RICERCA

SOPRA L' INTEGRAZIONE SVILUPPATA IN UNA SERIE FINITA

della formola $\frac{(A+Bz)\,dz}{(a^2 - 2abz\cos.\phi + b^2z^2)^p}$, *essendo* p *un numero qualunque intero.*

Del Sig. Francesco Pezzi

Tenente nel Corpo degl' Ingegneri, e Professore di Matematica nell' Università di Genova.

PRESENTATA

Dal Sig. Leonardo Salimbeni

Mi accadde, ha già gran tempo, d' integrare per mezzo di un numero finito di termini il differenziale $\frac{(A+Bz)\,dz}{(a^2 - 2abz\cos.\phi + b^2z^2)^p}$, rappresentando p un numero intiero qualunque, in guisa che non facea più di mestieri, per ottenerlo, di ricorrere agl' integrali successivi $p-1$, $p-2$, $p-3$, ecc. come il richiede il metodo troppo lungo, per poco che p sia un numero grande, dell' immortale Sig. *Eulero* (*a*). Ne feci per avventura menzione in una mia lettera scritta in sul principio di quest' anno al Sig. *Cavaliere Lorgna*, il quale m' inviò cortesemente in risposta la dimostrazione della formola $\int \frac{x^m dx}{(b+cx^n)^p}$ (m e n essendo interi o

(*a*) V. Le Instituzioni di calcolo integrale. Tom. I., pag. 42, e 43.

rotti, positivi o negativi, e p intiero) ridotta a quest' altra di gran lunga più semplice $\int \frac{x^{m-n(p-1)}dx}{b+cx^n}$, estratta da un suo opuscolo pubblicato fin dall'anno 1770. Dopo d'averla io letta con grandissimo piacere, cercai prima di estenderla ad altri casi, e poi di trarne una parte della dimostrazione *a priori* di quel mio integrale, che solamente per induzione aveva argomentato da principio, e trovato sotto una forma differente; dico una parte, poichè ho dovuto supplire all' altra, con altro artificio analitico: il che se bene mi sia avvenuto di fare, il giudichi l'Illustre Società Italiana, alla quale non avrei certamente ardito di presentare questo tenue lavoro, se il celebre Sig. *Eulero* non avesse reso il Problema degno di attenzione lasciandovi ancora molto da fare.

I. Sia $\mathcal{Q}$ una funzione qualunque di x e di costanti; si differenzj la frazione $\frac{x^{q+1}}{\mathcal{Q}}$, facendo per maggior brevità $d\mathcal{Q}=\mathcal{Q}'dx$; $d\mathcal{Q}'=\mathcal{Q}''dx$, ecc.; si avrà

$$d.\frac{x^{q+1}}{\mathcal{Q}}=\frac{(q+1)x^{q}dx}{\mathcal{Q}}-\frac{x^{q+1}\mathcal{Q}'dx}{\mathcal{Q}^2},$$ e quindi

$$\frac{x^{q}dx}{\mathcal{Q}}=d.\frac{x^{q+1}}{(q+1)\mathcal{Q}}+\frac{x^{q+1}\mathcal{Q}'dx}{(q+1)\mathcal{Q}^2}.$$

Si differenzj $\frac{x^{q+2}\mathcal{Q}'}{(q+1)\mathcal{Q}^2}$; si avrà

$$d.\frac{x^{q+2}\mathcal{Q}'}{(q+1)\mathcal{Q}^2}=\frac{(q+2)x^{q+1}\mathcal{Q}'dx}{(q+1)\mathcal{Q}^2}+\frac{x^{q+2}\mathcal{Q}''dx}{(q+1)\mathcal{Q}^2}-\frac{2x^{q+2}\mathcal{Q}'^2dx}{(q+1)\mathcal{Q}^3}.$$

dunque

$$\frac{x^{q+1}\mathcal{Q}'dx}{(q+1)\mathcal{Q}^2}=d.\frac{x^{q+2}\mathcal{Q}'}{(q+1)(q+2)\mathcal{Q}^2}-\frac{x^{q+2}\mathcal{Q}''dx}{(q+1)(q+2)\mathcal{Q}^2}+\frac{2x^{q+2}\mathcal{Q}'^2dx}{(q+1)(q+2)\mathcal{Q}^3}.$$

