PROBLEMA.

Determinare il maſſimo allungamento, che il peſo di un pendolo produce nella corda, a cui è attaccato, che ſi ſuppone priva d' inerzia, e di gravità.

Del Sig. Co. GIORDANO RICCATI.

I. QUeſto problema è ſtato da me ſciolto, quando tentai la coſtruzione della curva deſcritta dalla ghianda d'un pendolo, mettendo a computo la diſtenſione della corda. Ecco la ſtrada da me inutilmente battuta. Il pendolo CB (*Fig.* 1.) ſia collocato in ſito orizzontale: ſi dimanda qual curva BDA deſcriverà il punto B, mettendo a computo la diſtenſione del filo, o corda CB. Sia giunto il pendolo nel ſito CD, e poſcia mova un minimo paſſo ſino in CF. Col raggio CD deſcritto l' archetto DG, conduco pel punto D la perpendicolare EDH, e ſegno DH eguale al peſo finito, o maſſa del volume infiniteſimo B, e pel punto H delineo HI normale a CD prodotta. Finalmente pel punto F tiro la perpendicolare FK, e pel punto D l' orizzontale DL.

Pongo $CB = L$, $CD = L + l$, $ED = y$, $CE = x = \sqrt{(\overline{L+l}^2 - y^2)}$, $BD = s$, $GD = dz$, e ſi avrà per conſeguenza $GF = dl$, $LF = dy$, $EK = -dx = -\frac{(\overline{L+l}\,.\,dl - ydy)}{\sqrt{(\overline{L+l}^2 - y^2)}}$, $DF = ds$, $dz = \sqrt{(ds^2 - dl^2)}$. Sia in oltre M la maſſa, e peſo del corpo B, u la ſua velocità per la direzione DG, v la velocità per la direzione GF, ed V la velocità aſſoluta per l'archetto DF della curva.

II. Eguagliandoſi ad u^2 il quadrato della velocità in D per la direzione DG, avremo la forza centrifuga nel detto punto $= \frac{Mu^2}{L+l}$. Il peſo, o forza DH ſi riſolve nelle due, IH

che stimola il corpo per la direzione DG, e DI che lo stimola per la direzione CI. La seguente analogia determinerà il valore della forza DI.

$$CD : DE :: DH : DI$$
$$L+l : y :: M : \frac{My}{L+l}$$

S'inferisca, che il corpo B è spinto per la direzione CI dalla forza $\frac{Mu^2+My}{L+l}$. Da tale forza egli è d'uopo sottrar quella, con cui la corda resiste all'allungamento, la quale pel numero XV. dello Schediasma I. della mia Opera *Delle corde, ovvero fibre elastiche* pareggia

$\frac{1}{2}h.\frac{(L+l)}{L} - \frac{1}{2}.\frac{hL}{L+l}$, dinotando h la rigidità naturale della corda non istirata da peso alcuno, cioè a dire d'essa corda situata nella positura orizzontale CB. Sarà dunque la forza residua $= \frac{Mu^2+My}{L+l} - \frac{1}{2}h.\frac{(L+l)}{L} + \frac{1}{2}.\frac{hL}{L+l}$, la quale dee supporsi, che agisca per lo spazio $GF = dl$. Ho detto dee supporsi; perchè la forza centrifuga $\frac{Mu^2}{L+l}$ non è atta ad esercitar vera azione, che alteri lo stato del corpo, ma può solo cangiare la proporzione fra le velocità per DG, GF, senza punto mutare dal canto suo la velocità assoluta per l'arco DF della curva, alla qual condizione dee il calcolo soddisfare: sopra di che veggasi la Dissertazione intorno la *vera Origine*, e *Natura della Forza centrifuga* contenuta nella Raccolta di Lucca del 1763. Avremo pertanto il quadrato della velocità per la direzione CD

$$= \frac{2}{M}\int\left(\frac{Mu^2dl+Mydl}{L+l} - \frac{1}{2}h.\frac{(Ldl+ldl)}{L} + \frac{1}{2}.\frac{hLdl}{L+l}\right) = v^2.$$

