DELLE
ALTEZZE BAROMETRICHE
DISSERTAZIONE GEOMETRICO-ANALITICA

Del P. D. Francesco M. Franceschinis
Ch. Reg. di S. Paolo.

Presentata

Dal Sig. Cavaliere Lorgna.

L' Argomento delle altezze barometriche ha dato tante volte motivo di ſtudio a' Geometri, che parrà inutile il ripigliarlo in eſame. Ma ſiccome nel maneggiarlo con la pura Analiſi s'incorre, come ho veduto, nella difficoltà di ben interpretare il linguaggio miſterioſo di queſta Scienza; così non m'è ſembrato inutile il trattarlo con l'Analiſi e con la Geometria congiuntamente; ond' è avvenuto, che con una ſola formula ſiami riuſcito felicemente di ſoddisfare a tutte le determinazioni. Queſto è il mio aſſunto, e il ſoggetto di queſta Memoria.

Data l'altezza del mercurio nel barometro al livello del mare, ſi cerca l'altezza del medeſimo per qualunque luogo, o ſopra, o ſotto il livello marittimo, ſuppoſta la gravità variabile in ragione inverſa di una potenza n delle diſtanze dal centro terreſtre.

Chiamo a l'altezza del mercurio nel barometro al livello del mare, p la diſtanza del luogo dal centro della terra, s l' altezza del mercurio in queſto luogo, f la denſità dell'aria vicino al mare, q la denſità della medeſima alla diſtanza p dal centro terreſtre, g la gravità acceleratrice nella ſuperficie del mare, ed r finalmente il ſemidiametro della terra.

Si eguagli a gA il peſo della mentovata colonna di mercurio, la cui altezza a, ed eſſendo a fiſicamente traſcurabile in confronto ad r, agevolmente ci accorgeremo, che a, ed A fiſicamente ſi eguagliano, potendoſi conſiderare coſtante la gravità pel tratto $=a$.

Sarà dunque gA eguale alla preſſione di tutta la colonna d'aria dalla ſuperficie del mare fino al termine dell'atmosfera, e facendo come $\frac{1}{r^n}$ ad $\frac{1}{(p+s)^n}$, così g al quarto $\frac{gr^n}{(p+s)^n}$, eſprimerà queſto la gravità acceleratrice alla diſtanza $p+s$ dal centro terreſtre. Moltiplicando per ds' ſi otterrà $\frac{gr^n ds}{(p+s)^n}$, ed integrando, ſuppoſta p coſtante, ne riſulterà $= \frac{-g^n}{(n-1).(p+s)^{n-1}} + B$ il peſo della colonna di mercurio di lunghezza s poſta al di ſopra della diſtanza p dal centro della terra. Si determina la coſtante B oſſervando, che il peſo della colonna è nullo, quando $s=o$. Avremo dunque $\frac{-gr^n}{(n-1).p^{n-1}} + B = o$, e conſeguentemente $B = \frac{gr^n}{(n-1).p^{n-1}}$. Per la qual coſa il peſo cercato $= \frac{gr^n}{(n-1).p^{n-1}} - \frac{gr^n}{(n-1).(p+s)^{n-1}}$, a cui ſi eguaglia la preſſione dell'aria ſuperiore alla diſtanza p dal centro terreſtre. Secondochè ſarà p maggiore, o minore di r, ſi avrà $gA - \frac{gr^n}{(n-1).p^{n-1}} + \frac{gr^n}{(n-1).(p+s)^{n-1}}$, ovvero $-gA + \frac{gr^n}{(n-1).p^{n-1}} - \frac{gr^n}{(n-1).(p+s)^{n-1}} =$ alla preſſione della colonna d'aria dell'altezza $p-r$, ovvero $r-p$.

Ora ſe di queſta colonna ſi prenda l'elemento $\pm dp$, e ſi moltiplica per la denſità q, e per la gravità acceleratrice $\frac{gr^n}{p^n}$ alla diſtanza p dal centro della terra, il prodotto $\pm \frac{gr^n q dp}{p^n}$ rappreſenta la preſſione elementare di detta colonna. Quindi è agevole l'inferire $\int \pm \frac{gr^n q dp}{p^n} = \pm gA \mp \frac{gr^n}{(n-1).p^{n-1}} \pm \frac{gr^n}{(n-1).(p+s)^{n-1}}$

Pongo $\frac{gr^n}{(n-1).p^{n-1}} - \frac{gr^n}{(n-1).(p+s)^{n-1}} = gz$, cioè a dire eguale al peso di una colonna di mercurio di lunghezza $= z$ che sia fornita della gravità acceleratrice g conveniente alla distanza r dal centro terrestre, ed effettuata la sostituzione trovo $\int \frac{\pm gr^n q dp}{p^n} = \pm gA \mp gz$.

