DELLA

VELOCITA' DELL' ACQUA PER UN FORO NEL FONDO DI UN VASO, CHE ABBIA UNO, O PIU DIAFRAMMI: E DELLA VELOCITA' PURE DELL' ACQUA PER UN TUBO VERTICALE CILINDRICO, O DIVERGENTE, ANNESSO A UN FORO NEL FONDO DI UN VASO SEMPLICE: E DEL SOFFIO CHE SI PROCURA NELLE FORNACI DI ALCUNE FERRIERE COL MEZZO DELL' ACQUA.

Del Sig. Teodoro Bonati.

1. Empito di acqua il vaſo priſmatico *ACDB* ſi apra un piccolo foro *M* nella ſponda verticale *DB*, e quant' acqua eſce per *M* altrettanta ne venga aggiunta contemporaneamente in *AB*, cosicchè nel vaſo l'acqua abbia la ſua ſuperficie ſuperiore coſtantemente in *AB*, e ſia la linea orizzontale *BG* lo ſpazio da ſcorrerſi in 1″ colla velocità media dell' acqua pel foro *M*. In appreſſo la ſuperficie dell' acqua nel vaſo ſia mantenuta coſtantemente più baſſa, come in *EF*, e ſia *FH* lo ſpazio da ſcorrerſi in 1″ colla nuova velocità media dell' acqua per *M* in queſto ſecondo caſo. Così le *BG*, *FH*, ecc. potranno eſprimere le velocità per *M* eſſendo l' acqua mantenuta prima in *AB*, poi in *EF*, ecc.

2. Perchè le molte ſperienze fatte danno, che le velocità medie per *M* ſono in ragion ſudduplicata delle altezze dell' acqua ſopra il foro, avremo $BG : FH :: \sqrt{(MB)} : \sqrt{(MF)}$. Dunque le velocità *BG*, *FH*, ecc. terminano a una parabola *MHG* di un qualche parametro *p*. Dunque $BG = \sqrt{(p \, . \, MB)}$, $FH = \sqrt{(p \, . \, MF)}$, ecc. E dicendo *M* l'aja del foro, *M* ſarà $M \, . \, BG = M\sqrt{(p \, . \, MB)}$ l'acqua, ch'eſce per *M* in 1″ coll' altezza *MB* ſopra il foro; ed $M \, . \, FH = M \, . \, \sqrt{(p \, . \, MF)}$ ſarà l'acqua per *M* in 1″ coll' altezza *MF*.

3. Se al foro M fatto per esempio in una lastra sottile ne sostituirò un altro o più grande, o più piccolo, però fatto esso pure in una lastra egualmente sottile, egualmente pulito, ecc., giusta le sperienze fatte le velocità pel nuovo foro saranno le medesime BG, FH, ecc. di prima, e termineranno alla medesima parabola MHG dello stesso parametro p; e le quantità d'acqua uscite pel foro in 1'' saranno diverse dalle prime solamente in ragione dell'aja del foro accresciuta, o diminuita.

4. Ma se chiuso il foro M se ne apra un altro N dello stesso diametro, che il foro M, ma armato di un tubo addizionale esterno dello stesso diametro che il foro, e lungo un diametro del foro, la sperienza ha mostrato, che le velocità medie per N saranno bensì parimente come le radici delle altezze dell'acqua sopra il foro, ma tutte saranno maggiori delle BG, FH, ecc. come sarebbero le Bg, Fh, ecc., che termineranno ad un'altra parabola di un parametro q maggiore del primo p.

5. Che se il foro sarà come m fatto nel fondo CD (*f.* 2), le velocità saranno pure in ragion sudduplicata delle altezze dell'acqua sopra il foro; e variandone il diametro termineranno tuttavia alla stessa parabola del parametro p se il foro sarà sempre in una lastra sottile, oppure termineranno alla parabola del parametro q se il foro sarà sempre armato di un tubo nella maniera accennata (4).

6. Il parametro riuscirà ancora diverso tanto pel foro m nel fondo, che pel foro M in una sponda (*f.* 1) se il foro sarà fatto in una lastra grossa, o verrà armato con un tubo esterno di diverse lunghezze, o con un tubo interno, o con un tubo conico convergente, o divergente, o con un imbuto di dentro, o se invece di essere nel mezzo del fondo sarà accanto a una sponda.

7. In tutti questi casi il parametro si può trovare con una sperienza. Essendo l'acqua dentro il vaso mantenuta come in AB si trovi quanta n'esce pel foro in un dato tempo, e quanta in conseguenza n'esce in 1''; e questa si dica $\mathfrak{Q}$. Trattandosi del foro M, e della parabola MHG dev'essere $\mathfrak{Q} = M . BG = M\sqrt{(p . MB)}$ (2); onde $p = \frac{\mathfrak{Q}^2}{M^2 . MB}$. Simil-

mente ſi pratichi in tutti gli altri caſi accennati; cioè per avere il parametro in ognuno dei caſi diverſi ſi divida il quadrato della quantità dell' acqua uſcita in 1'' pel prodotto del quadrato dell' aja del foro nell' altezza dell' acqua ſopra il foro. Il parametro, che riſulta dallo ſperimento fatto dal *Guglielmini* con un foro quadrato in una laſtra ſottile del lato di un quarto d' oncia del piede di Bologna, o ſia di lin. $3\frac{1}{2}$ del piede di Parigi, e coll' altezza dell' acqua ſopra il centro del foro di pi. 4.9.0, è di pi. $15\frac{1}{4}$. Dalla ſperienza del *Mariotte* (Diſcorſo 2. parte III) con un foro del diametro di 3 linee in una laſtra, della quale non ſi ſa la groſſezza, e coll' acqua alta 13 piedi, riſulta un parametro di p. 29. 5. 9. Dalla ſperienza del Sig. *Michelotti* con un foro del diametro di 3 pollici in una laſtra ſottile, e coll' altezza d' acqua di pi. 21.7.4 ſopra il foro riſulta il parametro di pi. $22.8\frac{4}{7}$. E dall' altra ſperienza dello ſteſſo Autore con un foro pure di 3 pollici, ma armato interiormente con un imbuto cicloidale riſulta il parametro di pi. 59.9 (Volume primo pag. 36, 105) minore di poco del noto parametro di pi. 60.4 della parabola, le cui ſemiordinate ſono lo ſpazio da ſcorrerſi in 1'' colla velocità del grave caduto dalla corriſpondente aſciſſa.

8. Mentre l' acqua è mantenuta in *AB* (*f.* 2.) la velocità pel foro *m* diſarmato non è già una velocità acquiſtata dall' acqua, che diſcenda coll' accelerazione dei gravi da *AB* fino in *m*, e che ſi muova per la ſola *cataratta*, o pel ſolo ſpazio *AEmFB*, che ſi concepiſca deſcritto colla rivoluzione di una iperbola, rimanendo il reſtante dell' acqua *AEmC*, *BFmD* affatto immobile, come hanno malamente fatto dire al *Newton* due grand' uomini (coſa ſorprendente!) *Giovanni Bernoulli* prima, e poi d' *Alembert*, ed in ſeguito altri. Si veda a queſto propoſito il § *Sed foramen* della prop. 36 del lib. II. del *Newton*; la parte II. del t. IV. dell' Idraulica di *Gio. Bernoulli*, e l' Enciclopedia alle parole *Cateracte*, *Hydrodinamique*. Le direzioni vere delle particole acquee da *AB* fino al foro ſono giuſta le linee punteggiate della fig. 3; e la velocità di eſſe particole da principio è piccola, e per buona parte della diſceſa è uniforme. Solamente quando arrivano a una certa piccola diſtanza dal foro paſſano preſto a

un moto sensibilmente maggiore, e con sempre nuove accelerazioni arrivano al foro m.