Il quadrato u^2 della velocità per la direzione DG ha da stare al già scoperto per la direzione CD, ossia GF come $(DG)^2 = dz^2 : (GF)^2 = dl^2$. Avremo dunque $u^2 = \frac{2}{M}.\frac{dz^2}{dl^2}.$

$$\int\left(\frac{Mu^2dl+Mydl}{L+l} - \frac{1}{2}h.\frac{(Ldl+ldl)}{L} + \frac{1}{2}.\frac{hLdl}{L+l}\right),$$

e quindi la ſomma de' quadrati delle velocità per le dette direzioni, eſſendo $dz^2+dl^2=ds^2$, $=\frac{2}{M}\cdot\frac{ds^2}{dl^2}\cdot\int\Big(\frac{Mu^2dl+Mydl}{L+l}$ $-\frac{1}{2}b.\frac{(Ldl+ldl)}{L}+\frac{1}{2}\cdot\frac{bLdl}{L+l}\Big)$ (1).

III. Non eſercitandoſi altra vera azione, che la poſitura della gravità del corpo B, la quale ſi è applicata allo ſpazio $ED=y$, e la negativa della tenſione della corda CD, che ha riperuto i ſuoi contraſti per gli ſpazietti dl, ſi avrà $My-\int\Big(\frac{1}{2}b.\frac{(Ldl+ldl)}{L}-\frac{1}{2}\cdot\frac{bLdl}{L+l}\Big)=\frac{MV^2}{2}$, o ſia effettuando l'indicata integrazione, $My-\frac{1}{2}b.\frac{(2Ll+l^2)}{2L}$ $-\frac{1}{2}b\mathrm{L}.\log.(L+l)=\frac{MV^2}{2}$. (2.). I logaritmi ſi debbono prendere nella logiſtica della ſuttangente $=1$, riferita al protonumero $CB=L$. Non ho aggiunta coſtante; perchè ſenza tale addizione, nella poſizione CB del pendolo, in riguardo a cui $y=o, l=o$, ſi trova rettamente $V=o$. Ora il quadrato della velocità per DF pareggia i due quadrati delle velocità per DG, GF; dunque per le formole (2) e (1), moltiplicando queſta per $\frac{M}{2}$, ſcopriremo My

$$-\frac{1}{2}b.\frac{(2Ll+l^2)}{2L}+\frac{1}{2}b\mathrm{L}.\log.(L+l)=\frac{ds^2}{dl^2}X$$

$$\int\Big(\frac{Mu^2dl+Mydl}{L+l}-\frac{1}{2}b.\frac{(Ldl+ldl)}{L}+\frac{1}{2}\cdot\frac{bLdl}{L+l}\Big)$$, e moltiplicando per dl^2, e preſe le differenze, ſuppoſto ds coſtante,

$$\Big(Mdy-\frac{1}{2}b.\frac{(Ldl+ldl)}{L}+\frac{1}{2}\cdot\frac{bLdl}{L+l}\Big).dl^2$$

$$+\Big(My-\frac{1}{2}b.\frac{(2Ll+l^2)}{2L}+\frac{1}{2}b\mathrm{L}.\log.(L+l)\Big).2dlddl$$

$$=\Big(\frac{Mu^2dl+Mydl}{L+l}-\frac{1}{2}b.\frac{(Ldl+ldl)}{L}+\frac{1}{2}\frac{bLdl}{L+l}\Big).ds^2.$$

Fatta la diviſione per dl, e ſoſtituendo dz^2 in cambio di

$ds^2 - dl^2$, questa equazione si riduce alla seguente $Mdydl + \left(2My - \frac{2bLl - bl^2}{2L} + bL.\log.(L+l)\right).ddl \times \left(\frac{-Mu^2 - My}{L+l}\right).ds^2 + \frac{(2bLl + bl^2)}{2L^2 + 2Ll}.dz^2 = 0\ (3.)$

Rifletta chi legge, che per la formola (2.) $MV^2 = 2My - b\frac{(2Ll+l^2)}{2L} + bL.\log.(L+l)$ dee riferirsi ad Mu^2, come $ds^2 : dz^2$, onde s'abbia $Mu^2 = MV^2.\frac{dz^2}{ds^2} = \left(2My - b.\frac{(2Ll+l^2)}{2L} + bL.\log.(L+l)\right)\frac{dz^2}{ds^2}$. Surrogato questo valore in vece di Mu^2 nella formola (3.), si trova $Mdydl + \left(2My - \frac{2bLl - bl^2}{2L} + bL.\log.(L+l)\right).ddl \times \left(\frac{-2My}{L+l} + b.\frac{(2Ll+l^2)}{L^2+Ll} - \frac{bL.\log.(L+l)}{L+l}\right)dz^2 - \frac{Myds^2}{L+l} = 0\ (4.)$

