TEORIA GENERALE

DEL MOTO ROTATORIO SPONTANEO DE' CORPI NATURALI SOPRA PIANI INCLINATI.

Del Sig. PAOLO DELANGES.

LO scopo che mi prefiggo in questa mia Memoria si è di dimostrare e nello stesso tempo di rendere universali le leggi ed i canoni che intorno al moto rotatorio spontaneo de' corpi ho rilevate da accurati e moltiplici esperimenti (*a*). Questo è ciò che per lo più si ottiene, e che può pretendersi singolarmente ne' soggetti Fisico-Matematici, onde mettere a coperto i risultati esperimentali, e i raziocinj a vicenda; dovendo però i primi servire di scorta a' secondi, avvegnachè non possiamo nè dobbiamo stabilire per vere l' immagini, o l' ipotesi assunte, se le conseguenze da esse dedotte non corrispondono ai fenomeni naturali. Volendosi pertanto procedere nel presente argomento per tale infallibile sentiero, ecco i fatti che deggionsi avere in mira, ed ai quali la Teoria generale che cerchiamo dovrà esattamente adattarsi.

I.

Un corpo di qualsivoglia figura se ne sta in quiete sopra un piano orizzontale, qualunque sia lo stato della scabrosità delle superficie in contatto, e capovolgesi solo quando la direzione del suo centro di gravità cade fuori della base.

(*a*) *Nuova discussione intorno agli attriti de' Solidi*. Art. IV. Bibliot. Fisica d'Europa Tom. VI. Pavia.

II.

Se il corpo ſia omogeneo e di figura rotonda, come cilindrica, sferica, ecc., in guiſa che nella metà dell'aſſe di rotazione vi ſia il centro di gravità, e, poggiato ſopra un piano orizzontale, venga ſollecitato al moto da una forza tangenziale coſtante; ſi muove eſſo di moto rotatorio perfetto, cioè il moto progreſſivo del centro è uguale all'angolare di qualunque punto della circonferenza.

III.

Poggiandoſi ſopra un piano inclinato un priſma di baſe rettangola, in cui l'angolo coſtituito nel piano verticale e compreſo dalla perpendicolare alla baſe condotta dal ſuo centro di gravità, e dalla retta che dallo ſteſſo centro ſi conduce all'eſtremità della baſe, ſia maggiore dell'angolo dell'attrito, in tutte l'elevazioni di queſta, diſcende il corpo di ſolo moto progreſſivo; ma ſe il ſopraenunciato angolo ſarà minore dell'angolo dell'attrito, comincia il corpo a capovolgerſi nell'elevazioni anteriori a quella che conviene all'attrito medeſimo; e paſſandoſi a elevazioni maggiori, vie più inſieme ſtriſcia innanzi in guiſa, che ridotto il piano verticale, diſcende di ſolo moto progreſſivo.

IV.

Se cade un corpo lungo un piano inclinato ſtriſciando, diſcende di moto uniformemente accelerato, e la forza acceleratrice è la differenza tra il momento alla diſceſa, dipendente dalla gravità aſſoluta del corpo, e l'attrito, ch'è proporzionale alla preſſione che ſoffre il piano medeſimo.

V.

Un corpo rotondo, come un cilindro, una sfera, ecc., diſcende lungo un piano inclinato di moto rotatorio perfetto fino all'elevazione che miſura l'attrito che il corpo rotondo incontrerebbe sullo stesso piano se dovesse strisciarvi, o procedere di solo moto progressivo; e quindi nelle successive elevazioni si muove di moto misto aumentandosi vie più il progressivo, e diminuendosi all'opposto il rotatorio in modo che, fatto il piano verticale, precipita il corpo radendolo di moto progressivo solamente.

VI.

Il corpo rotondo si muove pel piano inclinato di moto uniformemente accelerato, sì in quelle elevazioni nelle quali discende di moto rotatorio perfetto, che in quelle nelle quali procede di moto misto, aumentandosi nelle seconde dal moto rotatorio il progressivo del centro che competerebbe al solo moto strisciante.

Ora avanti di proseguire, debbo, com'è di dovere, raccogliere qui sotto l'occhio i modi, co'quali è stato trattato l'argomento da quegli illustri uomini, che, per quanto io sappia, sonovisi applicati prima di me.