9. Questo mostra, che l' ultima velocità, che è al foro, è effetto di una pressione dell' acqua nelle vicinanze del foro, che incalza da tutte le bande l' acqua anteriore spremendola con una data velocità fuori del vaso in una guisa, son per dire, consimile a quella di un nocciolo di ciriegia, che vien cacciato con velocita dalle polpastrelle di due dita, che lo comprimano.

10. Codesta pressione, che sente l' acqua presso il foro dall' altr' acqua, che le sovrasta, e l' attornia, se il vaso fosse nel voto, deriverebbe unicamente dal peso dell' acqua dentro il vaso, e sarebbe proporzionale all' altezza della medesima acqua sopra il foro. Ma essendo il vaso nell' aria la pressione, che genera la velocità in m, è propriamente un risultato di tre pressioni, due delle quali sono cospiranti all' ingiù, ed una è contraria. Imperocchè l' acqua presso il foro oltre la pressione, che sente dall' acqua, ch' è in ragione dell' altezza DB della stess' acqua, sente ancora la pressione dell' aria, che gravita in AB come un' acqua alta 32 piedi, o alquanto più. Dicendo quest' altezza A, al foro m abbiamo veramente una pressione all' ingiù eguale a quella di un' acqua dell' altezza $DB+A$. Ma questa non può impiegarsi tutta in produrre velocità al foro perchè impedita in parte da un' altra pressione, che fa pure l' aria contro il fondo, e contro il foro m con direzione contraria alle due prime, cioè all' insù, e ch' è eguale a quella dell' acqua di un' altezza H, ch' è maggiore dell' altezza A, benchè di poco, cioè quanto importa il peso dello strato dell' aria ambiente il vaso, e dell' altezza DB dell' acqua nel vaso. Se il peso di codesto strato d' aria sarà $\frac{1}{900}$ del peso di un eguale strato di acqua, sarà $H = A + \frac{DB}{900}$.

11. Questa pressione H al di sotto del foro dee eliderne altrettanta dalle due pressioni $A+DB$ superiori al foro, cosicchè di queste non rimane di libera, ed atta a produrre velocità al foro, che la porzione residua $DB+A-H$; la quale poi

le poi (per essere $H = A + \frac{DB}{900}$) si riduce ad essere $\frac{899DB}{900}$; cioè quasi DB, cioè quasi quella sola pressione, che avremmo nel voto (10); e così si spiega bene, come un vaso pieno di acqua, e con un piccolo foro aperto nel fondo si sia votato in tempi sensibilmente eguali tanto nell'aria, che nella macchina pneumatica.

12. Per tutto questo converrà concludere, che la velocità dell'acqua ai fori, che pur dee dipendere da una pressione (9), sia da ripetersi dalle sole altezze prementi *residue*, e *libere* fatta che siane la detrazione delle pressioni opponentisi all'uscita dell'acqua; cosicchè avendo dimostrato la sperienza, che nei vasi semplici, come $ACDB$, posti nell'aria le velocità sono sensibilmente come le radici delle altezze dell'acqua sopra il foro, si dovrà stabilire che le dette velocità propriamente siano in ragione delle radici delle altezze prementi *libere* nel senso spiegato.

13. Quindi volendo fare l'ipotesi, che venga a mancare l'aria soltanto al di sotto del fondo CD, siccome allora l'altezza premente $DB + A$ sarà tutta libera, dovremo dire che la velocità al foro prima che mancasse l'aria sotto alla velocità dopo stia come le radici delle altezze prementi libere nei due casi, cioè $:: \sqrt{(DB + A - H)} : \sqrt{(DB + A)}$: E perciò se per esempio fosse $DB = 4$ piedi, ed $A = 32$ piedi, ed $H = 32$ piedi più una quantità trascurabile, le due velocità staranno $:: \sqrt{4} : \sqrt{(4+32)} :: 1 : 3$; il che fa vedere quanto recedano dal vero quei, che dicono indistintamente *poca* la resistenza, che fa l'aria ai getti d'acqua.

14. Poichè essendo il vaso nell'aria si può contare, che l'altezza premente libera sia DB (11), se il foro m sarà in una lastra sottile, cui competa il parametro p, come al *n*. 3, l'acqua per m in 1″ giusta il *n*. 2 sarà $m\sqrt{(p . DB)}$, e nel caso che mancasse l'aria solamente sotto il foro, nel quale l'altezza premente libera è $DB + A$, la velocità per m, o sia lo spazio da scorrersi in 1″ colla velocità media pel foro m (1) sarà $\sqrt{(p . (DB+A))}$, e l'acqua uscita per m in 1″ sarà $m\sqrt{(p . (DB + A))}$.

15. Premesse queste cose vengo al caso di un diaframma.

Al vaſo finora contemplato $ACDB$ col foro m ſia unito un altro vaſo $CEFD$ (f. 4) col foro n nel fondo, e così avremo un vaſo $AEFB$ con un diaframma CD. Chiuſo il foro n ſi empia tutto il vaſo di acqua, e perchè l'aria eſca tutta gioverà l'aprire un foro nella ſponda appena ſotto C da chiuderſi empito che ſarà tutto il vaſo. Si apra indi il foro n, e la parte ſuperiore $ACDB$ ſia mantenuta ſempre piena di acqua fino in AB. Verrò prima a un caſo particolare. I fori m, n ſieno eguali; e ſieno ambi fatti in laſtre egualmente ſottili, e così, che competa loro lo ſteſſo parametro. Sia $DB = 1$ piede, $DF = 100$ piedi, $A = 32$ piedi (10). Ciò poſto: l'acqua preſſo il foro n non può a meno di ſentire la preſſione all'ingiù di tutta l'acqua $FD = 100$. Da queſta preſſione ſi levi la contraria ſotto il foro $= A = 32$ piedi, e ſopra n avremo un'altezza premente libera non minore di piedi 68. In m poi non poſſiamo avere una preſſione maggiore di $DB + A$, oſſia maggiore di 33 piedi. Dunque appena aperto il foro n avremo per n più velocità, che per m, giacchè eſſendo le altre circoſtanze pari abbbiamo in n una preſſione libera non minore di 68, ed in m una preſſione non maggiore di 33. Dunque perchè i fori ſono eguali, uſcirà in egual tempo più acqua per n che per m. Dunque comincierà ſubito a formarſi un voto fra la ſuperficie come QP dell'acqua inferiore, che ſi abbaſſa, e la parte inferiore del diaframma CD. Nè codeſto voto $CQPD$ ceſſerà di creſcere ſe non quando coll'altezza diminuita FP dell'acqua ſopra il foro n ſi abbia per n una velocità minore di prima, e ridotta ad eſſere eguale alla velocità per m, com'è manifeſto.

16 Vengo ai termini generali. Si dica m l'aja del foro m, ed n l'aja del foro n. Sia p il parametro competente al foro m, e q ſia il parametro pel foro n. La preſſione dell'aria in $AB = A$, e la preſſione dell'aria al foro $n = H$. Per le coſe dette all'aprirſi del foro n avremo ſopra n un'altezza premente libera non minore di $DF - H$, ed una velocità non minore di $\sqrt{(q.(DF-H))}$, e perciò paſſerà per n in 1'' una quantità d'acqua non minore di $n\sqrt{(q.(DF-H))}$. Ed in m avremo una preſſione libera non maggiore di $DB+A$; e perciò una velocità non maggiore di $\sqrt{(p.(DB+A))}$,

e passerà per m in 1'' un'acqua non maggiore di $m\sqrt{(p.(DB+A))}$. Quindi finchè si troverà $n\sqrt{(q.(DF-H))} > m\sqrt{(p.(DB+A))}$ sarà manifesto, ch' è per passare, aprendo il foro n, più acqua per n, che per m; e che in conseguenza sotto m si formerà un voto.