IV. Col mezzo delle equazioni $L+l = \sqrt{(x^2+y^2)}$, $dl = \frac{xdx+ydy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$, $ddl = \frac{dx^2 + xddx + dy^2 + yddy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$. $- \frac{x^2dx^2 - 2xdxydy - y^2dy^2}{(x^2+y^2).\sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{xddx+yddy}{\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{x^2dy^2 - 2xdxydy + y^2dx^2}{(x^2+y^2).\sqrt{(x^2+y^2)}}$, $ds^2 = dx^2 + dy^2$, $dz^2 = \frac{x^2dy^2 - 2xdxydy + y^2dx^2}{x^2+y^2}$ la formola (4.) si trasformerà così $M.\frac{(xdxdy + ydy^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)}} + \left(2My - b.\frac{(x^2+y^2-L^2)}{2L} + bL.\log.\sqrt{(x^2+y^2)}\right).\left(\frac{xddx+yddy}{\sqrt{(x^2+y^2)}} + \left(b.\frac{(x^2+y^2-L^2)}{2L}\right).\frac{(x^2dy^2 - 2xdxydy + y^2dx^2)}{(x^2+y^2).\sqrt{(x^2+y^2)}}\right.$

$-\frac{(My.(dx^2+dy^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = 0$. Levata la comune divisione per $\sqrt{(x^2+y^2)}$, la formola dopo breve calcolo prende il seguente aspetto $M.(xdxdy-ydx^2)+\Big(2My-b\frac{(x^2+y^2-L^2)}{2L}$

$+bL.\log.\sqrt{(x^2+y^2)}\Big).(xddx+yddy)$

$$+\left(b.\frac{(x^2+y^2-L^2)}{2L}\right).\frac{(x^2dy^2-2xdxydy+y^2dx^2)}{x^2+y^2} = 0 \ (5.)$$

Avendo luogo in questa formola differenziale del secondo grado amendue le incognite finite, e non potendo ad essa adattarsi veruno dei tre metodi insegnati dal dottissimo Signor *Leonardo Eulero* nel Tomo terzo dell' Accademia Petropolitana, non è nota la maniera di ridurla alle prime differenze; e quindi non riesce di dar compimento alla soluzione del nostro problema.

V. Ho nondimeno giudicato opportuno il pubblicare il metodo da me usato, acciocchè possa servir di regola nella soluzione di quei problemi, nei quali ha luogo la forza centrifuga. Nel numero III. ho già detto, che la sola vera azione, che si esercita, è $My-\frac{1}{2}b.\frac{(2Ll+l^2)}{2L}$ $+\frac{1}{2}bL.\log.(L+l)$, a cui deve uguagliarsi la forza viva $\frac{MV^2}{2}$ del corpo M. La velocità V del predetto corpo per la direzione DF si concepisce risolta nelle due, v per la direzione GF, u per la direzione DG. Nel numero II. ho determinata la forza per la direzione DI, ossia GF derivata dal peso del corpo M uguale ad $\frac{My}{L+l}$. Si aggiunga la forza centrifuga $\frac{Mu^2}{L+l}$ per la stessa direzione, e dalla somma $\frac{My+Mu^2}{L+l}$ si sottri la forza $\frac{1}{2}b.\frac{(L+l)}{L}-\frac{1}{2}.\frac{bL}{L+l}$, colla quale per la medesima direzione la corda ripugna all' allungamento, e rimarrà la forza $\frac{My+Mu^2}{L+l} - \frac{1}{2}h.\frac{(L+l)}{L}$ $+\frac{1}{2}\frac{hL}{L+l}$, a cui si dee attribuire l'azione $\frac{Mydl+Mu^2dl}{L+l}$ $-\frac{1}{2}h.\frac{(Ldl+ldl)}{L}+\frac{1}{2}\frac{hLdl}{L+l}$; adempiuta l'obbligazione di aggiustar le partite detraendo dall'azione della forza per la direzione DG l'azione $\frac{Mu^2dl}{L+l}$, che non esiste in natura; perchè alla forza centrifuga non si può assegnar vera azione.

