qui innanzi (§. VI.) al solo vedere alcun poco sormontato il labbro superiore della bocca dall' acqua uscente, mentre la superficie non fosse nello stesso tempo e si mantenesse orizzontale e quieta sensibilmente. Del che basti l' aver qui fatto parola, essendo gravissimo il danno che può farsi così al publico, come al privato interesse, confondendo condizioni d' acqua essenzialmente diverse; e può eziandio accadere, che si accusi d' insufficienza il metodo, mentre la colpa sia dell' idrometra, il quale non abbia per avventura ben accertato lo stato dell' acqua prima di appropriarle la condizione dell' acque ringorgate.

§. VIII.

Ma non finiscono qui le avvertenze per non isbagliare nell' estimazione dell' acqua uscente dalle cateratte messe in fianco de' fiumi. E' detto quanto basta per rispetto all' acqua anteriore, costituita immediatamente dinanzi alla cateratta, ma non è detto ancora dell'acqua inferiore posta immediatamente sotto l' emissario. L'acqua ch'esce da' vasi sprizza in aria, ed è libera, prescindendo dalla resistenza dell'aria, da cui può prescindersi. Ma non sarebbe libera, nè potrebbe prescindersi dalla resistenza d'altro fluido più denso, e neppure dell'acqua medesima, se il getto vi fosse sommerso, e tanto meno quanto il fosse più profondamente. Il moto di quest' acqua fu prima di tutti considerato dal March. *Poleni* nel suo Trattato *de motu aquæ mixto* pubblicato del 1717, indi da *Danielle Bernoulli* nell'Idrodinamica, e da altri successivamente. Perchè dunque possa adattarsi agli emissarj in grande la teorica de' vasi, altro sarà il caso dell'acqua uscente libera dall' emissario, e tutt' altro quello in cui ella non abbia libera l'uscita. Per ridurre il secondo caso a quello de' getti sommersi ne' vasi, bisogna concepire, che mentre all'emissario anteriormente è accollato per uscire un corpo d'acqua ringorgata, altro corpo d' acqua ringorgata sia inferiormente accollato alla medesima bocca tendente ad uscire contrariamente sì, che due *battenti* per contrario verso si ravvisino a collo dell'emissario, e si verifichino da ambe le parti le condizioni del §. VI. Così mi pare che possa l'idrometra riconoscere sul momento a qual de' due appartenga il caso di derivazione d' acqua per una cateratta cioè se sia a flusso libero, o a flusso perturbato. Basta che esamini se la luce nel rovescio della cateratta sia accecata da acqua, che le si accolli intorno, e sommerga la vena, soprastando con un rialto o battente al labbro superiore dell'orifizio; oppure se vi si ravvisino distintamente gli orli dell'apertura liberi, come ne'cannelli che mandano acqua dalle sponde de' vasi. Nel primo caso il moto dell' acqua è indubitatamente perturbato, e libero nel secondo. Per quanto è a mia cognizione, questa condizione dell'acqua uscente dalle cateratte non è stata prima d' ora contemplata come oggetto da non trascurarsi nell' estimare gli esborsi de' nostri emissarj. Al che fare m' indusse l'osservar ch' io feci, che a poche si riducevano, tra le moltissime vedute, le derivazioni a flusso perfettamente libero. Dopo che avremo trattato in questa prima Memoria degli efflussi liberi, ci faremo a versare nella susseguente intorno a' perturbati, perchè la distribuzione dell' acque riesca, s'è possibile, più esatta che non può essere senza aver riguardo alla diversa condizione delle derivazioni.

CAPITOLO SECONDO

Misura dell' acqua uscente dalle cateratte a flusso libero.

§. IX.

Premesse queste nozioni passiamo a rintracciare la misura dell' acqua ch' esce dalle cateratte verticali aperte in isponda de' fiumi, dinanzi alle quali si mantenga l' acqua ringorgata (§. VI.) a permanente altezza. Due elementi pertanto debbono determinarsi, la grandezza del lume, e la velocità ond' è animata la vena uscente sotto la data altezza permanente; posti i quali, si troverà per ogni caso la quantità assoluta dell' acqua ch' esce in un dato tempo. Questo è quello che cercheremo di fare nel modo più semplice e generale che sia possibile a vantaggio della pratica.

