ESAME

DI UNA DIMOSTRAZIONE,

Che dà l' Eulero *d' un Teorema analitico; e di una celebre regola per determinare la natura e i valori proſſimi delle radici di qualunque equazione.*

DEL MEDESIMO.

ARTICOLO I.

Eſame della dimoſtrazione di un teorema dell' Eulero *ſul valore del prodotto* 1.2.3.4...n, *quando* n *è infinito.*

1. *MOivre ed Eulero* ſeguitati da tutti i Geometri hanno aſſegnato al prodotto 1. 2. 3. 4. . n, nel caſo che ſia n infinito, il valore ſempliciſſimo $\frac{n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^n}$ in cui π è la ſemicirconferenza di raggio 1, ed e il numero, che ha l'unità per logaritmo iperbolico. La dimoſtrazione, che dà l'*Eulero* di queſto bel teorema, che può eſſerci in molti caſi di grande uſo per maneggiar l'infinito, dipende da un altro teorema di *Giacomo Bernoullio* ſulla ſomma generaliſſima delle ſerie, la quale modificata al caſo del termine generale di certa determinata ſerie, ſi vuol che faccia naſcere per valore di quel prodotto infinito la ſuddetta frazione. Per poter dunque apprezzar bene la forza della dimoſtrazione *Euleriana*, la quale, per quel ch'io ſappia, non è ſtata da alcun ricuſata, fa meſtieri premettere la teoria del *Bernoullio*, della quale io darò la ſoſtanza, ciò ſervendo o per rinfreſcarne la memoria al lettore che ne ſia già iſtrutto, o per non obbligarlo in caſo contrario a ricorrere per iſtruirſene alle opere del chiariſſimo Autore.

2. E' coſa di patente verità, che, chiamato t il termine generale di qualunque ſerie, e n il numero de' termini, queſta equazione $(m) \ldots S.t = A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4$ ecc. in infinito, eſſendo A, B, C, D, ecc. coſtanti indipendenti da n, potrà ſempre aver luogo, perchè qualunque formula di ſomma o algebraica o traſcendente ridotta in ſerie può eſſere ſuſcettibile di queſta eſpreſſione. Ora, ſe nel 2°. membro di (m) introduco $n-1$ in vece di n, è pur chiaro, che queſto 2.° membro ſoffre tal cangiamento, che, laddove prima rappreſentava la ſomma di tutti i termini di $S.t$ ſino al poſto n viene ad eſprimere così mutato la ſomma de' medeſimi termini men l'ultimo, cioè ſino al termine di poſto $n-1$. Onde, chiamato t' il termine penultimo della ſteſſa data ſerie, ſarà

$$\begin{array}{llllll} \ldots\ S.t' = A & + Bn & + Cn^2 & + Dn^3 & + En^4 & \text{ecc.} \\ & - B & - 2Cn & - 3Dn^2 & - 4En^3 & \\ & & + C & + 3Dn & + 6En^2 & \\ & & & - D & - 4En & \\ & & & & + E & \end{array}$$

Ma $S.t - S.t' = t$. Dunque, ſottraendo la ſeconda dalla prima ſerie, avremo

$$\begin{array}{lllll} (n) \ldots t = B & + 2Cn & + 3Dn^2 & + 4En^3 & \text{ecc.} \\ - C & - 3Dn & - 6En^2 & & \\ + D & + 4En & & & \\ - E & & & & \end{array}$$

Si differenzj la prima equazione (m), e riſulterà

$$\frac{d.S.t}{dn} = B + 2Cn + 3Dn^2 + 4En^3 \text{ ecc.}$$

Poſto poi dn coſtante, ſi torni a differenziare, e queſto 2.° differenziale ſi divida per 2. Si paſſi alla nuova differenziazione di queſto 2.° differenziale, e il 3.° differenziale che riſulta ſi divida per 3; e così proſeguendo a differenziar ſenza limite, ſi divida ſempre il nuovo differenziale pel numero delle differenziazioni; e otterraſſi per tal modo

$$\frac{d^2S.t}{2dn^2} = C + 3Dn + 6En^2 \text{ ecc.}; \quad \frac{d^3S.t}{2.3dn^3} = D + 4En \text{ ecc.};$$

$$\frac{d^4S.t}{2.3.4dn^4} = E \text{ ecc. ecc.}$$

Sicchè sostituendo tutti questi differenziali nella equazione (n), si ha

$$(p) \ldots t = \frac{dS.t}{1.dn} - \frac{d^2S.t}{1.2dn^2} + \frac{d^3S.t}{1.2.3dn^3} - \frac{d^4S.t}{1.2.3.4dn^4} \text{ ecc.}$$

Coll' ajuto di questa equazione, data la somma di una serie, se ne ha il termine generale, che sarà una quantità di numero finito di termini, ove la somma sia una funzione algebraica intera e razionale di n, ma in tutti gli altri casi non potrà esser dato che per una serie infinita.

