MEMORIA

SUI TETTI CHE PIOVONO DA UNA SOLA BANDA.

Del Sig. LEONARDO SALIMBENI Capitano degl' Ingegneri Veneti, e Professore di Matematica nelle Scuole Militari di Verona.

§. I.

DE' tetti che piovono da una sola banda e della loro pressione contro le muraglie che li sostengono è stato da molti scritto, ed ultimamente da' Signori Cav. *Lorgna*, e P. *Gregorio Fontana*; ma le risoluzioni di questi due celebri Matematici portano a risultamenti tanto differenti, che pare abbia ancora bisogno di rischiaramento questa parte così interessante della Matematica applicata. Per la qual cosa avendo io dello stesso problema da qualche anno ritrovata ed anche dettata a' miei Allievi del Collegio Militare una nuova risoluzione, che s' appoggia ad alcuni semplicissimi teoremi della Statica, ed osservando dipoi ch' essa mi fa strada a conciliare le opinioni di questi due sommi uomini, quantunque pajano a primo aspetto sì contrarie fra loro; ho creduto di non fare cosa discara al pubblico e ad essi medesimi mandando alla luce questa mia breve Memoria, dove mi propongo prima di descrivere questa nuova risoluzione del problema de' tetti che piovono da una sola banda, e poi di dimostrarla uniforme a quella di amendue i sopraddetti Soggetti, solo che si voglia tener conto delle differenti condizioni da essi proposteli; dal che ne deriverà ch' essi medesimi effettualmente non discordano fra loro.

§. II.

E' certo per la Statica che quando un vette, o una verga rigida, sia in equilibrio fra tre forze che agiscono contro di essa per tre direzioni, l'una all'altra inclinate, queste tre direzioni prolungate, quand' occorra, debbono concorrere insieme in uno stesso punto. Per esempio se la verga rigida *AC* (*Fig.* 1.) sia in equilibrio fra le tre forze *AB EF CD*, che la tirano secondo le direzioni *AB EF CD* inclinate fra loro, esse direzioni *AB EF CD* prolungate debbono concorrere in uno stesso punto *G*. Da ciò ne segue che se la verga *AC* sia in equilibrio fra tre forze, e sieno dati i punti *A C* ove sono applicate in date direzioni le due forze *AB CD*, e sia dato in oltre il punto *E* a cui è applicata nella verga la terza forza, potrà determinarsi la direzione *EG* della stessa terza forza; imperciocchè prolungando le *AB CD* fino al loro concorso in *G*, e unendo la *EG*, sarà la *EG* la ricercata direzione.

§. III.

E' certo in secondo luogo, che se la verga rigida *AB* (*Fig.* 2.) tirata dalla forza *DE* resti sostenuta da' piani *FG HI*, perfettamente levigati, le rette *AC BC*, condotte dall' estremità *A B* della verga ad angoli retti a' rispettivi piani, debbono concorrere in qualche punto *C* colla direzione *DE* prolungata: ed è in oltre dimostrato, che le pressioni della verga sopra i piani sono applicate a' punti *A B* secondo le direzioni perpendicolari *CA CB*.

§. IV.

Finalmente è noto, che se la verga rigida *AB* (*Fig.* 2.) tirata dalla forza *DE* rimanga sostenuta da' due piani *FG HI*, condotte da' punti *A B* le rette *AC BC* ad angoli retti agli stessi piani *FG HI*, le quali concorreranno in uno stesso punto *C* (§. III.) colla direzione *DE*; se si compia il parallelogrammo *CXDL*, e vogliasi per *CD* espresso il valore della forza *DE*, esprimerà *CX* la pressione sul piano *FG*, e *CL* quella sull' altro piano *HI*.

§. V.

Il teorema del §. III. ci dimostra evidentemente come debbasi risolvere questa preliminare quistione. Sia *AB* (*Fig.* 3.) una verga rigida inclinata all'orizzonte, ad un qualche punto *F* della quale sia appeso un grave *E*, e s' appoggi la verga con un' estremità *A* ad un piano *AD* dato di posizione, e coll'altra estremità *B* ad un altro piano, di cui non si sa la direzione; domandasi questa direzione medesima in modo che la verga da' due piani possa essere sostenuta. Pertanto se si prolunghi la verticale *FE*, e dal punto *A* si conduca la *AC* ad angoli retti al piano *AD*, che incontri in *C* la *EFC*, indi giunta la *CB* si tiri il piano *BI* ad essa *CB* perpendicolare, è manifesto esser *BI* la ricercata direzione del piano; perocchè la verga rigida *AB* tirata dalla forza *FE* potrà allora restare sostenuta da' due piani *AD BI*, avvegnachè le rette *AC BC* condotte dalle sue estremità ad angoli retti a' rispettivi piani incontrano in un punto *C* (§. III.) la direzione *EF* prolungata. La risoluzione di questo problema, quantunque sì semplice, mi ha direttamente condotto a ritrovare il modo con cui i tetti, che piovono da una sola banda, spingono le muraglie alle quali sono addossati.