Poichè $CD=L+l:CE=x::DH=M:HI=\frac{Mx}{L+l}$, sarà $\frac{Mx}{L+l}$ la forza derivata dal peso M, la quale spinge il corpo per la direzione DG, ed agisce per lo spazietto $DG=dz$, onde s'abbia l'azione $\frac{Mxdz}{L+l}$. La resistenza della corda, che tira per la direzione DC della corda stessa, non può esercitare alcuna reazione per la direzione DG. Si farà la dovuta compensazione, se la forza viva del corpo M per la direzione DG si ponga $=\int\left(\frac{Mxdz}{L+l}-\frac{Mu^2dl}{L+l}\right)=\frac{Mu^2}{2}$. In tal guisa la somma delle azioni elementari per gli spazietti $GF=dl$, $DG=dz$ si scoprirà $=\frac{Mydl+Mu^2dl}{L+l}$ $-\frac{1}{2}h\frac{(Ldl+ldl)}{L}+\frac{1}{2}.\frac{hLdl}{L+l}+\frac{Mxdz}{L+l}-\frac{Mu^2dl}{L+l}=\frac{Mydl+Mxdz}{L+l}$ $-\frac{1}{2}h\frac{(Ldl+ldl)}{L}+\frac{1}{2}.\frac{hLdl}{L+l}$, la quale s'eguaglia alla vera azione, che in natura si esercita $=Mdy-\frac{1}{2}h.\frac{(Ldl+ldl)}{L}$ $+\frac{1}{2}.\frac{hLdl}{L+l}$. Ed in fatti $\frac{Mydl+Mxdz}{L+l}=Mdy$. Sostituiti in vece di dl, dz i loro valori registrati nel numero IV. troveremo $My.\frac{(xdx+ydy)}{x^2+y^2}+Mx.\frac{(xdy-ydx)}{x^2+y^2}$

$= \frac{Myxdx + My^2dy + Mx^2dy - Myxdx}{x^2+y^2} = Mdy$, come ſi dovea dimoſtrare. Avremo pertanto una nuova eſpreſſione di $\frac{Mu^2}{2} = \int\left(\frac{Mxdz}{L+l} - \frac{Mu^2dl}{L+l}\right)$ che ci ſomminiſtra le ſottoſcritte conſeguenze.

VI. Preſcindendo dalla forza centrifuga, eſſer dovrebbe $\frac{Mv^2}{2} = \int\left(\frac{Mydl}{L+l}\right) - \frac{1}{2}b.\left(\frac{2Ll+l^2}{2L}\right) + \frac{1}{2}bL.\log.(L+l)$, $\frac{Mu^2}{2} = \int\left(\frac{Mxdz}{L+l}\right)$, e la loro ſomma $= \frac{Mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = \frac{MV^2}{2} = My - \frac{1}{2}b.\frac{(2Ll+l^2)}{2L} + \frac{1}{2}bL.\log.(L+l)$, avendo poco fa dimoſtrato $\frac{Mydl}{L+l} + \frac{Mxdz}{L+l} = Mdy$, e perciò $\int\frac{Mydl}{L+l} + \int\frac{Mxdz}{L+l} = My$. Computata la forza centrifuga, creſce la velocità v, e cala la u colla legge che ſia $\frac{Mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = \frac{MV^2}{2} = My - \frac{1}{2}b.\frac{(2Ll+l^2)}{2L} + \frac{1}{2}bL.\log.(L+l)$; dimodochè tanto s' aumenti $\frac{Mv^2}{2}$ quanto ſcema $\frac{Mu^2}{2}$ per la $\int\frac{Mu^2dl}{L+l}$. Credo che quanto ho ſcritto ſia ſufficiente per mettere in chiaro lume la maniera, con cui deggionſi maneggiar quei problemi, nei quali c' entra la forza centrifuga.