3. Che se è dato il termine generale t di una serie, e se ne cerca la somma, questa non si potrà avere senza il regresso della serie che è in (p). Pongasi dunque generalmente

$$(q) \ldots S.t = \int t dn + At + \frac{Bdt}{dn} + \frac{Cd^2t}{dn^2} + \frac{Dd^3t}{dn^3} + \frac{Ed^4t}{dn^4} \text{ ecc.},$$

di cui le costanti A, B, C ecc. si determineranno nel progresso del calcolo. Si differenzj illimitatamente questa equazione colla regola de' coefficienti numerici ne' denominatori dei differenziali di $S.t$, che abbiamo sopra notata, e nasce

$$\frac{dS.t}{dn} = t + \frac{Adt}{dn} + \frac{Bd^2t}{dn^2} + \frac{Cd^3t}{dn^3} + \frac{Dd^4t}{dn^4} + \frac{Ed^5t}{dn^5} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^2S.t}{2dn^2} = \frac{dt}{2dn} + \frac{Ad^2t}{2dn^2} + \frac{Bd^3t}{2dn^3} + \frac{Cd^4t}{2dn^4} + \frac{Dd^5t}{2dn^5} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^3S.t}{2.3dn^3} = \frac{d^2t}{2.3dn^2} + \frac{Ad^3t}{2.3dn^3} + \frac{Bd^4t}{2.3dn^4} + \frac{Cd^5t}{2.3dn^5} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^4S.t}{2.3.4dn^4} = \frac{d^3t}{2.3.4dn^3} + \frac{Ad^4t}{2.3.4.dn^4} + \frac{Bd^5t}{2.3.4dn^5} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^5S.t}{2.3.4.5dn^5} = \frac{d^4t}{2.3.4.5dn^4} + \frac{Ad^5t}{2.3.4.5dn^5} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^6S.t}{2.3.4.5.6dn^6} = \frac{d^5t}{2.3.4.5.6dn^5} \text{ ecc.}$$

Quindi sostituendo nella equazione (p) questi valori, vien generata quest' altra

$t = t +$

$$
\begin{aligned}
t = t &+ \frac{Adt}{dn} + \frac{Bd^2t}{dn^2} + \frac{Cd^3t}{dn^3} + \frac{Dd^4t}{dn^4} + \frac{Ed^5t}{dn^5} \text{ ecc.} \\
&- \frac{dt}{2dn} - \frac{Ad^2t}{2dn^2} - \frac{Bd^3t}{2dn^3} - \frac{Cd^4t}{2dn^4} - \frac{Dd^5t}{2dn^5} \\
&\qquad + \frac{d^2t}{2.3dn^2} + \frac{Ad^3t}{2.3dn^3} + \frac{Bd^4t}{2.3dn^4} + \frac{Cd^5t}{2.3dn^5} \\
&\qquad\qquad - \frac{d^3t}{2.3.4dn^3} - \frac{Ad^4t}{2.3.4dn^4} - \frac{Bd^5t}{2.3.4dn^5} \\
&\qquad\qquad\qquad + \frac{d^4t}{2.3.4.5dn^4} + \frac{Ad^5t}{2.3.4.5dn^5} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{d^5t}{2.3.4.5.6dn^5}
\end{aligned}
$$

4. Dalla forma di questa equazione evidentemente si raccoglie, dovere fuor del primo t svanire tutti i termini nell' omogeneo di comparazione; la qual condizione ci somministra la determinazione delle nostre costanti A, B, C ecc., i cui valori emanano dalle seguenti equazioni;

$$
A = \frac{1}{2};\ B = \frac{A}{2} - \frac{1}{2.3};\ C = \frac{B}{2} - \frac{A}{2.3} + \frac{1}{2.3.4};
$$

$$
D = \frac{C}{2} - \frac{B}{2.3} + \frac{A}{2.3.4} - \frac{1}{2.3.4.5};\ E = \frac{D}{2} - \frac{C}{2.3} + \frac{B}{2.3.4} - \frac{A}{2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.6} \text{ ecc.}
$$