Supposte le densità dell'aria proporzionali ai pesi superiori prementi, e ad un peso sempre eguale, e costante gC, si avrà l'analogia $gA + gC : \frac{gr^n}{(n-1).p^{n-1}} - \frac{gr^n}{(n-1).(p+s)^{n-1}} + gC :: f : q$, o sia ponendo in vece del secondo termine il suo valore $= gz + gC$, $gA + gC : gz + gC :: f : q$, e perciò $q = f. \frac{z+C}{A+C}$

Sostituito questo valore nella scoperta formula ci si presenta $\frac{\int fr^n dp.(z+C)}{(A+C).p^n} = A - z$, e prese le differenze $\frac{fr^n dp.(z+C)}{(A+C).p^n} = -dz$. ovvero $\frac{fr^n dp}{(A+C).p^n} = \frac{-dz}{z+C}$, ed integrando $\frac{fr^n}{(n-1).(A+C).p^{n-1}} = l(z+C) + B$: ma quando $p = r$, $z = A$, dunque $\frac{fr}{(n-1).(A+C)} = l(A+C) + B$, o pure $B = \frac{fr}{(n-1).(A+C)} - l(A+C)$, e quindi $\frac{fr}{(n-1).(A+C)} - \frac{fr^n}{(n-1).(A+C).p^{n-1}} = l\left(\frac{A+C}{z+C}\right)$, e conseguentemente chiamando E la base della logaritmica della sottangente $= 1$; $E^{\frac{fr}{(n-1).A+C} - \frac{fr^n}{(n-1).(A+C).p^{n-1}}} = \frac{A+C}{z+C}$, e finalmente $A + C . E^{\frac{-fr}{(n-1).(A+C)} + \frac{fr^n}{(n-1).(A+C).p^{n-1}}} - C = z$

Ne risulterà $z = 0$, qualora sia $\frac{fr}{(n-1).(A+C)} \frac{-fr^n}{(n-1).(A+C).p^{n-1}} = l\frac{A+C}{C}$, e perciò $p = \left(\frac{fr^n}{fr - (n-1).(A+C.)\, l\frac{(A+C)}{C}} \right)^{\frac{1}{n-1}}$

In

In tal ſito, ed a tale diſtanza dal centro della terra termina l'atmosfera, e l'aria quivi non compreſſa da peſo alcuno è fornita della denſità $= \frac{fC}{A+C}$.

Esempio I.

Sia $n = o$, cioè a dire la gravità coſtante, e ne naſcerà $A+C \,.\, e^{\frac{f.(r-p)}{A+C}} - C = z = s$.

S'annullerà z, ogniqualvolta ſia $C = (A+C).e^{\frac{f.(r-p)}{A+C}}$, e conſeguentemente $\frac{A+C}{C} = e^{\frac{f.-(r-p)}{A+C}}$, o pure $l\frac{A+C}{C} = \frac{f.(p-r)}{A+C}$, e finalmente $p = r + \frac{A+C}{f} \,.\, l\frac{A+C}{C}$. Queſto valore è finito, purchè C ſia quantità finita, e l'aria benchè non compreſſa ſia fornita di qualche denſità, il che certamente addiviene in Fiſica. Che ſe ſi ſupponga $C = o$, ſi troverà, che a $z = o$ ſi riferiſce $p = \infty$, aſcendendo all'infinito il logaritmo di $\frac{A}{o}$.

Poſta $p = o$, ſi ſcoprirà, che nel centro della terra il mercurio ſi ſoſtiene all'altezza $z = (A+C).e^{\frac{fr}{A+C}} - C$.

Facendo p negativa ſi avvererà la formola $z = A+C \,.\, e^{\frac{fr+fp}{A+C}} - C$, e l'altezza del mercurio ſeguiterà a creſcere, aumentandoſi p negativa, a cagione che ſi ſuppone, che la gravità coſtante anche di là dal centro della terra non cangi direzione.

Che ſe vogliaſi, che paſſato il centro la gravità divenga negativa, e ſpinga verſo il centro medeſimo, biſognerà capovoltare il barometro, e di là dal centro ſi troveranno le ſteſſe altezze del mercurio, come di qua a pari diſtanze. In tale ipotesi le distanze p si assumano come positive anche di là dal centro, e si faccia uso della stessa formola, come di quà dal centro predetto.

ESEMPIO II.

Passo a considerare la ipotesi di $n=2$, o sia della gravità acceleratrice in ragion inversa dei quadrati delle distanze dal centro della terra, la quale mi dà $(A+C)e^{\frac{-fr}{A+C}+\frac{fr^2}{(A+C)p}}-C=z$.

Qualora $z=o$ troveremo $p=\frac{fr^2}{fr-(A+C).l\,A+C}$. Se la grandezza di C sia tale che ne risulti $fr>(A+C)\,l\,\frac{A+C}{C}$ si annullerà z ad una distanza finita dal centro. Posto che sia $fr=(A+C)\,l\,\frac{A+C}{C}$, o pure $\frac{fr}{A+C}=l\,\frac{A+C}{C}$ ci si presenta $p=\frac{fr^2}{o}=\infty$, e z s'annichila ad una distanza infinita dal centro terrestre.

Assegnando a C un valore più piccolo, onde divenga $fr<(A+C).l\,\frac{A+C}{C}$, o pure $\frac{fr}{A+C}<l\,\frac{A+C}{C}$ svanisce z quando $p=\frac{-fr^2}{(A+C).l\,\frac{A+C}{C}-fr}$ s'eguaglia ad una grandezza negativa.