VII. Se non s' ottiene la coſtruzione della curva $BDFA$, ci è non pertanto permeſſo di ſcoprire il maſſimo allungamento della corda corriſpondente alla poſitura CA, quando le due linee $ED = y$, $CD = L+l$ coincidono, onde s' abbia $y = L+l$. Ho determinato nel numero II. la forza, che allunga la corda $= \frac{Mu^2+My}{L+l} - \frac{1}{2}b.\frac{(L+l)}{L} + \frac{1}{2}.\frac{bL}{L+l}$

$= \frac{Mu^2+My}{L+l} - \frac{2bLl-bl^2}{2L.(L+l)}$. Qualora l'allungamento sia giunto al massimo, questa forza dee pareggiare il nulla, e per conseguenza $Mu^2 = \frac{2bLl+bl^2}{2L} - My$: dunque $Mu^2 = \frac{2bLl+bl^2}{2L} - M.(L+l)$. La velocità u normale alla direzione della corda s' eguaglia nella mentovata circostanza alla velocità assoluta V del corpo B, ed essendo generalmente $MV^2 = 2My - \frac{2bLl-bl^2}{2L} + bL.\log.(L+l)$, e nella ipotesi di $y = L+l$, $MV^2 = 2M.(L+l) - \frac{2bLl-bl^2}{2L} + bL.\log.(L+l)$ avremo $2M.(L+l) - \frac{2bLl-bl^2}{2L} + bL.\log.(L+l) = \frac{2bLl+bl^2}{2L} - M.(L+l)$, e perciò $\log.(L+l) = \frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M.(L+l)}{bL}$ (6.). Formo due equazioni $\log.(L+l) = p$ (7.), $\frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M.(L+l)}{bL} = q$ (8.) e quest' ultima si riduce alla seguente $\left(L+l - \frac{3LM}{2b}\right)^2 = L^2.\left(1 + \frac{9M^2}{4b^2} + q\right)$ (9.).

VIII. All' asse BI (*Fig.* 2.), col parametro L^2 delineo la parabola $BDEA$, in cui all' ascissa $BI = 1 + \frac{9M^2}{4b^2} + q$ corrisponderà l' ordinata $IA = L+l - \frac{3LM}{2b}$. Continuata AI sino in C, dimodochè sia $CI = \frac{3LM}{2b}$, ne risulterà $CA = L+l$. Pel punto C si tiri CK parallela ad IB, e segnata $BF = 1$, a cui si riferisce $FD = L$, $FG = \frac{9M^2}{4b^2}$, sarà GI o $LC = q$.

Faccio

Faccio $LH = FD = L$, ed all'assintoto KC descrivo la logaritmica MHA della suttangente $BF = 1$, che passi pel punto H, il cui protonumero $LH = L$. Essendo $LH < LE$, la logaritmica taglierà la parabola in un punto A, per cui si conduca l'ordinata AC. Giusto l'equazione (7.) $\log.(L+l) = p$, avremo $LC = p$, $CA = L+l$: ma per l'equazione (8.) $\frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M.(L+l)}{bL} = q$, $LC = q$, $CA = L+l$; dunque rispettivamente al punto A, $p = q$, e per conseguenza si avvera l'equazione (6.) $\log.(L+l) = \frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M.(L+l)}{bL}$, e $CA = L+l$ è la massima lunghezza, a cui perviene (*Fig.* 1.) il filo del pendolo CB, quando è giunto nel sito verticale CA.

IX. Se la rigidità naturale b della corda, che ad essa compete prima che si cominci ad allungare, sia infinitamente picciola, diverrà infinita la linea (*Fig.* 2.) $LG = \frac{3LM}{2b}$. Lo stesso valore adequatamente competerà anche all' ordinata GE della parabola, la quale s'eguaglia ad $L.\sqrt{\left(1+\frac{9M^2}{4b^2}\right)} = \frac{3LM}{2b} + \frac{Lb}{3M} = \frac{3LM}{2b}$, e perciò $LE = \frac{3LM}{b}$. Quindi il punto H distarà infinitamente dal punto E, e la logistica MHA taglierà la parabola $BDEA$ in un punto A immensamente lontano dal punto E; di maniera che se LE è infinita, tanto più riuscirà infinita $CA = L+l$. Postochè fosse $b = o$, il filo CB (*Fig.* 1.) non farebbe alcuna resistenza, ed il corpo B discenderebbe per la linea del piombo BO, nè per quanto si allungasse il filo benchè infinitamente, potrebbe mai giungere, se non per adequazione, nella positura CA. Che se suppongasi b infinitesima, il pendolo perverrà nel sito CA, ma dopo un allungamento infinito.