§. VI.

La quistione fisica vien comunemente da' Matematici ridotta a questo problema meccanico. La verga rigida *AB* (*Fig.* 4) inclinata all' orizzonte rappresenti il pendio del tetto, e il peso *E* attaccato ad un punto qualsivoglia *F* della verga rappresenti il peso del tetto medesimo; suppongasi poi che l' estremità superiore *A* della verga s' appoggi al muro verticale *ADV*, e l'altra estremità *B* al muro *BST*; ricercansi le pressioni della verga *AB* sopra l' uno e l' altro muro *ADV BST*.

§. VII.

Ecco come, poste le cose sopraddette, io risolvo questo problema. Si prolunghi la verticale *FE*, e dal punto *A* si conduca la *AC* ad angoli retti al piano *AD*, che incontri la *CFE* nel punto *C*; poi giungasi la *CB*. E' manifesto (§.v.) che il muro *BST* debbe terminare in cima in un piano *BI*, a cui sia la *CB* perpendicolare, affinchè possa la verga da' piani *AD BI* restar sostenuta, altrimenti cadrebbe la verga nè vi sarebbe più equilibrio: quindi compiuto il parallelogrammo *CGFH*, se *CF* dinota il peso *E*, *CG* (§. IV.) esprimerà la pressione della verga sul piano verticale *AD*, e *CH* la pressione sul piano *BI*, che sono appunto le cose domandate.

§. VIII.

Se in luogo di far terminare superiormente il muro *BST* nel piano *BI* a cui sia perpendicolare la *CB*, si mettesse sul muro qualsivoglia ostacolo capace di far l' uffizio del piano stesso *BI* come nella (*Fig.* 5), vale a dire capace di tener ferma e in equilibrio la verga, come si sono immaginati tutti gli scrittori di questa materia, resterà sempre ugualmente vero, che *CH* esprimerà la pressione della verga sul muro medesimo *BST*.

§. IX.

Tornando ora alla risoluzione del §. VII, si sostituiscano alle linee le lettere, e facciasi (*Fig.* 4.) la $AB = a$, la $AF = b$, il seno tutto $= 1$, e tirata l'orizzontale BQ sia l' angolo $ABQ = \phi$, e finalmente il peso E dicasi $= P$. E perchè l' angolo FAC è uguale all' angolo ABQ, sarà anche $FAC = \phi$, dunque la $CF = b \,.\, \text{sen.}\, \phi$, e la $AC = b \,.\, \cos.\, \phi$. Di nuovo essendo $AB : BF :: AC : CG$, ovvero $a : a - b :: b \,.\, \cos.\, \phi : CG$, sarà la $CG = \frac{b}{a}\,(a-b) \cos.\, \phi = FH$; ma la linea retta $GF = \sqrt{(CF^2 + CG^2)}$ riuscirà uguale alla quantità $\sqrt{(b^2 . \text{sen.}^2\, \phi}$

$+\frac{b^2}{a^2}(a-b)^2.\cos.^2\phi\Big)=\frac{b}{a}\sqrt{\left(a^2.\text{sen}.^2\phi+(a-b)^2.\cos.^2\phi\right)}=CH;$

per la qual cosa essendo come la CF alla CG, così il peso E alla cercata pressione contro il muro ADV, sarà essa pressione

$=\frac{P.(a-b)}{a}.\frac{\cos.\phi}{\text{sen}.\phi}=\frac{P}{a}(a-b).\text{cot}.\phi$; e similmente essendo come la CF alla CH, così il peso E alla pressione sul muro BST, sarà questa seconda ricercata pressione

$$=\frac{P}{a.\text{sen}.\phi}\sqrt{\left(a^2.\text{sen}.^2\phi+(a-b)^2.\cos.^2\phi\right)}.$$

§. X.