Per ben intendere il linguaggio misterioso dell'analisi, do principio dal cercare il valore di z, quando $p=\infty$. Poichè in tale incontro $\frac{fr^2}{(A+C).p}=o$ avremo $(A+C)\,e^{\frac{-fr}{A+C}}-C=z$, e per conseguenza $e^{\frac{fr}{A+C}}=\frac{A+C}{z+C}$, ovvero $\frac{fr}{A+C}=l\,\frac{A+C}{z+C}$. Supponendosi $\frac{fr}{A+C}<l\,\frac{A+C}{C}$, dinotato colla let-

tera m un numero positivo maggiore dell'unità, si avrà $\frac{fr}{A+C} = \frac{1}{m} l \frac{A+C}{C}$: e quindi alla distanza $p = \infty$ dal centro della terra si avvererà la formola $\frac{1}{m} l \frac{A+C}{C} = l \frac{A+C}{z+C}$, da cui si deduce $\frac{\overline{A+C}^{\frac{1}{m}}}{C^{\frac{1}{m}}} = \frac{A+C}{z+C}$, ed indi $z+C = (A+C)^{1-\frac{1}{m}} . C^{\frac{1}{m}}$.

Ora $z+C$ sia di mezzo tra C, ed $A+C$. E' maggiore di C, perchè per essere eguale a C, farebbe d'uopo, che nell' omogeneo di comparazione fosse $A=o$: è minore di $A+C$, perchè nel pareggiare essa quantità bisognerebbe, che nel detto omogeneo la grandezza $(A+C)^{1-\frac{1}{m}}$ in cambio di essere moltiplicata per $C^{\frac{1}{m}}$ fosse moltiplicata per $(A+C)^{\frac{1}{m}}$. Essendo dunque $z+C$ maggiore di C, e minore di $A+C$, s'inferisce essere z minore di A: ma il peso della colonna d'aria dalla superficie del mare sino alla sublimità $p=\infty$ s'eguaglia a $gA-gz$; dunque il detto peso è più piccolo di gA, e per conseguenza il peso della mentovata colonna non basta per far equilibrio con la colonna di mercurio di altezza a, mentre il barometro si colloca sulla superficie del mare.

Il perchè egli è necessario l'accrescere la lunghezza della colonna aerea, e farla diventare più che infinita. Mi si richiederà come ciò si possa ottenere. Ecco. Pel centro della terra C (*fig.*1.) s'intenda tirata la linea retta DCE, la quale sia prolungata all'infinito tanto dalla parte CD delle p positive, quanto dalla parte CE delle p negative, e sia CB il raggio della terra.

Divenuta infinita la colonna aerea BD, si fa un repentino salto familiare alla Geometria dall'infinito positivo CD al negativo CE, e si continua la colonna d'aria procedendo da E verso C sino alla distanza dal centro $= CF = p$

$= \dfrac{-fr^2}{(A+C).l\dfrac{A+C}{C}-fr}$, a cui corrispondendo $z=o$, qualmente ho notato di sopra, ed è l'ultimo confine dell'atmosfera nella supposizione di $(A+C).l\dfrac{A+C}{C} > fr$. La legge delle gravità acceleratrici in ragione inversa dei quadrati delle distanze richiede, ch' essendo positivi i quadrati anche delle distanze negative per esempio CF, CE, le gravità stesse spingano sempre da D verso E. Il peso dunque della colonna aerea FE tenderà da F verso E, e nel punto E infinitamente lontano da C si eguaglierà a $gz=(gA+gC).e^{\frac{-fr}{A+C}}-gC$. Con una specie di magia matematica si unisce questo peso con quello $=gA-(gA+gC).e^{\frac{-fr}{A+C}}+gC=gA-gz$ della colonna d'aria DB, onde si formi la somma gA, colla quale fa equilibrio la colonna di mercurio, la cui altezza $=a$, ed il peso $=gA$, quando il barometro si mette nel sito B.

Ognuno agevolmente capisce, che l'ipotesi di $(A+C)\,l\dfrac{A+C}{C} > fr$ appartiene soltanto alla Geometria, e non può trasferirsi alla Fisica. La legge delle forze inversamente proporzionali ai quadrati delle distanze è abbracciata dalla natura, e mostrandoci questa fisicamente impossibile, che la quantità $(A+C).l\dfrac{A+C}{C}$ o superi, o eguagli fr, perchè l'altezza dell' atmosfera diverrebbe o più che infinita, o infinita; chiara si scopre la conseguenza, dover essere $(A+C).l\dfrac{A+C}{C} < fr$. Esige ciò necessariamente, che a C convenga un valore maggiore di quello, che le competerebbe, fingendo $(A+C).l\dfrac{A+C}{C}=fr$ che non difficilmente si può col computo determinare.

Per facilitare il calcolo suppongo C fisicamente trascurabile in riguardo ad A, onde ne risulta $A\, l\frac{A}{C}=fr$, o sia $\frac{fr}{A}=l\frac{A}{C}$.

