SULL' EQUAZIONI

A DIFFERENZE FINITE

Del medeſimo.

L' Equazioni a differenze finite preſentano ſpeſſo per la loro integrazione maggiori difficoltà di quelle, che ſi incontrano nella integrazione dell' equazioni differenziali. In queſte eſſendo la differenza *dx* infinitamente piccola, e potendoſi ſempre aſſumere coſtante, queſte due condizioni facilitano le operazioni che la loro integrazione richiede. In quelle la differenza di x può eſſere o coſtante o variabile; nel primo caſo le difficoltà della loro integrazione ſi riducono a quelle dell' equazioni differenziali; ma nel ſecondo caſo la variabilità della differenza potendo eſſer qualunque, ed eſtendendoſi alle differenze ſeconde ed ulteriori, ſi rende oltremodo malagevole l' integrazione di queſt' equazioni, preſa generalmente e ſpeſſo quell' equazione, che in un dato ſiſtema di differenza variabile può integrarſi, la medeſima ſi rende affatto intrattabile, ſe ſi muta la legge della differenza. Ma ſiccome tra le differenze variabili e le coſtanti vi è un certo rapporto, mediante il quale quelle per queſte eſprimer ſi poſſono; pare che vi debba eſſere un metodo generale, per cui qualunque ſia la differenza variabile, l' integrazione dell' equazioni affette da queſta differenza ridur ſi poſſa all' integrazione di equazioni a differenze coſtanti. Con queſto metodo ci potremo diſpenſare dal fare ulteriori ricerche nelle moltiplici ſpecie dell' equazioni a differenze variabili, e tutto ſi ridurrà all' integrazione di equazioni a differenze coſtanti, le quali ſono più trattabili. Ho altrove accennato un tal metodo, ma adeſſo mi propongo di eſporne i principj con qualche eſtenſione.

I.

Si abbia dunque un' equazione qualunque a differenze finite e variabili $M=0$ tra le variabili x ed y_x, e la differenza di x sia $\phi : x - x$, ove col segno $\phi : x$ indico qualunque funzione di x. Si faccia $x=p_z$, e questa funzione p_z si determini in modo, che quando x varia di $\phi : x - x$, la z nella funzione p_z varj dell' unità. Avremo dunque $\phi : x = p_{z+1}$, e siccome $\phi : x = \phi : p_z$, avremo l' equazione

$$p_{z+1} = \phi : p_z \qquad (a)$$

L' integrale di questa equazione ci darà il valore di $p_z = x$, onde poi potremo dedurre il valore di z per x. Facendo $x=p_z$ in M, y_x diventerà y_{p_z} che chiameremo t_z, e supponendo che dopo questa sostituzione M diventi M', avremo l' equazione $M'=0$ tra le variabili z e t_z, ove la differenza di z è costante $=1$. Sia $t_z = \phi$ l' integrale completo di questa equazione, ed avremo per l' integrale della proposta $y_x = P$, se in P si porrà in luogo di z il suo valore dato per x.

II.

Di qualunque ordine sia l' equazione $M=0$, l' integrale $t_z = P$ contiene tutte le costanti necessarie per ottenere un valore completo di y_x: quindi non sarà d' uopo che trovare un integrale particolare dell' equazione (a), oppure avendone trovato l' integrale completo si potrà determinare la costante arbitraria in modo che il valore di y_x riesca il più semplice e il più comodo per l' uso che se ne vuol fare.

III.

III.

Per maggior schiarimento supponghiamo che l' equazione $M=0$ sia lineare, cioè della forma

$$Ay_x + By'_x + Cy''_x \ldots\ldots + My^{(n)}_x = X$$

ove sieno $A, B, C \ldots M$, ed X funzioni di x, ed $y'_x = y_x + \Delta y_x$, $y''_x = y'_x + \Delta y'_x$, ecc. essendo come sopra $\Delta x = \varphi : x - x$. Se $A1, B1$, ecc. $X1$ sono i valori di A, B, ecc. X, quando in luogo di x vi si pone p_z, l' equazione $M'=0$ sarà della forma

$$A1t_z + B1t_{z+1} + C1t_{z+2} \ldots\ldots + N1t_{z+n} = X1.$$

Adesso trovato $t_z = P$ si avrà $y_x = P$ sostituendo in P, x in luogo di p_z. Si osservi che mediante questa sostituzione le quantità $A1$, $B1$, $C1$, $\ldots X1$ ritorneranno ad essere $A, B, C, \ldots X$. Quindi non occorrerà fare alcuna sostituzione in A, B, ecc. purchè si osservi nel decorso dell' integrazione di non fare intorno a queste quantità alcuna operazione, la quale potesse mescolarle con altre quantità che porta l' integrazione. Poi nella quantità P si troveranno intatte queste quantità, e la sostituzione del valore di z dovrà farsi nelle quantità che ha portate l' integrazione. Le operazioni per altro sulle quantità A, B, C, ecc. come sarebbe la differenza o la somma dovranno farsi secondo il sistema di differenza variabile che regna nella proposta. Ecco dunque a qual cosa si riduce il nostro metodo. S' integri la proposta, come se la differenza di x fosse $=1$, avvertendo di non eseguire ma accennare le operazioni sulle quantità A, B, C, ecc. Poi lasciando intatte le quantità A, B, C, ecc. si ponga da per tutto in luogo di x il valore di z ricavato dall' equazione $x = p_z$, essendo p_z tale che abbia luogo l' equazione $p_{z+1} = \varphi : p_z$.