Indicando DO (fig. 1.) l'attrito che un corpo cilindrico, o sferico incontrerebbe strisciando lungo il piano inclinato AB, sicchè posto F l'attrito orizzontale sia $DO = \frac{BC}{AB} \cdot F$, stabilisce *Bernoulli* (a) che il corpo rotondo $DNFM$ discenda pel piano inclinato AB di moto rotatorio, come se fosse tirato in dietro nel punto del toccamento D dalla forza DO, e fosse sospeso dallo stesso punto D, onde ad ogni istante debba concepirsi il moto dell'intera massa intorno al centro d'oscillazione L. Premesse queste due ipotesi, e chiamato P il peso assoluto del corpo discendente, v la velocità progressiva del centro di gravità G, ed u la velocità angolare di ciascun punto della periferia $DNFM$ intorno allo stesso centro, instituisce il cel. Autore, pe'principj meccanici, le due equazioni $v = \frac{AC}{AB} \cdot t, u = \frac{DI}{GL} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{F}{P} \cdot t$;

e quin-

(a) Com. Acad. Scient. Imperialis Petropolitanæ. Tom. XIII. ad an. 1741 43.

e quindi sottraendo dalla velocità progressiva del centro G la velocità $\frac{GL}{DL} \cdot u$, di cui, secondo lui, viene ritardato a cagion del moto rotatorio; e dalla velocità rotatoria sottraendo quella che nasce dall' attrito cioè $\frac{BC}{AB} \cdot \frac{F}{P} \cdot t$; trova finalmente che la velocità assoluta del centro G è espressa dalla formula (*U*)

$$\left(\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB} \cdot \frac{F}{P} \right) t \ldots\ldots\ldots (U)$$

e la velocità angolare di ciascun punto della periferia, che gira verso A intorno allo stesso centro G, dalla formula (*V*)

$$\left(\frac{BC}{AB} \cdot \frac{F}{P} \cdot \frac{DG}{GL} \right) t \ldots\ldots\ldots (V)$$

Applicando pertanto queste formule generali ad un caso particolare, sia il corpo *DNFM* che dee discendere pel piano inclinato AB un cilindro, sicchè $GL = \frac{1}{2} DG$, o $\frac{DG}{GL} = 2$, e si troverà che la velocità progressiva del centro alla rotatoria avrà la ragione

$$\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB} \cdot \frac{F}{P} : \frac{2BC}{AB} \cdot \frac{F}{P}$$

ovvero riducendola a minimi termini

$$AC \,.\, P - BC \,.\, F : 2BC \,.\, F$$

Supposto poi che l'attrito orizzontale sia il terzo della pressione cioè $F = \frac{1}{3} P$, conduce l'esposta teoria *Bernoulliana* a conchiudere, che il cilindro dee discendere di moto rotatorio perfetto finchè sia $AC = BC$, cioè fino a che il piano inclinato AB siasi inalzato all'angolo di 45°. Il che è contrario all'esperienza (*IV*), la quale dimostra che nelle enunciate circostanze discende il cilindro di moto rotatorio perfetto fino all'elevazione di soli 18° circa.

Segue il celebre *Eulero* le ipotesi *Bernoulliane*, salvo che, chiamando x lo spazio percorso dal corpo *DNFM*, v l'altezza competente alla velocità progressiva del centro G nella direzione GH parallela al piano inclinato AB, ed u l'altezza competente alla velocità progreſſiva del centro G nella direzione GH parallela al piano inclinato AB, ed u l'altezza dovuta alla velocità rotatoria di qualſivoglia punto M della periferia, prende per la forza dell'attrito nell'iſtante che il corpo percorre di moto progreſſivo lo ſpazietto dx, ed il punto M di moto rotatorio lo ſpazietto $\frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$, non $\frac{BC}{AB} \cdot Fdx$, ma $\frac{BC}{AB}\left(1-\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}\right)Fdx$, eſſendo ſecondo lui la celerità con cui ſtriſcia il punto D ſul piano AB $\sqrt{v}-\sqrt{u}$, cioè la differenza tra la progreſſiva e la rotatoria. Poſcia nominando c il raggio GD del corpo, e Phh il momento d'inerzia riſpetto al di lui aſſe, combina ſul principio delle ſollecitazioni iſtantanee le due equazioni ſeguenti