E continuando sempre in questa guisa a differenziare l' ultimo termine dopo aver aumentato di una unità l'esponente di x nel numeratore già diviso per dx, e sostituendo poi successivamente i valori trovati nel secondo membro dell'equazione $\frac{x^{q}dx}{\mathcal{Q}}=d.\frac{x^{q+1}}{(q+1)\mathcal{Q}}+\frac{x^{q+1}\mathcal{Q}'dx}{(q+1)\mathcal{Q}^2}$, si avrà facilmente

$$\frac{x^q dx}{\mathcal{Q}} = d.\,\frac{x^{q+1}}{(q+1)\mathcal{Q}} \qquad\qquad - \frac{1.\,x^{q+2}\mathcal{Q}''dx}{(q+1)(q+2)\mathcal{Q}^2}$$

$$+ d.\,\frac{x^{q+2}\mathcal{Q}'}{(q+1)(q+2)\mathcal{Q}^2} \qquad - \frac{1.\,2^2.\,x^{q+3}\mathcal{Q}'\mathcal{Q}''dx}{(q+1)\ldots(q+3)\mathcal{Q}^3}$$

$$+ d.\,\frac{2x^{q+3}\mathcal{Q}'^2}{(q+1)\ldots(q+3)\mathcal{Q}^3} \qquad - \frac{1.2.3^2.\,x^{q+4}\mathcal{Q}'^2\mathcal{Q}''dx}{(q+1)\ldots(q+4)\mathcal{Q}^4}$$

$$+ d.\,\frac{2.\,3.\,x^{q+4}\mathcal{Q}'^3}{(q+1)\ldots(q+4)\mathcal{Q}^4} \qquad -$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$+ d.\,\frac{1.2\ldots(p-2)x^{q+p-1}\mathcal{Q}'^{p-2}}{(q+1)\ldots(q+p-1)\mathcal{Q}^{p-1}} - \frac{1.2\ldots(p-2)^2 x^{q+p-1}\mathcal{Q}'^{p-3}\mathcal{Q}''dx}{(q+1)\ldots(q+p-1)\mathcal{Q}^{p-1}}$$

$$+ \frac{1.2\ldots(p-1)x^{q+p-1}\mathcal{Q}'^{p-1}dx}{(q+1)\ldots(q+p-1)\mathcal{Q}^p}.$$

La legge che regna in questa serie è manifesta; il numero de' termini affetti dal segno di differenziazione è $= p - 1$; ed il numero di quei che sono moltiplicati da dx è ancora $= p - 1$; dunque il numero totale è $= 2(p-1)$.

Ora eliminando l' integrale di $\frac{x^{q+p-1}\mathcal{Q}'^{p-1}dx}{\mathcal{Q}^p}$, si trova

$$\int\frac{x^{q+p-1}\mathcal{Q}'^{p-1}dx}{\mathcal{Q}^p} = \left(-\frac{(q+1)(q+2)\ldots(q+p-1)}{1.\,2\ldots(p-1)}\right)\Bigg(\frac{x^{q+1}}{(q+1)\mathcal{Q}} +$$
$$\frac{x^{q+2}\mathcal{Q}'}{(q+1)(q+2)\mathcal{Q}^2} + \frac{2x^{q+3}\mathcal{Q}'^2}{(q+1)\ldots(q+3)\mathcal{Q}^3} + \frac{2.3x^{q+4}\mathcal{Q}'^3}{(q+1)\ldots(q+4)\mathcal{Q}^4} + \text{ecc.}$$
$$+ \frac{1.2\ldots.(p-2)x^{q+p-1}\mathcal{Q}'^{p-2}}{(q+1)\ldots(q+p-1)\mathcal{Q}^{p-1}} - \int\frac{x^q dx}{\mathcal{Q}} -$$
$$\frac{1.2\ldots(p-2)^2}{(q+1)\ldots(q+p-1)}\int\frac{x^{q+p-1}\mathcal{Q}'^{p-3}\mathcal{Q}''dx}{\mathcal{Q}^{p-1}} - \frac{1.2\ldots(p-3)^2}{(q+1)\ldots(q+p-2)}\int\frac{x^{q+p-2}\mathcal{Q}'^{p-4}\mathcal{Q}''dx}{\mathcal{Q}^{p-2}}$$
$$-\text{ecc.} - \frac{1.\,2^2}{(q+1)\ldots(q+3)}\int\frac{x^{q+3}\mathcal{Q}'\mathcal{Q}''dx}{\mathcal{Q}^3} - \frac{1}{(q+1)(q+2)}\int\frac{x^{q+2}\mathcal{Q}''dx}{\mathcal{Q}^2}\Bigg)\ldots(1)$$

