RICERCHE
SULLE SERIE

Del Sig. Pietro Paoli P. Professore delle Matematiche Superiori nell' Università di Pisa.

Io mi propongo in queste Ricerche di risolvere il Problema seguente: Dato un numero qualunque di equazioni $z=o$, $z'=o$, $z''=o$ ecc. tra le variabili x, y, t, u, ecc., esprimere una funzione qualunque ψ delle medesime variabili per tante di esse, quanto è il loro numero diminuito del numero dell'equazioni $z=o$, $z'=o$, $z''=o$, ecc. Se fosse conosciuta la risoluzione generale dell'equazioni, questo problema non avrebbe alcuna difficoltà; perchè dall' equazioni $z=o$, $z'=o$, ecc. dedur si potrebbe il valore di altrettante variabili espresse per le altre, e questo sostituito in ψ ci darebbe quella espressione della funzione ψ che ricercavamo. Ma nello stato presente dell'Analisi convien ricorrere ad altri artifizj, per mezzo de' quali l' intento ottener si possa indipendentemente dalla risoluzione dell'equazioni, e questi artifizj siccome in moltissime altre ricerche così in questa convien ripeterli dal calcolo differenziale. Dalla natura poi del Problema si comprende, che il valore richiesto di ψ non potrà per lo più esprimersi per una quantità finita, ma sempre per una serie infinita, come vedremo.

I.

Si abbia in primo luogo una sola equazione $z=o$ tra le variabili x, y, t, u, ecc.; e si voglia esprimere la funzione ψ delle medesime variabili per y, t, u, ecc. senza x. Sia $z1$ il valore di z quando x si cangia in $x1$; in luogo di x prendiamo $x1+x-x1$, e supponendo $x1$ accresciuta dell' incremento $x - x1$, ed y, t, u, ecc. costanti, avremo pel Teorema di *Taylor*

$$z = 0 = z1 + (x - x1)\frac{dz1}{dx1} + (x - x1)^2\frac{d^2.z1}{2dx1^2}$$
$$+ (x - x1)^3\frac{d^3.z1}{2.3dx1^3} + (x - x1)^4\frac{d^4.z1}{2.3.4dx1^4} + \text{ecc. ove}$$

le differenze $\frac{dz1}{dx1}$, $\frac{d^2.z1}{dx1^2}$, ecc. si devon prender solamente per rapporto ad $x1$, supponendo costanti y, t, u, ecc. Per determinare la quantità $x - x1$ mediante questa equazione, facciamo

$$x - x1 = z1.A + z1^2.B + z1^3.C + z1^4.D + z1^5.E + \text{ecc.}$$

e sostituendo questo valore nella precedente equazione avremo

$$\begin{aligned} 0 = z1 &+ z1^2.B\frac{dz1}{dx1} + z1^3.C\frac{dz1}{dx1} + z1^4.D\frac{dz1}{dx1} \\ + z1.A\frac{dz1}{dx1} &+ z1^2.A^2\frac{d^2.z1}{2dx1^2} + z1^3.2AB\frac{d^2.z1}{2dx1^2} + z1^4.2AC\frac{d^2.z1}{2dx1^2} \\ &+ z1^3.A^3\frac{d^3.z1}{2.3dx1^3} + z1^4.B^2\frac{d^2.z1}{2dx1^2} + \text{ecc.} \\ &+ z1^4.3A^2B\frac{d^3.z1}{2.3dx1^3} \\ &+ z1^4.A^4\frac{d^4.z1}{2.3.4dx1^4} \end{aligned}$$

Paragonando adesso i termini affetti dalle medesime potenze di $z1$, avremo

$$(1)\, A = -\frac{1}{\frac{dz1}{dx1}}$$

$$(2)\, B = -\frac{A^2\frac{d^2.z1}{2.dx1^2}}{\frac{dz1}{dx1}}$$

$$(3)\, C = -\frac{2AB\frac{d^2.z1}{2dx1^2} + A^3\frac{d^3.z1}{2.3dx1^3}}{\frac{dz1}{dx1}}$$

$$(4)\ D = -\frac{2AC\frac{d^2.z1}{2dx1^2}+B^2\frac{d^2.z1}{2dx1^2}+3A^2B\frac{d^3.z1}{2.3dx1^3}+A^4\frac{d^4.z1}{2.3.4dx1^4}}{\frac{dz1}{dx1}}$$

ecc.

L'equazione (1) ci dà $\frac{dA}{2dx1}=\frac{\frac{d^2.z1}{2dx1^2}}{\left(\frac{dz1}{dx1}\right)^2}=A^2\frac{d^2.z1}{2dx1^2}$, e

quindi $B=\frac{AdA}{2dx1}$. Dall'equazione (2) si ricava

$$\frac{dB}{3dx1}=\frac{-2A\frac{dA}{3dx1}.\frac{d^2.z1}{2dx1^2}-A^3\frac{d^3.z1}{2.3dx1^3}}{\frac{dz1}{dx1}}+\frac{\frac{A^2}{3}.\frac{d^2.z1}{2dx1^2}.\frac{d^2.z1}{dx1^2}}{\left(\frac{dz1}{dx1}\right)^2},$$

cioè $\frac{dB}{3dx1}=\frac{4}{3}AB\frac{d^2.z1}{2dx1^2}+A^3\frac{d^3.z1}{2.3dx1^3}+\frac{2}{3}AB\frac{d^2.z1}{2dx1^2}$

$=2AB\frac{d^2.z1}{2dx1^2}+A^3\frac{d^3.z1}{2.3dx1^3}$,

e perciò $C=A\frac{dB}{3dx1}=\frac{Ad(AdA)}{2.3dx1^2}$. Così pure l'equazione (3) ci darà

$$\frac{dC}{4dx1}=\frac{-A\frac{dB}{2dx1}.\frac{d^2.z1}{2dx1^2}-B\frac{dA}{2dx1}.\frac{d^2.z1}{2dx1^2}-\frac{AB}{2}.\frac{d^3.z1}{2dx1^3}-\frac{3A^2}{4}.\frac{dA}{dx1}.\frac{d^3.z1}{2.3dx1^3}-A^3\frac{d^4.z1}{2.3.4dx1^4}}{\frac{dz1}{dx1}}$$

$$+\frac{\frac{AB}{2}.\frac{d^2.z1}{2dx1^2}.\frac{d^2.z1}{dx1^2}+\frac{A^3}{4}.\frac{d^2.z1}{dx1^2}.\frac{d^3.z1}{2.3dx1^3}}{\left(\frac{dz1}{dx1}\right)^2},\ \text{cioè}$$

$$\frac{dC}{4dx1}=\frac{3}{2}AC\frac{d^2.z1}{2dx1^2}+B^2\frac{d^2.z1}{2dx1^2}+\frac{3}{2}A^2B\frac{d^3.z1}{2.3dx1^3}$$

$$+\frac{3}{2}A^2B\frac{d^3.z1}{2.3dx1^3}+A^4\frac{d^4.z1}{2.3.4dx1^4}+\frac{1}{2}AC\frac{d^2.z1}{2dx1^2}$$

$$=2AC\frac{d^2.z1}{2dx1^2}+B^2\frac{d^2.z1}{2dx1^2}+3A^2B\frac{d^3.z1}{2.3dx1^3}+A^4\frac{d^4.z1}{2.3.4dx1^4},$$

e quindi

$D=A\frac{dC}{4dx1}=\frac{Ad(Ad(AdA))}{2.3.4\,dx1^3}$. Nella medesima maniera troveremo essere

$E=A\frac{dD}{5dx1}=\frac{Ad(Ad(Ad(AdA)))}{2.3.4.5\,dx1^4}$, e così in seguito.

I I.

Trovati i valori di A, B, C, ecc. avremo $x-x1$ espressa per una funzione di $x1$, y, t, u, ecc. Onde siccome possiamo determinare $x1$ a piacere, acciò ottenghiamo il valore di $x-x1$ espresso per y, t, u, ecc. senza x, facciamo $x1=f$ esprimendo f una funzione qualunque a piacere di y, t, u, ecc. Si osservi che siccome z e $z1$ sono funzioni simili di x ed $x1$, potremo usare z ed x in luogo di $z1$ ed $x1$, purchè ci ricordiamo poi di far da per tutto terminate le operazioni $x=f$. Se dunque ponghiamo

$A=-\frac{1}{\frac{dz}{dx}}$, avremo

$$x-x1=z.A+z^2.\frac{AdA}{2dx}+z^3.\frac{AdAdA}{2.3.dx^2}+z^4.\frac{AdAdAdA}{2.3.4\,dx^3}+\text{ecc.}$$

facendo dopo le differenziazioni $x=f$.