$$dv=\left(\frac{AC}{AB}-\frac{BC}{AB}\left(1-\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}\right)\frac{F}{P}\right)dx$$

$$du=\left(\frac{BC}{AB}\left(1-\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}\right)\frac{F.cc}{Phh}\right)\frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$$

dalle quali determina generalmente la ragion della velocità progreſſiva del centro G alla rotatoria del punto qualunque M nella periferia del corpo $DNFM$; anzi che poſto che ſia un cilindro, e poſto come ſopra $F=\frac{1}{7}P$, trova che la velocità progreſſiva alla rotatoria ſta nella ragione

$$3m+n+\sqrt{(9mm+6mn+9nn)}:4n$$

eſſendo il ſeno dell'angolo $ABC=m$, il coſeno $=n$, ed il ſeno tutto, cioè $m^2+n^2=1$. Ma ſiccome nella riferita proporzione l'antecedente è ſempre maggiore del conſeguente; così ne ſegue, che, ſecondo l'Euleriana teoria, nel cilindro diſcendente è la velocità progreſſiva del centro G, e vie più nelle ſucceſſive elevazioni del piano inclinato AB, maggiore della rotatoria che ha il punto M preſo nella periferia $DNFM$. Riſultamento ch'è più contrario all'eſperienza (*IV*) di quello che ſomminiſtra la poco fa eſpoſta teoria Bernoulliana.

L' Ab. *Boſſut* (*a*) riguardando anch'eſſo l'attrito DO come una forza che agiſca tangenzialmente alla circonferenza d' un cerchio omogeneo, quantunque ſupponga il moto progreſſivo del centro G indipendente dal rotatorio di un punto qualſivoglia della circonferenza $DNFM$; originato ſemplicemente il primo dalla differenza delle forze GH DO, ed il ſecondo dall' attrito DO; nulla di meno eſibiſce delle formule con cui rappreſenta i moti ſuddetti, le quali riſultano identiche alle Bernoulliane (U) (V) ſopra riferite. Ma non ſolo è contrario all' eſperienza il riſultamento finale dell' accennate teorie intorno a tale qualità di moto, che lo ſono pure le ipoteſi ſulle quali vengono appoggiate. E primieramente non è ſtato diſtinto da' mentovati Autori il caſo che il corpo rotondo diſcende di moto rotatorio perfetto da quello in cui diſcende di moto miſto, cioè di rotatorio e progreſſivo inſieme, come inſegna accadere l' eſperienza (V). Non è poi concepibile con *Bernoulli* che diſcendendo il corpo rotondo $DNFM$ anche di moto rotatorio miſto pel piano inclinato AB, rotarſi debba ad ogni iſtante intorno al punto d' appoggio A, come ſe da eſſo foſſe ſoſpeſo, e che in conſeguenza il moto di rotazione faccia che non ſia v la velocità progreſſiva del centro G, ma $v - \frac{GL}{DL} - u$; mentre l' eſperienza (VI) all' oppoſto dimoſtra che la velocità angolare invece di diminuire aumenta la progreſſiva del centro. Nè è inoltre ammiſſibile con *Eulero* che ſia $\frac{BC}{AB}\left(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}\right) F$ la forza dell' attrito che incontra il corpo diſcendendo lungo il piano inclinato AB, e non $\frac{BC}{AB} . F$, ora mai che ſiamo certi non avere influenza la velocità nell' attrito de' corpi in moto (IV). E' però bensì vero che all' attrito dee attribuirſi diſcendere il corpo rotondo $DNFM$ pel piano inclinato AB di moto rotatorio, ma ſolamente perchè impedendo eſſo il

Nn ij

(*a*) Trat. Element. di Meccanica. Vol. Sec. pag. 149. In Pavia MDCCLXXXVIII.

moto progressivo al corpo dalla prima elevazione fino a quella in cui acquista impeto alla discesa, fa che la verticale *GE* condotta dal centro di gravità *G* cada fuori del toccamento *D*, il che è conforme all'esperienza (*I*); nè v'ha bisogno che co' suddetti Autori, per ispiegare tale natura di movimento, d'immaginarsi che l'attrito agisca sul corpo in guisa di forza tangenziale riguardando in conseguenza l'attrito come una forza attiva ed estranea, e non come una semplice resistenza che tende soltanto a contrastare o distruggere parte della gravità relativa che anima il corpo a discendere pel piano inclinato.