IV.

Si abbia l'equazione lineare di prim'ordine

$$Ay_x + By'_x = X$$

essendo in esso $\Delta x = \phi : x - x$. S'integri come se la differenza di x fosse uguale all' unità, e l' integrale sarà com' è noto

$$y_x = e^{\Sigma \log. -\frac{A}{B}} \left(C - \Sigma e^{-\Sigma \log. -\frac{A}{B}} . \frac{X}{A}\right);$$

e questo medesimo sarà l' integrale della proposta, se invece di x vi si sostituirà il suo valore, o sia se le integrazioni si faranno nella ipotesi di $\Delta x = \phi : x - x$. Infatti si abbia l' integrale $\Sigma M = P_x$ quando $\Delta x = 1$, e ponendo in P_x il valore di x, P_x diventi $\mathfrak{Q}_x$; sarà $\mathfrak{Q}_x$ l' integrale di M quando $\Delta x = \phi : x - x$. Poichè $P_{x+1} - P_x = M$; ma P_x fatta la sostituzione è $= \mathfrak{Q}_x$, $P_{x+1} = \mathfrak{Q}_{\phi_x}$: dunque $\mathfrak{Q}_{\phi_x} - \mathfrak{Q}_x = M$, cioè $\mathfrak{Q}_x$ è l' integrale di M nell' ipotesi di $\Delta x = \phi : x - x$.

V.

Nell' esempio addotto fortunatamente abbiamo potuto far di meno della sostituzione, che dipende dall' integrazione dell' equazione $p_{z+1} = \phi : p_z$. Ma negli altri casi converrà avere un integrale particolare di questa equazione, lo che sembra superare le forze dell' analisi, se ϕ si prende nella sua generalità. Contuttociò in molti casi particolari potrà quell' equazione integrarsi, come ne andremo alcuni accennando.

I.° Sia $\phi : x = ax + b$, essendo a, b quantità costanti, ed avremo

$$p_{z+1} = ap_z + b$$

e facilmente si troverà $p_z = \frac{Ca^z - b}{a-1} = \frac{a^z-b}{a-1}$ facendo $C = 1$.

Sarà dunque $x = p_z = \frac{a^z-b}{a-1}$, e $z = \frac{\log.(b+\overline{a-1}.x)}{\log. a}$.

II.° Sia $\phi : x = ax^m$, avremo

$$p_{z+1} = ap^m_z \,.$$

Per integrar questa equazione facciamo $p_z = a^{q_z}$, ed avremo $a^{q_{z+1}} = a^{mq_z+1}$, e prendendo i logaritmi $q_{z+1} = mq_z + 1$, e $q_z = \frac{Cm^z-1}{m-1}$, quindi $p_z = a^{\frac{Cm^z-1}{m-1}} = x$, e prendendo di nuovo i logaritmi $z = \frac{\log.\left(\frac{1}{C} + \frac{\overline{m-1}.\log.x}{C\log. a}\right)}{\log. m}$, e più semplicemente $z = \frac{\log.(\log. a+\overline{m-1}.\log. x)}{\log. m} = \frac{\log.\log. ax^{m-1}}{\log. m}$.

III.° Sia $\phi : x = \sqrt[m]{a+bx^m}$, avremo l' equazione

$$p_{z+1} = \sqrt[m]{a+bp^m_z}$$

e quindi $p^m_{z+1} = a + bp^m_z$, e facendo $p^m_z = q_z$, $q_{z+1} = a + bq_z$, e $q_z = \frac{b^z-a}{b-1}$, $p_z = x = \sqrt[m]{\frac{b^z-a}{b-1}}$, e quindi $x^m(b-1) + a = b^z$, e prendendo i logaritmi $z = \frac{\log.(x^m.\overline{b-1}+a)}{\log. b}$.

IV.° Sia $\phi : x = x^2 - 2$, ed avremo

$$p_{z+1} = p^2_z - 2$$

Facciamo $p_z = q_z + \frac{1}{q_z}$, ed avremo $q_{z+1} + \frac{1}{q_{z+1}} = q^2_z$

$+\frac{1}{q^2_z}$, cioè $q_{z+1}=q^2_z$. Sia $q_z=e^{r_z}$, essendo e il numero che ha per logaritmo iperbolico l' unità, ed avremo $r_{z+1}=2r_z$, ed $r_z=C2^z$: quindi $q_z=e^{C2^z}$, e $p_z=e^{C2^z}+e^{-C2^z}=2\cos. 2^z$ facendo $C=1$; e perciò $2^z=Ar.\text{del cos.}\frac{x}{2}$, e $z=\frac{\log.\text{ Arc. del cos. }\frac{x}{2}}{\log. 2}$.