I I I.

Si abbia adesso la funzione Ψ, che si voglia svolgere in una serie data per y, t, u, ecc. supposta l'equazione $z=0$. Se in Ψ ponghiamo $x1+x-x1$ in luogo di x, avremo pel teorema di *Taylor*

$$\Psi=\Psi+(x-x1)\frac{d\Psi}{dx}+(x-x1)^2\frac{d^2\Psi}{2dx^2}+(x-x1)^3\frac{d^3\Psi}{2.3dx^3}+\text{ecc.}$$

Sostituendo

Soſtituendo nel ſecondo membro il valore trovato di $x - x\mathrm{I}$ e facendo terminate le operazioni $x = f$. Siccome la funzione f è indeterminata, così potrà il valore di Ψ eſprimerſi in infinite forme diverſe.

I V.

Se ſoſtituiamo nella formola precedente il valore di $x - x\mathrm{I}$ e delle ſue potenze, avremo

$$\begin{aligned}\Psi = \Psi + zA\frac{d\Psi}{dx} + z^2 \cdot \frac{AdA}{2dx} \cdot \frac{d\Psi}{dx} + z^3 \cdot \frac{AdAdA}{2.3dx^2} \cdot \frac{d\Psi}{dx} + z^4 \cdot \frac{AdAdAdA}{2.3.4dx^3} \cdot \frac{d\Psi}{dx} \\ + z^2 . A^2 \frac{d^2 . \Psi}{2dx^2} + z^3 \cdot \frac{2A^2 dA}{2dx} \cdot \frac{d^2\Psi}{2dx^2} + z^4 \cdot \frac{2A^2 dAdA}{2.3dx^2} \cdot \frac{d^2\Psi}{2dx^2} \\ + z^3 . A^3 \cdot \frac{d^3\Psi}{2.3dx^3} + z^4 \cdot \frac{A^2 dA^2}{4dx^2} \cdot \frac{d^2\Psi}{2dx^2} + \text{ecc.} \\ + z^4 \cdot \frac{3A^3 dA}{2dx} \cdot \frac{d^3\Psi}{2.3dx^3} \\ + z^4 . A^4 \cdot \frac{d^4\Psi}{2.3.4dx^4}\end{aligned}$$

cioè

$$\Psi = \Psi + z . A\frac{d\Psi}{dx} + z^2 . \frac{AdA\frac{d\Psi}{dx}}{2dx} + z^3 . \frac{AdAdA\frac{d\Psi}{dx}}{2.3dx^2} + z^4 . \frac{AdAdAdA\frac{d\Psi}{dx}}{2.3.4dx^3} + \text{ecc.}$$

facendo dopo le differenziazioni $x = f = \text{funz.}(y, t, u, \text{ecc.})$

V.

Si abbiano adeſſo due equazioni $z = 0$, $z' = 0$, la prima tra x, t, u, ecc. ſenza y, la ſeconda tra y, t, u, ecc. ſenza x, e ſi voglia eſprimere per t, u, ecc. ſenza x nè y una funzione qualunque Ψ delle variabili x, y, t, u, ecc. Avremo per mezzo della ſeconda equazione, ſe ponghiamo

$$A' = -\frac{\mathrm{I}}{\frac{dz'}{dy}}$$

$$\Psi=\Psi+z'.A'\frac{d\Psi}{dy}+z'^{2}.\frac{A'dA'\frac{d\Psi}{dy}}{2dy}+z'^{3}\frac{A'dA'dA'\frac{d\Psi}{dy}}{2.\ 3dy^{2}}+z'^{4}\frac{A'dA'dA'dA'\frac{d\Psi}{dy}}{2.\ 3.\ 4.\ dy^{3}}+\text{ecc.}$$

facendo nel secondo membro $y=f$, ed f funzione di t, u, ecc. senza x nè y. Chiamiamo ϕ questo secondo membro, e siccome ϕ è una funzione di x, t, u, ecc. senza y, avremo per mezzo della prima equazione

$$\phi=\phi+z.A\frac{d\Psi}{dx}+z^{2}.\frac{AdA\frac{d\phi}{dx}}{2dx}+z^{3}.\frac{AdAdA\frac{d\phi}{dx}}{2.\ 3\ dx^{2}}+z^{4}.\frac{AdAdAdA\frac{d\phi}{dx}}{2.\ 3.\ 4\ dx^{3}}+\text{ecc.}$$

facendo nel secondo membro $x=f=$ funz. $(t, u, \text{ecc.})$. Sostituendo adesso il valore di ϕ, e riflettendo che in z' ed in A' non si contiene x, avremo

$$\Psi=\Psi+z.A\frac{d\Psi}{dx}+z^{2}.\frac{AdA\frac{d\Psi}{dx}}{2dx}+z^{3}.\frac{AdAdA\frac{d\Psi}{dx}}{2.\ 3.dx^{2}}+z^{4}.\frac{AdAdAdA\frac{d\Psi}{dx}}{2.\ 3.\ 4dx^{3}}$$

$$+z'.A'\frac{d\Psi}{dy}+zz'.AA'\frac{d^{2}\Psi}{dxdy}+z^{2}z'.\frac{AA'dA\frac{d^{2}\Psi}{dxdy}}{2dx}+z^{3}z'.\frac{AA'dAdA\frac{d^{2}\Psi}{dxdy}}{2.\ 3dx^{2}}$$

$$+z'^{2}.\frac{A'dA'\frac{d\Psi}{dy}}{2dy}+zz'^{2}.\frac{AA'dA'\frac{d^{2}\Psi}{dxdy}}{2dy}+z^{2}z'^{2}.\frac{AA'dAdA'\frac{d^{2}\Psi}{dxdy}}{2dx.\ 2dy}+\text{ecc.}$$

$$+z'^{3}.\frac{A'dA'dA'\frac{d\Psi}{dy}}{2.\ 3\ dy^{2}}+zz'^{3}.\frac{AA'dA'dA'\frac{d^{2}\Psi}{dxdy}}{2.\ 3\ dy^{2}}$$

$$+z'^{4}.\frac{A'dA'dA'dA'\frac{d\Psi}{dy}}{2.\ 3.\ 4\ dy^{3}}$$

facendo dopo le differenziazioni $x=f$, $y=f$, ed f, f funzioni qualunque a piacere di t, u, ecc. senza x nè y. Avremo dunque Ψ espressa da una serie data per t, u, ecc. senza x nè y, e la legge di questa serie è evidente; poichè essa è ordinata per le potenze ed i prodotti di z, e z', ed il coeficiente di z^n è in essa $= \frac{AdAdAdA\ldots dA\frac{d\Psi}{dx}}{2.\ 3.\ \ldots\ n\,dx^{n-1}}$; il coefficiente di z'^n è $= \frac{A'dA'dA'\ \ldots\ dA'\frac{d\Psi}{dy}}{2.\ 3.\ \ldots\ ndy^{n-1}}$, ed il coefficiente di $z^n.z'^{n'}$ è $= \frac{AA'dAdA\ldots dA\ \frac{dA'dA'\ldots dA'\frac{d^2\Psi}{dxdy}}{2.\ 3.\ \ldots\ n'dy^{n'-1}}}{2.\ 3.\ \ldots\ \ldots\ ndx^{n-1}}$.

Se fosser date due equazioni tra x, y, t, u, ecc. si potrebbe mediante queste due equazioni eliminar prima x, poi y, e si avrebbero le due equazioni $z=0$, $z'=0$, la prima senza x, la seconda senza y. Dunque date due equazioni tra x, y, t, u, ecc. si potrà sempre ottenere il valore della funzione Ψ espresso per t, u, ecc. senza x nè y.

VI.