17 Crescendo il voto, cala l' altezza dell'acqua sopra n, ed in conseguenza scema la velocità, e l' uscita dell' acqua per n. L'acqua siasi abbassata fino in QP. Allora la pressione residua e libera in n sarà $PF-H$, e la velocità in n sarà $\sqrt{(q.(PF-H))}$, e la quantità d'acqua per n in 1'' sarà $n\sqrt{(q.(PF-H))}$; ed intanto l'acqua per m continuerà ad essere in 1'' $m\sqrt{(p.(DB+A))}$ come prima. Quindi allora il voto cesserà di crescere quando si avrà $n\sqrt{(q.(PF-H))} = m\sqrt{(p.(DB+A))}$ perchè allora per n, e per m passeranno quantità eguali di acqua in tempi eguali.

18. Se sulle prime si avesse avuto appunto $n\sqrt{(q.(DF-H))} = m\sqrt{(p.(DB+A))}$, ciò avrebbe indicato che aprendo il foro n era per correre egual acqua per n, e per m, e che non vi sarebbe stato da aspettarsi voto veruno.

19. Ma se all'aprire il foro n si avesse $n\sqrt{(q.(DF-H))} < m\sqrt{(p.(DB+A))}$, cioè se la pressione $DF-H$ non fosse bastante per far uscire per n tant'acqua quanta nel medesimo tempo potrebbe sopravvenirne da m, in tal caso l'acqua inferiore al diaframma resta incalzata dalla superiore, e sforzata ad accrescere la sua velocità più di quello importi la sola pressione dell'altezza di acqua $DF-H$; ma nel tempo stesso la superiore avendo impiegata una parte della sua pressione $DB+A$ nello spingere al basso l'acqua inferiore, impiegherà soltanto il rimanente in produrre la velocità per m, e si ripartirà così, che tanto per m, che per n passi in un tempo copia eguale di acqua.

20. Per trovare quel tal grado di velocità pei fori m, n sia z quell'altezza di acqua, che corrisponde alla pressione, colla quale l'acqua superiore al diaframma unitamente alla pressione dell'aria in AB spinge l'inferiore; e si dica $b=DB$, $c=DF$. Pertanto la pressione sopra n sarà $DF+z=c+z$, dalla quale sottraendo la pressione contraria in n, cioè la pressione H, si avrà sopra n la pressione libera $c+z-H$. La pressione poi residua, e libera sopra m sarà $b+A-z$.

Quindi la velocità per n ſarà $\surd(q.(c+z-H))$, e la quantità d'acqua per n in 1'' ſarà $n\surd(q.(c+z-H))$. Come pure la velocità per m ſarà $\surd(p.(b+A-z))$; e la quantità d'acqua per m in 1'' ſarà $m\surd(p.(b+A-z))$; e dovendo eſſere eguali le dette due quantità di acqua, cioè dovendo eſſere $n\surd(q.(c+z-H))=m\surd(p.(b+A-z))$ ſi troverà

$z=\dfrac{m^2p.(b+A)-n^2q.(c-H)}{m^2p+n^2q}$, e la velocità pel foro , cioè

$\surd q.c+z-H=\dfrac{m\surd(qp.(b+c+A-H))}{\surd(m^2p+n^2q)}$, e la velocità pel foro m,

cioè $\surd(p.(b+A-z))=\dfrac{n\surd(pq.(b+c+A-H))}{\surd(m^2p+n^2q)}$, e l'acqua tanto per m, che per n in 1'' ſarà $\dfrac{mn.\surd(pq.(b+c+A-H))}{\surd(m^2p+n^2q)}$. E qui è da notarſi, che ſarà z poſitiva quando $n^2q.(c-H)<m^2p.(b+A)$, oppure $n\surd(q.(c-H))<m\surd(p.(b+A))$, oſſia (poichè $b=DB$, $c=DF$) $n\surd(q.(DF-H))<m\surd(p.(DB+A))$, che è il caſo, che qui ſi contempla (19); e che in conſeguenza ſarà $z=0$ quando $n\surd(q.(DF-H))=m\surd(p.(DB+A))$, ch'è il caſo del n. 18; e che ſarà z negativa quando $n\surd(g.(DF-H))>m\surd(p.(BD+A))$, ch'è il caſo del n. 16 cioè quello del voto ſotto il diaframma.

21. Le ſuddette formole ſono applicabili al caſo, che invece dell'acqua, e dell'aria ſi aveſſero altri fluidi, come ſarebbe ſe invece di acqua dentro il vaſo AF ſi aveſſe del mercurio; ed invece dell'aria fuori del vaſo ſi aveſſe un' acqua ſtagnante colla ſuperficie YZV. In queſto caſo ſiccome il mercurio peſa 14 volte quanto l'acqua, ſarebbe A un' altezza di mercurio $=\dfrac{ZB}{14}$, ed H un' altezza di mercurio $=A+\dfrac{BF}{14}=\dfrac{ZF}{14}$. Allora ſe l'altezza BF del vaſo non foſſe aſſai piccola, la quantità $A-H=-\dfrac{BF}{14}$ non ſi potrebbe traſcurare, come ſi può molte volte traſcurare nel caſo, che

trattiamo di acqua, e di aria, nel quale $A-H=-\frac{BF}{100}$.

22. Se i due fori saranno fatti in lastre egualmente grosse, o armati egualmente (6), cosicchè competa ad ambi uno stesso parametro p; e se inoltre si vorrà trascurare la quantità $A-H$, si avrà $z=\frac{m^2b-n^2c}{m^2+n^2}+A$ (20); e la velocità pel foro $n=\frac{m\sqrt{(p.(b+c))}}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$ e la velocità pel foro $m=\frac{n\sqrt{(p.(b+c))}}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$; e l'acqua tanto per l'uno, che per l'altro foro in $1''=\frac{mn\sqrt{(p.(b+c))}}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$.

23. Al $n.$ 20 abbiamo detto z quell'altezza di acqua, che corrisponde alla pressione, colla quale l'acqua superiore al diaframma unitamente all'aria premente in AB incalza, e spinge l'acqua inferiore al basso. Ora si osservi, che questa pressione z aggiunta all'altra dell'acqua sotto il diaframma, cioè la pressione $DF+z$, agisce non tanto al foro n, che sopra ogni parte del fondo EF egualmente; come pure anche contro le pareti interne del vaso, dove si uniscono al fondo; e che dal fondo andando in su la pressione dell'acqua contro le pareti scema in ragione della distanza dal fondo, cosicchè in qualunque punto R della sponda verticale la pressione interna dev'essere $DF+z-FR$; e che in conseguenza in D appena sotto il diaframma sarà $DF+z-FD=z$; e sarà anche quella, colla quale il diaframma è spinto dall'acqua inferiore all'insù; ed appunto quella, colla quale l'acqua inferiore si oppone alla discesa dell'acqua superiore pel foro m, com'è manifesto, e che viene equilibrata da quella parte di pressione, che già abbiamo detta z al $n.$ 20, e che s'impiega dall'acqua superiore per incalzare l'acqua inferiore quelle volte che sia $n\sqrt{(q.(FD-H))}<m\sqrt{(p.(DB+A))}$ (19).