II. Se invece dell' integrale precedente si volesse quella di $\frac{x^{q+p-1}dx}{\mathcal{Q}^p}$, si avrebbe

$$\int\frac{x^{q+p-1}dx}{\mathcal{Q}^p}=\left(-\frac{(q+1)(q+2)\ldots(q+p-1)}{1.2\ldots.(p-1)}\right)\left(\frac{1}{q+1}\int\frac{1}{\mathcal{Q}'^{p-1}}d.\frac{x^{q+1}}{\mathcal{Q}}\right.$$
$$+\frac{1}{(q+1)(q+2)}\int\frac{1}{\mathcal{Q}'^{p-2}}d.\frac{x^{q+2}\mathcal{Q}'}{\mathcal{Q}^2}+\frac{1.2}{(q+1)\ldots(q+3)}\int\frac{1}{\mathcal{Q}'^{p-3}}d.\frac{x^{q+3}\mathcal{Q}'^2}{\mathcal{Q}^3}$$
$$+\text{ecc.}+\frac{1.2\ldots.(p-2)}{(q+1)\ldots(q+p-1)}\int\frac{1}{\mathcal{Q}'^{p-1}}d.\frac{x^{q+p-1}\mathcal{Q}'^{p-2}}{\mathcal{Q}^{p-1}}-$$
$$\int\frac{x^q dx}{\mathcal{Q}.\mathcal{Q}'^{p-1}}-\frac{1.2\ldots(p-2)^2}{(q+1)\ldots(q+p-1)}\int\frac{x^{q+p-1}\mathcal{Q}''dx}{\mathcal{Q}^{p-1}.\mathcal{Q}'^2}-\text{ecc.}$$
$$\left.-\frac{1.2^2}{(q+1)\ldots(q+3)}\int\frac{x^{q+3}\mathcal{Q}''dx}{\mathcal{Q}^3.\mathcal{Q}'^{p-3}}-\frac{1}{(q+1)(q+2)}\int\frac{x^{q+2}\mathcal{Q}''dx}{\mathcal{Q}^2.\mathcal{Q}'^{p-1}}\right)\ldots(2)$$

Non posso qui trattenermi nelle varie riflessioni che le formole (1) e (2) presentano, onde ottenere delle maggiori riduzioni; mi basterà di osservare per arrivar tosto alla propostami integrazione, che uno dei semplici risultati, ch' esse possano fornire, dipende chiaramente dal caso di $\mathcal{Q}''=0$; allora $\mathcal{Q}'=c$; c essendo una costante arbitraria; dunque $\mathcal{Q}=cx+b$; b essendo una nuova costante arbitraria.

III. Ma se si pon mente che $\mathcal{Q}'$ essendo in questa ipotesi un monomio; $x^q\mathcal{Q}'$ lo sarà ancora, qualunque sia l' esponente di x in $\mathcal{Q}$, si vede che la riduzione ha luogo, quando ancora $\mathcal{Q}=cx^n+b$; ch' è il caso il più generale che qui per fortuna possa avvenire; allora l' equazione primitiva diviene

$$\frac{x^q dx}{\mathcal{Q}}=d.\frac{x^{q+1}}{(q+1)(b+cx^n)}+\frac{cnx^{q+n}dx}{(q+1)(b+cx^n)^2}.$$

e $d.\frac{x^{q+2}\mathcal{Q}'}{(q+1)\mathcal{Q}^2}$ non sarà più espresso da un trinomio, ma da un binomio $\frac{cn(q+n+1)x^{q+n}dx}{(q+1)(b+cx^n)^2}-\frac{2c^2n^2x^{q+2n}dx}{(q+1)(b+cx^n)^3}$; ed in conseguenza tutti li differenziali successivi verranno espressi da soli binomj; dunque i termini in numero $p-2$, affetti dal segno $\int$ e moltiplicati per $\mathcal{Q}''$ nella formola (1) divengono nulli, od eguali a zero. Suppongavisi dunque, dopo aver moltiplicato il numeratore del primo membro per x^{n-1}, $\mathcal{Q}''=0$; $\mathcal{Q}'=cn$; $\mathcal{Q}'^2=c^2n^2$; ... $\mathcal{Q}'^{p-1}=(cn)^{p-1}$, e si sostituiscano da per tutto per $q+2$, $q+3$, ... $q+p-1$, i valori $q+n+1$,