Se si volesse trovare il momento dell'una e dell'altra pressione contro le rispettive muraglie, converrà operare nel seguente modo. Per supposizione stabilita fra tutti i Meccanici si tiene, che il centro del moto di un muro, o per meglio dire il punto d'intorno a cui cercano muovere il muro le forze contro di esso impiegate, sia il punto estremo esteriore della sua base: così quello del muro (*Fig.* 4.) ADV sarà in V, e quello del muro BST in T; laonde il momento della forza CG premente il muro ADV sarà uguale al prodotto di essa forza CG moltiplicata per la retta VY condotta dal punto V perpendicolare alla CGY, e il momento della forza CH premente il muro BST sarà uguale al prodotto della CH nella retta TX condotta dal punto T perpendicolare alla CBX. Per il che fatta l'altezza $AD=VY=c$, essendosi trovata la forza CG che preme il muro ADV

$=\frac{P}{a}(a-b).\text{cot}.\phi$, sarà il suo momento $=\frac{Pc}{a}(a-b).\text{cot}.\phi$.

Un poco più di difficoltà s'incontra nel determinare il momento dell'altra forza contro il muro BST, ma il risultamento non sarà niente meno elegante. Si tiri pertanto la SM parallela alla TX, e la TO parallela alla CX; poi si chiami l'altezza BS della muraglia $BST=d$, e la sua grossezza ST in base $=e$. Ora essendo il triangolo CFH simile al triangolo SMB, sarà $CH:FH::BS:SM$, ovvero sarà

$$\frac{b}{a}\sqrt{(a^2.\text{sen}^2\phi+(a-b)^2.\cos^2\phi)}:\frac{b}{a}(a-b).\cos.\phi::d:SM,$$

dunque $SM=d.(a-b).\cos.\phi:\sqrt{(a^2.\text{sen.}^2\phi+(a-b)^2.\cos.^2\phi)}$; similmente essendo il triangolo medesimo CFH simile al triangolo SOT, e come $CH:CF::ST:SO$, si troverà la $SO = ae.\text{sen}.\phi:\sqrt{(a^2.\text{sen.}^2\phi+(a-b)^2.\cos.^2\phi)}$; dunque $TX=SM-SO=d(a-b).\cos.\phi:\sqrt{(a^2.\text{sen.}^2\phi+(a-b)^2.\cos.^2\phi)}-ae.\text{sen}.\phi:\sqrt{(a^2.\text{sen.}^2\phi+(a-b)^2.\cos.^2\phi)}$; la forza poi CH premente la muraglia BST si è dimostrata (§. IX.) uguale a

$\frac{P}{a.\text{sen}.\phi}\sqrt{(a^2.\text{sen.}^2\phi+(a-b)^2.\cos.^2\phi)}$; e però moltiplicandola per la perpendicolare TX s' avrà il ricercato suo momento $=\frac{dP(a-b).\cos.\phi}{a.\text{sen}.\phi}-eP=\frac{dP}{a}(a-b).\cot.\phi-eP$.

Di questi due momenti, che abbiamo espresso con formole sì semplici, conviene far uso quando vogliasi proporzionare la resistenza delle muraglie ADV BST alle pressioni, ch' esse soffrono dal tetto, o dalla verga rigida AB caricata del peso E; intorno alla qual cosa è superfluo il dire di più, essendo stato trattato questo argomento così diffusamente da' Matematici.

§. XI.

Dal punto B (*Fig.*4) nella direzione CX si prenda la BL uguale alla forza CH, poi si divida la forza BL nelle due BP BR l' una orizzontale e l' altra verticale formando il parallelogrammo $BRLP$. Essendo pertanto il triangolo BRL uguale e simile al triangolo CFH, sarà la FH uguale alla RL o alla BP, e però facendo come la CF alla HF, così il peso E ad un quarto proporzionale, si avrà il valore della spinta orizzontale $BP=\frac{P}{a}(a-b).\cot.\phi$; la forza poi verticale $BR=CF$ sarà uguale al peso P. Questa divisione della forza BL mi è ſtata neceſſaria per poter fare il confronto che ſegue.

§. XII.