Similmente date tre equazioni $z=0$, $z'=0$, $z''=0$, la prima tra x, u, ecc. senza y nè t, la seconda tra y, u, ecc. senza x nè t, e la terza tra t, u, ecc. senza x nè y, troveremo il valore della funzione Ψ espresso in una serie data per u, ecc. senza x, nè y, nè t. Questa serie sarà ordinata per le potenze ed i prodotti di z, z', z'' in modo, che il coefficiente di z^n sarà $\frac{AdAdA\ldots dA\frac{d\Psi}{dx}}{2.\ 3.\ \ldots\ .ndx^{n-1}}$, il coefficiente di z'^n sarà $= \frac{A'dA'dA'\ldots dA'\frac{d\Psi}{dy}}{2.\ 3.\ \ldots\ ndy^{n-1}}$, il coefficiente di z''^n sarà $= \frac{A''dA''dA''\ldots dA\frac{d\Psi}{dt}}{2.\ 3.\ \ldots\ ndt^{n-1}}$; quello di $z^n.z'^{n'}$ sarà

$$= \frac{AA'dAdA \ldots dAdA'dA' \ldots dA' \frac{d^2\Psi}{dxdy}}{2.\ 3.\ \ldots\ ndx^{n-1}.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n'dy^{n'-1}}$$; quello di $z^{n}.z'^{n'}$ sarà

$$= \frac{AA''dAdA \ldots dAdA''dA'' \ldots dA'' \frac{d^2\Psi}{dxdt}}{2.\ 3.\ \ldots\ ndx^{n-1}.\ 2.\ 3\ \ldots\ n'dt^{n'-1}}$$; quello di $z'^{n}.z''^{n'}$

$$= \frac{A'A''dA'dA' \ldots dA'dA''dA'' \ldots dA'' \frac{d^2\Psi}{dydt}}{2.\ 3.\ \ldots\ ndy^{n-1}.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n'dt^{n'-1}}$$; e finalmente il coefficiente di $z^{n}.z'^{n'}.z''^{n''}$ sarà

$$\frac{AA'A''dAdA \ldots dAdA'dA \ldots dA'dA''dA'' \ldots dA'' \frac{d^3\Psi}{dxdydt}}{2.\ 3.\ \ldots\ ndx^{n-1}.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n'dy^{n'-1}.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n''dt^{n''-1}}$$, ove

$A = -\frac{1}{\frac{dz}{dx}}$, $A' = -\frac{1}{\frac{dz'}{dy}}$, $A'' = -\frac{1}{\frac{dz''}{dt}}$. A scanso di equivoci si noti, che in queste formole la caratteristica d quando precede A indica il differenziale preso per rapporto ad x, quando precede A', il differenziale relativamente ad y, e quando precede A'', il differenziale relativo a t. Convien però terminate le operazioni porre nella serie $x = f$, $y = f'$, $t = f''$, essendo f, f', f'' funzioni arbitrarie di u, ecc. senza x, nè y, nè t.

VII.

Non occorre continuar di più questa teoria, perchè dalle cose precedenti abbastanza apparisce, che qualunque sia il numero dell' equazioni $z = 0$, $z' = 0$, $z'' = 0$, ecc. si potrà sempre esprimere in serie il valore di Ψ. La legge di questa serie è nota, e facilmente se ne troverà ciascun termine.

VIII.

Ma quantunque le formole che abbiamo ritrovate per la loro generalità sembrino meritare l'attenzione de' Geometri, contuttociò le variabili in esse sono così inviluppate, che se si richiedesse di esprimere la funzione Ψ in una serie ordinata per le potenze ed i prodotti delle variabili, difficilmente da esse potrebbero dedursi i coefficienti di questi prodotti. Per riescire in questa nuova ricerca, diamo un' altra forma alla serie del N.° IV. Qualunque sia l' equazione $z=0$, si potrà sempre dare ad essa la forma $x-f-\varphi=0$, essendo f quella funzione di y, t, u, ecc. che sopra si sostituisce in luogo di x dopo le differenziazioni, e φ una qualunque funzione di x, y, t, u, ecc. Avremo dunque

$\frac{dz}{dx}=1-\frac{d\varphi}{dx}$, ed $A=-\frac{1}{\frac{dz}{dx}}=-\frac{1}{1-\frac{d\varphi}{dx}}$, e risolvendo questa quantità in serie

$$A=-1-\frac{d\varphi}{dx}-\frac{d\varphi^2}{dx^2}-\frac{d\varphi^3}{dx^3}-\frac{d\varphi^4}{dx^4}-\text{ecc.}$$

e quindi

$$\frac{AdA\frac{d\Psi}{dx}}{2dx}=\frac{d^2\Psi}{2dx^2}+\frac{d^2\varphi}{2dx^2}\cdot\frac{d\Psi}{dx}+3\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi}{2dx^2}\cdot\frac{d\Psi}{dx}+2\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^2\Psi}{2dx^2}+3\frac{d\varphi^2}{dx^2}\cdot\frac{d^2\Psi}{2dx^2}+\text{ecc.}$$

$$\frac{AdAdA\frac{d\Psi}{dx}}{2.\,3dx^2}=-\frac{d^3\Psi}{2.\,3dx^3}-\frac{d^3\varphi}{2.\,3dx^3}\cdot\frac{d\Psi}{dx}-2\frac{d^2\varphi}{2dx^2}\cdot\frac{d^2\Psi}{2dx^2}-3\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^3\Psi}{2.\,3dx^3}-\text{ecc.}$$

$$\frac{AdAdAdA\frac{d\Psi}{dx}}{2.\,3.\,4dx^3}=\frac{d^4\Psi}{2.\,3.\,4dx^4}+\text{ecc.}$$

Sostituendo questi valori, ed osservando che z diventa $-\varphi$, quando vi si pone $x=f$, avremo (4)

$$\Psi = \Psi + \phi\frac{d\Psi}{dx} + \phi\frac{d\phi}{dx}\cdot\frac{d\Psi}{dx} + \phi\,\frac{d\phi^2}{dx^2}\cdot\frac{d\Psi}{dx} + \phi\,\frac{d\phi^3}{dx^3}\cdot\frac{d\Psi}{dx}$$
$$+\,\phi^2\cdot\frac{d^2\Psi}{2dx^2} + \phi^2\frac{d^2\phi}{2dx^2}\cdot\frac{d\Psi}{dx} + 3\phi^2\frac{d\phi}{dx}\cdot\frac{d^2\phi}{2dx^2}\cdot\frac{d\Psi}{dx}$$
$$+\,2\phi^2\frac{d\phi}{dx}\cdot\frac{d^2\Psi}{2dx^2} + 3\phi^2\frac{d\phi^2}{dx^2}\cdot\frac{d^2\Psi}{2dx^2}$$
$$+\,\phi^3\cdot\frac{d^3\Psi}{2.3dx^3} + \phi^3\,\frac{d^3\phi}{2.3dx^3}\cdot\frac{d\Psi}{dx} + \text{ecc.}$$
$$+\,2\phi^3\cdot\frac{d^2\phi}{2dx^2}\cdot\frac{d^2\Psi}{2dx^2}$$
$$+\,3\phi^3\frac{d\phi}{dx}\cdot\frac{d^3\Psi}{2.3dx^3}$$
$$+\,\phi^4\cdot\frac{d^4\Psi}{2.3.4dx^4}$$

che si riduce manifestamente alla forma

$$\Psi = \Psi + \phi\frac{d\Psi}{dx} + \frac{d.\left(\phi^2\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2dx} + \frac{d^2.\left(\phi^3\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2.\,3dx^2} + \frac{d^3.\left(\phi^4\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2.\,3.\,4\,dx^3} + \text{ecc.}$$

facendo dopo le differenziazioni $x = f = \text{funz.}\,(y, t, u, \text{ecc.})$.

IX.

Se ϕ e Ψ sono funzioni di x sola, e facciamo $f = y$, avremo

$$\Psi:x = \Psi:x + \phi:x\frac{d\Psi:x}{dx} + \frac{d\left(\overline{\phi:x}^{\,2}\frac{d\Psi:x}{dx}\right)}{2dx}$$
$$+\,\frac{d^2\left(\overline{\phi:x}^{\,3}\frac{d\Psi:x}{dx}\right)}{2.\,3\,dx^2} + \text{ecc.}$$

facendo $x = y$, cioè

$$\Psi:x = \Psi:y + \phi:y\,\frac{d\Psi:y}{dy} + \frac{d\left(\overline{\phi:y}^{\,2}\frac{d\Psi:y}{dy}\right)}{2dy}$$

$$+\frac{d^2\left(\overline{\varphi:y}^3\,\frac{d\Psi:y}{dy}\right)}{2.\;3dy^2}+\text{ecc.}$$ che è l' elegantiſſimo Teorema trovato dal Sig. *de la Grange* nelle Memorie dell' Accademia di Berlino dell' anno 1769.