V.° Sia $\phi:x=x^3-3x$, avremo l' equazione

$$p_{z+1}=p^3_z-3p_z$$

e facendo $p_z=q_z+\frac{1}{q_z}$, $q_{z+1}+\frac{1}{q_{z+1}}=q^3_z+\frac{1}{q^3_z}$, cioè $q_{z+1}=q^3_z$, e $q_z=e^{C3^z}$, $p_z=x=e^{C3^z}+e^{-C3^z}$.

VI.° Ma cerchiamo in generale qual esser debba la funzione $\phi:x$, perchè mediante la sostituzione $p_z=q_z+\frac{1}{q_z}$ l' equazione $p_{z+1}=\phi.p_z$ diventi $q_{z+1}=q^n_z$, o sia $q_{z+1}+\frac{1}{q_{z+1}}=q^n_z+\frac{1}{q^n_z}$. Facciamo

$$\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^n=q_z^n+\frac{1}{q^n_z}+A\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^{n-2}$$

$$+B\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^{n-4}+C\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^{n-6}+\text{ecc.}$$

e supponendo che quando n diventa $n+1$, A, B, ecc. diventino A', B', ecc. avremo

$$\left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n+1} = q_z^{n+1} + \frac{1}{q_z^{n+1}} + A'\left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-1}$$

$$+ B'\left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-3} + C'\left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-5} + \text{ecc.}$$

Ma $\left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n+1} = \left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n} \left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)$, cioè

$$\left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n+1} = q_z^{n+1} + \frac{1}{q_z^{n+1}} + q_z^{n-1} + \frac{1}{q_z^{n-1}} +$$

$$A\left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-1} + B\left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-3} + C\left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-5} + \text{ecc.}$$

$$= q_z^{n+1} + \frac{1}{q_z^{n+1}} + A\left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-1} + B\left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-3} +$$

$$C\left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-5} + \text{ecc.}$$

$$+ \left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-1} - {}'A\left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-3} - {}'B\left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-5} - \text{ecc.}$$

essendo $'A$, $'B$, ecc. i valori di A, B, ecc. quando n diventa $n-1$. Paragonando adunque i due valori di $\left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n+1}$ avremo $A' - A = 1$, $B' - B = -{}'A$, $C' - C = -{}'B$. ecc. cioè $A = \Sigma 1 = n +$ cost., $B = -\Sigma\, 'A = -\Sigma(n-1+C') = -\frac{n(n-3)}{2} - C'n - C''$, $C = \frac{n(n-4)(n-5)}{2.\ 3} + C'n^2 + C''n + C'''$, ecc. Le costanti C', C'', C''', ecc. si troveranno tutte uguali a zero. se si riflette che il termine medio della potenza $\left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n}$

è $=2$ quando $n=2$, è $=6$ quando $n=4$, è $=20$ quando $n=6$, ecc. Quindi avremo $A=n$, $B=-\frac{n(n-3)}{2}$, $C=\frac{n(n-4)(n-5)}{2.\ 3}$, $D=\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{2.\ 3.\ 4}$, ecc. e perciò l' equazione

$q_{z+1}+\frac{1}{q_{z+1}}=q^n_z+\frac{1}{q^n_z}$ ci darà, ponendo $q_z+\frac{1}{q_z}=p_z$,

$$p_{z+1}=p_z^n-np_z^{n-2}+\frac{n(n-3)}{2}p_z^{n-4}+\frac{n(n-4)(n-5)}{2.\ 3.}p_z^{n-6}-\text{ecc}$$

e l' integrale di questa equazione sarà

$$p_z=x=e^{Cn^z}+e^{-Cn^z}=2\cos.\ Cn^z.$$

V I.

Abbiamo scorsi alcuni casi tra molti altri, che potrebbero riferirsi, ne' quali può integrarsi l' equazione $p_{z+1}=\phi{:}p_z$. Ma potremo anche far di meno di questa integrazione per ritrovare il valore di z che deve sostituirsi in luogo di x. In fatti se $x=p_z$, viceversa sarà $z=q_x$, essendo q_x una funzione di x, e siccome $\phi{:}x=p_{z+1}$, avremo $z+1=q_{\phi:x}$, e quindi $1=q_{\phi:x}-q_x$, cioè $q_x=z=\Sigma 1$ prendendo questa somma nel sistema della differenza variabile proposta. Fatta dunque l' integrazione dell' equazione data, come se la differenza di x fosse l'unità, convien dopo sostituire nell' integrale $\Sigma 1$ in luogo di x, avendo però riguardo alle altre avvertenze di sopra (III) accennate.

V I I.