Non trascureremo qui di osservare, che risultando $B = \frac{1}{3.4}$, se nel valore di C s'introdurranno i valori di A, B, si farà $C = o$. Così trovandosi $D = -\frac{1}{5.9.16}$, col porre in E i valori di A, B, D, diventerà $E = o$; e così cominciando da C succederà in tutti i termini, che saranno al 3°, 5°, 7° ecc. posto; il che vuol dire, che svaniranno i coefficienti dei differenziali di t che abbiano una denominazione pari; e in conseguenza che si poteva nella equazione (q) mettere solo i termini dei differenziali di denominazione dispari, ricavandosi anche così i veri valori dei coefficienti de' termini nel regresso della serie presentato dalla equazione (p).

5. Ripudiata pertanto la forma della equazione (q), stabilisco quest' altra equivalente

$$(r)\ldots S.t = \int t dn + \frac{t}{2} + \frac{Adt}{dn} + \frac{Bd^3t}{dn^3} + \frac{Cd^5t}{dn^5} + \frac{Dd^7t}{dn^7} + \frac{Ed^9t}{dn^9} + \frac{Fd^{11}t}{dn^{11}} \text{ ecc.}$$

E colla solita regola passando alle successive differenziazioni, ne traggo

$$\frac{d.S.t}{dn} = t + \frac{dt}{2dn} + \frac{Ad^2t}{dn^2} + \frac{Bd^4t}{dn^4} + \frac{Cd^6t}{dn^6} + \frac{Dd^8t}{dn^8} + \frac{Ed^{10}t}{dn^{10}} + \frac{Fd^{12}t}{dn^{12}} \text{ ecc.};$$

$$\frac{d^2S.t}{2dn^2} = \frac{dt}{2dn} + \frac{d^2t}{2.2dn^2} + \frac{Ad^3t}{2dn^3} + \frac{Bd^5t}{2dn^5} + \frac{Cd^7t}{2dn^7} + \frac{Dd^9t}{2dn^9} + \frac{Ed^{11}t}{2dn^{11}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^3S.t}{2.3dn^3} = \frac{d^2t}{2.3dn^2} + \frac{d^3t}{2.2.3dn^3} + \frac{Ad^4t}{2.3dn^4} + \frac{Bd^6t}{2.3dn^6} + \frac{Cd^8t}{2.3dn^8} + \frac{Dd^{10}t}{2.3dn^{10}} + \frac{Ed^{12}t}{2.3dn^{12}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^4S.t}{2.3.4dn^4} = \frac{d^3t}{2.3.4dn^3} + \frac{d^4t}{2.2.3.4dn^4} + \frac{Ad^5t}{2.3.4dn^5} + \frac{Bd^7t}{2.3.4dn^7} + \frac{Cd^9t}{2.3.4dn^9} + \frac{Dd^{11}t}{2.3.4dn^{11}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^5S.t}{2.3.4.5dn^5} = \frac{d^4t}{2.3.4.5dn^4} + \frac{d^5t}{2.2.3.4.5dn^5} + \frac{Ad^6t}{2.3.4.5dn^6} + \frac{Bd^8t}{2.3.4.5dn^8} + \frac{Cd^{10}t}{2.3.4.5dn^{10}} + \frac{Dd^{12}t}{2.3.4.5dn^{12}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^6S.t}{2.3...6dn^6}=\frac{d^5t}{2.3...6dn^5}+\frac{d^6t}{2.2.3...6dn^6}+\frac{Ad^7t}{2.3...6dn^7}$$
$$+\frac{Bd^9t}{2.3...6dn^9}+\frac{Cd^{11}t}{2.3....6dn^{11}}\text{ ecc.}$$

$$\frac{d^7S.t}{2.3...7dn^7}=\frac{d^6t}{2.3...7dn^6}+\frac{d^7t}{2.2.3...7dn^7}+\frac{Ad^8t}{2.3...7dn^8}$$
$$+\frac{Bd^{10}t}{2.3...7dn^{10}}+\frac{Cd^{12}t}{2.3...7dn^{12}}\text{ ecc.}$$