$q+2n+1 \ldots\ldots q+n(p-2)+1$, indi ſupponendo il numero arbitrario $q=m-n(p-1)$ per avere $x^m dx$ al numeratore della propoſta frazione, ſi otterrà finalmente, dividendo il tutto per $(cn)^{p-1}$,

$$\int \frac{x^m dx}{(b+cx^n)^p} = \left(-\frac{(m-n(p-1)+1)(m-n(p-2)+1)\ldots(m-n+1)}{1.\,2.\,3.\ldots(p-1)(cn)^{p-1}} \right) \Bigg(\frac{x^{m-n(p-1)+1}}{(m-n(p-1)+1)(b+cx^n)} + \frac{1.\; cnx^{m-n(p-2)+1}}{(m-n(p-1)+1)(m-n(p-2)+1)(b+cx^n)^2} + \frac{1.\,2.\,c^2n^2x^{m-n(p-3)+1}}{(m-n(p-1)+1)\ldots(m-n(p-3)+1)(b+cx^n)^3} + \ldots\ldots + \frac{1.\,2.\,\ldots(p-2)x^{m-n+1}(cn)^{p-2}}{(m-n(p-1)+1)(m-n(p-2)+1)\ldots(m-n+1)(b+cx^n)^{p-1}} - \int \frac{x^{m-n(p-1)}dx}{b+cx^n} \Bigg) \ldots (3)$$

Ch' è la formola del Sig. Cavaliere *Lorgna*, a me inviata dall' Illuſtre Autore.

La legge di progreſſione è nota; il numero de' termini è $=p$; de' quali $p-1$ ſono algebraici e liberi dal ſegno d'integrazione.

IV. Suppongaſi $b+cx^n=z$; ſi avrà

$$\int \frac{x^{m-n(p-1)}dx}{b+cx^n} = \frac{1}{nc^{\frac{m+1}{n}+1-p}} \int (z-b)^{\frac{m+1}{n}-p} \cdot \frac{dz}{z}$$

; la quale ſarà integrabile per una ſerie finita, algebraica in parte, in parte traſcendente tutte le volte che $\frac{m+1}{n}$ ſarà un numero intero; allora ſe $\frac{m+1}{n} > p$, l' integrale ſi ſvilupperà per il binomio di *Newton*; ſe $\frac{m+1}{n} < p$, ſi ritornerà alla formola (3) che darà una riduzione di queſta forma $\int \frac{dz}{(z-b)z^{p'}}$, ch' è ſempre integrabile in un numero finito di termini, come il vedremo fra poco.

V. Ma vi è più; ſe p contiene un numero rotto qualunque $\frac{s}{r}$, di maniera ch' egli sia di questa forma $p+\frac{s}{r}$, allora la riduzione in quistione è ugualmente possibile. Sia dunque $\mathfrak{Q}=(b+cx^n)^{p+\frac{s}{r}}$; se si pon mente che il secondo termine del differenziale di $\frac{x^{q+1}}{(b+cx^n)^{\frac{s}{r}}}$, non contiene più al denominatore il quadrato di $b+cx^n$, ma bensì la potenza $1+\frac{s}{r}$ della stessa quantità, e che il numeratore invece di essere moltiplicato dall' unità, lo è da $\frac{s}{r}$; si vede facilmente, che laddove p non è combinato con s, si deve sostituire per $p-1$, $p-2$, $p-3$, ecc. nella formola (3), p, $p-1$, $p-2$, ecc.; e per $p-1$, $p-2$, ... 3, 2, 1; $p-1+\frac{s}{r}$, $p-2+\frac{s}{r}$, ..., $2+\frac{s}{r}$, $1+\frac{s}{r}$, $\frac{s}{r}$, ond' essa diverrà

$$\int\frac{x^m dx}{(b+cx^n)^{p+\frac{s}{r}}}=\left(-\frac{(m-np+1)(m-n(p-1)+1)\ldots(m-n+1)}{\frac{s}{r}\left(1+\frac{s}{r}\right)\left(2+\frac{s}{r}\right)\ldots\left(p-1+\frac{s}{r}\right)(nc)^p}\right)$$

$$\left(\frac{x^{m-np+1}}{(m-np+1)(b+cx^n)^{\frac{s}{r}}}+\frac{nc\frac{s}{r}x^{m-n(p-1)+1}}{(m-np+1)(m-n(p-1)+1)(b+cx^n)^{\frac{s}{r}+1}}\right.$$