Poichè $l\frac{A}{C}$ è un logaritmo iperbolico, fatta l' osservazione, che il logaritmo di $\frac{A}{C}$ preso dalle Tavole, che dinoto per $L\frac{A}{C}$ moltiplicato per 2, 3025850 logaritmo iperbolico della decina, si eguaglia a $L\frac{A}{C}$, avremo $\frac{fr}{A}=2,3025850\ L\frac{A}{C}$, o pure $\frac{fr}{A.2,3025850}=L\frac{A}{C}$.

Sappiamo per le sperienze del *Cotes* essere $f=\frac{1}{11900}$, ed il *Nevvton* stabilisce r = piedi parigini 19695539 = poll. 236346468. Si faccia inoltre A = poll. 28. Queste determinazioni ci danno $\frac{236346468}{11900.28.2,3025850}=L\frac{28}{C}$, e ridotto il calcolo $3,0805838=L\frac{28}{C}$.

	Ora L 1204 =	3,0806265
	L 1203 =	3,0802656
e la loro differenza		3609
	Logaritmo trovato =	3,0805838
	L 1203 =	3,0802656
	differenza =	3182

S'inferisca essere $3,0805838=L\,1203+\frac{3182}{3691}$, e quindi $\frac{28}{C}=1203+\frac{3182}{3609}=\frac{4344809}{3609}$, o pure $\frac{3609.28}{4344809}=\frac{101052}{4344809}$ = linee $\frac{1212624}{4344809}=C$ = linee 0, 2790972. L'esatto valore di C corrispondente a $z=o$, ed a $p=\infty$, è una piccolissima quantità maggiore di quello, che si è ora determinato supponendo C trascurabile rispettivamente ad A. E conciossiachè l'altezza dell'atmosfera abbia ad esser finita, spetterà a C una misura ancora più grande, che si stabilirebbe se fosse nota la sublimità a cui l'atmosfera si estende.

Or ecco stabilita una fisica verità, che l'aria non compressa è fornita della densità $=\frac{fC}{A+C}$, e che questa dee certamente avere una grandezza maggiore di quella, che si determinerebbe ponendo $(A+C).\,l\,\frac{A+C}{C}=fr$, la quale incorrerebbe nell'assurdo, ch'esser dovesse infinita l'altezza dell'atmosfera.

M' inoltro a rintracciare il valore di z, quando è infinitamente picciola la distanza p dal centro. In tal circostanza si avvera la formola $(A+C).\,e^{\frac{fr^2}{(A+C)p}}=z$, e per conseguenza $\frac{fr^2}{(A+C).p}=l\,\frac{z}{(A+C)}$. La quantità $\frac{fr^2}{A+C.p}$ è infinita, e perciò è tale altresì la grandezza eguale $l\,\frac{z}{A+C}$. Ma il numero è trascendentemenre più grande del suo logaritmo infinito. Dunque $\frac{z}{A+C}$ è immensamente maggiore di $\frac{fr^2}{(A+C).p}$, e quindi anche z sarà tale in riguardo ad $\frac{fr^2}{p}$. Non ci dobbiamo meravigliare, che per equilibrare il peso dell' atmosfera di altezza finita si richieda nel centro della terra una colonna di mercurio immensamente lunga fornita della gravità acceleratrice $=g$. Nelle infinitesime distanze dal centro ella è infinita la gravità, e la densità dell'aria, e da questa cagione procede la lunghezza trascendentemente infinita $=z$ della mentovata colonna di mercurio.

Presa negativa la distanza $=p$ dal centro, abbiamo $(A+C)$.

$e^{\frac{-fr}{A+C}} - C = z$. Attenendomi all' ipoteſi confacente alla Fiſica, che $\frac{fr}{A+C}$ ſia maggiore di $l\,\frac{A+C}{C}$ ho ſtabilito, che ad una finita diſtanza dal centro, che io nomino l, z ſi annulla, onde ſi abbia $A+C \,.\, e^{\frac{-fr}{(A+C)}\,\frac{-fr^2}{(A+C)p}} - C = o$, e perciò $(A+C) \,.\, e^{\frac{-fr}{A+C}+\frac{fr^2}{(A+C)p}} = C$. Si cavi la conſeguenza, che quando la diſtanza p è negativa ſarà $(A+C) \,.\, e^{-\frac{fr}{A+C}-\frac{fr^2}{(A+C).p}} < C$, e quindi $z = (A+C) \,.\, e^{-\frac{fr}{A+C}-\frac{fr^2}{(A+C)p}} - C$ ſi troverà negativa. Egli è certo, che avendo la gravità e di qua e di là dal centro la medeſima direzione, il peſo dell'aria paſſato il centro ſi accreſce, e ſi richiede una più lunga colonna di mercurio dotato della gravità g per equilibrarlo. Come dunque ci ſi preſenta z negativa e finita? L'enigma ſi ſcioglie con lo ſteſſo artifizio uſato di ſopra.