$$\frac{d^8S.t}{2.3...8dn^8}=\frac{d^7t}{2.3...8dn^7}+\frac{d^8t}{2.2.3...8dn^8}+\frac{Ad^9t}{2.3...8dn^9}$$
$$+\frac{Bd^{11}t}{2.3...8dn^{11}}\text{ ecc.}$$

$$\frac{d^9S.t}{2.3...9dn^9}=\frac{d^8t}{2.3...9dn^8}+\frac{d^9t}{2.2.3...9dn^9}+\frac{Ad^{10}t}{2.3...9dn^{10}}$$
$$+\frac{Bd^{12}t}{2.3...9dn^{12}}\text{ ecc.}$$

$$\frac{d^{10}S.t}{2.3...10dn^{10}}=\frac{d^9t}{2.3...10dn^9}+\frac{d^{10}t}{2.2.3...10dn^{10}}+\frac{Ad^{11}t}{2.3...10dn^{11}}\text{ ecc.}$$

$$\frac{d^{11}S.t}{2.3....11dn^{11}}=\frac{d^{10}t}{2.3....11dn^{10}}+\frac{d^{11}t}{2.2.3...11dn^{11}}$$
$$+\frac{Ad^{12}t}{2.3...11dn^{12}}\text{ ecc.}$$

$$\frac{d^{12}S.t}{2.3...12dn^{12}}=\frac{d^{11}t}{2.3...12dn^{11}}+\frac{d^{12}t}{2.2.3...12dn^{12}}\text{ ecc.}$$

$$\frac{d^{13}S.t}{2.3...13dn^{13}}=\frac{d^{12}t}{2.3...13dn^{12}}\text{ ecc.}$$

6. Sostituisco tutti questi valori nella equazione (p), e per brevità noto solo tutti i differenziali di denominazione pari, perchè i valori de' coefficienti majuscoli tratti dai termini di differenzial dispari ritornan gl' istessi con quelli che

ci presentano i termini immediatamente precedenti di differenzial pari. Onde sarà

$$t = t + \frac{d^2t}{dn^2}\left(A - \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.3}\right) + \frac{d^4t}{dn^4}\left(B + \frac{A}{2.3} - \frac{1}{2.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5}\right)$$
$$+ \frac{d^6t}{dn^6}\left(C + \frac{B}{2.3} + \frac{A}{2.3.4.5} - \frac{1}{2.2.3.4.5.6} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7.}\right)$$
$$+ \frac{d^8t}{dn^8}\left(D + \frac{C}{2.3} + \frac{B}{2.3...5} + \frac{A}{2.3...7} - \frac{1}{2.2.3...8} + \frac{1}{2.3...9}\right)$$
$$+ \frac{d^{10}t}{dn^{10}}\left(E + \frac{D}{2.3} + \frac{C}{2.3.4.5} + \frac{B}{2.3...7} + \frac{A}{2.3...9} - \frac{1}{2.2.3...10} + \frac{1}{2.3...11}\right)$$
$$+ \frac{d^{12}t}{dn^{12}}\left(F + \frac{E}{2.3} + \frac{D}{2.3...5} + \frac{C}{2.3...7} + \frac{B}{2.3...9} + \frac{A}{2.3...11} - \frac{1}{2.2.3...12} + \frac{1}{2.3...13}\right) \text{ ecc.}$$

coll' andamento delle serie de' coefficienti di legge chiara.

7. In questa equazione, che deve essere identica, si annullano nel 2.° membro tutti i termini, eccettuato il primo; dal che ci verrà fatto di stabilire tante equazioni, quante sono le indeterminate A, B, C ecc., e riuscíran quindi cogniti i loro valori. Dalla prima si trae $A = \frac{1}{3.4}$. Colla seconda troviamo $B = -\frac{1}{2.3.2.3.4.5}$; e andando innanzi si ha $C = \frac{1}{2.3.4.3.4.5.6.7}$; $D = -\frac{9}{2.3.5.2.3...9}$; $E = \frac{25}{2.3.5.2.3...11}$; $F = -\frac{691}{2.3.5.7.2.3...13}$;

$$G = \frac{3675}{2.3.5.7.2.3...15}\,;\; H = -\frac{227871}{2.3.5.7.9.2.3...17}\,;$$

$$I = \frac{1974015}{2.3.5.7.9.2.3...19}\,;\; L = -\frac{231010353}{2.3.5.7.9.11.2.3...21}$$