$$+\frac{c^2n^2\frac{s}{r}\left(1+\frac{s}{r}\right)x^{m-n(p-2)+1}}{(m-np+1)\ldots(m-n(p-2)+1)(b+cx^n)^{\frac{s}{r}+2}}$$

$$+\frac{c^3n^3\frac{s}{r}\left(1+\frac{s}{r}\right)\left(2+\frac{s}{r}\right)x^{m-n(p-3)+1}}{(m-np+1)\ldots(m-n(p-3)+1)(b+cx^n)^{\frac{s}{r}+2}}$$

$$+\ldots\ldots+\frac{\frac{s}{r}\left(1+\frac{s}{r}\right)\left(2+\frac{s}{r}\right)\ldots\left(p-2+\frac{s}{r}\right)(cn)^{p-1}\,x^{m-n+1}}{(m-np+1)(m-n(p-1)+1)\ldots\ldots(m-n+1)(b+cx^n)^{\frac{s}{r}+p-1}}$$

$$\left.-\int\frac{x^{m-np}dx}{(b+cx^n)^{\frac{s}{r}}}\right)\ldots\ldots\ldots(4)$$

Ove il numero de' termini è $=p+1$.

VI. Sia ora proposto d' integrare la formola $\frac{(A+Bz)\,dz}{(a^2-2abz\cos.\phi+b^2z^2)^p}$; egli è evidente che per darle la forma prescritta, bisogna supporre $z=u+\frac{a\cos.\phi}{b}$; sostituendovi dunque i valori di z, z^2, e dz; e facendo per maggior brevità $C=A+\frac{aB\cos.\phi}{b}$; e $D=a^2\text{sen.}^2\phi$, si avrà

$$\int\frac{(C+Bu)\,du}{(D+b^2u^2)^p}=-\frac{B}{2b^2(p-1)(D+b^2u^2)^{p-1}}+C\int\frac{du}{(D+b^2u^2)^p}$$

$+$ Cost.; trattone però il caso di $p=1$.

VII. Se $p=1$, si ha evidentemente

$$\int\frac{(C+Bu)\,du}{D+b^2u^2}=\text{Cost.}+\frac{B}{2b^2}\log.(D+b^2u^2)+\frac{C}{b\sqrt{D}}\text{Arc. tan.}\frac{bu}{\sqrt{D}}=\text{Cost.}+\frac{B}{2b^2}\log.(a^2-2abz\cos.\phi+b^2z^2)+$$

$$\frac{Ab+aB\cos.\phi}{ab^2\,\text{sen.}\,\phi}\text{Arc. tan.}\frac{bz-a\cos.\phi}{a\,\text{sen.}\,\phi}$$

; ed aggiungendo, come ha fatto il Sig. *Eulero* nel luogo citato, all' Arc. tan. $\frac{bz-a\cos.\phi}{a\,\text{sen.}\,\phi}$ l' Arc. tan. $\frac{\cos.\phi}{\text{sen.}\phi}$, che si può concepire essere contenuto nella costante arbitraria, si avrà

$$\int\frac{(A+Bz)\,dz}{a^2-2abz\cos.\phi+b^2z^2}=\frac{B}{2b^2}\log.(a^2-2abz\cos.\phi+b^2z^2)+\frac{Ab+aB\cos.\phi}{ab^2\,\text{sen.}\,\phi}\text{Arc. tang.}\frac{bz\,\text{sen.}\phi}{a-bz\cos.\phi}+C.$$

VIII. Trasformando l'espressione $\frac{du}{(D+b^2u^2)^p}$ in quella della formola (3) si ha, $m=0$, $n=2$, $b=D$, e $c=b^2$; dunque chiamando S la serie dei $p-1$ termini algebraici, si ha

$$C\int\frac{du}{(D+b^2u^2)^p}=CS+C\frac{(3-2p)(5-2p).....-1}{1.2...(p-1)(2b^2)^{p-1}}\int\frac{du}{(D+b^2u^2)u^{2(p-1)}}$$