Questa terza ipotesi, che serve di fondamento alle due teorie sopraesposte, cerca *Eulero* di convalidarla coll'esperimento (*III*), da cui rilevandosi che essendo (fig. II) $\frac{DF}{GF} > \frac{F}{P}$ il corpo *DEHI* di base rettangola discende lungo il piano inclinato *AB* di solo moto progressivo, ed essendo $\frac{DF}{GF} < \frac{F}{P}$ discende con moto misto di rotatorio e progressivo insieme, riflette „ Quoniam in hoc criterio elevatio plani inclinati „ seu angulus *ABC* non inesse deprehenditur, perspicuum est, „ quod corpus in una plani elevatione sine provolutione de„ scendat, idem in omni alia elevatione quacumque sine pro„ volutione esse descensurum . . . . . . Neque igitur in ju„ dicio hac de re ferendo spectari oportet rectam verticalem „ ex centro gravitatis corporis ductam, utrum ea extra ba„ sin an intra cadat, uti aliquibus auctoribus placuit; sed „ ex solo angulo *DGF* totum judicium est petendum. „ Ma se il corpo *DEHI* discende di solo moto progressivo qualora $\frac{DF}{GF} > \frac{F}{P}$, non trovasi esso forse, passato anche l'angolo di elevazione *ABC* competente alla resistenza dell'attrito, in grado di discendere prima che la verticale condotta dal centro di gravità *G* cada fuori della base *ED*? E posto ciò che è infallibile, non v'ha al certo ragione alcuna che nelle successive elevazioni debba, quantunque cada fuori della base la verticale suddetta, tentare il corpo *DEHI* di capovolgersi sull'estremità *D*, come non ve n'ha nel caso che si facesse astrazione della resistenza d'attrito. Che se il corpo

DEHI, qualora $\frac{DF}{GF} < \frac{F}{P}$, ſi diſpone al moto col capovolgerſi inſieme ſull' eſtremità *D* della baſe *ED*, è manifeſto che ciò dee attribuirſi, quanto alle elevazioni compreſe dalla prima che ſia maggiore dell'angolo *FGD* fino a quella che conviene all' attrito orizzontale, ſoltanto al cadere fuori della baſe la verticale che paſſa pel centro di gravità *G*; mentre in tali elevazioni del piano inclinato *AB*, per eſſere impedito dall'attrito il moto progreſſivo al corpo, ſi trova eſſo come ſe foſſe poggiato ſopra un piano orizzontale, e cadeſſe fuori della ſua baſe la verticale accennata. E ſiccome poi nelle ſucceſſive elevazioni a quella, ch'è dovuta all'accennato attrito, va il corpo *DEHI* lentamente acquiſtando impeto alla diſceſa, così non può ad un tratto perdere la tendenza di capovolgerſi inſieme ſull'eſtremità della baſe *D*, procedendo perciò di moto miſto: di che ne fa prova il vedere che di mano in mano nelle elevazioni maggiori dell'enunciata vie più il punto *D* ſi diſcoſta, a rivoluzione compiuta, dal corriſpondente ſul piano inclinato *AB*, in guiſa che finalmente nella verticale diſcende di ſolo moto progreſſivo. Non può adunque arguirſi dal ſoprammentovato eſperimento nè che l'angolo d'elevazione *ABC* ſia indifferente nel moto del ſolido *DEHI* che diſcende pel piano inclinato *AB*, nè che non debba averſi riguardo alla poſizione della verticale che paſſa pel centro di gravità *G*; ma bensì che eſſendo $\frac{DF}{GF} < \frac{F}{P}$, cioè l'angolo *DGF* minore dell' angolo di elevazione *ABC*, miſura dell'attrito orizzontale, non è ſollecitato il corpo *DEHI* dall'elevazione del piano inclinato *AB* uguale all'angolo *DGF* fino alla detta *ABC*, che di capovolgerſi ſull' eſtremità *D* della baſe *ED*, e che nelle ſucceſſive elevazioni maggiori è ſollecitato nello ſteſſo iſtante e di capovolgerſi e di procedere innanzi.