Il Cel. P. *Gregorio Fontana* riſolve nel Tomo antecedente della noſtra Società pag. 529 il problema della verga in due modi, uno che implica la neceſſità di ſommare una ſerie, l' altro più ſemplice che dà gli ſteſſi riſultamenti del primo, e che noi qui riferiremo colle ſue parole medeſime. Avvertaſi che AD (*Fig. 6.*) dimoſtra il piano verticale a cui s' appoggia l' eſtremità ſuperiore A della verga, e l' altra eſtremità ſi ſuppone dall' Autore eſſere nel piano orizzontale OD, e in eſſo da qualche oſtacolo trattenuta; la verga poi AO è, come da noi ſi è poſta, $=a$, la $AF=b$, eſſendo F il punto a cui ſta attaccato il peſo $=P$, e l' angolo AOD della verga col piano orizzontale è $=\phi$. ,, Si riſolva, dice l' Au-
,, tore, la forza verticale FP del peſo della verga nella oriz-
,, zontale FI e nella FL parallela alla verga, e ſarà FL
,, $=\frac{FP}{\text{ſen.}\,FLP}=\frac{P}{\text{ſen.}\,\phi}$, $FI=\frac{P.\cos.\phi}{\text{ſen.}\,\phi}$. Ora la forza FL s' im-
,, piega tutta a premere il punto O in direzione della ver-
,, ga, e viene rappreſentata da $OQ=FL=\frac{P}{\text{ſen.}\,\phi}$. Se ſi
,, abbaſſa la verticale QG, naſce dalla forza OQ la ſpinta o-
,, rizzontale $OG=OQ.\,\text{ſen.}\,OQG=\frac{P.\cos.\phi}{\text{ſen.}\phi}$. La forza poi
,, orizzontale FI trasferendo alle due eſtremità A ed O della
,, verga la ſua azione per modo che riſulta in A la ſpinta
,, orizzontale $AS=\frac{OF}{OA}.FI=\frac{P(a-b)\cos.\phi}{a.\text{ſen.}\phi}$, ed in O la ſpin-
,, ta orizzontale $OE=\frac{AF}{OA}.FI=\frac{Pb.\cos.\phi}{a.\text{ſen.}\phi}$. Laonde tutta la
,, ſpinta orizzontale contro O, ovvero contro l' oſtacolo po-

„ sto in O sarà $OG - OE = \frac{P.\cos.\phi}{\text{sen}.\phi} - \frac{Pb.\cos.\phi}{a.\text{sen}.\phi}$

„ $= \frac{P(a-b).\cos.\phi}{a.\text{sen}.\phi} = \frac{P}{a}(a-b).\cot.\phi$. „ .

Ora facciasi la GK uguale alla OE, sicchè la OK diventi $= OG - OE$, e dal punto K conducasi la KM parallela ed uguale alla QG, e unifcasi la OM, la quale dimostrerà la forza composta della forza verticale GQ e dell' orizzontale $OG - OE$: e però OM indicherà la forza e la direzione con cui resta l'ostacolo premuto. E poichè la spinta orizzontale $OK = OG - OE = \frac{P}{a}(a-b)\cot.\phi$, e la verticale $KM = GQ = FP = P$ precisamente come si era trovato nell' Articolo antecedente e nella Figura quarta, ne segue che la OM della Figura sesta sarà uguale e ugualmente all' orizzonte inclinata che la BL della quarta citata; la forza poi contro il piano verticale AD è $= \frac{P}{a}(a-b).\cot.\phi$ tanto nella risoluzione del dottissimo P. *Fontana*, che nella mia (§. IX.); dunque le nostre formole coincidono perfettamente fra loro.

§. XIII.

Ma sia proposta la risoluzione del problema più generalmente in questo modo. Sia la verga AB (*Fig.* 7) appoggiata in A al piano AD dato d'inclinazione coll'orizzonte, e nell' altra estremità B s'appoggi al muro BST; e sia aggravata la verga dal peso E attaccato in un dato punto F della verga; domandasi la pressione contro il piano AD e contro il muro BST. Seguendo i miei principj si risolve assai facilmente anche questo problema. Prolunghisi pertanto la verticale EFC, e dal punto A si conduca la AC perpendicolare al piano AD, che incontri in C la EFC, e unita la CB, si tiri dal punto B la BI perpendicolare alla BC, che dimostrerà il piano della sommità del muro BST (§. V.); poi si compia il parallelogrammo $CGFH$, ed è manifesto che se CF dinota

dinota la gravità di E, dinoterà CH (§. IV.) la pressione sul piano AD, e CG quella contro il muro BST.