Ed ecco che abbiamo pienamente dimostrato che l' integrazione dell' equazioni a differenze variabili ridur si può a quella dell' equazioni a differenze costanti. Nè fa difficoltà l' introduzione della quantità $\Sigma 1$, la quale non può in generale assegnarsi; poichè l' integrazione delle funzioni di una sola variabile si suppone data, quando si tratta dell' integrazione dell' equazioni. La somma dell' unità può invero assegnarsi in molti casi, cioè in tutti quelli, ne' quali si fa integrare l' equazione $p_{z+1} = \phi : p_z$. Si potrà in qualche caso trovare anche direttamente questa somma, come per darne un esempio nel caso che la differenza di x sia ax, essendo a quantità costante. Avremo in questo caso $\frac{x}{a} +$ cost. $= \Sigma . x$, $\frac{x^2}{(a+1)^2-1} +$ cost. $= \Sigma . x^2$, e in generale $\frac{x^n}{(a+1)^n-1} +$ cost. $= \Sigma . x^n$. Facciamo n infinitamente piccola, ed avremo $\Sigma . 1 = \frac{1+n\log. x}{n\log.(a+1)} +$ cost., e ponendo la costante $= - \frac{1}{n\log.(a+1)}$, $\Sigma . 1 = \frac{\log. x}{\log.(a+1)}$. Indirettamente, supponendo data la somma dell' unità, si potrà sempre trovare la differenza variabile che gli conviene. In fatti essendo $\Sigma 1 = f : x$, sarà $1 = f : (x + \Delta x) - f : x$, dalla qual equazione si potrà ricavare il valore di Δx. Sia per esempio $\Sigma 1 = ax^m$, sarà $1 = a(x+\Delta x)^m - ax^m$, e quindi

$$x + \Delta x = \left(\frac{1+ax^m}{a}\right)^{\frac{1}{m}}, \text{ e } \Delta x = \left(\frac{1+ax^m}{a}\right)^{\frac{1}{m}} - x.$$

Sia ancora

$$\Sigma 1 = a^x, \text{ sarà } 1 = a^x(a^{\Delta x} - 1); \text{ e quindi } \Delta x = \frac{\log.(1+a^{-x})}{\log. a}.$$

VIII.

Ma lasciando da parte queste ricerche particolari, per illustrar maggiormente la nostra riduzione delle differenze variabili alle differenze costanti, prendiamo ad integrar direttamente l' equazione lineare di qualunque ordine a coefficienti costanti e a differenze in qualunque modo variabili: tanto più che questa integrazione contiene alcuni artifizj, i quali potranno esser utili in altre occasioni. Sia pertanto proposto d' integrare l' equazione

$$Ay + By' + Cy'' + Dy''' \ldots\ldots\ldots + My^{(m)} = X$$

essendo A, B, . . . M quantità costanti, X funzioni di x, $y' = y + \Delta y$, $y'' = y' + \Delta y'$, ecc. e la differenza di x variabile secondo qualunque legge. Supponghiamo che questa equazione divenga integrabile moltiplicata per $a^{\Sigma P}$, ove a è costante, P funzione di x, e ΣP l' integrale finito di P preso nel sistema di differenza variabile che regna nella proposta; e il di lei integrale sia

$$a^{\Sigma P}(A1y + B1y' + C1y'' \ldots . + L1y^{(m-1)}) = \Sigma a^{\Sigma P}.X$$

Avremo prendendo la differenza

$$a^{P}(A1y' + B1y'' + C1y''' \ldots . + L1y^{(m)}) = X$$
$$- A1y - B1y' - C1y'' \ldots . \; L1y^{(m-1)}$$

e paragonando questa equazione con la proposta troveremo

$$A1 = -A \quad \text{e} \quad M = L1a^{P}$$
$$B = A1a^{P} - B1$$
$$C = B1a^{P} - C1$$
$$\text{ecc.}$$

cioè

$$A1 = -A$$
$$B1 = -B - Aa^{P}$$
$$C1 = -C - Ba^{P} - Aa^{2P}$$
$$\vdots$$
$$L1 = -L - Ia^{P} - Ha^{2P} \ldots - Aa^{(m-1)P}$$

onde, siccome $M = L1a^{P}$, avremo l' equazione

$$M + La^{P} + Ha^{2P} \ldots . + Ba^{(m-1)P} + Aa^{mP} = 0.$$

Ora essendo i coefficienti di questa equazione costanti, sarà costante a^{P}, ed in conseguenza P. Facciamo dunque $P = 1$, e per determinare a avremo l' equazione

$M +$

$$M + La + Ha^2 \ldots\ldots + Ba^{m-1} + Aa^m = 0 . \; (P)$$

Questa equazione ci darà il valore di a, trovato il quale avremo

$$A1 = -A$$
$$B1 = -B - Aa$$
$$C1 = -C - Ba - Aa^2$$
$$\vdots$$
$$L1 = -L - Ia - Ha^2 \ldots\ldots - Aa^{m-1}$$