Dalle coſe eſpoſte ne ſegue pertanto che il corpo rotondo *DNFM* (fig. I.) poſto ſul piano inclinato *AB*, conſiderando anche eſteſo, com' è di fatto, il toccamento *ee*, capovolgeſi perchè è difficile non accada, che ne' ſolidi naturali in attrito non abbia *F* a *P* maggior ragione di $\frac{1}{2}ee$, cioè di

De a *GD*. Così trascurando le irregolarità che possono produrre nel moto del corpo *DNFM* le ripercussioni obblique dei successivi elementi all' *ee* che deggiono applicarsi sul piano inclinato *AB*, è chiaro che dee procedere il corpo di moto rotatorio perfetto, trovandosi ad ogni istante costituito nell' istesse circostanze; e ciò fino a quella elevazione che lo metta in istato di cominciar a sentire un moto progressivo pel piano medesimo, per cui, come è noto per esperienza, procede poscia di moto misto, ovvero di moto rotatorio imperfetto. Finalmente dovremo distinguere due casi in un corpo rotondo che cade lungo un piano inclinato, vale a dire quello in cui è dotato solamente di un moto rotatorio, e quello in cui ha insieme un moto progressivo; nel primo dee riguardarsi il moto progressivo del centro come conseguenza del rotatorio, e nel secondo come generato dal rotatorio, e da una potenza congiuntamente da cui viene sollecitato.

Lemma I.

Determinare le relazioni tra il tempo, la velocità, e lo spazio nel moto di un corpo rotondo DNFM (*fig. III.*) *poggiato sul piano orizzontale* AB, *e su cui agisce costantemente il dato peso* R *nella direzion tangenziale* RM.

Non tenendo conto pertanto del picciol peso F o della piccola parte di R che impiegasi a vincere l' attrito della seconda specie, ch' è lo stesso che considerare il toccamento *ee* d' incomputabile estensione; è chiaro che per le cose premesse il corpo rotondo *DNFM* muovesi di moto rotatorio perfetto ed uniformemente accelerato: di modo che il moto di qualunque punto D secondo l' ordine *DNFM* preso nella circonferenza *DNFM* sarà uguale al progressivo del centro G. Ciò posto si chiami il peso del corpo $DNFM = P$, il raggio $GM = c$; e sarà la distanza dal suo centro di gravità G al punto H centro di gravità comune ad esso ed al peso R, cioè $GH = \frac{c \cdot R}{P+R}$. E' certo ora che il moto di rotazione nel corpo *DNFM* è cagionato dalla somma de' pesi

P ed *R* che agiſca al punto *H* ſecondo la direzione verticale *HL* che cade fuori del toccamento *ee*; ma ſiccome ſta *GM* a *GH*, ovvero c a $\frac{c.R}{P+R}$, come $P+R$ a R: così è evidente che il predetto moto in tale circoſtanza equivale a quello che può produrre il ſolo peſo *R* che agiſca all' eſtremità *M* del raggio *GM*. Quindi ſe ſi dica u la velocità angolare di qualſivoglia punto *M* della circonferenza *DNFM*, e con *Eulero Pbb* il momento d' inerzia del corpo rotondo intorno al di lui aſſe o centro *G*, e g la forza della gravità che anima i corpi terreſtri; avremo per i principj generali della Dinamica eſpreſſa la relazione tra la velocità ed il tempo nel moto del corpo *DNFM* prodotto dal peſo *G* nell' equazione (*A*)

$$u = \frac{g.R.t}{Pbb:cc+R} \dots\dots\dots\dots (A)$$

la quale combinata con queſta (𝔔) che appartiene a' moti equabili, tali dovendoſi riguardare anche gli accelerati d' iſtante in iſtante

$$ds = udt \dots\dots\dots\dots\dots (\mathfrak{Q})$$

otterremo nell' equazione (*B*)

$$t^2 = \frac{2.s(Pbb:cc+R)}{g.R} \dots\dots (B)$$

la relazione tra lo ſpazio ed il tempo nel ſuddetto moto, e con ciò verrà determinato quanto appartiene sì al moto rotatorio che al progreſſivo del centro *G* nel corpo rotondo *DNFM* poſto dal peſo *R* in movimento. Il che ecc.