$M = \dfrac{2960887545}{2.3.5.7.9.11.2.3...23}$ ecc., indicando i nuovi ſimboli G, H, I, L, M i coefficienti nella equazione (r) che appartengono ai differenziali $\dfrac{d^{13}t}{dn^{13}}$, $\dfrac{d^{15}t}{dn^{15}}$ ... ſino al differenziale $\dfrac{d^{21}t}{dn^{21}}$.

8. Facendo ora uſo dei ritrovati valori delle majuſcole nella equazione (r), e ponendo ſotto ciaſcun differenziale tanto numero di fattori 1.2.3 ecc. quanto è l' indice dello ſteſſo differenziale, riſulta

$$S.t = \int tdn + \frac{t}{2} + \frac{1}{3.4}\cdot\frac{dt}{1.dn} - \frac{1}{4.5.2.3}\cdot\frac{d^3t}{1.2.3dn^3}$$

$$+ \frac{1}{6.7.2.3.4}\cdot\frac{d^5t}{1.2.3.4.5dn^5} - \frac{9}{8.9.2.3.5}\cdot\frac{d^7t}{1.2.3...7dn^7} \text{ ecc.}$$

Onde fatto per comodo $\dfrac{1}{2.2.3} = a$; $\dfrac{1}{2.4.5.3} = b$; $\dfrac{1}{2.6.7.3} = c$; $\dfrac{9}{2.8.9.3.5} = e$; $\dfrac{25}{2.10.11.3.5} = f$; $\dfrac{691}{2.12.13.3.5.7} = g$; $\dfrac{3675}{2.14.15.3.5.7} = h$; $\dfrac{227871}{2.16.17.3.5.7.9} = i$; $\dfrac{1974015}{2.18.19.3.5.7.9} = l$; $\dfrac{231010353}{2.20.21.3.5.7.9.11} = m$; $\dfrac{2960887545}{2.22.23.3.5.7.9.11} = p$ ecc., ſarà

$$(s) \ldots S.t = \int tdn + \frac{t}{2} + \frac{adt}{1.dn} - \frac{bd^3t}{1.2.3dn^3} + \frac{cd^5t}{1.2.3.4.5dn^5}$$

$$-\frac{ed^7t}{1.2...7dn^7}+\frac{fd^9t}{1.2....9dn^9}-\frac{gd^{11}t}{1.2.3.11dn^{11}}+\frac{hd^{13}t}{1.2.3....13dn^{13}}$$

$$-\frac{id^{15}t}{1.2...15dn^{15}}+\frac{ld^{17}t}{1.2...17dn^{17}}-\frac{md^{19}t}{1.2...19dn^{19}}$$

$$+\frac{pd^{21}t}{1.2...21dn^{21}} \text{ ecc.}$$

9. Col mezzo di questa equazione, dato che sia il termine generale t di una serie, se ne troverà la somma espressa per un'altra serie, la quale al caso di t funzione algebraica, razionale e intera di n s'interrompe, e ne viene perciò esibita la somma in termini di numero finito. Ma, ove sia t funzione trascendente, irrazionale o fratta di n, la serie va all'infinito. Potrem però riprometterci anche in questo caso di avere il valor prossimo di $S.t$, quando se ne dimostri la convergenza, mentre al caso che diverga, essa riesce affatto inetta per sì fatta determinazione. Veggiamo presentemente, se abbia qualità di convergenza o divergenza la serie che costituiscono i numeri a, b, c ecc., che denomineremo da qui innanzi i numeri bernoulliani.