Sia dunque la $AB = a$, la $AF = b$, l' angolo BAD del vette col piano inclinato $AD = \phi$, l' angolo ADB di esso piano coll' orizzonte $= \omega$, e il peso $E = P$. E poichè i due angoli CRD CAD sono retti, saranno uguali a due retti gli angoli FCA ADB; dunque sen. $FCA =$ sen. $ADB =$ sen. ω; sarà poi sen. $CAF =$ cos. $BAD =$ cos. ϕ. Inoltre essendo l' angolo ABK uguale ai due angoli ADB BAD, sarà sen. $ABK =$ sen. ABD $=$ sen. $(\omega + \phi)$, e cos. $ABD =$ cos. $ABK = -$ cos. $(\omega + \phi)$; e però anche sen. $BFR =$ cos. $ABD = -$ cos. $(\omega + \phi)$; l' angolo poi BFR è uguale all' angolo CFA; quindi anche sen. $CFA =$ $-$ cos. $(\omega + \phi)$. Ora la proporzione di sen. FCA : sen. CAF :: $AF : CF$, ovvero di sen. ω : cos. ϕ :: $b : CF$, darà CF $= \frac{b.\cos.\phi}{\text{sen.}\,\omega}$; e l' altra proporzione di sen. FCA : sen. CFA :: $AF : AC$, o di sen. $\omega : -\cos.(\omega + \phi) :: b : AC$, darà AC $= \frac{-b.\cos.(\omega+\phi)}{\text{sen.}\,\omega}$; come poi $AB : BF :: AC : CH$; dunque $CH = \frac{-b(a-b).\cos.(\omega+\phi)}{a.\,\text{sen.}\,\omega}$. Di nuovo nel triangolo rettangolo FBR essendo la $FB = a - b$, e sen. ABD, o dicasi FBR, $=$ sen. $(\omega + \phi)$, sarà la $FR = (a-b).\text{sen.}(\omega+\phi)$, che aggiunto alla CF già ritrovata, darà tutta la $CR = \frac{b.\cos.\phi}{\text{sen.}\,\omega}$ $+ (a-b).\text{sen.}(\omega+\phi)$; ma nello stesso triangolo FBR, perchè cos. ABD, o dicasi FBR, $= -\cos.(\omega+\phi)$, si troverà la $BR = -(a-b)\cos.(\omega+\phi)$. Dati pertanto i cateti CR BR del triangolo rettangolo CBR si avrà la $CB = \sqrt{\left(\frac{b.^2\cos.^2\phi}{\text{sen.}^2\,\omega}\right.}$ $\overline{\left. + 2b(a-b).\frac{\cos.\phi\,\text{sen.}(\omega+\phi)}{\text{sen.}\,\omega} + (a-b)^2\right)}$; sicchè essendo come $BA : AF :: CB : CG$, riuscirà la $CG = \frac{b}{a}\sqrt{\left(\frac{b.^2\cos.^2\phi}{\text{sen.}^2\,\omega}\right.}$ $\overline{\left. + 2b(a-b).\frac{\cos.\phi.\,\text{sen.}(\omega+\phi)}{\text{sen.}\,\omega} + (a-b)^2\right)}$. Per la qual cosa poichè come la CF alla CH, così è il peso E alla pressione sul piano AD, sarà essa pressione $\frac{-P(a-b).\cos.(\omega+\phi)}{a.\cos.\phi}$ e similmente essendo come la CF alla CG, così il peso E alla pressione contro il muro BST, avrassi essa pressione $=\frac{P}{a}\sqrt{\left(b^2+2b.(a-b).\frac{\text{sen.}\,\omega.\,\text{sen.}(\omega+\phi)}{\cos.\phi}+(a-b)^2.\frac{\text{sen.}^2\omega}{\cos.^2\phi}\right)}$. Se si volesse poi avere una formola esprimente il momento di essa spinta contro il muro BST, bisognerà operare come nel §. x., e sarà questa (chiamata l' altezza $BS=d$, e la grossezza $ST=e$) $=-\frac{Pd(a-b).\,\text{sen.}\,\omega.\cos.(\omega+\phi)}{a.\cos.\phi}-\frac{beP}{a}$ $-\frac{Pe(a-b).\,\text{sen.}\,\omega.\,\text{sen.}(\omega+\phi)}{a.\cos.\phi}$; ch' è una cosa importante a sapersi, come abbiamo detto nel luogo citato, per poter proporzionare la muraglia allo sforzo ch' essa debbe sostenere.

§. XIV

Fatta la $BM=CG$, si divida la forza BM nelle due forze BK KM, la prima orizzontale, verticale l'altra. Per la somiglianza de' triangoli CBR MBK si troverà la spinta orizzontale $BK=\frac{-P(a-b).\,\text{sen.}\,\omega.\cos.(\omega+\phi)}{a.\cos\phi}$, e la spinta verticale $KM=\frac{Pb}{a}+\frac{P(a-b).\,\text{sen.}\,\omega.\,\text{sen.}(\omega+\phi)}{a.\cos.\phi}$. Il P. Gregorio *Fontana* trova nella risoluzione di questo Problema la spinta orizzontale BK espressa colla medesima formola; ma per la spinta verticale KM trova $\frac{P}{a.\cos.\phi}\left(a.\,\text{sen.}\,\omega.\,\text{sen.}(\phi+\omega)+b.\cos.\omega.\cos.(\omega+\phi)\right)$, che mediante un poco di calcolo può ridursi alla nostra. Anche per la spinta contro il muro AD trova la formula $\frac{-P(a-b).\cos.(\omega+\phi)}{a.\cos.\phi}$ ch'è parimenti la stessa della presentata da noi nell'articolo antecedente (*Veg. Mem. della Soc. Ital. Tomo III. pag.* 531. 532).