La curva, le cui coordinate (fig. 2) $CD = p$, $DC = z$ ha due rami $NAEG$, LHK, ai quali ſerve di aſſintoto la retta GK; a $CB = p = r$ corriſponde $BA = z = A$. Divenendo $p = o$ nel centro C, z aſcende all' infinito, e ci vuole la colonna di mercurio CG di lunghezza infinita, e dotata di gravità coſtante g per far equilibrio alla colonna aerea CN di altezza determinata, alla ſommità della quale è $z = o$, e l' atmosfera finiſce. Il maggior peſo della colonna d' aria CF eſige una più lunga colonna di mercurio, e giacchè era infinita la lunghezza CG relativa a $p = o$, la lunghezza, che ſi cerca, della colonna di mercurio, appropriata a $CF = p$, eſſer debbe più che infinita. Deſcritta l' ordinata $FH = -z$ ſi tiri HI parallela ad NF, e ſi eguaglierà a $CG + KI$ la lunghezza della colonna di mercurio la cui gravità coſtante $= g$, che forma equilibrio colla colonna aerea, che ha la lunghezza FN.

Poſto che ſi ſupponga che la gravità in ragione inverſa dei quadrati delle diſtanze ſempre tenda al centro, di modo che paſſato eſſo centro ſpinga da F verſo C; allora a pari diſtanze CD, CF corriſponderanno colonne di mercurio egualmente alte, è ſervirà ad ambo i caſi la ſteſſa formola dovendoſi conſiderare in qualità di poſitive le p anche di là dal centro.

Fin ora ho miſurato le preſſioni dell' aria col peſo di una confacente colonna di mercurio dotata della gravità coſtante g, che è quella che corriſponde alla diſtanza r dal centro. Cerchiamo preſentemente l' altezza s della colonna di mercurio dentro il barometro collocato alla diſtanza p dal centro terreſtre, le particole del qual mercurio ſieno fornite della gravità conveniente alla relativa loro lontananza dal centro predetto, la qual colonna faccia equilibrio col peſo dell' atmosfera ſuperiore. Avendo trovato generalmente il peſo di eſſa colonna $= \frac{gr^n}{(n-1).p^{n-1}} - \frac{gr^n}{(n-1).(p+s)^{n-1}}$; ed avendolo ſtabilito eguale a gz, troveremo, nella ipoteſi di $n=2$, $\frac{r^2 s}{p^2+ps}=z$, e ne dedurremo $s=\frac{p^2 z}{r^2-pz}$, e ſoſtituito il valore di z, $\frac{(A+C).e^{-\frac{fr}{A+C}+\frac{fr^2}{r^2-pz}}}{r^2-(A+C)p.e^{-\frac{fr}{A+C}+\frac{fr^2}{(A+C).p}}+Cp}=s$; a $z=0$ corriſponde $s=0$, e ciò ſuccede, o ad una finita diſtanza p dal centro, ſe $\frac{fr}{A+C}$ è maggiore di $l\frac{A+C}{C}$, o ad una infinita diſtanza ſe $\frac{fr}{A+C}=l\frac{A+C}{C}$, o ad una diſtanza negativa ſe $\frac{fr}{A+C}<l\frac{A+C}{C}$. In queſta ultima ſuppoſizione quando $p=\infty$, z ha un valore finito $=(A+C).e^{-\frac{fr}{A+C}}-C$. Se tutta la colonna di mercurio foſſe fornita della gravità $\frac{gr^2}{p^2}$

pro-

propria della distanza p dal centro, si troverebbe $s = \frac{p^2 z}{r^2}$. Ma decrescendo la gravità delle particole del mercurio, secondo che maggiormente si allontanano dal centro mentovato, egli è certo, che la lunghezza s ha da salire ad una grandezza incomparabilmente maggiore.

Si formerà qualche idea della immensità della sua misura trasformando la quantità $\frac{p^2 z}{r^2 - pz} = s$ in una serie col mezzo d' iterate divisioni, le quali ci mostreranno $s = \frac{p^2 z}{r^2} + \frac{p^3 z^2}{r^4} + \frac{p^4 z^3}{r^6} +$ ecc. Per far dunque equilibrio colla colonna d'aria FE (fig. I.) si renderebbe necessaria una colonna di mercurio di lunghezza trascendentemente infinita. Svanirà la meraviglia di questo apparente paradosso, qualora si rifletta, che il peso di questa immensa colonna è finito, ed $= gz$ cioè a dire al peso della colonna aerea EF.

Merita riflessione l'ambiguità del valore di $\frac{p^2 z}{r^2 - pz}$ secondo la varietà delle circostanze. In moltissimi casi si eguagliarebbe ad una quantità negativa, quando p, e z sono negative, e $pz > r^2$. Nel nostro caso frattanto ho fatto chiaramente vedere eguagliarsi $s = \frac{p^2 z}{r^2 - pz}$ ad una grandezza più che infinita. Se fosse $r^2 = pz$ ascenderebbe all'infinito, essendo $r^2 - pz = 0$. Acciocchè s vie più cresca, bisogna che $r^2 - pz$ continui a calare, il che succede passando dal nulla al negativo, onde $\frac{p^2 z}{r^2 - pz} = s$ pareggi una grandezza più che infinita.