X. Passo all'ipotesi contraria, e fingo infinita la naturale rigidità b. In tale circostanza diviene minima (*Fig.* 2.) la linea $LG = \frac{3LM}{2b}$, ed immenſamente ancora più picciola la linea $FG = \frac{9M^4}{4b^2}$. S' adeguano dunque le due ordinate FD, GE, ed altresì le due linee $LG = LH - GH$, $HE = GE - GH$, laonde il punto H è infinitamente proſſimo al punto E della parabola. S' inferiſca, che ancora il punto A, in cui le due curve s' interſecano, ſarà viciniſſimo al punto E, e perciò $CA = L + l$ ſupererà infinitamente poco $LH = L$. Preſa per mano la formola (6.) log. $(L+l) = \frac{2Ll + l^2}{L^2}$ $- \frac{3M.(L+l)}{bL}$, e fatta la rifleſſione eſſere nella preſente ſuppoſizione log. $(L+l) = \frac{l}{L}$, ed l^2 traſcurabile riſpettivamente ad l, troveremo $bl = 2bl - 3M.(L+l)$, e conſeguentemente $\frac{3ML}{b-3M} = l$, o ſia per adequazione $\frac{3LM}{b} = l$: ma HE $= LG = \frac{3LM}{2b}$; dunque tirata HN parallela a BI, ne riſulta $NA = l = 2HE$.

Nello Schediaſma I. della citata mia Opera ho fatto vedere quanto ſia grande la rigidità naturale b nelle corde di metallo. La rigidità naturale corriſpondente al peſo di due libbre, che ſtirava una corda da me uſata in alcune ſperienze riferite nel numero XVIII. aſcendeva a libbre $1134\frac{7}{13}$. Supponiamo, che la rigidità naturale della corda del pendolo nel ſito orizzontale CB (*Fig.* 1.) ſi eguagli a libbre 1201, e ſia $M = \frac{1}{3}$, L = once 12 = linee 144, e facendo uſo della formola $l = \frac{3ML}{b-3M}$ competente all' ipoteſi di b infinita, ſi troverà il maſſimo allungamento

$$l = \frac{144}{1201 - 1} = \frac{12}{100} = \frac{3}{25} \text{ di linea.}$$

XI. Volendo dedurre la misura della distensione l dalla formola (6.) log. $(L+l) = \frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M.(L+l)}{bL}$, egli è d' uopo ricorrere all' attentazione. Per servirsi dei logaritmi delle tavole, si rifletta, che nella logistica della suttangente $= 1$, log. $(L+l)$ riferito al protonumero L si eguaglia a log. $\frac{(L+l)}{L}$ riferito al protonumero $= 1$. Ora la logaritmica delle tavole ha il logaritmo del numero $10 = 1$, e nella logistica della suttangente $= 1$ il logaritmo del predetto numero è $= 2,3025851$. Rispettivamente al medesimo protonumero i logaritmi dello stesso numero stanno come quelli d' un numero dato. Prendendo adunque log. $\frac{(L+l)}{L}$ nelle tavole, si faccia $1 : 2,3025851 :: \log. \frac{(L+l)}{L} : 2,3025851 . \log. \frac{(L+l)}{L}$, ed il quarto termine pareggerà nella logistica della suttangente $= 1$ log. $\frac{(L+l)}{L}$ riferito al protonumero $= 1$, e conseguentemente log. $(L+l)$ riferito al protonumero L. Quindi valendoci dei logaritmi delle tavole avremo $2,3025851 \log. \frac{(L+l)}{L} = \frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M.(L+l)}{bL}$, formola, che si riduce alla seguente

$$LV\left(2,3025851 . \log. \frac{(L+l)}{L} + 1 + \frac{9M^2}{4b^2}\right) + \frac{3ML}{2b} = L+l \ (10.)$$