§. XV.

Dalle cose sopraddette ne segue, che fatto l' angolo BAD (*Fig.* VII.) della verga col piano AD uguale a zero, cioè $\phi = o$, il qual caso avviene quando l'estremità A s'appoggi ad un piano che secondi l' inclinazione stessa della verga, riuscirà allora la spinta BM contro il muro $BST = \frac{P}{a}\sqrt{\left(b^2 + 2b(a-b).\ \text{sen.}^2\omega + (a-b)^2.\text{sen}^2.\omega\right)} = \frac{P}{a}\sqrt{\left(b^2 + (a^2 - b^2)\ \text{sen.}^2\ \omega\right)}$; ovvero, chiamato l' angolo ABD che fa la verga coll' orizzonte $= \pi$, diventando gli angoli ABD ADB, cioè gli angoli π e ω uguali a due retti, e però sen. $\omega =$ sen. π, sarà la spinta $BM = \frac{P}{a}\sqrt{\left(b^2 + (a^2 - b^2)\ \text{sen.}^2\ \pi\right)}$. Volendo poi dividerla nel solito modo nelle due BK KM, si troverà la spinta orizzontale $BK = -\frac{P}{a}(a-b).\ \text{sen.}\ \omega\ \cos.\omega = \frac{P}{a}(a-b).\ \text{sen.}\ \pi.\cos.\pi$; e la verticale $KM = \frac{Pb}{a} + \frac{P}{a}(a-b).\ \text{sen.}^2\ \pi$. La forza poi CH che preme il muro AD diverrà $= \frac{P}{a}(a-b).\cos.\pi$; ed inoltre il momento della forza BM contro il muro BST si cangierà in $\frac{Pd}{a}(a-b).\ \text{sen.}\pi.\cos.\pi - \frac{beP}{a} - \frac{Pe}{a}(a-b).\ \text{sen.}^2\pi$; le quali cose tutte seguono, come ognun vede, anche dai risultamenti del *P. Fontana*.

§. XVI.

Mi propongo ora di dimostrare che la risoluzione del Sig. Cav. *Lorgna* del problema de' tetti che piovono da una sola banda non discorda da quella del *P. Fontana*. Ecco le parole stesse di quest' altro Autore (*Veg. Saggi di Sta-*

tica e Meccanica ecc. pag. 1.). " Trovare la ſpinta orizzontale ſoſtenuta da' punti *A B* (*Fig.* 8) ſu' quali s'appoggia la verga rigida *AB*, eſſendo perfettamente levigati i piani *MN NO*, e ritenuto il capo della verga *B* dall'oſtacolo *P*.

„ La verticale *KS* condotta dal centro di gravità *K* rappreſenti il peſo della verga *AB*. Si riſolva la forza *KS* nelle due *QS KQ*, una parallela all'aſſe della verga *AB*, l'altra all'aſſe perpendicolare in *K*. E' certo primieramente che la forza *QS* eſercita tutta la ſua azione ſecondo la direzione *AB* contro il punto *B*, e che l'altra *KQ*, operando con direzione perpendicolare, diſtribuiſce con la ſteſſa direzione le ſue azioni ſopra i punti *A B* in reciproca ragione delle riſpettive diſtanze dal centro di gravità *K*. Si divida pertanto la *KQ* in due parti *Af Bd* in queſta ragione, le quali ſieno perpendicolarmente all'aſſe applicate a' punti *A B*, sì che ſtia *Af* a *Bd*, come *BK* a *KA*. Condotta l'orizzontale *AC*, e dal punto *f* la *fr* perpendicolare ad *AC*, eſſendo la forza *Af* riſoluta nelle due *fr Ar*, s'impiegherà la *fr* nel premere verticalmente il piano *MN*, e ſarà l'altra *Ar* la forza orizzontale, con cui è premuto lo ſteſſo piano in *A*. E paſſando al punto *B*, ſi prolunghi la *AB*, e ſi faccia il prolungamento *Bb* uguale alla forza *QS*. Il punto *B* ſarà nello ſteſſo tempo ſollecitato dalle due forze *Bd Bb*, oppure, componendo, dalla forza ad eſſe equivalente *Bg*. Ma eſſendo *BO* orizzontale, ſi conduca dal punto *g* la *ga* perpendicolare a *BO*, e ſarà in tal guiſa la forza *Bg* riſoluta nelle due *ga Ba*, la prima delle quali tenderà a premere verticalmente il piano *NO*, e l'altra *Ba* ſarà la forza orizzontale inteſa a ſpignere l'oſtacolo *P* nel punto *B*. Si è dunque determinata la quantità delle impulſioni orizzontali in *A* e *B*.