Gli esperimenti c'insegnano essere $s = a$, quando $p = r$. Sarà in tale incontro il peso della colonna di mercurio, la cui altezza $= a$, eguale a $\frac{gr^2 a}{r^2 + ra} = \frac{gra}{r + a} = gz = gA$. Poichè a è fisicamente trascurabile in riguardo ad r, passerà fisica eguaglianza tra a ed A, potendosi con fisica adequazione supporre, che per tutto il tratto a si mantenga la stessa gravità $= g$.

Ho già notato, che quando $r^2 = pz$, o sia $\frac{r^2}{p} = z$, l'altezza s del mercurio diviene infinita. Succede ciò quando $p < r$. Nella formola infatti $(A+C).e^{-\frac{fr}{A+C} - \frac{fr^2}{(A+C).p}} - C = z$ si sostituisca $\frac{r^2}{p}$ in cambio di z, e dopo le convenienti operazioni si troverà $\frac{fr}{A+C}.(r-p) = l\frac{r^2+Cp}{(A+C).p}$, equazione, a cui soddisfa un valore positivo di $p < r$.

Si assegni a p una grandezza positiva ancora più picciola, e la formola $(A+C).e^{\frac{-fr}{A+C}+\frac{fr^2}{(A+C)p}} - C = z$ c' insegna, che z crescerà e diventerà maggiore di $\frac{r^2}{p}$. In tali circostanze il divisore r^2-pz della formola $\frac{p^2z}{r^2-pz} = s$ diverrà negativo, e l'altezza s del mercurio monterà al più che infinito.

Giunga finalmente p ad essere infinitamente picciola, onde si abbia $(A+C).e^{\frac{fr^2}{(A+C).p}} = z$, e quindi $\frac{fr^2}{(A+C).p} = l\frac{z}{A+C}$. Si raccoglie da questa formola essere z immensamente più grande di $\frac{r^2}{p}$, e conseguentemente pz immensamente maggiore di r^2. Il perchè in questo incontro il più che infinito valore di $s = \frac{p^2z}{r^2-pz}$ si aumenterà a dismisura.

Resta da considerare il caso di p negativa, a cui come ho osservato corrisponde z altresì negativa. Avremo dunque

$s = \frac{-p^2 z}{r^2 + pz}$, formola, che manifesta riuscir negativa anche s. Sia (*Fig. I.*) CD l'infinitamente infinita altezza, a cui si alzerebbe il mercurio nel barometro collocato nel centro C della terra. Suppongasi parimenti immensamente infinita la linea CE, e se ad un dato valore di p negativa si riferisca $-s = CF$, sarà $CD + EF$ la lunghezza della colonna di mercurio, che farà equilibrio col peso dell'atmosfera.

Se passato il centro le forze divenissero negative, le altezze del mercurio e di qua, e di là dal centro riuscirebbero eguali a pari distanze dal centro medesimo.

La Fisica esige che sia finita l'altezza dell'atmosfera, e che per conseguenza sendo $\frac{fr}{A+C} > l\frac{A+C}{C}$, z ed s s'annullino ad una distanza finita p dal centro terrestre. Calando p, crescono z, ed s, e finalmente divengono fisicamente amendue eguali ad A alla distanza r dal detto centro. E qui finisce la legge delle forze inversamente proporzionali ai quadrati delle distanze, avendo dimostrato il Cavalier *Nevvton*, che dentro il corpo della terra le forze seguono la ragione delle distanze dal centro. Per la qual cosa giudico espediente l'aggiungere un terzo esempio, in cui s'indaghino i valori di z, ed s nell'ipotesi mentovata di forze.

ESEMPIO III.

Supponendo le forze proporzionali alle distanze dal centro abbiamo $n = -1$, e la formola generale esprimente il valore di z prende il seguente aspetto $(A+C) \cdot e^{\frac{fr}{2\cdot(A+C)} \frac{-fp^2}{2r\cdot(A+C)}}$

$$-C = z = \frac{2ps + s^2}{2r}.$$

Si annulleranno z, ed s, quando s'abbia

$$(A+C) \cdot e^{\frac{fr}{2\cdot(A+C)} - \frac{fp^2}{2r\cdot(A+C)}} = C \text{ e perciò}$$

$\frac{fr}{2.(A+C)} - \frac{fp^2}{2r.(A+C)} = l\frac{C}{A+C}$, o pure $\frac{fp^2}{2r.(A+C)}$ $- \frac{fr}{2.(A+C)} = l\frac{A+C}{C}$, e finalmente

$\pm p = \sqrt{\left(\frac{2r.(A+C)}{f} . \left(\frac{fr}{2.(A+C)} + l\frac{A+C}{C}\right)\right)}$. Se l'aria non compressa sia dotata di una finita densità, siccome richiede la Fisica, eguale ad $\frac{fC}{A+C}$, e per conseguenza sia finito il valore di C, starà parimenti dentro i limiti del finito la distanza dal centro $\pm p$, alla quale z, ed s svaniscono. Che se suppongasi $C = o$, si troverà $\pm p = \sqrt{\frac{2rA}{f} . l\frac{A}{o}} = \infty$, e bisognerà trasportare il barometro ad una distanza infinita, acciocchè la lunghezza s della colonna di mercurio si eguagli a nulla.