10. Questa serie, benchè al principio possa parer convergente, perchè è realmente $a>b$; $b>c$, diventando però in appresso $c<e$, $e<f$ ecc. coi termini susseguenti sempre maggiori degli antecedenti, in sostanza è una serie divergente, anzi di una divergenza assai notabile e grande, come si potrà conoscere col calcolo. Dunque qualora i termini affetti dai numeri bernoulliani non vengano piegati alla convergenza dai valori dei differenziali $\frac{dt}{1.dn}$, $\frac{d^3t}{1.2.3dn^3}$ ecc. e dalle ipotesi dei valori di n, resterà sempre inidonea la serie dell' equazione (s) al rintracciamento del prossimo non che dell' esatto valore di $S.t$. Anzi nella supposizione ancora di n infinito, avvegnachè fatte le prescritte differenziazioni del termine generale t i termini dell' omogeneo in (s) venisser divisi da podestà sempre crescenti di n, come, per esempio, $\frac{a}{n}-\frac{b}{n^3}+\frac{c}{n^5}$ ecc., non ci sarà lecito di asserire, che, per la sola ragione dell' infinito nel denominatore, tutti questi

termini ſvaniſcano, perchè eſſendomi ſino ad ora ignota la legge della divergenza nei numeratori, io non ſo decidere, ſe ne' termini all' infinito la forza de' numeratori poſſa, o no eſſer creſciuta a ſegno di equilibrare o anche di ſuperare il contraſto per l' evaneſcenza de' termini medeſimi che lor fanno i denominatori.

11. Mi piace di recare un eſempio, che ſtabiliſca palpabilmente la verità della mia propoſizione. Mi preſento la ſerie $\frac{2^1}{n}+\frac{2^4}{n^2}+\frac{2^9}{n^3}+\frac{2^{16}}{n^4}\ \ldots\ldots\ +\frac{2^{m^2}}{n^m}$, e ſuppongo n infinito. Egli è certo, che poſto m numero finito, quantunque grande, tutta la ſerie è un nulla. Ma ſe rimanendo n infinito, tale pur ſi fa m, e ſia, per eſempio, m dello ſteſſo ordine di n, ſi può egli dire, che ſeguiti la ſerie medeſima ad eſſere di valor zero? Mai no, perchè converrebbe a tal uopo, che i termini al poſto infinitamente lontano dal primo, e in conſeguenza anche l' ultimo termine $\frac{2^{m^2}}{n^m}$ foſſe quantità nulla. Il che non può accadere ſe non quando il numeratore 2^{m^2} ſia effettivamente infinitamente minore del denominatore n^m. Da tale ipoteſi, cioè 2^{m^2} inf.^{e} $< n^m$ paſſando ai logaritmi riſulta $m^2 l2$ inf.^{e} $< mln$, e dividendo per m; $ml2$ inf.^{e} $< ln$. Ma le dottrine logaritmiche c' inſegnano eſſere il numero infinito infinitamente maggiore del ſuo logaritmo. Dunque n inf.^{e} $> ln$, e quindi tutte le quantità infinite dello ſteſſo ordine di n infinitamente maggiori di ln. Perciò anche m inf.^{e} $> ln$, e molto più $ml2$ inf.^{e} $> ln$: il che eſſendo veriſſimo ripugna alla conſeguenza contraria dell' ipoteſi aſſurda, che ci dava $ml2$ inf.^{e} $< ln$. Ecco pertanto 2^{m^2} inf^e $> n^m$; il che fa eſſere l' ultimo termine della propoſta ſerie e conſeguentemente tutta la ſerie una quantità infinita. Reſta dunque provato con evidenza, che colla ſola ragione dei denominatori infiniti de' termini di una ſerie che abbia i corriſpondenti numeratori finiti e divergenti nei poſti finitamente lontani dal primo, non ſi può aver certezza del ſuo ſvanimento, che debb' eſſere per altra via conoſciuto, ove eſſo realmente ſucceda. Queſto a me pare un

principio ſicuriſſimo, ſul quale non poſſa far cader dubbio un geometra ragionatore.

12. Vengo ora alla applicazione che nel Cap. V. della II. Parte del calc. diff. fa l'*Eulero* di queſta teoria del *Bernoullio* ad una funzione traſcendente; e ſtabiliſco con eſſo $t = ln$, che dà $S.t = l1 + l2 + l3 \ldots + ln$; $\int tdn = \int dnln = nln - n$; $\frac{dt}{dn} = \frac{1}{n}$; poi fatto dn coſtante,

$$\frac{d^2t}{dn^2} = -\frac{1}{n^2}; \ \frac{d^3t}{dn^3} = \frac{1.2}{n^3}; \ \frac{d^4t}{dn^4} = -\frac{1.2.3}{n^4}; \ \frac{d^5t}{dn^5}$$