X.

Nella formola trovata al N.° VIII. le variabili ſono tra loro inviluppate; vediamo come per mezzo di queſta formola ſi potrà la quantità Ψ ſvolgere in una ſerie ordinata per le poteſtà ed i prodotti di y, t, u, ecc. Noi ſupporremo che le noſtr' equazioni $z=0$, $z'=0$ ecc. ſiano razionali, perchè ſe conteneſſero radicali, ſarebbe facile l' eliminargli con i metodi ſoliti. Si abbia dunque l' equazione $z=0$, e facendo $y=0$, $t=0$, ecc. la quantità z che è allora funzione di x ſola, riſoluta ne' ſuoi fattori ſia $(x-a)$ $(x-b)$ $(x-c)$ ecc. cioè facendo $y=0$, $t=0$, ecc. in z ſia $x=a$, o $x=b$, o $x=c$, ecc. e ciaſcuno di queſti fattori ci darà una ſerie per eſprimere il valore di Ψ. Prendiamo il fattore $x-a$, e la funzione z ſarà della forma $(x-a)A-yF-tF'-$ ecc. ove A contiene gli altri fattori $x-b$, $x-c$ ecc. cioè è una funzione di x, ed F, F', ecc. ſono funzioni tali di x, y, t, u, ecc. che non diventino infinite facendo $y=0$, $t=0$, ecc. Nelle medeſime circoſtanze ſupporremo che non diventi infinita la funzione Ψ, perchè ſe mai non foſſe tale, ſi potrà ſempre combinandola coll' equazione $z=0$ ridurre ad una forma che non diventi infinita facendo $y=0$, $t=0$, ecc. almeno nel caſo, che eſſa poſſa eſprimerſi per le potenze ed i prodotti poſitivi di y, t, ecc. che è il ſolo caſo il quale per ora c' intereſſi. Avremo dunque

$$\phi=\frac{yF+tF'+\text{ecc.}}{A},\ \text{e}\ \Psi=\Psi+\phi\frac{d\Psi}{dx}+\frac{d\left(\phi^2\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2dx}$$

$$+\frac{d^2\left(\phi^3\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2.\;3dx^2}+\frac{d^3\left(\phi^4\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2.\;3.\;4dx^3}+\text{ecc.}$$

facendo nel ſecondo membro $x=a$ dopo le differenziazioni. Ora è noto, che ſe una funzione v ſi vuole ſvolgere in una ſerie ordinata per le potenze ed i prodotti poſitivi di y, t, ecc. ſarà il coefficiente del termine $y^{n}.\, t^{n'}$ ecc.

$$= \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}\, v}{1.\,2.\,\ldots\, n\, dy^{n}.\; 1.\,2.\,\ldots\, n'\, dt^{n'}.\ \text{ecc.}}$$ facendo $y=0$, $t=0$, ecc.

dopo le differenziazioni. Quindi chiamando $q_{n,\, n'\ \text{ecc.}}$ il coefficiente di $y^{n}.\, t^{n'}$. ecc. nella evoluzione di $\Psi + \phi \frac{d\Psi}{dx} + \text{ecc.}$ avremo

$$q_{n,n',\text{ecc.}} = \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}.\,\Psi}{1.\,2\ldots n\, dy^{n}.\; 1.\,2\ldots n'\, dt^{n'}.\ \text{ecc.}}$$

$$+ \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{1.\,2\ldots n\, dy^{n}.\; 1.\,2.\,\ldots\, n'\, dt^{n'}.\ \text{ecc.}} \left(\phi \frac{d\Psi}{dx} + \frac{d\left(\phi^{2} \frac{d\Psi}{dx}\right)}{2dx} + \text{ecc.}\right)$$

facendo dopo le differenziazioni $y=0$, $t=0$, ecc. e $x=a$.

Quantunque la ſerie $\phi \frac{d\Psi}{dx} + \frac{d\left(\phi^{2}.\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2dx} + \text{ecc.}$ vada all' infinito, pure non occorre prendere al di là del termine

$$\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left(\phi^{n+n'+\text{ecc.}}.\frac{d\Psi}{dx}\right)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (n+n'+\text{ecc.})\, dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$, perchè i ſeguenti ſvaniranno dopo le differenziazioni facendo $y=0$, $t=0$, ecc. Infatti il termine ſeguente $\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}\left(\phi^{n+n'+\text{ecc.}+1}.\frac{d\Psi}{dx}\right)}{1.\,2.\,\ldots\,(n+n'+\text{ecc.}+1)\, dx^{n+n'+\text{ecc.}}}$ ſarà compoſto di termini della forma $y^{a}.\, t^{a'}.$ ecc. M, eſſendo $a + a' + \text{ecc.} = n + n' + \text{ecc.} + 1$, ed M una funzione che non diventi infinita facendo $y = t = \text{ecc.} = 0$, quindi ſarà

$$\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}\,(y^{a}.\, t^{a'}.\ \text{ecc.}\ M)}{1.\,2\ldots n\, dy^{n}.\; 1.\,2\,.\, n'\, dt^{n'}.\ \text{ecc.}} = 0$$ facendo $y = t = \text{ecc.} = 0$.

Con più forte ragione ſi potranno ammettere gli altri termini

ſuſſeguenti

sussequenti: sarà dunque chiamando p la seconda parte del valore di $q_{n,n',\text{ ecc.}}$

$$p = \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{1.2\ldots ndy^{n}.1.2\ldots n'dt^{n'}.\text{ ecc.}} \left\{ \begin{array}{l} \phi\frac{d\Psi}{dx} + \frac{d\left(\phi^2\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2dx} + \frac{d^2\left(\phi^3\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2.3dx^2}\ldots\ldots \\ \ldots\ldots + \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}.\left(\phi^{n+n'+\text{ecc}}\frac{d\Psi}{dx}\right)}{1.2\ldots\ldots(n+n'+\text{ecc.})\,dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}} \end{array} \right\}$$

Ma siccome dobbiamo fare $x = a$ dopo le differenziazioni relative ad x, la quantità tra le parentesi la potremo mettere sotto la forma

$$\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left\{(x-a)^{n+n'+\text{ecc.}}\left(\frac{\phi\frac{d\Psi}{dx}}{x-a} + \frac{\phi^2.\frac{d\Psi}{dx}}{2(x-a)^2} + \frac{\phi^3.\frac{d\Psi}{dx}}{3(x-a)^3}\ldots + \frac{\phi^{n+n'+\text{ecc}}.\frac{d\Psi}{dx}}{(n+n'+\text{ecc.})(x-a)^{n+n'+\text{ecc.}}}\right)\right\}}{1.\ 2.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (n+n'+\text{ecc.}-1)\,dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

Dunque permutando le differenziali sarà

$$p = \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left\{(x-a)^{n+n'+\text{ecc}}.d^{n+n'+\text{ecc.}}\left(\frac{\phi\frac{d\Psi}{dx}}{x-a}\ldots + \frac{\phi^{n+n'+\text{ecc}}.\frac{d\Psi}{dx}}{(n+n'+\text{ecc.})(x-a)^{n+n'+\text{ecc.}}}\right)\right\}}{1.\ 2.\ \ldots\ ndy^{n}.\ 1.\ 2.\ \ldots\ n'dt^{n'}.\text{ ecc. }1.\ 2.\ \ldots\ (n+n'+\text{ecc.}-1)\,dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

Ma la quantità $\frac{\phi\frac{d\Psi}{dx}}{x-a} + \text{ecc.}$ invece che sia composta di un numero finito di termini, si potrà supporre continuata all' infinito, perchè i termini che si aggiungono sono zero, dovendosi fare $y = 0$, $t = 0$, ecc. dopo le differenziazioni relative a queste variabili; nel qual caso questa quantità divenendo $= -\frac{d\Psi}{dx}\log.\left(1-\frac{\phi}{x-a}\right)$, avremo per conseguenza

$$p = -\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left\{(x-a)^{n+n'+\text{ecc}}.d^{n+n'+\text{ecc.}}\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.\overline{1-\frac{\phi}{x-a}}\right)\right\}}{1.\ 2..\ ndy.^{n}\ 1.\ 2..\ n'dt.^{n'}\text{ecc. }1.2\ldots(n+n'+\text{ecc.}-1)\,dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