§. X.

E' costume degli Idraulici di calcolare la quantità dell' acqua fluente coll' aje delle parabole, in cui le ascisse esprimono le altezze dell' acqua, e le semiordinate le velocità a dette altezze dovute. Ma il metodo è limitato a figure di orificj puramente rettilinee, dovendo l' idrometra ricorrere ad altri partiti per le figure curvilinee. E' dunque miglior consiglio l' indagare regole più generali coll' analisi perchè in tutti i casi un solo metodo serva al bisogno; mentre, se non si voglia far uso delle Tavole, niente meno, e forse più di applicazione richiede il maneggio dell' aje paraboliche, di quel che possa esigere in circostanze simili la sostituzione de' valori numerici alle lettere nelle formule che l' Algebra può esibire.

§. XI.

PROBLEMA I.

Trovare l'assoluta velocità dovuta a qualsivoglia altezza.

Misurandosi la velocità nel moto uniforme dallo spazio percorso in un dato tempo, s'intenda, che la velocità dimandata sia per un minuto secondo. E poichè un grave cadendo liberamente dalla quiete percorre in un minuto secondo piedi parigini $15\frac{1}{12}$ di altezza, cioè pollici 181, e perciò mosso uniformemente con la velocità acquistata in fine di questa caduta percorre in un secondo pollici 362, sarà questa la velocità per un secondo dovuta all'altezza di piedi $15\frac{1}{12}$.

Essendo poi le velocità in fine delle discese libere dalla quiete proporzionali alle radici quadrate delle altezze percorse, se sia A un'altezza qualunque, V la velocità dovuta a quest'altezza, sarà $\sqrt{181}$ a 362 come $\sqrt{A}$ ad V, e sarà V lo spazio in parti della specie di A che percorrerà il grave di moto uniforme in un minuto secondo. In conseguenza sarà

$$181:(362)^2 = 181:2^2.(181)^2 = 1:4.181$$

$$= 1:724 = A:V^2,$$ e avrà luogo l'equazione

$$724A - V^2 = o$$

col mezzo della quale, data in piedi, pollici, o linee l'altezza A, sarà pure dato in piedi, pollici, o linee lo spazio V che percorre un grave uniformemente in un minuto secondo con la celerità acquistata in fine della discesa dall'altezza A, cioè la ricercata assoluta velocità dovuta all'altezza A. Il che ecc.

§. XII.

PROBLEMA II.

Proposta qualsivoglia figura per orificio verticale di una cateratta, e data l'altezza permanente dell'acqua ringorgata sopra il medesimo orificio, trovare la quantità di acqua che quest'orificio somministra in un minuto secondo sotto una tale altezza.

Sia FGD (*Fig. I.*) la figura del lume sommerso, ACB la superficie dell'acqua ringorgata, FG la soglia, DE l'altezza totale del lume sopra la soglia, CE l'altezza del fluido sopra la medesima soglia, e sieno bf, dg due rette infinitamente prossime ordinate all'altezza DE presa come asse della figura. Concepiamo pertanto l'orificio FGD diviso in un numero infinito di trapezj elementari $bdgf$, considerando ciascuno di essi come un orificio particolare i cui punti sieno ugualmente distanti dalla superficie AB del liquore, e si faccia $CE = H$, $CD = h$, $Da = x$, $ab = y$; sarà $ac = dx$, $DE = H - h$. Essendo dimostrato, che l'altezza dovuta alla velocità del trapezio elementare $bdgf$ non è altrimenti l'altezza Ca, ma sì bene $2Ca \times \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^3$, cioè assai prossimamente $\frac{11}{25}\ Ca$ (§. V.) $= \frac{11}{25}\ (h + x)$, si sostituisca nell'espressione del §. precedente questo valore in luogo di A, e la velocità assoluta di detto trapezio sarà