I valori di $A1$, $B1$, ecc. si possono anche esprimere nel modo seguente:

$$A1 = \frac{B}{a} + \frac{C}{a^2} + \frac{D}{a^3} \ldots\ldots + \frac{M}{a^m}$$
$$B1 = \frac{C}{a} + \frac{D}{a^2} + \frac{E}{a^3} \ldots\ldots + \frac{M}{a^{m-1}}$$
$$C1 = \frac{D}{a} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{M}{a^{m-2}}$$
$$\vdots$$
$$L1 = \frac{M}{a} .$$

Trovati questi valori l'integrale della proposta sarà

$$a^{-\Sigma 1} . \Sigma a^{\Sigma 1} . X = A1y + B1y' + C1y'' \ldots\ldots + L1y^{(m-1)} .$$

Ma l'equazione (P) ha m radici, le quali possono tutte ugualmente prendersi per a; dunque chiamando queste radici a, $a1$, $a2$, ecc. e supponendo che $A1$ si muti in $A2$, $A3$, ecc. quando a si cangia in $a1$, $a2$, ecc. e così degli altri coefficienti $B1$, $C1$, ecc. avremo le m equazioni seguenti

$$a^{-\Sigma 1}.\Sigma a^{\Sigma 1}.X = A1y + B1y' + C1y'' \ldots + L1y^{(m-1)}$$
$$a1^{-\Sigma 1}.\Sigma a1^{\Sigma 1}.X = A2y + B2y' + C2y'' \ldots + L2y^{(m-1)}$$
$$a2^{-\Sigma 1}.\Sigma a2^{\Sigma 1}.X = A3y + B3y' + C3y'' \ldots + L3y^{(m-1)}$$
ecc.

Mediante quest' equazioni si potranno eliminare le quantità y', y'', $\ldots y^{(m-1)}$, e si otterrà il valore di y. Ma senza eseguire questa eliminazione, che sarebbe per lo più involta di molte difficoltà, si osservi che essa ci darebbe il valore di y così espresso:

$$y = \frac{a^{-\Sigma 1}.\Sigma a^{\Sigma 1}.X}{n} + \frac{a1^{-\Sigma 1}.\Sigma a1^{\Sigma 1}.X}{n'} + \frac{a2^{-\Sigma 1}.\Sigma a2^{\Sigma 1}.X}{n''} + \text{ecc.}$$

essendo n, n', ecc. quantità costanti. Per determinarle, si sostituisca il valore di y nella prima delle precedenti equazioni, e si avrà

$$a^{-\Sigma 1}.\Sigma a^{\Sigma 1}.X = a^{-\Sigma 1}.\Sigma a^{\Sigma 1}.X\left(\frac{A1}{n} + \frac{B1}{na} + \frac{C1}{na^2} + \frac{D1}{na^3} + \text{ecc.}\right)$$
$$+ \frac{B1X}{na} + \frac{C1}{n}\left(\frac{X}{a^2} + \frac{X'}{a}\right) + \frac{D1}{n}\left(\frac{X}{a^3} + \frac{X'}{a^2} + \frac{X''}{a}\right) + \text{ecc.}$$
$$+ a1^{-\Sigma 1}.\Sigma a1^{\Sigma 1}.X\left(\frac{A1}{n'} + \frac{B1}{n'a1} + \frac{C1}{n'a1^2} + \frac{D1}{n'a1^3} + \text{ecc.}\right)$$
$$+ \frac{B1X}{n'a1} + \frac{C1}{n'}\left(\frac{X}{a1^2} + \frac{X'}{a1}\right) + \frac{D1}{n'}\left(\frac{X}{a1^3} + \frac{X'}{a1^2} + \frac{X''}{a1}\right) + \text{ecc.}$$
$$+ \text{ecc.}$$

Siccome questa equazione dev' essere identica, convien che sia

$$\frac{A1}{n} + \frac{B1}{na} + \frac{C1}{na^2} + \frac{D1}{na^3} + \text{ecc.} = 1$$

e tutti gli altri termini devono da loro stessi svanire. Sarà dunque $n = A1 + \frac{B1}{a} + \frac{C1}{a^2} + \frac{D1}{a^3} + \text{ecc.}$ e sostituendovi i valori di $A1$, $B1$, ecc.

$$n = \frac{B}{a} + \frac{2C}{a^2} + \frac{3D}{a^3} \ldots + \frac{mM}{a^m}.$$

Questo valore di n non è che il differenziale della quantità $A + \frac{B}{a} + \frac{C}{a^2} \ldots + \frac{M}{a^m}$ preso per rapporto ad a, e moltiplicata per $-\frac{a}{da}$. I valori di n', n'', ecc. si troveranno riflettendo che n si muta in n', n'', ecc. quando a diventa $a1$, $a2$, ecc. Dunque se facciamo

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 \ldots + Mz^m$$

avremo

$$n = z\frac{dP}{dz} \text{ facendovi } z = \frac{1}{a}$$

$$n' = z\frac{dP}{dz} \text{ facendovi } z = \frac{1}{a1}$$

$$n'' = z\frac{dP}{dz} \text{ facendovi } z = \frac{1}{a2}$$

ecc.