A questo valore si può aggiungere il termine

$$-\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left\{(x-a)^{n+n'+\text{ecc}}.d^{n+n'+\text{ecc}}.\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.\overline{(x-a.A)}\right)\right\}}{1.2..n\,dy.^n\,1.2..n'\,dt^{n'}.\text{ecc.}\ 1.2...(n+n'+\text{ecc.}-1)dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

il quale è evidentemente $=0$ facendo dopo le differenziazioni $x=a$. Ma $\log.(\overline{x-a}.A)+\log.\left(1-\frac{\Phi}{x-a}\right)$ $=\log.(\overline{x-a}.A-A\phi)=\log.z$. Sarà dunque

$$p=-\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left\{(x-a)^{n+n'+\text{ecc}}.\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dy.^n dt^{n'}.\text{ecc.}}\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.z\right)\right\}}{1.2..n.1.2..n'.\text{ecc.}\ 1.2...(n+n'+\text{ecc.}-1)dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

e quindi

$$q_{n,n',\text{ecc.}}=\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}.\Psi}{1.2..n\,dy.^n\,1.2...n'\,dt^{n'}.\text{ecc.}}$$
$$-\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left\{(x-a)^{n+n'+\text{ecc}}.\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dy.^n dt^{n'}.\text{ecc.}}\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.z\right)\right\}}{1.2..n.1.2..n'.\text{ecc.}\ 1.2...(n+n'+\text{ecc.}-1)dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

facendo $y=0$ dopo le differenziazioni relative ad y, $t=0$ dopo le differenziazioni relative a t, ecc. ed $x=a$ dopo tutte le differenziazioni.

X I.

Ho supposto che il fattore $x-a$ non ne abbia altri eguali: se vi saranno in A altri fattori uguali ad $x-a$, le formole precedenti non ci daranno la serie che esprime il valore di Ψ. Infatti la formola del numero VIII suppone che la funzione ϕ non contenga $x-a$ nel denominatore, altrimenti i suoi termini diventerebbero infiniti facendo $x=a$. Nel caso dunque che la funzione z facendo $y=t=$ ec. $=0$ abbia più fattori uguali, converrà usare il metodo seguente. Sia i il numero de' fattori uguali ad $x-a$, e la funzione z sarà composta di i fattori della forma $(x-a)A-\phi$, $(x-a)A'-\phi'$, ec. ove A, A', ec. non conterranno più il fattore $x-a$. Chiamiamo Z, Z', Z'', ecc. questi fattori, e ciascuno di essi per esempio Z ci darà una serie per Ψ, nella quale chiamando $q_{n,n'}$, ecc. il coeficiente del termine $y.^{n}t.^{n'}$ ecc. sarà

$$q_{n,n',\text{ecc.}} = \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}\,\Psi}{1.2..ndy.^{n}\,1.2..n'dt.^{n'}\,\text{ecc.}} - \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left\{(x-a)^{n+n'+\text{ecc}}\cdot\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dy.^{n}dt.^{n'}\text{ecc.}}\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.Z\right)\right\}}{1.2..n.\,1.2..n'.\,\text{ecc.}\,1.2....(n+n'+\text{ecc.}-1)\,dx^{n+\text{ecc.}-1}}$$

Se prendiamo un medio aritmetico tra tutte queste i serie che nascono dai fattori Z, Z', ecc. e chiamiamo $q_{n,n',\text{ecc.}}$ il coeficiente di $y.^{n}t.^{n'}$ ecc. in questa serie media, avremo

$$q_{n,n',\text{ecc.}} = \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}\,\Psi}{1.2...ndy.^{n}\,1.2...n'dt.^{n'}\,\text{ecc.}} - \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left\{(x-a)^{n+n'+\text{ecc.}}\cdot\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dy.^{n}dt.^{n'}\text{ecc.}}\left(\frac{d\Psi}{dx}(\log.Z+\log.Z'+\log.Z''+\text{ecc.})\right)\right\}}{1.\,2..n.\,1.\,2...n'.\,\text{ecc.}\,1.\,2...(n+n'+\text{ecc.}-1)\,idx^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

cioè, siccome $\log.Z+\log.Z'+\log.Z''+\text{ecc.}=\log.z$,

$$q_{n,n',\text{ecc.}} = \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}\,\Psi}{1.2..ndy.^{n}\,1.2...n'dt.^{n'}\,\text{ecc.}} - \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left\{(x-a)^{n+n'+\text{ecc.}}\cdot\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dy.^{n}dt.^{n'}\text{ecc}}\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.z\right)\right\}}{1.2..n.\,1.2..n'\,\text{ecc.}\,1.2..(n+n'+\text{ecc.}-1)\,idx^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

facendo $y=0$, $t=0$, ecc. dopo le differenziazioni relative ad y, t, ecc. ed $x=a$ dopo tutte le differenziazioni.

XII.

Se z e Ψ sono funzioni di due sole variabili x ed y, ed $(x-a)^{i}$ è uno de' fattori di z quando $y=0$, avremo chiamando q_{n} il coefficiente di y^{n} nella serie che rappresenta il valore di Ψ quando si fa uso del fattore $x-a$

$$q_n = \frac{d.^n\Psi}{1.2..ndy^n} - \frac{d^{n-1}\left\{(x-a)^n \frac{d^n\left(\frac{d\Psi}{dx}\log. z\right)}{1.2....ndy^n}\right\}}{1.2............(n-1)\,idx^{n-1}}$$

facendo $y=0$ dopo le differenziazioni relative ad y, ed $x=a$ dopo tutte le differenziazioni. Questa formola è stata data senza dimostrazione dal Sig. *de la Place* nelle Memorie dell' Accademia delle Scienze di Parigi dell' anno 1777. Pare che essa abbia il senso seguente: che cioè sia q_n il coeficiente di y^n nella serie che esprime il valore di Ψ quando $i=1$; ma quando $i>1$, q_n sia il coefficiente di y^n nella serie che è il medio aritmetico tra tutte quelle serie che rappresentano il valore di Ψ, quando si fa uso del fattore $(x-a)^i$.

Si abbia per esempio l'equazione $(x-1)^2-y^2(a+bx)^2=0$, e si voglia svolgere il valore di x in una serie ordinata per le potenze di y. Saranno $x-1-y(a+bx)$, $x-1+y(a+bx)$ i due fattori dell' equazione $z=0$, e questi fattori ci daranno le due serie per esprimere il valore di x

$$x=1+(a+b)y+(a+b)by^2+(a+b)b^2y^3+(a+b)b^3y^4+ \text{ecc.}$$
$$x=1-(a+b)y+(a+b)by^2-(a+b)b^2y^3+(a+b)b^3y^4- \text{ecc.}$$

e ciascuna di queste serie soddisfa all' equazione $z=0$. Se prendiamo il medio aritmetico tra queste due serie, avremo quella serie che ci dà la formola del Sig. *de la Place*, cioè

$$x=1+(a+b)by^2+(a+b)b^3y^4+ \text{ecc.}$$

ma questa serie non soddisfa più all' equazione $z=0$.

XIII.

Ritorniamo al problema generale, e supponghiamo che l' equazione $z=0$ sia della forma $(x-a)A-yF-tF'$ — ecc. $=0$, ove siano F, F', ecc. e Ψ funzioni di x solamente. E' chiaro che il primo termine del valore di $q_{n,n',\text{ ecc.}}$ è in questo caso $=0$: per avere il valore della seconda parte si osservi che

$$\frac{d^{n+n'+\text{ecc}}\cdot\left(\frac{d\Psi}{dx}\log. z\right)}{dy^n . dt^{n'}. \text{ecc.}} = -\frac{d\Psi}{dx}\cdot\frac{1.2....(n+n'+\text{ecc.}-1)F^n . F'^{n'}.\text{ecc.}}{A^{n+n'+\text{ecc.}}(x-a)^{n+n'+\text{ecc.}}}$$ facendo $y=0$, $t=0$, ecc. e quindi sarà

$$q_{n,n',\text{ecc.}} = \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\cdot\left(F^n . F'^{n'} . \text{ecc.}\frac{d\Psi}{dx}\right)}{1.2....n.1.2...n'.\text{ecc.}\ dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

facendo $x=a$ dopo le differenziazioni.

XIV.