$$V = \sqrt{\left(\frac{7964}{25}(h + x)\right)}$$

ch'è lo spazio effettivo che può percorrere uniformemente il trapezio in un minuto secondo sotto l'altezza permanente Ca. Moltiplicando pertanto la velocità V per l'aja del trapezio $2ydx$, sarà $\frac{2}{5}\ ydx \sqrt{(7964(h + x))}$ la quantità elementare di acqua esborsata dall'orificio $bdgf$ in un minuto secondo, e la somma di tutte queste quantità elementari sarà indefinitamente la quantità di fluido che può essere somministrata dall'orificio Dfb coll'altezza $Da = x$ in un minuto secondo. Sarà ella pertanto espressa dalla forma integrale

$$(A) \; \ldots\ldots \int \tfrac{3}{4} y dx \sqrt{(7964(b+x))} + \text{Cost. arb. } K.$$

Se dunque dall'equazione alla figura FDG si sostituisca il valore di y in x e costanti, s'integri, e si determini K a condizione che posto $x = o$ sia nulla l'espressione, non resterà che porre $H - b = DE$ per x, e si otterrà la quantità totale di fluido uscente dall'orificio intero FDG in un secondo di tempo sotto l'altezza $CE = H$ dalla soglia, o sotto l'altezza $CD = b$ del battente. Il che ecc.

§. XIII.

Questa soluzione abbraccia tutte le figure algebraiche che possono assegnarsi alle cateratte con tutta la generalità che può mai pretendersi dal calcolo senza ricorrere in alcun caso alle aje paraboliche, o ad altro suffragio della Geometria. Che se la grandezza dell'apertura sia nota, basterà determinare la velocità assoluta della vena uscente per venir in cognizione della quantità di acqua che quell'orificio trasmette in un dato tempo. Ma gli orificj verticali collocati in fianco delle conserve o de' canali di acqua corrente differiscono in questo dagli orizzontali, che non hanno effettivamente tutti i punti del lume a eguale distanza dalla superficie del fluido ringorgato. Ragione per altro insegna, che un punto deve esistere nel medesimo lume, la cui distanza da detta superficie è tale, che se a tutti i punti dell'acqua uscente costituiti in quel lume si attribuisse una sola e comune velocità dovuta ad una tale distanza, tanto sarebbe il flusso d'acqua in un dato tempo con questa media velocità, quanto è quello che si fa con le celerità naturali e varie della vena. Bisogna dunque indicare il metodo onde determinare questa velocità media, e bisogna farlo come il richiede la generalità dell'espressione (A) del §. XII.

§. XIV.

PROBLEMA III.

Proposta qualsivoglia figura per orificio verticale di una cateratta, e data l'altezza permanente dell'acqua ringorgata sopra il medesimo orificio, trovare l'assoluta velocità media dell'acqua ch'esce per un tale orificio.

Posta la medesima figura *FDG* (*Fig. I.*) della Prop. precedente, *AB* la superficie permanente, e la stessa denominazione per le misure, si chiami Y la velocità media ricercata. Essendo $\int 2ydx$ l'espressione indefinitamente dell'aja *Dfb*, è certo, che $Y\int 2ydx$ esprimerà l'assoluta quantità di acqua, che esce dall'orificio che ha $\int 2ydx$ per aja, giacchè Y è velocità assoluta per supposizione. Ma detta quantità di acqua è espressa indefinitamente dalla quantità (*A*) del §. XII. Dunque avrà luogo l'equazione

$$Y\int ydx = \int \tfrac{1}{5} ydx \sqrt{(7964(b+x))}$$

e però sarà la velocità media dimandata

$$(B) \;.\;.\;.\;.\;.\; Y = \frac{\int \frac{1}{5} ydx \sqrt{(7964(b+x))}}{\int ydx}$$

qualunque siasi la figura *FDG*. Sostituito pertanto dall'equazione alla medesima figura il valore di y in x, integrata la formula (*B*), e posto $H - b$ per x nell'integrale completo, si avrà la velocità media ricercata dell'acqua ch'esce dall'intero lume *FDG* sotto la superficie permanente *AB*. Il che ecc.