Ora la quantità P è $= A(1 - az)(1 - a1z)(1 - a2z) \ldots (1 - a(m-1)z)$; quindi sarà

$$n = -A\left(1 - \frac{a1}{a}\right)\left(1 - \frac{a2}{a}\right)\left(1 - \frac{a3}{a}\right) \ldots \left(1 - \frac{a(m-1)}{a}\right)$$

$$n' = -A\left(1 - \frac{a}{a1}\right)\left(1 - \frac{a2}{a1}\right)\left(1 - \frac{a3}{a1}\right) \ldots \left(1 - \frac{a(m-1)}{a1}\right)$$

$$n'' = -A\left(1 - \frac{a}{a2}\right)\left(1 - \frac{a1}{a2}\right)\left(1 - \frac{a3}{a2}\right) \ldots \left(1 - \frac{a(m-1)}{a2}\right)$$

ecc.

Posti questi valori, l'integrale finito della proposta sarà

$$y = \frac{a^{-\Sigma 1}(C + \Sigma a^{\Sigma 1}.X)}{n} + \frac{a1^{-\Sigma 1}(C' + \Sigma a1^{\Sigma 1}.X)}{n'} + \frac{a2^{-\Sigma 1}(C'' + \Sigma a2^{\Sigma 1}.X)}{n''}$$

$$+ \text{ecc.}$$

ove C, C', ecc. sono m costanti arbitrarie.

I X.

Sia $\Delta x = 1$, sarà $\Sigma 1 = x$, e quindi

$$y = \frac{a^{-x}(C + \Sigma a^x.X)}{n} + \frac{a1^{-x}(C' + \Sigma a1^x.X)}{n'} + \frac{a2^{-x}(C'' + \Sigma a2^x.X)}{n''} + \text{ecc.}$$

essendo n, n', ecc. come sopra. Questo integrale si cangia in quello di sopra ritrovato ponendovi $\Sigma 1$ invece di x, come doveva succedere per ciò che abbiamo precedentemente dimostrato (VI).

X.

Riguardo all'equazioni lineari a coefficienti variabili, non ſappiamo integrarle al di là del primo grado. Solo è noto, che ſe l' integrale della propoſta ſi conoſce quando $X = 0$, ſe ne potrà dedurre l' integrale quando X è una funzione qualunque di x (*a*). Non ſarà dunque affatto inutile l' accennare alcune equazioni, l' integrazione delle quali dalle coſe eſpoſte dipende. Si abbia pertanto l' equazione dell' ordine m a differenze finite e variabili

$$y - \underset{x}{\alpha} . y^{(m)} = 0$$

Ponghiamo $y = e^{-\Sigma P}$, eſſendo e il numero che ha per logaritmo iperbolico l'unità, e l'equazione diventerà

$$e^{-\Sigma P} - \underset{x}{\alpha} . e^{-\Sigma P - P - P' - P'' \ldots - P^{(m-1)}} = 0$$

e prendendo i logaritmi avremo

$$P + P' + P'' \ldots . + P^{(m-1)} = \log . \underset{x}{\alpha} .$$

In queſta equazione i coefficienti ſono coſtanti; quindi integrandola per quel che abbiamo inſegnato di ſopra (VIII) avremo il valore di P, e quindi l' integrale della propoſta $y = e^{-\Sigma P}$.

X I.

Nel caſo di $m = 1$ avremo $P = \log . \underset{x}{\alpha}$, e quindi $y = e^{-\Sigma \log . \underset{x}{\alpha}}$ com' è noto. Se $m = 2$, avremo l' equazione

$P + P' = \log . \underset{x}{\alpha}$, e perciò $P = -(-1)^{-\Sigma 1}\left(C + \Sigma (-1)^{\Sigma 1} . \log . \underset{x}{\alpha}\right)$, e $y = C e^{\Sigma (-1)^{-\Sigma 1} (C' + \Sigma (-1)^{\Sigma 1} . \log . \underset{x}{\alpha}}$, e nel caſo di $\Delta x = 1$

(*a*) Si veda una Memoria del Sig. Cav. *Lorgna* ſul Calcolo Integrale delle differenze finite pubblicata nel primo Tomo di queſta Società.

$y = Ce^{\Sigma(-1)^{-x}.(C' + \Sigma(-1)^{x}.\,\log.\alpha_x)}$. Queſto integrale potremo eſprimerlo in una maniera molto più comoda: cerchiamo a queſt' oggetto un valore particolare di y. E' noto che

$$\Sigma(-1)^{x}.\log.\alpha_{x} = (-1)^{x-1}.\log.\alpha_{x-1} + (-1)^{x-2}.\log.\alpha_{x-2}$$
$$+ (-1)^{x-3}.\log.\alpha_{x-3} \ldots + (-1)\log.\alpha.$$