$= \frac{1.2.3.4}{n^5}$ ecc., ove ſi vede, che tutti i valori de' differenziali diſpari hanno prefiſſo il ſegno poſitivo, e dei pari il negativo; che il coefficiente numerico del termine è il prodotto de' numeri naturali ſino al numero di un' unità minore di quel che denomina il differenziale, e che la podeſtà di n nel termine è il numero dello ſteſſo differenziale. Riſulta da ciò, che ſe introdurremo nella equazione (s) tutti queſti valori, ſenza ommettere la coſtante, a cui ci obbliga la ſommatoria nel 2.° membro, avremo

$$(t) \ldots\ l1 + l2 + l3 \ldots + ln = C + \left(n + \frac{1}{2}\right) ln - n + \frac{a}{n}$$
$$- \frac{b}{3n^3} + \frac{c}{5n^5} - \frac{e}{7n^7} + \frac{f}{9n^9} - \frac{g}{11n^{11}} + \frac{h}{13n^{13}} - \frac{i}{15n^{15}}$$
$$+ \frac{l}{17n^{17}} - \frac{m}{19n^{19}} + \frac{p}{21n^{21}}$$

ecc.. E queſta equazione vale, qualunque ſia il numero n.

13. Per la determinazione della coſtante C ſi è offerta all' Autore prima d'ogni altra l'ipoteſi di $n = 1$, che induce nella equazione (t) la modificazione ſeguente;

$l1 = o = C - 1 + a - \frac{b}{3} + \frac{c}{5} - \frac{e}{7} + \frac{f}{9}$ ecc., o ſia

$C = 1 - a + \frac{b}{3} - \frac{c}{5} + \frac{e}{7} - \frac{f}{9}$ ecc. Ma riflettendo toſto,

che

che queſta ſerie per la troppa divergenza ſi rende inetta a dare almeno un valor proſſimo della coſtante C, ſi rivolge all'altra ipoteſi di n infinito; e allora, ſoggiunge il celebre Autore, ſvaniſcono tutti i termini affetti dai numeri bernoulliani, e reſta I $\ldots l1 + l2 + l3 \ldots + ln = C + (n + \frac{1}{2}) \times ln - n$; per determinar C pone nella ſteſſa equazione I $2n$ in vece di n, ed ha

$II \ldots l1 + l2 + l3 \ldots + l2n = C + (2n + \frac{1}{2})\, l2n - 2n$. Aggiunge nella I dall' una e dall' altra parte $nl2$, e gli ſi genera

$(l1 + l2) + (l2 + l2) + (l3 + l2)(l4 + l2) \ldots + (ln + l2) = C + (n + \frac{1}{2}) ln - n + nl2$, cioè $III \ldots l2 + l4 + l6 + l8 \ldots + l2n = C + (n + \frac{1}{2}) ln - n + nl2$.

Sottraendo poi l' equazione III dalla II ottiene

$IV\; l1 + l3 + l5 \ldots + l(2n - 1) = nln + (n + \frac{1}{2}) l2 - n$.

Ma per l' eſpreſſione *Walliſiana* nota a tutti i Geometri, ſi ha

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12 \text{ ecc.}}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11 \text{ ecc.}}$$

ovvero $\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8. \ldots (2n-2)(2n-2)(2n)}{1.3.3.5.5.7.7.9.9. \ldots (2n-1)(2n-1)}$, dove π ſignifica la ſemicirconferenza di raggio 1, e il numero n è infinito. Dunque col prendere i logaritmi, avremo

$l\frac{\pi}{2} = 2l2 + 2l4 + 2l6 \ldots + 2l2n - l2n - l1 - 2l3 - 2l5 - 2l7 \ldots - 2l(2n-1)$, ovvero ponendo $-2l1$ in vece di $-l1$, che è lo ſteſſo, perchè $l1 = o$, e riducendo,

$\frac{1}{2} l \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} l2n = l2 + l4 + l6 \ldots + l2n - l1 - l3 - l5 - l7 \ldots - l(2n - 1)$, cioè colla ſoſtituzione nel 2.° membro degli omogenei delle equazioni III, IV; $\frac{1}{2} l \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} l2n = C + (n + \frac{1}{2})\, ln - n + nl2 - nln - (n + \frac{1}{2}) l2 + n = C$