§. XV.

In queste due formule (*A*), (*B*) è compreso tutto ciò che può proporsi intorno agli esborsi di acqua così dalle aperture de' vasi, come dalle cateratte in fianco de' canali, ove sia l'acqua ringorgata a permanente altezza sopra le aperture. Ma oltre alla generalità per qualunque figura algebraica, e al comodo del dispensare l'idrometra dall'uso, d'altronde pregevolissimo, dell'aje paraboliche nell'estimazione degli efflussi, hanno il vantaggio ancora queste formule di determinare l'effettiva quantità di acqua senza bisogno di ricorrere ad alcuna correzione per la contrazione della vena. Mi propongo dunque di farne applicazione alla sola figura rettangolare, ch'è la comune ed usuale delle nostre cateratte, lasciando all'arbitrio dell'idrometra l'applicarle a qualunque altra figura. Noi abbiamo qui in mira più la pratica che la speculazione.

§. XVI.

PROBLEMA IV.

Determinare la quantità di acqua ch'esce in un minuto secondo dalla cateratta rettangolare verticale ABCD (Fig. II.) *sotto il battente* EF.

Si chiami L la larghezza CD del lume $ABCD$, e sarà $y = \frac{L}{2}$ l'equazione alla figura rettangolare, $EG = H$, il battente $EF = b$, $FG = H - b$. Posta pertanto nell'espressione

$$(A) \; . \; . \; . \; . \; . \int \tfrac{2}{5} y dx \sqrt{(7964(b+x))} + K$$

la larghezza L della nostra luce in luogo di $2y$, l'integrale della forma differenziale

$$dx \sqrt{(7964(b+x))}$$

essendo $\frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(7964(b+x))}$, si troverà, che l'integrale della formula (A) sarà

$$\frac{2L}{15}(b+x)\sqrt{(7964(b+x))} + K$$

e completamente avrà la forma (C)

$$(C) \; . \; . \; . \; . \; . \frac{2L\sqrt{(7964)}}{15}\left((b+x)\sqrt{(b+x)} - b\sqrt{b}\right)$$

Ma siccome il radicale $\sqrt{(7964)}$ è costante in tutti i casi;

ed uguaglia prossimamente 89.24, cioè $\frac{2231}{25}$, così posta per x l'altezza $H-h$ del lume intero, l'espressione dell' effettiva quantità di acqua uscente in un minuto secondo dalla luce $ABCD$ si ridurrà a questa forma

$$(C) \ldots\ldots \frac{4462\,L}{375}\left(H\sqrt{H}-h\sqrt{h}\right).$$

Il che ecc.

§. XVII.

PROBLEMA V.

Trovare la velocità media dell' acqua ch' esce dal lume ABCD *sotto il battente* EF.

Poste le denominazioni precedenti, si riassuma la formula generale (B) della velocità media

$$(B) \ldots\ldots Y=\frac{\int \frac{2}{3} y\,dx \sqrt{\left(7964(h+x)\right)}}{\int y\,dx}$$

Si metta $\frac{1}{2}L$ in luogo di y sotto e sopra, s' integri, e si completino separatamente gl' integrali. Si otterrà

$$Y=\frac{2\sqrt{7964}}{15}\left(\frac{(h+x)\sqrt{(h+x)}-h\sqrt{h}}{x}\right)$$

e posto $H-h=FG$ in luogo di x, $\frac{2231}{25}$ in luogo di $\sqrt{(7964)}$, sarà

$$(D) \ldots\ldots Y=\frac{4462}{375}\left(\frac{H\sqrt{H}-h\sqrt{h}}{H-h}\right)$$

il valore della velocità media ricercata.

§. XVIII.

Ancorchè il maneggio di qualunque delle due formule (C'), (D) non altro richiegga dall' idrometra, se non che sostituisca ad L nella formula (C') la larghezza dell' apertura, alla lettera H l' altezza dalla superficie dell' acqua ringorgata alla soglia in entrambe le formule, e così per b il valore del battente (tutto però in misure della stessa specie), e colle prime regole dell' Aritmetica, facendo uso della Tavola delle radici che abbiamo messo in calce della Memoria, trovi in numeri il valore che ricerca, è bene che si diano alcuni esempj per facilità della pratica.