24. La pressione poi esteriore in R, che deriva dall'atmosfera, è maggiore della pressione A quanto importa il peso dello strato d'aria dell'altezza BR; e supponendo questo peso $\frac{1}{900}$ del peso di un eguale strato di acqua, dicendo N

la pressione dell' aria in R sarà $N = A + \frac{BR}{900}$. Se la pressione dell' acqua interna in R sarà eguale alla pressione dell' aria pure in R, cioè se sarà $DF + z - FR = N$, allora fatto un foro in R si avrà l' equilibrio fra la pressione dell' acqua, che tende ad uscire pel foro, e la pressione dell' aria, che tende ad entrare pel medesimo foro. E siccome dal punto R in giù la pressione interna cresce più di quello cresca la pressione esterna quanto l' acqua pesa più dell' aria, facendo un foro fra R ed F, l' acqua per questo foro uscirà: ed al contrario perchè da R insù la pressione interna scema più che l' esterna, fatto un foro fra R e D, l' aria prevalendo s' insinuerà nel vaso.

25. Se si avrà un cannello comunicante $DHKT$, l' acqua in esso si fermerà in un tal punto K, dove la pressione dell' acqua in D sotto il diaframma $= z$ (23) unitamente alla pressione dell' acqua DI, o sia dell' altezza GK, sia eguale alla pressione dell' atmosfera sopra la superficie dell' acqua in K, la qual pressione in K è prossimamente $A + \frac{DB + GK}{900}$, che chiamerò L, onde sarà $z + GK = L$, e perciò $GK = L - z = L - \left(\frac{m^2p.(b + A) - n^2q.(c - H)}{m^2p + n^2q}\right)$ (20). Volendo considerare le A, H, L, cioè le pressioni dell' aria in AB, al foro n, ed in K (che differiscono di assai poco) come eguali fra di loro, avremo $GK = \frac{n^2cq - m^2bp}{m^2p + n^2q}$. Quindi se $n^2qc > m^2pb$ sarà GK positiva, e la superficie K sarà al di sotto della orizzontale DG; e quando $n^2cq = m^2bp$, la superficie K si troverà in G; e quando $n^2qc < m^2pb$, la GK sarà negativa, e ciò vorrà dire che la superficie dell' acqua nel cannello, che prima si trovava in K sotto l' orizzontale DG, ora si troverà in un punto K sopra la medesima orizzontale. Per esempio, si metta $p = q$, $n = 4m$, e $c = 4b$; sarà $CK = \frac{63b}{17} = 3\frac{12}{17}b$. Si metta invece $n = 2m$, e $c = \frac{1}{4}b$, e sarà $GK = o$. Si metta infine $n = 2m$, e $c = \frac{1}{4}b$; e sarà $GK = -\frac{2}{5}b = GK$.

26. Sarà però sempre $GK < FD$, cioè $\frac{n^2qc - m^2bp}{n^2q + m^2p} < c$. Infatti $- m^2pb < m^2pc$, ed aggiungendo n^2qc, sarà $n^2qc - m^2pb < m^2pc + n^2qc$, e perciò $\frac{n^2qc - m^2pb}{m^2p + n^2q} < c$.

27. Al n. 20 abbiamo, che la velocità per n è $\frac{m\sqrt{(pq.(b + c + A - H))}}{\sqrt{(m^2p + n^2q)}}$ essendo il vaso mantenuto sempre pieno fino in AB. Ora si cessi di aggiungere acqua nuova, e dopo un tempo t la superficie, ch'era in AB, siasi abbassata in LO, e nel susseguente tempicello dt sia passata in lo, e sia $DO = x$. Sarà $BO = b - x$, ed $Oo = - dx$. Per avere la velocità in n coll'acqua calata in LO basterà, che nella formola suddetta in luogo di $b (= BD)$ si sostituisca $x = DO$, e così la nuova velocità per n sarà $\frac{m\sqrt{(pq.(x + c + A - H))}}{\sqrt{(m^2p + n^2q)}}$ misura del viaggio, che scorrerebbe un corpo in 1″ colla nuova velocità per n. Codesto viaggio facendo $\frac{m^2pq}{m^2p + n^2q} = \mathfrak{Q}$, sarà $\sqrt{(\mathfrak{Q} \cdot (x + c + A - H))}$. Dicendo $1'' = K$ se faremo $K : dt :: \sqrt{(\mathfrak{Q}.(c + x + A - H))}$ al quarto termine $\frac{dt\sqrt{(\mathfrak{Q}.(c + x + A - H))}}{K}$, questo sarà lo spazietto, che scorrerà nel tempo dt un velo d'acqua, che esca dal foro n. Ed il prodotto di questo spazietto nell'aja n del foro, cioè $ndt\sqrt{(\mathfrak{Q}.(x + c + A - H))}$, sarà il volume d'acqua uscita dal vaso nel tempo dt, nel quale rimane vota d'acqua una eguale capacità $Lo = - fdx$ dicendo f la sezione del vase. Dunque avremo l'equazione $- fdx = ndt\sqrt{(\mathfrak{Q}.(x + c + A - H))}$; ed integrando per modo, che quando $t = o$ sia $x = b = DB$, avremo

$$t = \frac{nfK\sqrt{(m^2p + n^2q)}\left(\sqrt{(b + c + A - H)} - \sqrt{(x + c + A - H)}\right)}{mn\sqrt{(pq)}}.$$

Questo fa vedere, che se varierò i fori in maniera che il superiore m diventi l'inferiore, mentre l'inferiore n diventa il superiore, i tempi delle deplezioni saranno eguali.

28. Se $q = p$, ed $H = A$, sarà $t = \frac{nfK\sqrt{(m^2 + n^2)}}{mn\sqrt{p}}\left(\sqrt{(b + c)} - \sqrt{(x + c)}\right)$.

29. Quest'ultima formola è stata da me trovata conforme alle molte sperienze da me fatte col vaso cilindrico AD ($f.$ 5) del diametro di lin. 89 alto lin. 102, cui era annesso un tubo FG lungo lin. $436\frac{1}{2}$, e del diametro di lin. $17\frac{1}{2}$. Nel fondo CD, ch'è di latta, vi è un foro E, ed altri tre stanno in F tutti del diametro di lin. $3\frac{1}{7}$. Anche nell'estremo G chiuso con lastra di latta stanno tre altri fori del diametro dei primi. IKL è un galleggiante fatto con una tavoletta sottile IK, cui è annesso normalmente un regoletto KL segnato da K in L in pollici, e linee. Empito il vaso AC di acqua sino all'orlo, come pur anche tutto il tubo FG io applicava in AB il galleggiante, il cui regoletto KL avanzava tutto al disopra del vaso stando verticale. Aperto o il solo foro in E, o uno, o più fori in F con uno, o più fori in G, la superficie in AB si deprimeva insieme col galleggiante, ed il regoletto, che rimaneva sempre vicino alla sponda, mi dinotava i decrescimenti, il tempo de' quali veniva misurato colle oscillazioni di un pendolo di un orologio, delle quali 84 si compivano in un minuto primo. Tuttochè il tubo FG fosse di un'ampiezza tenue, le sperienze mi sono risultate sempre conformi alla formola.

30. Passerò a parlare di ciò, che dee accadere qualora la parte $CEFD$ ($f.$ 4, e 6.) inferiore del vaso contenga in parte dell'aria. Essendo tutto il vaso $AEFB$ voto di acqua, ed il foro m aperto, ed il foro n chiuso, si versi acqua in AD, e si mantenga alta fino all'orlo AB. Dopo un qualche tempo l'acqua caduta da m abbia acquistato sopra il fondo EF l'altezza FO. L'aria, che prima occupava tutto lo spazio prismatico CF compressa come l'aria esterna perchè con essa equilibrata, ora ridotta ad un volume minore, e perciò più compressa, avrà una forza espansiva maggiore, e perciò farà tutt'all'intorno, ed anche al foro m all'insù una pressione maggiore di prima, cioè maggiore di una pressione di un'acqua dell'altezza A di 32 piedi; e questa pressione sarà maggiore di prima (giusta le sperienze fatte) in ragione inversa del volume, cosicchè facendo $DO : DF :: A$ al quarto termine $\frac{A.DF}{DO}$, sarà questa la pressione dell'aria CF ridotta al volume CO contro il foro m; mentre che la pressione

dell'acqua

dell'acqua in m all'ingiù è quella di un'acqua dell'altezza $DB+A$. Quindi qualora crescendo l'altezza FO la pressione in m dell'aria interna all'insù divenga eguale alla pressione dell'acqua superiore all'ingiù, cioè qualora divenga $\frac{A.DF}{DO}$ $=DB+A$, cesserà la discesa dell'acqua per m, il che perciò accaderà quando $DO=\frac{A.DF}{DB+A}=\frac{Ac}{b+A}$ (dicendo $DB=b$, $DF=c$); onde in tal caso $FO(=DF-DO)=c-\frac{Ac}{b+A}=\frac{bc}{b+A}$. Posto per esempio $b=1$ piede, $c=$ pi. $2\frac{1}{4}$ essendo $A=$ pi. 32, sarà $FO=\frac{1}{11}$ di piede.