Quindi ſarà

$$(-1)^{-x}.\Sigma(-1)^{x}.\log.\alpha_{x} = -\log.\alpha_{x-1} + \log.\alpha_{x-2} - \log.\alpha_{x-3} \ldots \mp \log.\alpha_{,}$$

ove il ſegno $\mp$ avrà luogo ſecondo che x è pari o diſpari; e prendendo la ſomma di queſta quantità avremo

$$\begin{aligned}\Sigma(-1)^{-x}.\Sigma(-1)^{x}.\log.\alpha_{x} = -\log.\alpha_{x-2} - \log\alpha_{x-3} - \log.\alpha_{x-4} - \log.\alpha_{x-5} &- \text{ecc.}\\ + \log.\alpha_{x-3} + \log.\alpha_{x-4} + \log.\alpha_{x-5} &+ \text{ecc.}\\ - \log.\alpha_{x-4} - \log.\alpha_{x-5} &- \text{ecc.}\\ + \log.\alpha_{x-5} &+ \text{ecc.}\end{aligned}$$

$$\text{cioè} = -\log.\alpha_{x-2} - \log.\alpha_{x-4} - \log.\alpha_{x-6} - \text{ecc.}$$
$$= -\log.\alpha_{x-2}.\alpha_{x-4}.\alpha_{x-6}.\ \text{ecc.}$$

ove l'ultimo fattore ſarà α_2 ſe x è pari, ed $\alpha_{,}$, ſe x è diſpari. Dunque ſe indichiamo col ſegno $\nabla^2.\alpha_{x-2}$ il prodotto $\alpha_{x-2}.\alpha_{x-4}.\alpha_{x-6}$. ecc. continuato finchè non ſi abbiano fattori coll' indice zero o negativo, avremo

$y = e^{-\log.\nabla^2.\alpha_{x-2}} = \dfrac{1}{\nabla.^2\alpha_{x-2}}$. Queſto non è che un integrale particolare della propoſta: per aver l'integrale completo ſi faccia $y = \dfrac{z}{\nabla.^2\alpha_{x-2}}$, e la propoſta diventerà $z - z'' = 0$, e queſta avendo per integrale $z = C + C'(-1)^{x}$, ſarà

$y = \frac{1}{\nabla.^2 \alpha_{x-2}} \left(C + C'(-1)^x \right)$ l' integrale completo della proposta

XII.

Generalmente nella ipotesi di $\Delta x = 1$ se facciamo $\Delta^m . \alpha_x = \alpha_x \, \alpha_{x-m} . \alpha_{x-2m} . \alpha_{x-3m}$. ecc. continuando questo prodotto fino al fattore α_{x-nm}, ove $x - nm$ è tale che ponendo $n+1$ in luogo di n, diventi $x-(n+1)\,m$ zero o negativo, sarà $y = \frac{1}{\Delta.^m \alpha_{x-m}}$ un integrale particolare dell' equazione $y - \alpha_x . y^{(m)} = 0$. Per rintracciare l' integrale completo ponghiamo $y = \frac{z}{\nabla.^m \alpha_{x-m}}$, ed avremo l' equazione $z - z^{(m)} = 0$. Questa ha per integrale $z = Cf^x + C'f1^x + C''f2^x \ldots + C^{(m-1)} f(m-1)^x$ chiamando f, $f1$, $f2$, ecc. le radici dell' equazione $1 - f^m = 0$. Quindi l' integrale completo della proposta sarà

$$y = \frac{1}{\nabla.^m \alpha_{x-m}} \left(Cf^x + C'f1^x + C''f2^x \ldots + C^{(m-1)} f(m-1)^x \right)$$

Ma le quantità f, $f1$, ecc. sono a due a due della forma $\cos.\,\phi \pm \sqrt{-1}.\,\text{sen.}\,\phi$: dunque quella parte d' integrale che appartiene a queste radici sarà $C(\cos.\,\phi + \sqrt{-1}.\,\text{sen.}\,\phi)^x$, $C'(\cos.\,\phi - \sqrt{-1}.\,\text{sen.}\,\phi)^x$. Ora $(\cos.\,\phi \pm \sqrt{-1}.\,\text{sen.}\,\phi)^x = \cos.\,\phi x \pm \sqrt{-1}.\,\text{sen.}\,\phi x$: onde mutando le costanti sarà la parte d' integrale dovuta a queste radici così espressa; $C.\cos.\,\phi x + C.'\,\text{sen.}\,\phi x$. E' noto pel Teorema di *Cotes* che $\phi = \frac{i\pi}{m}$ ove π è la semiperiferia del cerchio che ha per raggio l' unità, i esprime qualunque numero pari non maggiore di m, quindi sarà

$$y=\frac{1}{\nabla^{m}.\alpha_{x-m}}\left\{\begin{array}{l}C+C'(-1)^x+C''\cos.\frac{2\pi x}{m}+C'''\,\text{sen.}\frac{2\pi x}{m}+C^{\text{v}}\cos.\frac{4\pi x}{m}\\+C^{\text{v}}\,\text{sen.}\frac{4\pi x}{m}\ldots+C^{(m-2)}\cos.\frac{(m-2)\pi x}{m}+C^{(m-1)}\,\text{sen.}\frac{(m-2)\pi x}{m}\end{array}\right\}$$

se m è pari, e

$$y=\frac{1}{\nabla^{m}.\alpha_{x-m}}\left\{\begin{array}{l}C+C'\cos.\frac{2\pi x}{m}+C''\,\text{sen.}\frac{2\pi x}{m}+C'''\cos.\frac{4\pi x}{m}+C^{\text{v}}\,\text{sen.}\frac{4\pi x}{m}\\ \ldots\ldots\ldots+C^{(m-2)}\cos.\frac{(m-1)\pi x}{m}+C^{(m-1)}\,\text{sen.}\frac{(m-1)\pi x}{m}\end{array}\right\}$$

se m è dispari.