LEMMA II.

Determinare le coſe medeſime nel corpo DNFM (*fig.* 1.) *che diſcende ſtriſciando pel piano inclinato* AB, *perchè ſupponeſi poggiato con una baſe* DEm, *in cui cade la verticale* GE *condotta pel ſuo centro di gravità* G.

Poichè $\frac{AC}{AB}$. P è l'impeto che ha il corpo alla diſceſa. e

$\frac{BC}{AB}$. F l'attrito che incontra pel piano inclinato AB poſto eſſere F l'attrito orizzontale, ſarà adunque nella ſuppoſizione che il corpo diſcenda, $\frac{AC}{AB} \cdot P > \frac{BC}{AB} \cdot F$. E perciò chiamata v la velocità progreſſiva del centro G, o di qualſivoglia altro punto della maſſa, verrà eſpreſſa la relazione tra la velocità ed il tempo dall'equazione (C)

$$v = g\left(\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{BA} \cdot \frac{F}{P}\right) t \; \ldots\ldots \; (C)$$

e col ſoccorſo della ſurriferita formula ($\mathfrak{Q}$) ſcopriremo eſſer indicata la relazione tra lo ſpazio ed il tempo dall'equazione (D)

$$t^2 = \frac{2 \cdot s}{g\left(\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB} \cdot \frac{F}{P}\right)} \; \ldots\ldots \; (D)$$

Il che ecc.

PROBLEMA I.

Nelle elevazioni del piano inclinato AB (*fig. IV.*) *che il corpo rotondo* DNFM *diſcende di moto rotatorio perfetto; trovare le relazioni tra la velocità, lo ſpazio, ed il tempo sì di un qualſivoglia punto* M *della circonferenza* DNFM, *che del centro di gravità* G *del corpo medeſimo.*

Rappreſenti il raggio verticale GO il peſo aſſoluto del corpo, e ſi compia intorno ad eſſo il parallelogrammo $GHOS$ col lato GS perpendicolare, e col lato GH parallelo al piano inclinato AB; e ſarà GH lo ſforzo che ſollecita il corpo al moto progreſſivo; e GS quello che ſoſtiene il piano AB. Ma per ipoteſi eſſendo $\frac{AC}{CB} < \frac{F}{P}$, lo ſforzo GH è diſtrutto dall'attrito; e ſiccome, ſe il corpo rotondo foſſe fornito della baſe DLO, ſu la cui eſtremità LO cadeſſe la verticale GO, oppure foſſe applicato ſemplicemente un ſoſtegno al punto O, verrebbe

verrebbe impedito anche il moto rotatorio; così è manifesto che il solo sforzo GS ovvero HO è quello che produce questo movimento. E perciò il corpo rotondo $DNFM$ si trova costituito allo stesso modo come se poggiasse sopra un piano orizzontale, e sollecitato fosse al moto rotatorio dallo sforzo HO, ovvero da una forza tangenziale al punto M, che alla HO stia in ragione di GH a GM. Posto ciò, tenute le solite denominazioni, essendo lo sforzo $HO = \frac{BC}{AB} \cdot P$, ed $MG : GH = AB : AC$; sarà $\frac{AC \cdot BC}{AB \cdot AB} \cdot P$ la forza che in direzione tangenziale alla circonferenza $DNFM$ sollecita il corpo rotondo a discendere di moto rotatorio perfetto pel piano inclinato AB. Quindi mediante il Lem. 1 avremo determinato in queste equazioni (E), (F)

$$u = \frac{g \cdot AC \cdot BC \cdot t \cdot cc}{AB \cdot AB \cdot bb} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (E)$$

$$t^2 = \frac{2s \cdot AB \cdot AB \cdot bb}{g \cdot AC \cdot CB \cdot cc} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (F)$$

tutto ciò che riguarda sì al moto rotatorio di qualsivoglia punto M della circonferenza $DNFM$, che al moto progressivo del centro di gravità G del corpo rotondo discendente lungo il piano inclinato AB; il che ecc.

COROLLARIO I.