31. Per potere allora empire di acqua anche la parte CO del vaso si faccia un foro r nella sponda del vaso appena sotto il diaframma. Allora l'aria interna resa comunicante, e perciò equilibrata colla esterna non farà in m all'insù, che la pressione A, la quale cederà alla pressione contraria $DB+A$ dell'acqua superiore, e dell'atmosfera all'ingiù; e così l'acqua per m potrà discendere. Empita per tal modo la parte inferiore del vaso fino per esempio in GH si chiuda il foro r, ch'era stato aperto, e si apra il foro n. Poichè l'aria CH in quel momento è compressa come l'aria esterna (colla quale comunicava) non premerà tutt'all'intorno, cioè e contro il foro m, e sopra la superficie GH, che colla pressione A (qui metterò eguale la pressione dell'aria esterna da AB fino in n) onde la pressione libera al foro m sarà $DB+A-A=DB$; e la pressione residua, e libera dell'acqua al foro n sarà $A+HF-A=HF$; e dicendo p il parametro del foro n, l'acqua per m in 1'' sarà $m\sqrt{(p.DB)}$, e l'acqua per n sarà $n\sqrt{(q.HF)}$.

32. Se, mantenendo la parte AD sempre piena di acqua fino all'orlo, l'acqua per m in questo caso sarà eguale all'acqua per n, cioè se sarà $m\sqrt{(p.DB)}=n\sqrt{(q.HF)}$, la superficie dell'acqua sotto il diaframma si manterrà in GH.

33. Che se sarà l'acqua per n maggiore che l'acqua per m, ossia se sarà $m^2p.DB<n^2q.HF$, la superficie GH si deprimerà. Questa sia calata fino in LM. L'aria stessa, che prima occupava lo spazio CH, ora ne occupa un maggiore

CM in ragione della DH alla DM, ed in conſeguenza tanto minore ſarà la ſua forza eſpanſiva, oſſia la ſua preſſione al foro m, e ſulla ſuperficie dell' acqua abbaſſata in LM. Quindi ſe ſi farà $DM : DH :: A$ al quarto termine $\frac{A.DH}{DM}$, queſto ſarà la preſſione dell' aria CM contro m, e ſopra LM; e perciò la preſſione reſidua dell' acqua ſopra il foro m ſarà $DB + A - \frac{A.DH}{DM}$; e la preſſione reſidua in n ſarà $\frac{A.DH}{DM} + MF - A$; e la ſuperficie LM ceſſerà di abbaſſarſi quando l' acqua per m ſarà eguale all' acqua per n, cioè quando ſarà

$$m\sqrt{(p.(DB + A - \frac{A.DH}{DM}))} = n\sqrt{(q.(\frac{A.DH}{DM} + MF - A.))}$$

34. Perciò ſe oltre le denominazioni fatte ſi dica $FH = i$, $FM = x$, ſarà $DH = c - xi$, $Dm = c - x$; e ſoſtituendo ſi avrà

$$m\sqrt{(p.(b + A - \frac{A,c-i}{c-x}))} = n\sqrt{(q.(\frac{A.(c-i)}{c-x} + x - A))},$$ d' onde

viene $x^2 - x.(A + c + \frac{m^2p.(A+b)}{n^2q}) = -Ai - \frac{m^2p.(bc + Ai)}{n^2q} =$ $x^2 - 2fx = -g^2$, cioè $x = f \pm \sqrt{(f^2 - g^2)} = FM$ altezza, che in appreſſo ſarà permanente; e ſoſtituito queſto valore della x in uno dei membri della equazione, ſi avrà la quantità di acqua per m, o per n in 1''.

35. Ma ſe nel caſo del $n.$ 31 l' acqua per n ſarà minore dell' acqua per m, o ſia ſe $m^2p.DB > n^2q.HF$ (33), allora l' acqua GF dovrà creſcere in altezza. Sia arrivata fino in IK. L' aria CH ſarà ridotta allo ſpazio minore CK, e perciò facendo $DK : DH :: A$ al quarto termine $\frac{A.DH}{DK}$, queſto ſarà la preſſione dell' aria CK al foro m, e ſulla ſuperficie IK, onde la preſſione reſidua, e libera in m ſarà $DB + A - \frac{A.DH}{DK}$; e la preſſione reſidua in n ſarà $\frac{A.DH}{DK} + KF - A$. Quindi

l'acqua per m sarà $m\surd(p.(DB+A-\frac{A.DH}{DK}))$, e l'acqua per n sarà $n\surd(q.(\frac{A.DH}{DK}+KF-A))$, cioè (posto $FK=x$) $m\surd(p.(b+A-\frac{A.(c-i)}{c-x}))=n\surd(q.(\frac{A.(c-i)}{c-x}+x-A))$, equazione del n. 34, che somministra pure $x=f\pm\surd(f^2-g^2)=FK$.

36. Quindi perchè $FK>FM$ dovrà essere $x=f-\surd(f^2-g^2)=FM$; ed $x=f+\surd(f^2-g^2)=FK$.

37. Fin qui ho parlato di vasi con un diaframma. Ora vengo ai vasi con due diaframmi. Sia pertanto il vaso $AGHB$ (f. 7) con due diaframmi CD, EF, ed i fori m, n, e. Chiuso il foro e si empia tutto il vaso di acqua. Indi aperto il foro e mentre l'acqua esce dal vaso se ne aggiunga tanta in AB, onde la superficie superiore si conservi sempre in AB. Sia $DB=b$, $DF=c$, $FH=d$. Le aje dei fori si dicano rispettivamente m, n, e. Il parametro competente al foro m sia p; quello del foro n sia q; e quello del foro e sia r. La pressione dell'aria in AB sia A; e l'altra in e sia $H=A+\frac{BH}{900}$ (10).

38. Suppongo subito, che non vi sia voto veruno, e che anzi al foro m l'acqua superiore incalzi l'inferiore con una pressione z; e che al foro n l'acqua superiore incalzi pure l'inferiore con una pressione t. L'acqua per m sarà $m\surd(p.(DB+A-z))=m\surd(p.(b+A-z))$. E l'acqua per n sarà $n\surd(q.(FD+z-t))=n\surd(q.(c+z-t))$. E l'acqua per e sarà $e\surd(r.(HF+t-H))=e\surd(r.(d+t-H))$. Queste tre quantità d'acqua nello stato di permanenza devono esser eguali. Dunque $m\surd(p.(b+A-z))=n\surd(q.(c+z-A))=e\surd(r.(d+t-H))$, d'onde si ricava $z=\frac{(m^2n^2pq+e^2m^2pr).(b+A)-e^2n^2qr.(c+d-H)}{e^2m^2pr+e^2n^2qr+m^2n^2pq}$,

$$t=\frac{m^2n^2pq.(b+c+A)-e^2r.(m^2p+n^2q).(d-H)}{e^2m^2pr+e^2n^2qr+m^2n^2pq}.$$

39. Se sarà z quantità positiva sostituendo il suo valore nella formola $m\surd(p.b+A-z)$ si troverà questa

$\frac{emn\sqrt{(pqr.(b+c+d+A-H))} = emn\sqrt{(pqr.(BH+A-H))}}{\sqrt{(e^2m^2pr+e^2n^2qr+m^2n^2pq)}}$ che è la quantità d'acqua, che uscirà per m in 1'', ed in conseguenza anche per n, e per e contemporaneamente; e questa formola divisa per l'aja del foro m, cioè divisa per m darà la velocità pel foro m; e divisa per n darà la velocità pel foro n; e divisa per e darà la velocità pel foro e.