Sia $2(p-1)=p'$; e poichè p' è un numero pari, suppongo

$$\frac{1}{(D+b^2u^2)u^{p'}}=\frac{A}{u^{p'}}+\frac{B}{u^{p'-2}}+\frac{C}{u^{p'-4}}+\ldots.+\frac{T}{u^2}+\frac{U}{D+b^2u^2};$$

onde

$$A=\frac{1}{D}\ ;\ B=-\frac{b^2}{D^2}\ ;\ C=\frac{b^4}{D^3}\ ;\ E=-\frac{b^6}{D^4}\ :\ :\ :\ :$$

$$T=\pm\frac{b^{p'-2}}{D^{\frac{p'}{2}}}\ ;\ U=\mp\frac{b^{p'}}{D^{\frac{p'}{2}}}\ ;\ \text{dunque}\int\frac{du}{(D+b^2u^2)u^{p'}}=$$

$$-\frac{1}{(p'-1)Du^{p'-1}}+\frac{b^2}{(p'-3)D^2u^{p'-3}}-\frac{b^4}{(p'-5)D^3u^{p'-5}}+\frac{b^6}{(p'-7)D^4u^{p'-7}}\cdots$$

$$\mp\frac{b^{p'-2}}{D^{\frac{p'}{2}}u}\mp\frac{b^{p'}}{D^{\frac{p'}{2}}}\int\frac{du}{D+b^2u^2}\ ;\ \text{ovvero}\int\frac{du}{(D+b^2u^2)^{p'}}=-$$

$$\frac{1}{(p'-1)Du^{p'-1}}+\frac{b^2}{(p'-3)D^2u^{p'-3}}-\frac{b^4}{(p'-5)D^3u^{p'-5}}+\frac{b^6}{(p'-7)D^4u^{p'-7}}$$

$$\cdots\mp\frac{b^{p'-2}}{D^{\frac{p'}{2}}u}\mp\frac{b^{p'-1}}{D^{\frac{p'+1}{2}}}\ \text{Arc. tang.}\ \frac{bu}{\sqrt{D}}\ \ldots(5)\ .$$

La legge che vi regna è evidente; ed il numero de' termini è $=\frac{p'}{2}+1$.

IX. Ma se p' fosse un numero intero qualunque pari o dispari, allora calcolando due serie separatamente si troverebbe

$$\int\frac{du}{(D+b^2u^2)u^{p}}=-\frac{1}{(p'-1)Du^{p'-1}}+\frac{b^2}{(p'-3)D^2u^{p'-3}}-\frac{b^4}{(p'-5)D^3u^{p'-5}}$$

$+\ldots$

$$+\cdots+\left(\frac{-1\pm 1}{2}\right)\frac{b^{p'-1}}{(-D)^{\frac{p'+1}{2}}}\log. u \pm \frac{b^{p'}}{2(-D)^{\frac{p'+1}{2}}}\int\left(\frac{\pm du}{bu+\sqrt{-D}}\right.$$

$$\left.-\frac{du}{bu-\sqrt{-D}}\right)\ldots(6)$$ ove il numero de' termini è $=\frac{p'}{2}+2$ ovvero $=\frac{p'+1}{2}+2$, secondo che p' è pari, o dispari.

Si prenderà nel fattore $\frac{-1\pm 1}{2}$ del coefficiente dell' antipenultimo termine + ovvero —, secondo che p' sarà pari o dispari, e si riterrà + ovvero — nel penultimo termine secondo che p' sarà pari o dispari, e + ovvero — nel coefficiente $\frac{b^{p'}}{2(-D)^{\frac{p'+1}{2}}}$ secondo che p' sarà pari o dispari; onde supponendo $p'=$ ad un numero pari, l'integrale si trasformerà in quello ch' abbiam trovato per questo ultimo caso, in cui il segno dell' ultimo termine è simile a quello del penultimo.

X. Ora sostituendo negl' integrali (3) e (5) per m, n, b, c, x $(=u)$, p'; i loro valori o, 2, $a^2\,\text{sen.}^2\phi$, b^2, $\frac{bz-a\cos.\phi}{b}$, $2(p-1)$; si troverà dopo averli ridotti, moltiplicati per $C=\frac{Ab+aB\cos.\phi}{b}$, e supposto per maggior brevità $a^2-2abz\,.\cos.\phi+b^2z^2=X=(bz-a\cos.\phi)^2+a^2\,\text{sen.}^2\,\phi$, si troverà dico

$$CS=\frac{Ab+aB\cos.\phi}{b^2}\left(-\frac{(3-2p)(5-2p)(7-2p)\ldots-1}{1.2.3\ldots.(p-1)2^{p-1}}\right)\Bigg(\frac{1}{(3-2p)(bz-a\cos.\phi)^{2p-3}X}+\frac{1.2}{(3-2p)(5-2p)(bz-a\cos.\phi)^{2p-5}X^2}$$

$$+\frac{1.2.2^2}{(3-2p)\ldots(7-2p)(bz-a\cos.\phi)^{2p-7}X^3}$$

$$+\frac{1.2.3.2^3}{(3-2p)\ldots(9-2p)(bz-a\cos.\phi)^{2p-9}X^4}$$

$$+\ldots\ldots+\frac{1.2.\ldots(p-2)2^{p-2}}{(3-2p)\ldots(-1)(bz-a\cos.\phi)X^{p-1}}\Bigg).$$