I. ESEMPIO

Trovare in pollici cubici la vera quantità che costituisce il così detto quadretto di acqua nello Stato veneto.

Per quadretto d' acqua, ove si tratti di acqua ringorgata ed accollata alla bocca di una cateratta, donde poi esca libera e s' incanali senza che sia sommersa inferiormente la bocca medesima, s' intende comunemente il corpo di acqua ch' esce da una luce rettangolare quadrata, come $ABCD$ (*Fig. II.*), di un piede per ogni lato, e con due pollici di battente EF. Pertanto sarà $L=12$ poll., $H=14$ poll., $b=2$ poll., e però, riassunta la formula generale (§. XVI.)

$$(C') \;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{4462}{375}L\left(H\sqrt{H}-b\sqrt{b}\right)$$

vi si sostituiscano i valori di L, H, b, e si avrà

$$\frac{4462\,.\,12}{375}\left(14\sqrt{14}-2\sqrt{2}\right)=\frac{17848}{125}\left(14\sqrt{14}-2\sqrt{2}\right).$$

Ma dalla Tavola delle radici $\sqrt{14}=3.74$, $\sqrt{2}=1.41$, e perciò l' espressione ridotta sarà $7073\,\frac{1623}{3125}$. Adunque la quantità di acqua costituente un veneto quadretto libero sa-

rà per ogni minuto secondo pollici cubici $7073\frac{1623}{3125}$, la quale per facilità, trattandosi di misura modulare per l'altre bocche, potrà assumersi di pollici cubici 7074.
Il che ecc.

II. ESEMPIO.

Trovare la quantità di acqua costituente l' oncia milanese libera.

Quest' oncia consiste in una luce rettangolare larga tre oncie lineari, ed alta quattro con due altre oncie di battente. Posto ciò, sarà $L=3$ onc., $H=6$ onc., $h=2$ onc. Sostituendo questi valori nella formula (C'), si avrà

$$\frac{4462.3}{375}(6\sqrt{6}-2\sqrt{2})=\frac{4462}{125}(11.88)=424\frac{214}{3125};$$

e però somministra detta oncia libera milanese per ogni minuto secondo oncie cubiche d' acqua $424\frac{214}{3125}$, semprechè sia l' acqua soprastante all' orificio ringorgata, come le condizioni richiedono del §. VI.
Il che ecc.

III. ESEMPIO.

Trovare quant' acqua passa in un minuto secondo per una bocca libera rettangolare alta dieci pollici, larga trentatre pollici, con due piedi e un pollice di battente.

Essendo il battente di pollici 25, e l' altezza della bocca di pollici 10, sarà $H=25$, $h=5$, $L=33$, si sostituiscano pertanto questi valori nella formula (C') e si avrà

$$\frac{4462.33}{375}(35\sqrt{35}-25\sqrt{25})=\frac{4462.11.7\sqrt{7}}{5\sqrt{5}}-11.4462.$$

Ma dalla Tavola delle radici $\sqrt{7}=2.65$, $\sqrt{5}=2.24$; dunque il valore ricercato sarà

$$\frac{4462.11.7.265}{5.224}-11.4462=32276.32$$

e però

e però l' acqua che paſſa per una tal luce ſarà di poll. cub. 32276.32, cioè quadretti $4\frac{1792}{3577}$. Il che ecc.

§. XIX.

Queſto è brevemente quello che m' era propoſto di fare, cioè di ridurre a regole ſemplici il miſurare l' acqua ch' eſce dalle cateratte con moto libero, ſenza biſogno di correzioni e conformemente all' eſperienza. Non è troppo, a mio credere, ciò che ſi eſige dall' idrometra nella maniera propoſta, non eſſendo permeſſo d' ignorar tutto, o di ſeguire al più una cieca pratica a chi pretende d' immetterſi in queſte materie.