Si assegni ad $L+l$ un valore più prossimo al vero che sia possibile, deducendolo o dalla costruzione delineata diligentemente, e con fisica esattezza, o come nell' esempio addotto, quando la rigidità b è assai grande, dalla formola $l = \frac{3ML}{b-3M}$. Nel nostro esempio adunque si ponga $L+l = 144,12$, onde s' abbia $\frac{L+l}{L} = \frac{14412}{14400} = \frac{1201}{1200}$, e $\log. \frac{1201}{1200} = 0,0003620$. Sostituiti nella formola (10.) in vece di $\log. \frac{(L+l)}{L}$, di L, di M, e di b gli stabiliti valori, si troverà dopo i necessarj calcoli $144,119964 = L+l$, valore adequatamente uguale al supposto, consistendo la differenza nella minuzia $0,000036$. Qui non c' è bisogno di passare ad altre operazioni, perchè abbiamo determinato il valore di $L+l$ sommamente prossimo al vero. Per altro il trovare $L+l$ minore del valore supposto significa, che il detto valore ipotetico è più grande del giusto.

XII. *Se* la prima positura CP (*Fig.* 3.) del pendolo fosse inclinata all'orizzonte, si tirino PM, CB orizzontali, e PB verticale, e ritenute l'altre denominazioni, si chiami $CP = L$, $CM = a$. Nel sito CP il filo sarà stirato dalla forza $\frac{aM}{L}$, e perciò a questa forza tendente dovrà corrispondere la rigidità naturale b. Giunto il pendolo in CD, sarà la corda stirata dalla forza $\frac{Mu^2+My}{L+l}$, a cui pel numero XV. dello Schediasma I. della mentovata mia Opera farà contrasto la forza $\left(\frac{1}{2}b + \frac{aM}{L}\right) \cdot \frac{(L+l)}{L} - \frac{1}{2}b \cdot \frac{L}{L+l}$. Avremo dunque la forza residua $= \frac{Mu^2+My}{L+l} \left(-\frac{1}{2}b - \frac{aM}{L}\right) \cdot \frac{(L+l)}{L} + \frac{1}{2}b \cdot \frac{L}{L+l}$ (11.)

Il corpo B nel punto D verrà animato dalla forza viva $\frac{MV^2}{2} = My - Ma - \int\left(\left(\frac{1}{2}b + \frac{aM}{L}\right) \cdot \frac{(Ldl+ldl)}{L} - \frac{1}{2}b \cdot \frac{Ldl}{L+l}\right) = My - Ma \left(-\frac{1}{2}b - \frac{aM}{L}\right) \cdot \frac{(2Ll+l^2)}{2L} + \frac{1}{2}bL.\log.(L+l)$, prendendo i logaritmi nella logistica della suttangente $= 1$, riferita al protonumero $CP = L$. Ora nel punto A, $u = V$, $y = L+l$, e la forza allungante la corda eſſer dee $= 0$; dunque ſoſtituendo nella formola (11.) in luogo di $u^2 = V^2$, e di y i loro valori, ſcopriremo

$$\frac{2M.(L+l) - 2Ma - \left(b+\frac{2aM}{L}\right) . \left(\frac{2Ll+l^2}{2L}\right) + bL.\log.(L+l)}{L+l}$$

$+M - \left(\frac{1}{2}b + \frac{aM}{L}\right) . \frac{(L+l)}{L} + \frac{\frac{1}{2}bL}{L+l} = 0$ (12.), la qual formola ſi riduce alla ſeguente

$$\sqrt{\left(\frac{bL^3 . \log.(L+l) + bL^3 - aML^2}{bL+2aM} + \frac{\frac{9}{4}M^2L^4}{(bL+2aM)^2}\right)} + \frac{\frac{3}{2}ML^2}{bL+2aM}$$

$= L+l$ (13.) e volendo far uſo dei logaritmi delle tavole,

$$\sqrt{\left(\frac{2,3025851\,bL^3 . \log.\frac{(L+l)}{L} + bL^3 - aML^2}{bL+2aM} + \frac{\frac{9}{4}M^2L^4}{(bL+2aM)^2}\right)}$$

$+\frac{\frac{3}{2}ML^2}{bL+2aM} = L+l$ (14.). Col mezzo di queſta equazione ſi troverà la maſſima lunghezza $L+l = CA$ della corda, ponendo in opera il metodo dell'attentazione.