Lo ſcopo del celebre Autore è ſtato di trovare le ſpinte orizzontali *Ar Ba* che operano contro il muro *AN* e l'oſtacolo *P*, ma dalle coſe da eſſo dette manifeſtamente appariſce, che l'intera ſpinta contro il piano *MN* è eſpreſſa dalla *Af*, e quella contro l'oſtacolo *P* è eſpreſſa dalla *Bg*. Ora ſia la $AB=a$, la $AK=b$, la $KS=P$, e l'angolo *ABN*

$= SKQ = \pi$, farà $QS = Bb = P.\text{ sen. } \pi$, e $KQ = P.\cos.\pi$, e però la $Af = \frac{P}{a}(a-b).\cos.\pi$, e la $Bd = \frac{bP}{a}.\cos.\pi$, dunque Bg

$$= \sqrt{(Bd^2 + Bb^2)} = \frac{P}{a}\sqrt{(b^2.\cos.^2\pi + a^2.\text{sen.}^2\pi)} = \frac{P}{a}\sqrt{\left(b^2 + (a^2-b^2).\right.}$$

$\left.\text{sen.}^2\pi\right)$. Oltre a ciò se vogliasi calcolare la forza orizzontale Ba contro l'ostacolo, e la verticale ag, si troveranno la prima $= \frac{P}{a}(a-b).\text{ sen. } \pi.\cos.\pi$, e la seconda $= \frac{Pb}{a} + \frac{P}{a}(a-b).\text{ sen.}^2\pi$. I quali valori egualmente che i precedenti della forza Af contro il muro AN, e della intera forza Bg contro l'ostacolo P, coincidono perfettamente con quelli del §. XV. dedotti dalle formole del P. *Fontana* e dalle mie nella supposizione che il muro AN secondi l'andamento della verga AB. Per farsi un'idea distinta di questo caso veggasi la *Fig.* 9 dove AZ mostra il piano su cui s'appoggia l'estremità A della verga, vale a dire AZ mostra la sommità del muro AVD.

§. XVII.

Si potrebbe risolvere assai facilmente questo caso col mio metodo, senza dedurre la sua risoluzione dal problema generale del §. XIII. e ciò in questo modo. Si conduca la AC perpendicolare alla AB, finchè incontri la verticale EFC in C, e unita la CB, si compia il parallelogrammo $CGFH$, di cui se la diagonale CF esprime il peso E, CH esprimerà la pressione contro il muro AVD, e CG quella contro BST: e calcolando si troveranno le stesse identiche formole. Sembra pertanto che il dottissimo Sig. Cav. *Lorgna* nel determinare la forza Af (*Fig.* 8) che spinge il muro AN, facendola cadere secondo una direzione perpendicolare alla AB, abbia avuto in vista questa posizione della verga. Ciò mi dà occasione di discutere se sia più alla pratica conforme il supporre la verga nella posizione suddetta, ovvero in quella della *Fig.* 4., come l'hanno intesa fino ad ora tutti gli Autori eccetto il Sig. Cav. *Lorgna* : ma per procedere con sicuro fondamento in tale ricerca descriviamo prima la maniera tenuta da' nostri Architetti nella costruzione di questi tetti che piovono da una sola banda.

§. XVIII.

Dimostra *AB* (*Fig.* 10) un *puntone* collocato fra le muraglie: questi puntoni, che fanno l'uffizio di *cavalletti* per sostenere il tetto, mettonsi alla distanza di 10 a 12 piedi l'uno dall'altro per tutta la lunghezza che esso debbe avere, e si fanno, quando la *tratta* sia di 15 a 18 piedi, di legname grosso pol. 8 a 9, e meno, se la tratta è minore; e si sostengono qualche volta coi *razzi YZ* come nella figura. I puntoni però si fanno poggiare nell' estremità su' muri, dentro cui vanno incastrati; anzi per tenerli ben fermi, si sollevano alquanto i muri sopra di essi, e si assortificano con due *chiavi* di ferro *R R* una per parte. Sopra i puntoni si mettono i *correnti* *Q* di legname squadrato di pol. 5 a 6 alla distanza di 4 piedi circa uno dall' altro, e vanno distribuiti come nella figura medesima. Finalmente si mettono sopra a' correnti i *panconcelli DE* alla distanza di pol. 10 fra loro, e su questi le *pianelle*, e gli *embrici* o *tegolini*,

§. XIX.