E ancora $\frac{(3-2p)(5-2p)(7-2p)\ldots\ldots-1}{1.\ 2.\ 3.\ldots.(p-1)2^{p-1}}\times$

$$C\int\frac{du}{(D+b^2u^2)u^{2(p-1)}}=\frac{Ab+aB\cos.\phi}{b^2}\left(\frac{(3-2p)(5-2p)(7-2p)\ldots-1}{1.\ 2.\ 3.\ldots(p-1)2^{p-1}}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{(2p-3)(bz-a\cos.\phi)^{2p-3}(a\,\text{fen}.\phi)^2}+\frac{1}{(2p-5)(bz-a\cos.\phi)^{2p-5}(a\,\text{fen}.\phi)^4}\right.$$

$$-\frac{1}{(2p-7)(bz-a\cos.\phi)^{2p-7}(a\,\text{fen}.\phi)^6}+\frac{1}{(2p-9)(bz-a\cos.\phi)^{2p-9}(a\,\text{fen}.\phi)^8}$$

$$\left.-\ldots\mp\frac{1}{(bz-a\cos.\phi)(a\,\text{fen}.\phi)^{2(p-1)}}\mp\frac{1}{(a\,\text{fen}.\phi)^{2p-1}}\text{Arc. tan.}\frac{bz\,\text{fen}.\phi}{a-bz\cos.\phi}\right)$$

Dunque $$\int\frac{(A+Bz)dz}{(a^2-2abz\cos.\phi+b^2z^2)^p}=\text{Coft.}-\frac{B}{2(p-1)b^2X^{p-1}}$$

$$+\frac{Ab+aB\cos.\phi}{b^2}\cdot\frac{(3-2p)(5-2p)(7-2p)\ldots-1}{1.\ 2.\ 3.\ldots.(p-1)2^{p-1}}\left(-\frac{1}{(3-2p)(bz-a\cos.\phi)^{2p-3}X}\right.$$

$$-\frac{1.\ 2}{(3-2p)(5-2p)(bz-a\cos.\phi)^{2p-5}X^2}-\frac{1.\ 2.\ 2^2}{(3-2p)\ldots(7-2p)(bz-a\cos.\phi)^{2p-7}X^3}$$

$$-\ldots\ldots\ldots-\frac{1.\ 2.\ 3.\ldots(p-2)2^{p-2}}{(3-2p)(5-2p)\ldots(-1)(bz-a\cos.\phi)X^{p-1}}-$$

$$\frac{1}{(2p-3)(bz-a\cos.\phi)^{2p-3}(a\,\text{fen}.\phi)^2}+\frac{1}{(2p-5)(bz-a\cos.\phi)^{2p-5}(a\,\text{fen}.\phi)^4}$$

$$-\frac{1}{(2p-7)(bz-a\cos.\phi)^{2p-7}(a\,\text{fen}.\phi)^6}+\ldots\mp\frac{1}{(bz-a\cos.\phi)(a\,\text{fen}.\phi)^{2(p-1)}}\mp$$

$$\left.\frac{1}{(a\,\text{fen}.\phi)^{2p-1}}\text{Arc. tan.}\frac{bz\,\text{fen}.\phi}{a-bz\cos.\phi}\right)\ldots.(7).$$

La legge di progreffione è manifefta; i $p-1$ termini che rinchiudono al loro denominatore le potenze fucceffive di X fon tutti preceduti dal fegno $-$; e i fegni dei p termini che hanno al loro denominatore le potenze fucceffive di $(a\,\text{fin}.\phi)^2$ fono alterni, e cominciano dal fegno $-$; il fegno dell' ultimo termine dev' effer quello del penultimo; ed il numero totale de' termini è evidentemente $=2p-1$.

Quefto integrale fviluppato in cotal modo non pare indegno dell' attenzione de' Geometri. Effo può condurre ad altre integrazioni neceffarie alla perfezione del metodo poco avanzato a' noftri tempi delle quadrature.