Si abbiano adesso due equazioni $z=0$, $z'=0$, la prima tra x, y, t, ecc. la seconda tra y, t, ecc. senza x. Facendo $t=0$, ecc. in z' sia $y=b$ uno de' valori di y che ne risulta, il qual valore supporrò che non ne abbia altri eguali. Facendo adesso $t=0$, ecc. e $y=b$ in z, sia $x=a$ uno de' valori di x, e questo ancora supporrò che non ne abbia altri eguali. Sarà z della forma $(x-a)A-(y-b)F-tF'-$ecc. e z' della forma $(y-b)B-tf-$ecc. essendo A funzione di x, F, F', ecc. funzioni di x, y, t, ecc. B funzione di y, f, ecc. funzioni di y, t, ecc. Ora facendo uso della prima equazione $z=0$, avremo

$$\Psi = \Psi + \phi\frac{d\Psi}{dx} + \frac{d\left(\phi^2\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2dx} + \frac{d^2\left(\phi^3\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2.\ 3dx^2} + \text{ecc.}$$

ove $\phi = \frac{(y-b)F+tF'+\text{ecc.}}{A}$, ponendo nel secondo membro $x=a$ dopo le differenziazioni. Facciamo questo secondo membro $=v$, e sarà v funzione di y, t, u, ecc. la quale se mediante l' equazione $z'=0$ si vorrà svolgere per le potenze ed i prodotti di t, u, ecc. avremo chiamando $q_{n,n',\text{ecc.}}$ il coefficiente di $t^n u^{n'}$ ecc. (X)

$$q_{n,n',\text{ecc.}} = \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}.v}{1.2...ndt^n.1.2...n'du^{n'}.\text{ecc.}}$$

$$-\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left\{(y-b)^{n+n'+\text{ecc.}}\cdot\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dt^{n}.du^{n'}.\text{ecc.}}\left(\frac{dv}{dy}\log.z'\right)\right\}}{1.2\ldots n.1.2\ldots n'.\text{ecc. } 1.2\ldots(n+n'+\text{ecc.}-1)\,dy^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

facendo $t=u=\text{ecc.}=0$, ed $y=b$ dopo le differenziazioni. Sostituendo adesso il valore di v avremo

$$q_{n,n',\text{ecc.}}=\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}.\Psi}{1.2\ldots n dt^{n}.1.2\ldots n' du^{n'}.\text{ecc.}}$$

$$+\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}\cdot\left(\phi\frac{d\Psi}{dx}+\frac{d\left(\phi^{2}\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2dx}+\frac{d^{2}\left(\phi^{3}\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2.3dx^{2}}+\text{ecc.}\right)}{1.2\ldots n dt^{n}.1.2\ldots n' du^{n'}.\text{ ecc.}}$$

$$-\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left\{(y-b)^{n+n'+\text{ecc.}}\cdot\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dt^{n}du^{n'}.\text{ecc.}}\left(\frac{d\Psi}{dy}\log.z'\right)\right\}}{1.2\ldots n.1.2\ldots n'\text{ ecc. } 1.2\ldots(n+n'+\text{ecc.}-1)dy^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

$$-\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left\{(y-b)^{n+n'+\text{ecc.}}\cdot\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dt^{n}.du^{n'}.\text{ecc.}}\left\{\frac{d\left(\phi\frac{d\Psi}{dx}+\frac{d\left(\phi^{2}\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2dx}+\text{ecc.}\right)}{dy}\log.z'\right\}\right\}}{1.2\ldots n.1.2\ldots n'.\text{ecc. } 1.2\ldots(n+n'+\text{ecc.}-1)\,dy^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

La seconda parte di questo valore è per le cose precedenti

$$=-\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}(x-a)^{n+n'+\text{ecc.}}\cdot\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dt^{n}.du^{n'}.\text{ecc.}}\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.z\right)}{1.2\ldots n.1.2\ldots n'.\text{ecc. } 1.2\ldots(n+n'+\text{ecc.}-1)\,dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}},$$

Nella quarta parte si potrà omettere il termine $\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}\left(\phi^{n+n'+\text{ecc.}+1}\cdot\frac{d\Psi}{dx}\right)}{1.2\ldots(n+n'+\text{ecc.}+1)\,dx^{n+n'+\text{ecc.}}}$. Infatti differenziando una volta per rapporto ad y, n volte per rapporto a t, n' volta per rapporto ad u, ecc. e facendo poi $t=u=\text{ecc.}=0$, questo termine ci produrrebbe nella quarta parte una quantità della forma

$$\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\cdot(y-b)^{n+n'+\text{ecc}}\cdot\left(p\log.(\overline{y-b.B})+\frac{p'}{(y-b)B}+\frac{p''}{(y-b)^2B^2}\ldots+\frac{p^{(n+n'+\text{ecc.})}}{(y-b)^{n+n'+\text{ecc.}}\cdot B^{n+\text{ecc.}}}\right)}{1\cdot 2\ldots\ldots(n+n'+\text{ecc.}-1)\,dy^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

ove la minima potenza di $y-b$ in p per lo meno sarà $=0$, in p' sarà $=1$, in p'' sarà $=2$, e generalmente in $p^{(m)}$ sarà $=m$, quindi questa quantità sarà $=0$, dovendosi fare dopo le differenziazioni $y=b$. Con più forte ragione potranno ometterſi i termini più remoti di quello che abbiamo conſiderato. Quindi in luogo della quantità

$\phi\frac{d\Psi}{dx}+\frac{d.\left(\phi^2\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2dx}+$ ecc. potremo porre l'espressione

$$\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}.(x-a)^{n+n'+\text{ecc.}}\left(\frac{\phi\frac{d\Psi}{dx}}{x-a}+\frac{\phi^2\frac{d\Psi}{dx}}{2(x-a)^2}+\text{ecc.}\right)}{1.\ 2.\ldots(n+n'+\text{ecc.}-1)\,dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

e permutando le differenziali e ponendo come sopra

$-\frac{d\Psi}{dx}\log.z$ invece di $\frac{\phi\frac{d\Psi}{dx}}{x-a}+$ ecc. avremo questa quarta parte così espressa

$$+\frac{d^{2n+2n'+\text{ecc.}-2}\left\{\frac{\quad}{(x-a)(y-b)}^{n+n'+\text{ecc.}}.\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dt^n.du^{n'}.\text{ecc.}}\left(\frac{d\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.z\right)}{dy}\log.z'\right)\right\}}{1.2\ldots n.\ 1.2\ldots n'.\text{ecc.}\ 1^2.2^2\ldots(n+n'+\text{ecc.}-1)^2\,dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}.dy^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

facendo $t=u=$ ecc. $=0$ dopo le differenziazioni relative a t, u, ecc. $y=b$ dopo le differenziazioni relative ad y, ed $x=a$ dopo tutte le differenziazioni. Sarà dunque con queste condizioni

$$q_{n,n',\text{ecc.}} = \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}.\Psi}{1.2..n\,dt^{n}.1.2...n'du^{n'}.\text{ecc.}}$$

$$-\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left\{(x-a)^{n+n'+\text{ecc}}.\dfrac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dt^{n}.du^{n'}.\text{ecc.}}\left(\dfrac{d\Psi}{dx}\log.z\right)\right\}}{1.2...n.\,1.2...n'.\,\text{ecc.}\;1.2...(n+n'+\text{ecc.}-1)dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

$$-\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left\{(y-b)^{n+n'+\text{ecc}}.\dfrac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dt^{n}.du^{n'}.\text{ecc.}}\left(\dfrac{d\Psi}{dx}\log.z'\right)\right\}}{1.2...n.\,1.2...n'.\text{ecc.}\;1.2...(n+n'+\text{ecc.}-1)dy^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

$$+\frac{d^{2n+2n'+\text{ecc.}-2}\left\{\overline{(x-a)(y-b)}^{\,n+n'+\text{ecc}}.\dfrac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dt^{n}.du^{n'}.\text{ecc}}\left(\dfrac{d(\frac{d\Psi}{dx}\log.z)}{dy}\log.z'\right)\right\}}{1.2...n.\,1.2...n'.\,\text{ecc.}\;1^{2}.2^{2}...(n+n'+\text{ecc.}-1)^{2}dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}dy^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