40. Crescendo la $c(=DF)$, o la $d(=FH)$, o tutte e due, a segno che si abbia $z=o$, ciò vorrà dire, che l'acqua sopra m non incalza più la inferiore, e che la pressione $b+A$ è tutta libera per accelerare l'acqua al foro m; e l'acqua scorrente per m (ed in conseguenza anche per gli altri fori n, e) a ogni 1'' sarà $m\sqrt{(p.(b+A))}$.

41. Crescendo anche più la quantità $c+d$ il trovato valore della z sarà negativo, il che indicherà inoltre, che sotto m si avrà un voto, e tuttavia per ogni foro scorrerà la stessa quantità di acqua $m\sqrt{(p.(b+A))}$ in ogni 1''.

42. Così se si troverà il valore della $t=o$, sapremo che al foro n non esiste il supposto incalzamento dell'acqua superiore sulla inferiore; e se anzi sarà t negativa, sapremo di più che sotto n si avrà un voto.

43. Se essendo il valore succennato t o zero, o negativo sarà quello della z o zero, o negativo, la quantità dell'acqua per ciaschedun foro sarà sempre l'anzidetta $m\sqrt{(p.(b+A))}$, la quale divisa per m, o per n, o per e darà la velocità o pel foro m, o pel foro n, o pel foro e.

44. Ma se sarà $t=o$, oppure t negativa, ma insieme z positiva, avremo in m la pressione libera $DB+A-z=b+A-z$, ed in n la pressione libera $FD+z=c+z$, e l'acqua per m in ogni 1'' sarà $m\sqrt{(p.(b+A-z))}$, e l'acqua per n sarà $n\sqrt{(q.(c+z))}$, e nello stato di permanenza sarà $m\sqrt{(p.(b+A-z))} = n\sqrt{(q.(c+z))}$; e così si avrà il valore della z non più dipendentemente dalle quantità d, e, r, H, come prima (38), e sarà $z=\frac{m^2p.(A+b)-n^2qc}{m^2p+n^2q}$; e la quantita d'acqua pei due fori m, n (ed in conseguenza anche pel foro e) sarà $\frac{mn\sqrt{(pq.(b+c+A))}}{\sqrt{(m^2p+n^2q)}}$, la quale divisa per uno dei tre fori dà la velocità per quel tal foro.

45. Dalle cose dette fin qui si può vedere, che pel caso di tre diaframmi CD (f. 8), EF, GH coi fori f, g, b, i, ai quali competano i parametri p, q, r, s, essendo $DB = b$, $DF = c$, $FH = d$, $HK = e$, nel caso di niun voto dicendo z, t, u gl' incalzamenti ai fori f, g, b, avrà luogo l' equazione $f\sqrt{(p.(b+A-z))} = g\sqrt{(q.(c+z-t))} = b\sqrt{(r.(d+t-u))} = i\sqrt{(s.(e+u-H))}$, dalla quale stando sulle tracce esposte si potranno ricavare e la quantità d' acqua per ogni foro in 1'' nello stato di permanenza, e le velocità per ciaschedun foro non tanto nel supposto caso di niun voto, che in qualunque combinazione di uno o più voti.

46. E lo stesso io dirò del caso di quanti diaframmi venissero proposti.

47. Passerò ai vasi, che hanno un tubo annesso a un foro fattovi nel fondo. I primi cinque vasi espressi colla fig. 9. sieno mantenuti sempre pieni di acqua fino all' orlo. Le altezze A, B, C, D, E sieno tutte $= b$. I fori F, G, H, I, K, L sieno eguali fra di loro. Le altezze eguali GL, HM, IN, KO si dicano ognuna $= c$. Ai fori F, G, L, I, N competa lo stesso parametro p. Il tubo HM sia cilindrico. Del foro I sia maggiore il foro N, ed a questo sia eguale la bocca inferiore O del tubo divergente KO.

48. Se GL ($= c$) sarà maggiore di $A (= b)$, la velocità per G sarà maggiore della velocità per F. La velocità per H è maggiore anche della velocità per G. La velocità per I è maggiore della velocità per G, e può esser anche maggiore della velocità per H secondo che N è più, o meno grande di I. E la velocità per K è maggiore della velocità per I. Così mostra la sperienza. D' onde nasce tanta varietà di velocità pei fori F, G, H, I, K, che sono tutti eguali, e con altezze eguali d' acqua sopra ognuno d' essi?

49. Giusta il n. 2 la velocità per F è $\sqrt{(p.b)}$. E giusta il n. 20 la velocità per G è $\frac{n\sqrt{(pq.(b+c+A-H))}}{\sqrt{(m^2p+n^2q)}} =$ (per essere qui $q = p$, $n = m$, ed $A - H$ quantità trascurabile) $\frac{\sqrt{(p.(b+c))}}{2}$. E tutte le volte, che sia $c > b$, come qui si suppone, si trova $\sqrt{(p.\frac{(b+c))}{2}} > \sqrt{(p.b)}$. Ecco adunque una ra-

gione, onde la velocità per G è maggiore della velocità per F.

50. La velocità per H dev'esser maggiore che per G perchè l'acqua uscita da G si dilata per riunirsi in L, e per sofferire in L il ritardo dei filamenti contrarj iL, oL, che dee rendersi sensibile anche in G. Ma l'acqua uscita da H arriva unita fino in M, dove non soffre il conflitto dei filamenti contrarj. Dunque si vede ancora, che per H l'acqua sarà più libera, e più veloce, che per G.

51. Nel caso dei fori I, N la formola del *n.* 20 applicata al caso del foro I dà (fatta $q=p$, e trascurando $A-H$) $\frac{n\sqrt{(p.(b+c))}}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$, velocità per I. Ed abbiamo la velocità per $G=\sqrt{(p.\frac{(b+c)}{2})}$. E essendo $n>m$ per essere $N>I$, si trova $\frac{n\sqrt{(p.(b+c))}}{\sqrt{(m^2+n^2)}}>\sqrt{(p.\frac{(b+c)}{2})}$. Dunque egli è pure manifesta una ragione, onde l'acqua per I sia più veloce, che per G.

52. Anche in O manca quel contrasto dei filamenti, che si ha in N, con che si vede ancora, che la velocità per K dev'esser maggiore, che per I.

53. Il *Mariotte* nel Discorso secondo della parte terza del moto delle acque disse, che la velocità in H essendovi il cannello è media proporzionale tra la velocità in H senza il cannello, e la velocità, che si avrebbe al foro Q eguale alla bocca M fatto nel fondo del vaso PQ alto come il vaso CM.