I panconcelli vengono inchiodati ne' correnti, questi ne' puntoni; ma prescindendo da' ferramenti, da' quali bisogna prescindere volendo ridurre a calcolo lo sforzo del tetto, egli è manifesto che tutto il peso del tetto medesimo vien sostenuto da' puntoni, e che però dividendolo pel numero de' puntoni si avrà il peso *E* che opera contro ciascuno di essi. E questo peso *E*, per cagione dell' uniformità del tetto, potrebbesi, senza tema di andar molto lontani dal vero, intenderlo applicato al punto *F* della metà della lunghezza del puntone *AB*. Ma il puntone *AB* come si debbe intender egli appoggiato nelle sue due estremità *A B*, e qual supposizione può esser mai più alla verità e al fatto conforme?

§. XX.

Sembra che la ſuppoſizione più naturale ſia quella d'intendere levate le muraglie ſuperiori a' punti *A B*, le quali non producono che l'effetto, come abbiamo accennato nel §. XVIII, di tener obbligate l'eſtremità del puntone *AB*, e quindi intendere che l'eſtremità *A* s'appoggi ſul piano *AS* che ſegue la ſteſſa direzione del puntone. Certamente è più al vero conforme queſta ſuppoſizione dell'altra, benchè comunemente abbracciata, per cui ſi tiene come reciſo il tronco *AS* del puntone, e appoggianteſi queſto in *S* al muro verticale *SM*; poichè niuno può negare che appunto per mezzo di eſſo tronco *AS* s'aſſeſta l'eſtremità ſuperiore del puntone alla muraglia *SMT*. Biſognerà però nella prima poſizione ſupporre ancora che l'altra eſtremità *B* s'aſſeſti nel piano *PB*, la cui direzione pel §. v. dovrà eſſer perpendicolare alla retta *BC* tirata dal punto *B* al punto dove concorrono la verticale *EF* e quella retta, che dal punto *A* ſi conduce ad angoli retti alla *AB*, e ciò perchè poſſa il puntone reſtar ſoſtenuto dai piani *AS PB*.

§. XXI.

Concludiamo pertanto 1.° che il *P. Fontana* ha riſoluto il problema della verga appoggiata nella ſua eſtremità ſuperiore ad un piano o verticale, o comunque inclinato coll' orizzonte, in un modo fuori di qualunque eccezione. 2.° Che il Sig. Cav. *Lorgna* ha con ugual felicità riſoluto il problema nella ſuppoſizione che l'eſtremità ſuperiore della verga s'appoggi ad un piano ſecondante l'andamento della verga medeſima. 3.° Che queſta riſoluzione ſi ricava anche dalle formole generali del *P. Fontana*. 4.° E per fine che la ſuppoſizione del Sig. Cav. *Lorgna* pare poſſa eſſere più alla verità conforme per calcolare le ſpinte de' tetti che piovono da una ſola banda.

Fig. 1.

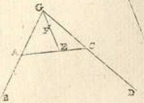

Fig. 2.

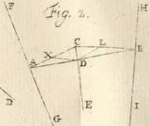

Fig. 3.

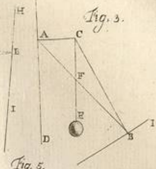

Fig. 8.

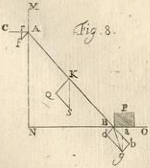

Fig. 4.

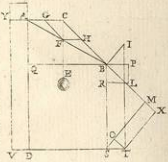

Fig. 5.

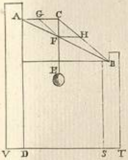

Fig. 6.

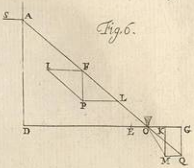

Fig. 7.

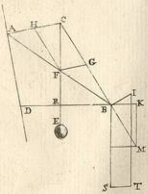

Fig. 9.

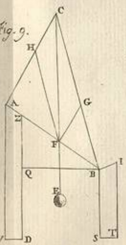

Fig. 10.