Avvicinando il barometro alla superficie della terra cresceranno z, ed s, ed a livello del mare sarà $z = A$, $s = a$, ed avverandosi la formola $A = \frac{2ra+a^2}{2r}$, ed essendo a^2 fisicamente trascurabile rispettivamente a $2ra$, si troverà con fisica adequazione $A = z = a = s$. Divenga $\pm p$ minore di r, e seguiteranno a crescere z, ed s, e per ultimo qualora $\pm p = o$ ci si presenterà $(A+C) . e^{\frac{fr}{2.(A+C)}} - C = z = \frac{s^2}{2r}$, e z, ed s giungeranno alla massima grandezza.

Restringendo in poche parole le cose dette; dall'altezza a cui si estolle l'atmosfera fino alla superficie del mare vale la legge della gravità in ragione inversa dei quadrati delle distanze dal centro terrestre. L'altezza del mercurio nel barometro s'eguaglia a nulla nella predetta sublimità dove, avverandosi la condizione, che sia $fr > (A+C) . l\frac{A+C}{C}$, la densità dell'aria non compressa s'eguaglia ad $\frac{fC}{A+C}$. Va crefcendo effa altezza fecondo che il barometro s'avvicina alla terra, e collocato fulla fuperficie del mare, l'altezza del mercurio ritrovafi $= a$.

Ponendo il barometro in fito inferiore al livello del mare fi muta legge, e la gravità feguita la ragione delle diftanze del centro. Efige quefta legge che l'altezza del mercurio s'aumenti fintantochè perviene alla mifura, che viene determinata dall'equazione $(A+C)\, e^{\frac{fr}{2\cdot(A+C)}} - C = \frac{s^2}{2r}$, quando $p = o$.

Progredendo di là dal centro della terra fa duopo capovoltare il barometro, perchè la gravità diventa negativa, ed a qualunque diftanza dal centro corrifponderà la fteffa altezza s di mercurio, che competeva ad una pari diftanza prefa di qua dal centro predetto.

Esempio IV.

La generale integrazione della formola differenziale $\frac{fr^n dp}{(A+C)\cdot p^n} = \frac{-dz}{z+C}$ non vale per la ipotefi di $n = 1$, cioè a dire delle forze acceleratrici in ragion inverfa delle diftanze dal centro, che ci darebbe $(A+C)\cdot e^{\frac{-fr}{o\cdot(A+C)} + \frac{fr^n}{o\,(A+C)\cdot p^o}} - C = z$. In quefto cafo egli è duopo riaffumere la formola differenziale, che prende il feguente afpetto $\frac{frdp}{(A+C)\cdot p} = \frac{-dz}{z+C}$, la quale integrata ci fomminiftra $\frac{fr}{A+C}\cdot lp = B - l(z+C)$, ma quando $p = r$, $z = A$; dunque $B = \frac{fr}{A+C}\cdot lr + l(A+C)$, e confeguentemente $\frac{fr}{A+C}\cdot lp = \frac{fr}{A+C}\cdot lr + l(A+C) - l(z+C)$, o fia $\frac{fr}{A+C}\cdot\frac{lp}{r} = l\,\frac{A+C}{z+C}$, e finalmente dopo i neceſſarj calcoli $(A+C) \cdot \left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{fr}{A+C}} - C = z$.

L'integrale della formola differenziale $\frac{grds}{p+s}$ adattata al caſo di $n=1$, in cui p ſi ſuppone coſtante, cioè $gr\,l\frac{p+s}{p}$ eſprime il peſo della colonna di mercurio di lunghezza s poſta al di ſopra della diſtanza p dal centro della terra, e poichè $gr\,l\frac{p+s}{p} = gz$, avremo $(A+C) \cdot \left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{fr}{A+C}} - C = z = r\,l\frac{p+s}{p}$.
Si eguaglieranno a nulla z, ed s qualora ſia $r\left(\frac{A+C}{C}\right)^{\frac{A+C}{fr}} = p$, ed il valore di p aſcenderà all'infinito, poſta $C=o$.

Approſſimando il barometro alla ſuperficie del mare, s'aumenteranno z, ed s, e quando $p=r$, ſarà $z=A$, $s=a$, e proſſimamente $z=A=s=a$ adeguandoſi $rl\frac{r+s}{r}$ ad s, ſtante la minutezza di s in riguardo ad r, ed eſſendo in tal circoſtanza $l\frac{r+s}{r} = \frac{s}{r}$ con fiſica adequazione.

Seguiti p a calare, e creſceranno z, ed s ſintantochè diventeranno infiniti all'annullarſi di p. Che ciò avvenga di z ella è coſa patente. In riguardo ad s avremo ſuppoſta p minima $\frac{(A+C)}{r}\left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{fr}{A+C}} = l\frac{s}{p}$ e perciò $e^{\frac{A+C}{r}\left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{fr}{A+C}}} = \frac{s}{p}$, e finalmente $p \cdot e^{\frac{A+C}{r}\left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{fr}{A+C}}} = s$.