54. Lo *s' Gravesand* (lib. 3. cap. 9) vedendo, che per H la velocità è maggiore col cannello, che senza, non pensando punto alla pressione dell'aria, ricorse alla coesione dell'acqua del cannello in H coll' acqua del vaso: e disse di aver trovato colla sperienza, che la velocità per M (ed in conseguenza anche per H) è quasi la stessa, che per Q, essendo i vasi mantenuti sempre pieni. Quindi converrebbe dire, che la colonna acquea MH colla sua coesione tira a sè l'acqua del vaso C con una forza proporzionale al suo peso, cosicchè la pressione dell'acqua del vaso dell'altezza C, e la coesione dell'acqua in H eguale al peso della colon-

na HM unite insieme in H equivagliano alla pressione di un' acqua dell'altezza $MH + C$, ed eccitino in H una velocità eguale alla velocità prodotta in Q dall'acqua dell'altezza PQ eguale all'altezza $MH + C$.

55. Anche *Daniello Bernoulli* pensa a tutt'altro, che al peso dell'atmosfera. La sua teoria (§ 23, 24 della Sez. 3 dell' Idrodinamica) importa, che la velocità per M eguagli la velocità per Q come ammette *s' Gravesand*, e che la velocità per Q sia quella di un grave caduto dall'altezza PQ. Sarebbe per ventura scusabile se avesse riposato in questo sulla sperienza asserita dallo *s' Gravesand*, ch'era conforme alla sua teoria. Ma avendola egli ripetuta trovò, che la velocità per H non era altrimenti eguale alla velocità per Q, ma *quasi media* (pag. 56.) fra la velocità per F, e la velocità per Q (53): e qui senz'altro ne attribuisce il divario agl' impedimenti. Viene egli pure ad adottare la coesione dell' acqua. Infatti considerando un tubo inclinato, irregolare $AfGD$ annesso a una vasca NQ (*f*. 10) mantenuta sempre piena di acqua mentre questa scorrendo pel tubo va ad uscire pel foro H, cerca la pressione dell'acqua contro le pareti del tubo in un qualunque sito F. Stando alla sua teoria, la velocità per H è quella dell'altezza SD, o sia quella di un grave caduto per SD. E supponendo il tubo troncato in FG la velocità per FG sarebbe quella dell' altezza $RF = a$. E l'altezza della velocità attuale per la sezione FG del tubo non troncato sia b. Il *Bernoulli* vuole, che la ricercata pressione dell'acqua in FG sia quella di un'acqua stagnante dell' altezza $a - b$ (§ 10. Sez. XII).

56 Volendo applicare questa formola a un'altra sezione fg, sarà a l'altezza della velocità per fg supposto il tubo troncato in fg, cioè sarà $a = Cg$; e sarà b l' altezza della velocità attuale per la sezione fg del tubo non troncato; e la pressione ricercata in fg sarà qui pure $a - b$. Ma si può dare. che sia $b > a$, come se la sezione fg fosse eguale al foro H; perchè in questo caso la velocità attuale per fg eguaglia la velocità per H. Ma questa è maggiore della velocità supposta in fg col tubo troncato in fg. Dunque anche la attuale in fg è maggiore della supposta in fg; e perciò $b > a$. A maggior ragione si trova $b > a$ quando la se-

zione fg fosse minore del foro H. Pertanto nei casi di $b>a$ la formola $a-b$ è negativa *atque sic* (dice il *Bernoulli* §. 11 Lez. XII.) *pressio in suctionem mutatur*, *idest latera canalis introrsum premuntur*. E se a un foro in f starà appeso un cannello fr pieno d' acqua fino al punto t a livello del foro H, l' acqua ft non discenderà impedita (dice l' Autore) *ab attractione aquæ præterfluentis* : ed ecco un' *attrazione* dell' acqua in f analoga alla *coesione* dello *s' Gravesand* dell' acqua in H (*f*. 9) (54).

57 Questo al certo è un attribuir una forza eccessivamente troppa alla *coesione*, all' *attrazione* dell' acqua. Si tuffi un dito nell' acqua, e poi si ritiri fuori tenendolo rivolto in giù, e si vedrà che al suo estremo si forma una goccia, che cresce; e quando questa arriva ad esser lunga tre linee circa, si stacca. Dunque al più si potrà accordare all' acqua una coesione, od un' attrazione eguale al peso di un' acqua alta tre linee; ma non mai a quello di un' acqua dell' altezza HM (*f*. 9), o dell' altezza ft (*f*. 10), che può essere di piedi.

58 Quindi è, che quantunque le formole Bernoulliane intorno ai diaframmi, e nel caso di $n\sqrt{(q.(DF-H))} < m\sqrt{(p.(DB+A))}$ (19) s' accostino talvolta al vero (cioè quando i parametri sieno uguali, ed in oltre sia $A-H$ quantità trascurabile), altre volte però se ne discostano notabilmente, appunto quando non si può trascurare la quantità $A-H$, come si è veduto al n. 21, perchè i principj, d' onde esse formole discendono, non sono i giusti (57).

59 Di molto ancora recedono dal vero le formole Bernoulliane trattandosi dei tubi divergenti contemplati qui sopra. Se al vaso DN (fig. 9) si adatterà un cannello comunicante $YXoZ$, l' acqua in questo si fermerà in un punto Z, dove la pressione dell' atmosfera uguaglia le due pressioni contrarie, una della colonna XY, e l' altra, ch' è la pressione laterale dell' acqua in Y; e si è mostrato al n. 26 che questo punto Z sarà sempre più alto del foro N. Ma adattando un simile cannello al vaso E, che porti il tubo divergente KO, l' acqua in questo cannello si ferma in un punto T più basso della bocca O. Una ragione di questo è, che l' acqua per K è più libera, che per I, perchè in I sente

sente la remora, che nasce dal conflitto dei filamenti in N, e per questo la pressione laterale dell' acqua sotto K è minore, che sotto I, cioè in Y. Quindi per far equilibrio coll' atmosfera premente in T vi vuole una colonna d' acqua KV maggiore della colonna YX, acciocchè colla pressione laterale sotto K minore, che sotto I, faccia equilibrio colla pressione dell' atmosfera in T, che si può dire eguale alla pressione dell' atmosfera in Z.

60 Di quanto T nei casi diversi stia più basso di O finora non saprei determinarlo, che con una serie di sperimenti. Ne ho fatto alcuni pochi, e qui ne dirò uno.

61 Era $aK =$ lin. 102; $Kx =$ lin. 15; $xO =$ lin. 663; il diametro in $K =$ lin. 5, ed il diametro in O di lin. $10\frac{1}{2}$. la porzione TR del cannello era di vetro. Chiusa la bocca O, ed empito tutto di acqua fu riaperta la bocca O; e quando l' acqua del vaso si fu abbassata tre pollici, e fu arrivata in c, l' acqua nel cannello ebbe la superficie in T lin. 1079 più bassa del punto x, cioè p. 7. 5. 11.

62 Chiuso il cannello xeR, ed empito di nuovo il tubo divergente, ed il vaso, e riaperta la bocca O, l' acqua si è abbassata tre pollici, cioè da a in c, in 12 oscillazioni di un orologio, delle quali 144 fanno un minuto primo; ed in altre quattro oscillazioni si è abbassata un altro pollice; con che si trova, che l'acqua del vaso mentre arrivò in c avea prossimamente una velocità da scorrere $\frac{1}{4}$ di pollice per ogni 1″. E perchè il diametro del vaso è di lin. 89 essendo il diametro in x di lin. 5, la velocità per x riesce di poll. 190 per ogni 1″; alla qual velocità compete l' altezza $\frac{(190)^2}{724}$ (essendo poll. 724 il noto parametro pei gravi cadenti) $=$ poll. 50, poco meno.

63 E perchè la sezione in x alla sezione in O : : 5 : $(10\frac{1}{2})^2$: : 100 : 441, la velocità per O era di scorrere poll. 43 per ogni 1″.

64 Troncato in x il tubo xO, la velocità dell' acqua abbassatasi da a in c era di scorrere poll. $\frac{16}{115}$ per ogni 1″, ed in conseguenza la velocità in x col tubo troncato fu di scorrere poll. 44 per ogni 1″.