Dall'equazione (E) si rileva che nulla è la velocità rotatoria o la progressiva del centro, quando il piano inclinato AB è orizzontale, cioè quando $AC = o$, e nulla pure quando sia verticale, cioè qualora $BC = o$; e che va poi crescendo successivamente quanto più il piano è inclinato all' orizzonte: proprietà tutte che vengono confermate dagli esperimenti.

SCOLIO.

E' noto che se il corpo rotondo è un cilindro il momento d'inerzia intorno il suo asse, cioè il da noi supposto

Phh, è $P.\frac{cc}{2}$, e però $hh=\frac{cc}{2}$; e se è una sfera ovvero un qualsivoglia sferoide ellittico, si ha $Phh=P.\frac{2}{5}cc$, cioè $hh=\frac{2}{5}cc$. Sia però, a cagion d'esempio, il corpo *DNFM* discendente pel piano inclinato *AB* un cilindro, sicchè $hh=\frac{1}{2}cc$, e sia inoltre $s=13$ piedi Veronesi, onde con tale misura la forza della gravità $g=\frac{pie.\,28,34}{1''}$; e si troverà, fatte le debite sostituzioni nella formula *(F)*, che nelle elevazioni di 4°, 9°, 14°, il cilindro percorre di moto rotatorio perfetto il suddetto spazio di piedi 13 ne' tempi 2″ 65, 1″ 74, 1″ 40, i quali sono prossimamente uguali a' tempi 3″, 2″ 50, 2″ che somministra l'esperienza, e ciò tanto più se si faccia, come dee farsi, considerazione alla resistenza dell'aria. Il che può riscontrarsi nella mia Memoria sopra citata. Art. IV. §. 22.

PROBLEMA II.

Determinare il moto progressivo del centro G (fig. IV) *ed il rotatorio di un qualsivoglia punto* M *della circonferenza del corpo rotondo* DNFM *in quelle elevazioni del piano inclinato* AB *nelle quali discende di moto misto, o sia di moto rotatorio imperfetto.*

E poichè la velocità che acquista il centro *G* in conseguenza del moto rotatorio (Prob. I.) è espressa dalla quantità $\frac{g.AC.CB.t.cc}{AB.AB.hh}$, e quella che dipende dal moto progressivo (giacchè nelle supposte elevazioni del piano inclinato, essendo $\frac{AC}{CB}>\frac{F}{P}$, ha luogo questo moto) è espressa (Lem. II.) dalla quantità $g\left(\frac{AC}{AB}-\frac{BC}{AB}.\frac{F}{P}\right)t$; dunque l'intera velocità progressiva del centro *G*, che si chiami v, sarà dipendente dall'equazione *(G)*

$$v=g\left(\frac{AC}{AB}-\frac{BC}{AB}.\frac{F}{P}+\frac{AC.CB.cc}{AB.AB.hh}\right)t \;.\;.\;.\;. \;(G)$$

ſapendoſi per eſperienza (*VI*) che nel moto miſto la velocità progreſſiva del centro viene aumentata da quella che compete al moto rotatorio, la quale ſarà rappreſentata dall' equazione (*H*) come nel Prob. antecedente

$$u = \left(\frac{g . AC . BC . t . cc}{AB . AB . bb} \right) \ldots\ldots (H)$$

eſſendo eſſa in ogni caſo generata dalla ſola forza *HO*. Quindi combinando l' equazioni (*G*) (*H*) colla (𝔔) (Lem. I.) otterremo l' equazioni (*I*) (*L*)

$$t^2 = \frac{2s}{g\left(\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB} . \frac{F}{P} + \frac{AC . CB . cc}{AB . AB . bb} \right)} \ldots\ldots (I)$$

$$t^2 = \frac{2s . AB . AB . bb}{g . AC . CB . cc} \ldots\ldots (L)$$

e con ciò avremo determinato quanto ſpetta al moto miſto del corpo rotondo *DNFM* diſcendente pel piano inclinato *AB*; il che ecc.

COROLLARIO I.