Poichè $e^{\frac{A+C}{r}\left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{fr}{A+C}}}$ è immenſamente più grande di $\frac{A+C}{r}\left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{fr}{A+C}}$ ſe ne deduce s infinitamente maggiore di p.

$\frac{A+C}{r}\left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{fr}{A+C}}=(A+C)\left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{fr}{A+C}-1}$. Ma questa grandezza è infinita. Dunque tanto più infinita sarà la grandezza di s. Di sopra ho stabilito A=poll. 28, $f=\frac{1}{11900}$, r=poll. 2,36346468, e C maggiore di linee o, 2790972. Pongasi C = linee 1 = poll. $\frac{1}{12}$ e si troverà $(A+C)\left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{fr}{A+C}-1}=\left(28+\frac{1}{12}\right)$

$\left(\frac{236346468}{o}\right)^{706+\frac{72724}{334192}}$, quantità immensamente infinita.

Senza por mano nella formola $(A+C).\left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{fr}{A+C}}-C=z$ basta considerare anche di là dal centro le distanze, e le gravità tendenti al centro stesso come positive, e si torneranno a scoprire a pari distanze gli stessi valori di z, e di s come di qua dal centro.

ESEMPIO V.

Supponendo n minore dell'unità, la formola prenderà il sottoposto aspetto $(A+C).e^{\frac{fr}{(1-n).(A+C)}-\frac{fr^n.p^{1-n}}{(1-n).(A+C)}}-C$ $=z=\frac{-r^n p^{1-n}}{1-n}+\frac{r^n.(p+s)^{1-n}}{1-n}=\frac{r^n}{1-n}\left((p+s)^{1-n}-p^{1-n}\right)$

Fingasi $n=\frac{1}{2}$, e ne risulterà $(A+C).e^{\frac{2fr}{A+C}-\frac{2fr^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}}{A+C}}$ $-C=z=2r^{\frac{1}{1}}\left((p+s)^{\frac{1}{2}}-p^{\frac{1}{2}}\right)$.

Svaniranno z, ed s qua lora sia $p=\left(r^{\frac{1}{2}}+\frac{(A+C)}{2fr^{\frac{1}{2}}}\,l\frac{A+C}{C}\right)^2$, ed un tale valore sarà infinito, posta $C=o$.

Cresceranno z, ed s accostando il barometro alla superficie del mare, e quando $p=r$, si troverà $A=z=2r^{\frac{1}{2}}\left((r+a)^{\frac{1}{2}}-r^{\frac{1}{2}}\right)$ Ora essendo a fisicamente minima in riguardo ad r, $(r+a)^{\frac{1}{2}}$ si adegua ad $r^{\frac{1}{2}}+\frac{a}{2r^{\frac{1}{2}}}$, e quindi fisicamente $A=z=a=s$.

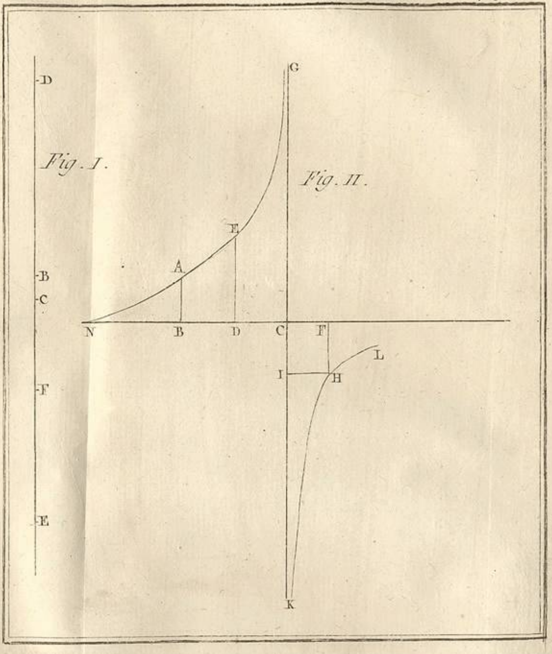
Divenga $p=o$, e ne nascerà $(A+C)^{\frac{2fr}{A+C}}-C=z$, e non si richiederà salvo che un peso finito per far equilibrio colla pressione dell' atmosfera dal centro fino al suo termine estremo.

Sta parimenti in questo incontro dentro i limiti del finito il valore di s, imperciocchè sendo $z=2r^{\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{2}}$, se ne deduce $s=\frac{z^2}{4r}$, ed essendo z quantità finita, si scopre altresì tale $\frac{z^2}{4r}=s$.

Se passando oltre al centro la p si considera come negativa, i valori di z, e di s divengono immaginarj essendo tale la grandezza $p^{\frac{1}{2}}$. Addiviene ciò in tutti quei casi, nei quali è pari il denominatore della frazione $1-n$, il che si verifica nell' assunto esempio di $1-n=\frac{1}{2}$.

Che se, qualmente richiede la legge delle forze tendenti sfericamente ad un centro, le distanze in qualunque direzione si prendano sempre come positive, a pari distanze di qua e di là dal centro corrisponderanno eguali valori di z, e di s.

§. XXIX.



D
Fig. I.
B
C
F
E
G
Fig. II.
E
A
N
B
D
C
F
L
I
H
K