XIII.

Sia proposto d'integrare l'equazione

$$A\alpha_x y+B\alpha_x.\alpha'_x y'+C\alpha_x.\alpha'_x.\alpha''_x y''\ldots+M\alpha_x.\alpha'_x\ldots\alpha^{(m)}_x y^{(m)}=X$$

ove A, B, ecc. sono quantità costanti, α_x ed X funzioni date di x, e la differenza di x comunque variabile. Ponghiamo $y=\frac{z}{t}$, ed avremo

$$A\alpha_x.\frac{z}{t}+B\alpha_x.\alpha'_x.\frac{z'}{t'}\ldots.+M\alpha_x.\alpha'_x\ldots.\alpha_x^{(m)}.\frac{y^{(m)}}{t^{(m)}}=X.$$

Facciamo $\frac{\alpha_x}{t}=\frac{\alpha_x.\alpha'_x}{t'}$, cioè $t-\frac{t'}{\alpha'_x}=0$, e sarà (II) $t=e^{\Sigma\log.\alpha'_x}$

Posto questo valore di t, l'equazione proposta diventerà

$$Az+Bz'+Cz''\ldots.+Mz^{(m)}=Xe^{\Sigma\log.\alpha_x}$$

e integrando quest'equazione come abbiamo insegnato (VIII), ne dedurremo l'integrale completo della proposta così espresso

$$y=e^{-\Sigma\log.\alpha'_x}\left(\frac{a^{-\Sigma 1}(C+\Sigma e^{\Sigma\log.a\alpha_x}.X)}{n}+\frac{a1^{-\Sigma 1}(C'+\Sigma e^{\Sigma\log.a1\alpha_x}.X)}{n'}+\text{ecc.}\right)$$

essendo le quantità a, $a1$, ecc. n, n', ecc. come sopra. Se $\Delta x=1$, sarà $e^{-\Sigma\log.\alpha'_x}=\frac{1}{\nabla.\alpha_x}=\frac{1}{\alpha_x.\alpha_{x-1}.\alpha_{x-2}\ldots.\alpha,}$

e in questo caso la proposta è stata integrata dal Sig. *de la Place* nel Tomo settimo delle Memorie presentate all' Accademia delle Scienze di Parigi.

XIV.

Più generalmente sia data l' equazione

$$A\alpha_x . y + B\alpha_x . \alpha^{(m)}_x . y^{(m)} + C\alpha_x . \alpha^{(m)}_x . \alpha^{(2m)}_x . y^{(2m)} \ldots + M\alpha_x \ldots \alpha^{(nm)}_x y^{(nm)} = X.$$

Facciamo per integrarla $y = \frac{z}{t}$ essendo t tale che abbia luogo l' equazione $t - \frac{t^{(m)}}{\alpha^{(m)}_x} = 0$, della qual' equazione si potrà avere un integrale particolare (X). Mediante questa sostituzione la proposta diventerà

$$Az + Bz^{(m)} + Cz^{(2m)} \ldots\ldots + Mz^{(nm)} = \frac{Xt}{\alpha_x}.$$

Quindi chiamando a, $a1$, ecc. le radici dell' equazione

$$A + Bz^{m} + Cz^{2m} \ldots + Mz^{nm} = 0 = P$$

avremo l' integrale della proposta così espresso:

$$y = \frac{1}{t}\left\{ \frac{a^{\Sigma 1}\left(C + \Sigma a^{-\Sigma 1} . \frac{Xt}{\alpha_x}\right)}{n} + \frac{a1^{\Sigma 1}\left(C' + \Sigma a1^{-\Sigma 1} . \frac{Xt}{\alpha_x}\right)}{n'} + \text{ecc.} \right\}$$

ove $n = z\frac{dP}{dz}$ facendo dopo la differenziazione $z = a$, e si muta in n' facendo $z = a1$, ecc. Nel caso di $\Delta x = 1$, sarà $t = \Delta .^{m} a_x$ (XII), e quindi

$$y = \frac{1}{\nabla^{m} . \alpha_x}\left\{ \frac{a^{x}\left(C + \Sigma a^{-x} . X\nabla^{m} . \alpha_{x-m}\right)}{n} + \frac{a1^{x}\left(C' + \Sigma a1^{-x} . X\nabla^{m} . \alpha_{x-m}\right)}{n'} + \text{ecc.} \right\}$$

essendo n, n', ecc. come sopra

OSSERVAZIONI