Sia il ſeno dell' angolo d' elevazione *ABC*, cioè $AC = m$, il coſeno $BC = n$, ed il raggio $AB = \sqrt{m^2 + n^2}$, e poſto che il ſuddetto angolo ſia tale che il corpo rotondo *MDNF* diſcenda lungo il piano inclinato *AB* di moto miſto, le equazioni (*G*) (*H*) ci fanno conoſcere che la velocità progreſſiva alla rotatoria ſta nella ragione

$$\left(m - n . \frac{F}{P} \right) \sqrt{(m^2 + n^2)} + mn . \frac{cc}{bb} : mn . \frac{cc}{bb}$$

dal che appariſce che generalmente, eſſendo nel moto miſto $m - n . \frac{F}{P}$ quantità poſitiva, la velocità progreſſiva è ſempre maggiore della rotatoria, oltre l' elevazione in cui è $\frac{m}{n} = \frac{F}{P}$

fino alla verticale, annichilandosi anzi del tutto in siffatta posizione del piano la velocità rotatoria perchè diventa $BC = n = o$; le quali proprietà sono pure comprovate dall'esperienza esattamente.

COROLLARIO II.

Tenute le medesime denominazioni si rileva dalle equazioni (I) (L), che, nello stesso tempo, lo spazio percorso dal centro di gravità G del corpo rotondo $MDNF$ di moto progressivo, mentre cade di moto misto pel piano inclinato AB, allo spazio percorso da qualsivoglia punto M intorno alla circonferenza $MDNF$ sta nella ragione

$$\left(m - n.\frac{F}{P}\right)\sqrt{\left(m^2 + n^2\right)} + mn.\frac{cc}{hh} : mn.\frac{cc}{hh}$$

da cui, come appunto dimostra l'esperienza, si ricava che nel moto rotatorio imperfetto lo spazio percorso dal centro è nelle successive elevazioni del piano vie maggior del rotatorio percorso dal punto segnato nella circonferenza, essendo il primo uguale al secondo, sino a che $\frac{m}{n} = \frac{F}{P}$, e nullo il secondo se $BC = n = o$.

SCOLIO I.

Si ponga essere un cilindro il corpo rotondo discendente pel piano inclinato di moto misto, sicchè sia $hh = \frac{1}{2} cc$, sia poi $s = 13$ pie., $g = \frac{pie. 28, 34}{1''}$, ed $\frac{F}{P} = \frac{1}{4}$. Ciò stabilito si troverà coll' equazione (I), che nelle tre elevazioni di $19°$, $23°$, $48°$, impiega il cilindro a percorrere l' intero spazio di pie. 13 i tempi $1'' 16$, $1''$, $0'' 76$, che sono quanto può desiderarsi prossimi a $2''$ scarsi, $1'' \frac{1}{2}$ scarso, ed $1''$ scarso raccolti dall' esperienza nelle supposte circostanze, come può vedersi nel luogo citato allo Scolio del Problema antecedente.

Scolio II.

Per ultima applicazione della nostra Teoria ponghiamo che il cilindro nelle due elevazioni di 45°, 60° debba percorrere di moto progressivo lo spazio di pollici 18 $\frac{2}{7}$, e si scoprirà, eseguite le convenienti sostituzioni nella proporzione esposta al Corollario II. di questo Problema, che nello stesso tempo il punto fissato nella circonferenza del cilindro deve trascorrere intorno alla stessa poll. 13 nella prima elevazione, e poll. 9 $\frac{1}{7}$ nella seconda: risultato a cui l' esperienza (veg. la mia più volte mentovata Mem. Art. IV. §. 21 n. V.) corrisponde con tale esattezza che non può a mio parere in argomento di sì fatta natura cercarsi riscontro maggiore, onde certificare e porre a salvo d' ogni controversia e dubbietà la Teoria generale ch' ora abbiamo dichiarata intorno al Moto rotatorio spontaneo de' corpi rotondi discendenti lungo un piano inclinato.

Fig. I.

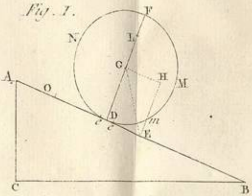

Fig. II.

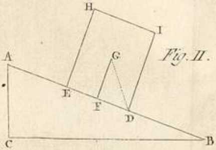

Fig. III.

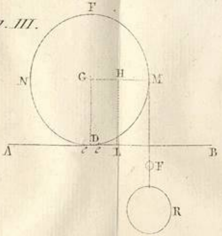

Fig. IV.