Ho supposto che i fattori $x-a$, $y-b$ non ne abbiano altri uguali: se ne avessero, si seguiterà un metodo analogo a quello usato di sopra (XI). Sia i il numero de' fattori uguali ad $x-a$, l il numero de' fattori uguali ad $y-b$, e se vorremo avere quella serie che è il medio aritmetico tra tutte quelle che nascono dai fattori $(x-a)^{i}$, $(y-b)^{l}$, avremo per questa serie ponendo per più semplicità $n+n'+\text{ecc.}=m$

$$q_{n,n',\text{ecc.}} = \frac{d^{m}.\Psi}{1.2...n\,dt^{n}.1.2...n'du^{n'}.\text{ecc.}}$$

$$-\frac{d^{m-1}\left\{(x-a)^{m}.\dfrac{d^{m}}{dt^{n}.du^{n'}.\text{ecc}}\left(\dfrac{d\Psi}{dx}\log.z\right)\right\}}{1.2...n.\,1.2...n'\,\text{ecc.}\;1.2...(m-1)i\,dx^{m-1}}$$

$$-\frac{d^{m-1}\left\{(y-b)^{m}.\dfrac{d^{m}}{dt^{n}.du^{n'}.\text{ecc.}}\left(\dfrac{d\Psi}{dx}\log.z'\right)\right\}}{1.2....n.\,1.2...n'.\,\text{ecc.}\;1.2...(m-1)l\,dy^{m-1}}$$

$+d^{2m-2}$

$$+\frac{d^{2m-2}\left\{\overline{(x-a)(y-b)}^{m}\cdot\frac{d^{m}}{dt^{n}.du^{n'}\,\text{ecc.}}\left(\frac{d\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.z.\right)}{dy}\log.z'\right)\right\}}{1.2\ldots n.1.2\ldots n'\,\text{ecc.}\,1^{2}.2^{2}\ldots(m-1)^{2}ildx^{m-1}dy^{m-1}}$$

X V.

Sia per esempio $z=(x-a)A-tF$, $z'=(y-b)B-uf$, ove sieno A ed F funzioni di x sola, B ed f funzioni di y sola, e si voglia mediante queste due equazioni svolgere una funzione Ψ delle variabili x, y in una serie ordinata per le potenze ed i prodotti di t, u. La prima parte del valore di $q_{n,n'}$ è $=0$ perchè Ψ non contiene t nè u: la seconda parte svanisce quando $n'>0$, perchè z non contiene u; ma quando $n'=0$, essa diventa $\frac{d^{n-1}\left(\frac{F^{n}}{A^{n}}\cdot\frac{d\Psi}{dx}\right)}{1.2\ldots ndx^{n-1}}$: similmente la terza parte svanisce quando $n>0$, ma quando $n=0$ diviene $\frac{d^{n'-1}\left(\frac{f^{n'}}{B^{n'}}\cdot\frac{d\Psi}{dy}\right)}{1.2\ldots\ldots n'dy^{n'-1}}$. Per avere il valore della quarta parte si osservi che $\frac{d\left(\frac{d\Psi}{dx}.\log.z.\right)}{dy}=\frac{d^{2}\Psi}{dxdy}.\log.z$ onde differenziando per rapporto a t ed u, avremo nel caso di $t=u=0$

$$\frac{d^{n+n'}\left(\frac{d^{2}\Psi}{dxdy}.\log.z\log.z'\right)}{1.2\ldots ndt^{n}.1.2\ldots n'du^{n'}.\text{ecc.}}=\frac{d^{2}\Psi}{dxdy}\cdot\frac{F^{n}}{n(x-a)^{n}A^{n}}\cdot\frac{f^{n'}}{n'(y-b)^{n'}.B^{n'}}.$$

Differenziando adesso per rapporto ad y avremo nel caso di $y=b$

$$\frac{d^{n+n'-1}\cdot\left\{(y-b)^{n}\cdot\frac{d^2\Psi}{dxdy}\cdot\frac{F^n}{n(x-a)^n A^n}\cdot\frac{f^{n'}}{n'B^{n'}}\right\}}{1.2.\,\ldots\ldots\,(n+n'-1)\,dy^{n+n'-1}}$$

$$=\frac{d^{n'-1}\cdot\left(\frac{d^2\Psi}{dxdy}\cdot\frac{F^n}{n(x-a)^n A^n}\cdot\frac{f^{n'}}{B^{n'}}\right)}{1.\;2.\,\ldots\ldots\ldots\,n'dy^{n'-1}}$$ e differenziando per rapporto ad x

$$\frac{d^{n+n'-1}\cdot\left\{(x-a)^{n'}.d^{n'-1}\cdot\left(\frac{d^2\Psi}{dxdy}\cdot\frac{F^n.\,f^{n'}}{nA^n.\;B^{n'}}\right)\right\}}{1.2.\,\ldots\,(n+n'-1)dx^{n+n'-1}.\,1.2.\,\ldots\,n'dy^{n'-1}}$$

$$=\frac{d^{n-1}.d^{n'-1}\left(\frac{d^2\Psi}{dxdy}\cdot\frac{F^n.\,f^{n'}}{A^n.\;B^{n'}}\right)}{1.2.\ldots\,ndx^{n-1}.\,1.2.\,\ldots\,n'dy^{n'-1}}$$ nel caso di $x=a$. Quindi la quarta parte del valore di $q_{n,n'}$ sarà

$$\frac{d^{n+n'-2}\cdot\left(\frac{d^2\Psi}{dxdy}\cdot\frac{F^n.f^{n'}}{A^n.B^{n'}}\right)}{1.2\ldots ndx^{n-1}.\,1.2\ldots n'dy^{n'-1}}$$; la medesima quarta parte è $=0$ quando $n=0$, e quando $n'=0$, quindi sarà facendo $x=a$, $y=b$ dopo le differenziazioni

$$q_{n,n'}=\frac{d^{n-1}\cdot\left(\frac{F^n}{A^n}\cdot\frac{d\Psi}{dx}\right)}{1.\;2.\ldots\ldots ndx^{n-1}}$$

quando $n'=0$

$$q_{n.n'}=\frac{d^{n'-1}\cdot\left(\frac{f^{n'}}{B^{n'}}\cdot\frac{d\Psi}{dy}\right)}{1.\;2.\ldots\ldots n'dy^{n'-1}}$$

quando $n=0$

$$q_{n,n'}=\frac{d^{n+n'-2}\cdot\left(\frac{F^n.f^{n'}}{A^n.B^{n'}}\cdot\frac{d^2\Psi}{dxdy}\right)}{1.2\ldots.ndx^{n-1}.1.2\ldots.n'dy^{n'-1}}$$

quando n ed n' sono >0. La funzione Ψ ridotta in serie sarà perciò della forma

$$\begin{aligned}
\Psi = \Psi &+ t.\frac{F}{A}.\frac{d\Psi}{dx} + t^2.\frac{d.\left(\frac{F^2}{A^2}.\frac{d\Psi}{dx}\right)}{1.2dx} + t^3.\frac{d^2\left(\frac{F^3}{A^3}.\frac{d\Psi}{dx}\right)}{1.2.3dx^2} + t^4.\frac{d^3.\left(\frac{F^4}{A^4}.\frac{d\Psi}{dx}\right)}{1.2.3.4dx^3} \\
&+ u.\frac{f}{B}.\frac{d\Psi}{dy} + tu.\frac{F.f}{A.B}.\frac{d^2\Psi}{dxdy} + t^2u.\frac{d.\left(\frac{F^2.f}{A^2.B}.\frac{d^2\Psi}{dxdy}\right)}{1.2dx} + t^3u.\frac{d^2.\left(\frac{F^3.f}{A^3.B}.\frac{d^2\Psi}{dxdy}\right)}{1.2.3dx^2} \\
&+ u^2.\frac{d.\left(\frac{F^2}{A^2}.\frac{d\Psi}{dy}\right)}{1.2dy} + tu^2.\frac{d.\left(\frac{F.f^2}{A.B^2}.\frac{d^2\Psi}{dxdy}\right)}{1.2dy} + t^2u^2.\frac{d^2.\left(\frac{F^2.f^2}{A^2.B^2}.\frac{d^2\Psi}{dxdy}\right)}{1.2dx.1.2dy} + \text{ecc.} \\
&+ u^3.\frac{d^2.\left(\frac{f^3}{B^3}.\frac{d\Psi}{dy}\right)}{1.2.3dy^2} + tu^3.\frac{d^2.\left(\frac{F.f^3}{A.B^3}.\frac{d^2\Psi}{dxdy}\right)}{1.2.3dy^2} \\
&+ u^4.\frac{d^3.\left(\frac{f^4}{B^4}.\frac{d\Psi}{dy}\right)}{1.2.3.4dy^3}
\end{aligned}$$

facendo nel secondo membro $x=a$, $y=b$.