65 Vediamo quanto questo corrisponda alla teoria, ed ai precetti del *Bernoulli*. La sua teoria importa, che la velocità per O, e l' altra per x del tubo troncato in x fossero quelle di un grave caduto dalle altezze cO, e cx: poichè $cO =$ lin. 744 $=$ pol. 62; e $cx =$ lin. 81 $=$ pol. 6. 9, le velocità delle due cadute saranno $\sqrt{(724.62)}, \sqrt{(724.6\frac{3}{4})}$, cioè pol. 211, e poll. 69 ben diverse dalle osservate, che furono di pol. 43, e di pol. 44 ed è osservabile, che queste velocità avutesi si scostano ancora dalla ragion sudduplicata delle altezze, e che se ne discostano così, che all' altezza maggiore corrisponde una velocità minore.

66 L' Autore al §. 12 della sez. XII. dà la formola $\frac{mm}{nn}a - c$ per l' altezza di x sopra la superficie dell' acqua in T, essendo $a = cO$, $c = cx$, m la sezione O, ed n la sezione x. Dal n. 61 si ricava $a =$ pol. 62, $c =$ pol. 6. 9, ed $m : n :: 441 : 100$. Quindi sostituendo risulta T più basso di x piedi 100 meno un pollice; dovechè nella sperienza T fu più basso di x soli pi. 7. 5. 11: divario esorbitante.

67 S' era accorto il *Bernoulli*, che la sua teoria si scostava troppo dal fatto; ma non per questo sospettò della teoria, e soltanto incolpò gl' impedimenti, che ritardano la velocità per O; e per la pratica disse, che in luogo di $\frac{mm}{nn}a$ della formola bastava mettere l' altezza della velocità attuale in x da trovarsi colla sperienza.

68 Quest' altezza dedotta dalla velocità attuale è di pol. 50 (62). Dunque dovrebbe essere $xT =$ pol. $50 - c =$ pol. 43. 3 (65) $=$ pi. 3. 7. 3., dovechè nella sperienza ebbi pi. 7. 5. 11; ed è ben rimarcabile, che coi pi. 3. 7. 3 la superficie T dell' acqua nel cannello si sarebbe trovata più alta della bocca O contro ogni sperienza di questo genere fatta con tubo divergente.

69 Non recheranno meraviglia le esposte discrepanze se si consideri che l' Autore ha dimenticata affatto quell' azione dell' aria, che in questo genere di sperienze ha una gran parte. Nel voto il risultato sarebbe stato affatto diverso.

70 Ecco com' io spiego il mio sperimento. Ammetto col *Bernoulli*, e col Sig. Ab. *Bossut* (Hydr. §. 689), che la pressione laterale dell' acqua alle pareti in Kx sia la pressione atta a produrre in K quella velocità libera, che si avrebbe senza impedimenti da K in giù meno la pressione atta a produrre la velocità attuale per Cx ritardata dagl' impedimenti inferiori.

71 Se il tubo KO troncato in x come al n. 64, l' avessi fatto sboccare colla bocca x nel voto, allora la velocità per x sarebbe stata affatto libera, e sarebbe stata prodotta in K da tutta la pressione dell' acqua Kc unita alla pressione A in c dell' aria. Onde la prima delle due pressioni del n°. precedente sarà $A + cK$.

72 Per avere l'altra pressione convien trovare il parametro conveniente al foro K armato del tubo Kx (6). Poichè troncato il tubo in x ebbi per x la velocità di pol. 45, 9 (64), dividendone il quadrato per l' altezza Kc dell' acqua sopra il foro, ch' era di pol. 5 $\frac{1}{4}$, il quoziente 383 sarà il parametro ricercato.

73 E perchè col tubo KO intiero ebbi per x la velocità di pollici 198 (62), dividendone il quadrato pel parametro si avrà per quoziente pol. 102. 4 = pi. 8. 6. 4 altezza premente di acqua atta a produrre in K, e perciò anche per x la velocità avuta per x col tubo KO non troncato.

74 Dunque la pressione laterale dell'acqua in x col tubo KO intiero sarà quella di un' acqua stagnante dell' altezza $A + cK$ — pi. 8. 6. 4. (70, 71, 72). Questa pressione laterale dell' acqua in x unita alla pressione dell'acqua dell' altezza xT dev' esser eguale alla pressione A dell' aria in T. Dunque l' altezza xT = pi. 8. 6. 4 — cK = pi. 8. 6. 4 — pi. o. 5. 6 (61) = pi. 8. o. 10; ch' è maggiore dei pi. 7. 5. 11 avuti nella sperienza di soli pol. 6. 11. La cosa meriterebbe d' esser confermata con altri sperimenti.

75 Intanto essendosi trovato qui sopra, che l'acqua in x preme le pareti con una pressione $A + cK$ — pi. 8. 6. 4 = pi. 32 + pi. o. 5. 6 — pi. 8. 6. 4 = pi. 23. 11. 2; e tolto il cannello xcR l' aria si presenterebbe tosto al foro x con la pressione A = pi. 32, prevalendo questa a quella dell' acqua l' aria entrerà pel foro x, e mescolata coll'

acqua verrà da questa rapita al basso, ed in un con essa uscirà per la bocca *O*.

76 Si conosce quindi in che consista l' artificio, ond' eccitano con gran profitto in alcune Ferriere un soffio violento, ed equabile per mantenere accesa la fornace per fondere la vena del ferro. Per un condotto *AB* (fig. 11) va l' acqua in una vasca *LNOM*, d' onde scende per più canali *CE* di tavole, divergenti, ed all' incontro dei sottoposti piani *F* spiccia tutt' all' intorno, empie la camera *GK* fino in *IP*, ed esce per un emissario *KR*. Pei fori *u*, *u*, *u* fatti in un lato d' ogni canale (detto perciò flauto) entra l' aria per la ragione spiegata, e trascinata dall' acqua che discende, esce per le bocche *E*, ed all' urto coi piani *F* si separa dall' acqua: e trovandosi in una camera *GQKH* tutta ben chiusa a riserva di due fori *K*, *T*, nè potendo uscire pel foro *K* sempre occupato dall' acqua, esce per l' altro *T*, e pel tubo *TV* va a soffiare con violenza, ed equabilmente nella fornace.

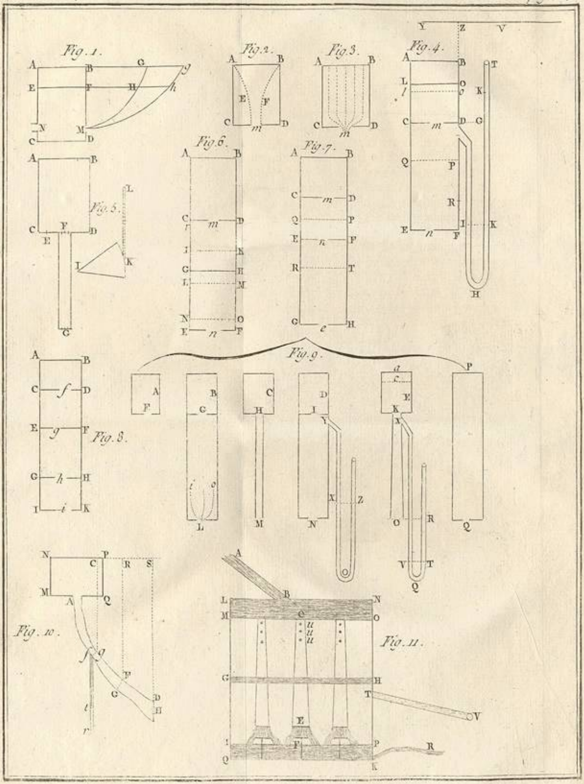
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.