XIII. La formola (12.) ſi può coſtruire collo ſteſſo artificio uſato riſpettivamente alla formola (6.). La mentovata formola (12.) ſi traſforma così $\log.(L+l)$ $= \frac{(bL+2aM)}{bL^3} . (2Ll+l^2) - \frac{3M}{bL} . (L+l) + \frac{3aM}{bL}$. Faccio $\log.(L+l) = p$ (15.), $\frac{(bL+2aM)}{bL^3} . (2Ll+l^2) - \frac{3M}{bL} . (L+l)$ $+ \frac{3Ma}{bL} = q$ (16.). L'ultima equazione dopo varie operazioni prende il ſottopoſto aſpetto $\left(L+l - \frac{3}{2} . \frac{ML}{b}\right)^2$ $= \frac{bL^3}{bL+2aM} . \left(\frac{9M^2L}{4b.(bL+2aM)} - \frac{aM}{bL} + 1 + q\right)$, e ſi coſtruiſce nella ſeguente maniera.

All' aſſe BI (*Fig.* 2.) col parametro $\frac{bL^3}{bL+2aM}$ delineo la parabola $BDEA$, le cui ascisse $BI = \frac{9M^2L}{4b.(bL+2aM)} - \frac{aM}{bL} + 1 + q$, e le ordinate $IA = L+l - \frac{3ML}{2b}$. Aggiunta all'ordinata IA la linea $CI = \frac{3ML}{2b}$, ne risulta $CA = L+l$. Taglio poscia $BG = \frac{9M^2L}{4b.(bL+2aM)} - \frac{aM}{bL} + 1$, e resta $GI = LC = q$.

Segnata $LH = L$, che prendo in figura di protonumero, all' assintoto CK descrivo la logaritmica AHM della suttangente $= 1$, le cui coordinate $LC = p$, $CA = L+l$. S'intersechino la parabola, e la logistica nel punto A, e giacchè rispettivamente ad esso punto, q, e p hanno lo stesso valore, ed altresì è comune l'ordinata $CA = L+l$, avremo log. $(L+l) = \frac{(bL+2aM)}{bL^3} \cdot (2Ll+l^2) - \frac{3M.(L+l)+3aM}{bL}$, qualmente richiede l'equazione (12.), e perciò CA sarà la massima lunghezza, a cui perviene la corda, mentre il pendolo oscilla.

XIV. L'allungamento l può esser minimo, o perchè sia infinita la naturale rigidità b della corda, relativa alla forza stirante $\frac{aM}{L}$, o perchè sia infinitesimo l'angolo (*Fig.* 3.) ACP. In ambo le circostanze si avrà log. $(L+l) = \frac{l}{L}$, e riuscirà trascurabile la quantità rispettivamente nulla l^2. Scopriremo pertanto, ridotto il computo $\frac{3ML.(L-a)}{bL+4aM-3ML} = l$ (17.)

Sia infinitamente grande la rigidità b, e cancellati nel denominatore i termini minimi in riguardo ad bL, avremo $\frac{3M.(L-a)}{b} = l$.

Se stando dentro i limiti del finito la rigidità b fosse infinitesimo l'angolo ACP, e per conseguenza minima la tangente $MP = b$ dell'arco MQ descritto col raggio $CM = a$, onde ne risulti $QP = L - a$, si avrebbe $L^2 - a^2 = b^2$, o sia $L - a = \frac{b^2}{L+a}$; e giacchè adequatamente $a = L$, ne risulterebbe $L - a = \frac{b^2}{2L}$. Nel numeratore della formola (17.) si ponga in cambio di $L - a$ il suo valore $\frac{b^2}{2L}$, e nel denominatore si collochi $4ML$ in vece di $4aM$, e ci si presenterà

$$\frac{3Mb^2}{2bL + 2ML} = l.$$

Fig. 1.

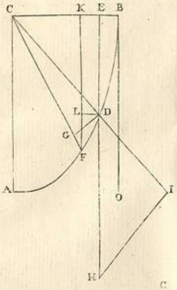

Fig. 2.

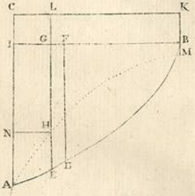

Fig. 3.