XVI.

Si abbiano adesso tre equazioni $z=0$, $z'=0$, $z''=0$, la prima tra le variabili x, y, t, u, r, ecc. la seconda tra y, t, u, r, ecc. senza x, la terza tra t, u, r, ecc. senza x nè y. Facendo $u=0$, $r=0$, ecc. in z'', sia $t=c$; facendo $u=0$, $r=0$, ecc. e $t=c$ in z' sia $y=b$; facendo finalmente $u=0$, $r=0$, ecc. $t=c$ ed $y=b$ in z sia $x=a$. Suppongo che $t-c$, $y-b$, $x-a$ non abbiano nelle loro respettive quantità altri fattori uguali, perchè se ne avessero, converrebbe ricorrere all' artificio usato di sopra (XI). Si voglia adesso facendo uso di questi valori di t, y, x svolgere la funzione Ψ delle variabili x, y, t, u, r, ecc. per le potenze ed i prodotti di u, r, ecc. Chiamando $q_{n,n'.\text{ecc.}}$ il coefficiente di $u^n.\, t^{n'}.$ ecc. in questa evoluzione, troveremo per i principj esposti che il valore di $q_{n,n',\text{ecc.}}$ è composto di otto termini, il primo de' quali, se facciamo $n+n'+\text{ecc.}=m$, sarà

$$\frac{d^{m}.\Psi}{1.2\ldots n du^{n}.1.2\ldots n' dr^{n'}.\text{ecc}}$$, il secondo sarà

$$-\frac{d^{m-1}\left\{(x-a)^{m}.\frac{d^{m}}{du^{n}.dr^{n'}.\text{ecc.}}\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.z\right)\right\}}{1.2\ldots n.1.2\ldots n'.\text{ecc.}1.2\ldots(m-1)dx^{m-1}}$$

Altri due termini si troveranno ponendo in questo in luogo di $x-a$, e z prima $y-b$ e z', poi $t-c$ e z''. Il quinto termine sarà

$$\frac{d^{2m-2}\left\{\overline{(x-a)(y-b)}^{m}.\frac{d^{m}}{du^{n}.dr^{n'}\text{ecc.}}.\left(\frac{d\left(\frac{d\Psi}{dx}.\log.z\right)}{dy}\log.z'\right)\right\}}{1.2\ldots n.1.2\ldots n'.\text{ecc.}1^{2}.2^{2}\ldots(m-1)^{2}dx^{m-1}.dy^{m-1}}$$

Altri due termini si troveranno ponendo in questo $t-c$, e z'' prima in luogo di $y-b$, e z', poi in luogo di $x-a$, e z. Finalmente l'ottavo termine sarà

$$-\frac{d^{3m-3}\left\{\overline{(x-a)(y-b)(t-c)}^{m}.\frac{d^{m}.}{du^{n}.dr^{n'}.\text{ecc.}}.\left(\frac{d\left\{\frac{d\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.z\right)}{dy}\log.z'\right\}}{dt}.\log.z''\right)\right\}}{1.2\ldots n.1.2\ldots n'.\text{ecc.}1^{3}.2^{3}\ldots(m-1)^{3}dy^{m-1}.dt^{m-1}}$$

Convien però in queste formole fare $u=0$, $r=0$, ecc. $t=c$, $y=b$, $x=a$ dopo le differenziazioni relative ad u, r, ecc. t, y, x.

XVII.

Sia per esempio $z=(x-a)A-uF$, $z'=(y-b)B-rf$, $z''=(t-c)C-s\Phi$, ove A ed F siano funzioni di x sola, B ed f funzioni di y sola, C e ϕ funzioni di t sola, e sia proposto di svolgere la funzione Ψ delle variabili x, y, t, in una serie ordinata per le potenze ed i prodotti delle variabili u, r, s. Se chiamiamo $q_{n,n',n''}$ il coefficiente di $u^{n}.r^{n'}.s^{n''}$, avremo ragionando come sopra (XV)

$$q_{n,n',n''}=\frac{d^{n-1}\left(\frac{F^n}{A^n}\cdot\frac{d\Psi}{dx}\right)}{1.2\ldots\ldots n\,dx^{n-1}}$$

quando $n'=n''=0$, ed $n>0$,

$$q_{n,n',n''}=\frac{d^{n'-1}\left(\frac{f^{n'}}{B^{n'}}\cdot\frac{d\Psi}{dy}\right)}{1.2\ldots\ldots n'dy^{n'-1}}$$

quando $n=n''=0$, ed $n'>0$,

$$q_{n,n',n''}=\frac{d^{n''-1}\left(\frac{\varphi^{n''}}{Cn''}\cdot\frac{d\Psi}{dt}\right)}{1.2\ldots\ldots n''dt^{n''-1}}$$

quando $n=n'=0$, ed $n''>0$,

$$q_{n,n',n''}=\frac{d^{n+n'-2}\left(\frac{F^n.f^{n'}}{A^n.B^{n'}}\cdot\frac{d^2\Psi}{dxdy}\right)}{1.2\ldots n\,dx^{n-1}.1.2\ldots n'dy^{n'-1}}$$

quando $n''=0$, ed $n>0$, $n'>0$

$$q_{n,n',n''}=\frac{d^{n+n''-2}\left(\frac{F^n.\varphi^{n''}}{A^n.C^{n''}}\cdot\frac{d^2\Psi}{dxdt}\right)}{1.2\ldots n\,dx^{n-1}.1.2\ldots n''dt^{n''-1}}$$

quando $n'=0$, ed $n>0$, $n''>0$,

$$q_{n,n',n''}=\frac{d^{n'+n''-2}\left(\frac{f^{n'}.\varphi^{n''}}{B^{n'}.C^{n''}}\cdot\frac{d^2\Psi}{dydt}\right)}{1.2\ldots n'dy^{n'-1}.1.2\ldots n''dt^{n''-1}}$$

quando $n=0$, ed $n'>0$, $n''>0$; e finalmente

$$q_{n,n',n''}=\frac{d^{n+n'+n''-3}\left(\frac{F^n.f^{n'}.\varphi^{n''}}{A^n.B^{n'}.C^{n''}}\cdot\frac{d^3\Psi}{dxdydt}\right)}{1.2\ldots n\,dx^{n-1}.1.2\ldots n'dy^{n'-1}.1.2\ldots n'dt^{n''-1}}$$

quando n, n', n'' sono >0. In questi valori di $q_{n,n',n''}$ conviene però fare $t=c$, $y=b$, $x=a$ dopo le differenziazioni relative a t, y, x.

XVIII.

Se paragoniamo tra loro i valori di $q_{n,n'}$,ecc. che abbiamo ne' diversi casi ritrovati (X), (XIV), (XVI), vedremo facilmente la legge che regna in essi: onde qualunque sia il numero dell' equazioni $z=0$, $z'=0$, ecc. potremo sempre svolgere in serie la funzione Ψ, ed in qualunque caso troveremo quella formola composta di replicate differenziazioni che esprime il valore di $q_{n,n',\text{ecc.}}$ Questa formola è già assai complicata, quando il numero dell' equazioni è tre: se questo numero fosse maggiore, quantunque per quel che abbiamo insegnato si possa facilmente trovare il valore di $q_{n,n',\text{ecc.}}$ questo valore però sarà estremamente involuto in modo che non se ne potrà fare alcun uso. Ma attesa la generalità de' problemi sembra che queste formole non possano essere meno complicate. Forse potranno ridursi in una forma più contratta diminuendone il numero de' termini; ma non essendomi in ciò niente riescito che mi abbia soddisfatto, porrò qui fine a queste ricerche.

XIX.

Mi resta ad avvertire, che quantunque le nostre serie siano ordinate per le variabili y, t, u, ecc. si potrà nondimeno col medesimo metodo avere serie ordinate per qualunque funzione delle medesime variabili. Siano infatti queste funzioni P, $\mathfrak{Q}$, R, ecc. facciamo $P=p$, $\mathfrak{Q}=q$, $R=r$, ecc. e ne dedurremo i valori di y, t, u, ecc. per p, q, r, ecc. Sostituiamo questi valori in z, z', ecc. ed in Ψ, e col nostro metodo troveremo Ψ espressa da una serie ordinata per p, q, r, ecc. cioè per P, $\mathfrak{Q}$, R, ecc. come si richiedeva.