XI. Sia a cagion d'esempio $p=2$; e per maggior brevità $B=0$; $A=1$; si avrà

$$\int\frac{dz}{X^2}=-\frac{1}{2b}\left(\frac{1}{(bz-a\cos.\phi)X}-\frac{1}{(bz-a\cos.\phi)(a\,\text{sen}.\phi)^2}-\frac{1}{(a\,\text{sen}.\phi)^3}\text{Arc. tan.}\,\frac{bz\,\text{sen}.\phi}{a-bz\cos.\phi}\right)=\frac{X-a^2\,\text{sen}.^2\phi}{2bX(bz-a\cos.\phi)(a\,\text{sen}.\phi)^2}+$$

$$\frac{1}{2b(a\,\text{sen}.\phi)^3}\text{Arc. tan.}\,\frac{bz\,\text{sen}.\phi}{a-bz\cos.\phi}$$; ma abbiam già osservato che $-a^2\,\text{sen}.\phi^2+X=(bz-a\cos.\phi)^2$; dunque

$$\int\frac{dz}{X^2}=\frac{bz-a\cos.\phi}{2bX(a\,\text{sen}.\phi)^2}+\frac{1}{2b(a\,\text{sen}.\phi)^3}\text{Arc. tan.}\,\frac{bz\,\text{sen}.\phi}{a-bz\cos.\phi}$$

come ha trovato il Sig. *Eulero* nel citato Vol. pag. 41.

XII. Sia nella stessa ipotesi $p=3$; si avrà

$$\int\frac{dz}{X^3}=\frac{1}{b}\cdot\frac{3}{1.2.4}\left(\frac{1}{3X(bz-a\cos.\phi)^2}-\frac{2}{3(bz-a\cos.\phi)X^2}-\frac{1}{3(a\,\text{sen}.\phi)^2(bz-a\cos.\phi)^3}+\frac{1}{(bz-a\cos.\phi)(a\,\text{sen}.\phi)^4}+\frac{1}{(a\,\text{sen}.\phi)^5}\cdot\right.$$

$$\left.\text{Arc. tan.}\,\frac{bz\,\text{sen}.\phi}{a-bz\cos.\phi}\right).$$

E riducendo allo stesso denominatore le quattro prime frazioni, si ha $\frac{X.a^2\text{sen}.^2\phi(a^2\text{sen}.^2\phi-X)+(bz-a\cos.\phi)^2(3X^2-2a^4\text{sen}.^4\phi)}{3X^2(a\,\text{sen}.\phi)^4(bz-a\cos.\phi)^3}$ in cui mettendo per $(bz-a\cos.\phi)^2$, $(bz-a\cos.\phi)^3$, i loro valori $X-a^2\,\text{sen}.^2\phi$, $(X-a^2\,\text{sen}.^2\phi)^{\frac{3}{2}}$, e dividendo per $X-a^2\text{sen}.^2\phi$ si ha $\frac{X(3X-a^2\,\text{sen}.^2\phi)-2a^4\text{sen}.^4\phi}{3X^2(a\,\text{sen}.\phi)^4\sqrt{(X-a^2\,\text{sen}.^2\phi)}}$; ma $X(3X-a^2\,\text{sen}.^2\phi)=$ $X(3b^2z^2-6abz\cos.\phi+3a^2\cos.^2\phi+3a^2\text{sen}.^2\phi-a^2\,\text{sen}.^2\phi)=$ $3X(X-a^2\,\text{sen}.^2\phi)+2a^2X\,\text{sen}.^2\phi$; dunque la frazione precedente diviene $\frac{3X(X-a^2\text{sen}.^2\phi)+2a^2\text{sen}.^2\phi(X-a^2\,\text{sen}.^2\phi)}{3X^2(a\,\text{sen}.\phi)^4\sqrt{(X-a^2\text{sen}.^2\phi)}}=$ $\frac{bz-a\cos.\phi}{X(a\,\text{sen}.\phi)^4}+\frac{2(bz-a\cos.\phi)}{3X^2(a\,\text{sen}.\phi)^2}$; dunque $\int\frac{dz}{X^3}=\frac{3(bz-a\cos.\phi)}{2.4.\,bX(a\,\text{sen}.\phi)^4}$

$$+ \frac{bz - a \cos.\phi}{4bX^2(a\,\text{ſen.}\,\phi)^2} + \frac{3}{2.\,4b\,(a\,\text{ſen.}\,\phi)^5}\,\text{Arc. tan.}\,\frac{bz\,\text{ſen.}\,\phi}{a - bz \cos.\phi}$$: riſultato identico con quello del Sig. *Eulero p.* 42; ecc.

Fine delle Memorie Sociali.