$+\frac{1}{2}l\frac{n}{2}$. Quindi si deduce $C=\frac{1}{2}l\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}l2\pi$

$-\frac{1}{2}l\frac{n}{2}=\frac{1}{2}l2\pi$, cioè in frazioni decimali

$C=0.9189385332046727417803297$; e però collocato questo valore nella equazione I, ci nasce... $l1+l2....+ln$ $=(n+\frac{1}{2})ln-n+\frac{1}{2}l2\pi$, cui equivale quest'altra

$l(1.2.3.4...n)=\log.\left(\frac{n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^n}\right)$, supposta e la solita base de'logaritmi iperbolici; onde finalmente passando dai logaritmi ai numeri; $1.2.3...n=\frac{n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^n}$, che è il teorema fin dal principio enunziato.

14. Dopo tutto ciò che si è detto nei §.§. 9, 10, ognuno dee di per se vedere che la difficoltà, la quale potrebbe trattenere un attento Geometra dal prestare l'assenso a questa dimostrazione, è quella che nasce dalla secca decisione pronunziata dall'*Eulero* dello svanimento in (t) de'termini affetti dai numeri bernoulliani. Già abbiamo osservato collo stesso Autore che la serie di questi numeri è divergente, e di più ricaviamo dall'esempio della serie del §. 11., che le podestà dell' infinito nei denominatori de' termini non bastano a persuadere della evanescenza di tutta la serie. Con qual fondamento dunque, senza aver nota la legge di questa divergenza in una maniera che ci discopra il rapporto che hanno tra loro il numeratore e il denominatore de'termini infinitamente distanti dal primo, può egli asserire che la serie presa nella sua totalità non sia altro che zero? Io non veggo in questo passo la sicurezza del piede di quel grand' uomo; e mi fa ancora più caso, che dopo la cognizione della divergenza di quella serie, e la confessata sua inidoneità a dare qualunque valor prossimo, che col mezzo di essa si volesse ottenere, abbia poi sperato di trarne utile, e al

§. 159 del cap. citato imprenda di servirsene per aver la somma prossima di qualunque numero finito di logaritmi de' numeri naturali.

15. Il fatto però sta che la cosa gli è ben riuscita, e che i risultati combinano fino a buon numero di cifre decimali coi logaritmi delle tavole, quando però nell' adunamento de' termini della serie in (t) non si vada più avanti di un tal numero di essi termini, che secondo le ipotesi di n ora è maggiore, ora è minore. Ciò fa una grande presunzione per la verità del fissato valore della costante C, e del suddetto svanimento della serie nella supposizione di n infinito. Ma sempre sta, che resta a desiderarsi una dimostrazione più convincente di quel che sia la Euleriana, per potere ammettere con maggiore acquiescenza dello spirito la verità del suo teorema.

16. Tentiamone una così. Al §. 8. abbiam già notato i valori de' numeri bernoulliani fino all' undecimo termine. Presa pertanto da (t) la sola serie de' termini che ne sono affetti, abbiamo (u)... $\frac{a}{n}-\frac{b}{3n^3}+\frac{c}{5n^5}-\frac{e}{7n^7}+\frac{f}{9n^9}-\frac{g}{11n^{11}}+\frac{h}{13n^{13}}-\frac{i}{15n^{15}}+\frac{l}{17n^{17}}-\frac{m}{19n^{19}}+\frac{p}{21n^{21}}$ ecc. Si stabilisca prima di tutto $n=1$, e in tal caso essa diventa

$$a-\frac{b}{3}+\frac{c}{5}-\frac{e}{7}+\frac{f}{9}-\frac{g}{11}+\frac{h}{13}-\frac{i}{15}+\frac{l}{17}-\frac{m}{19}+\frac{p}{21} \text{ ecc.}$$

Ora facendo uso degli effettivi valori di a, b, c ecc., e ridotto ognuno de' superiori termini e frazioni decimali, col prescinder dal segno, e collo scrivere il valore sotto il termine analitico, risulta

a ; $\frac{b}{3}$; $\frac{c}{5}$; $\frac{e}{7}$

0.08333333 ; 0.00277777 ; 0.00079365 ; 0.00059523 ;

$\frac{f}{9}$; $\frac{g}{11}$; $\frac{h}{13}$; $\frac{i}{15}$

0.00084175 ; 0.00191752 ; 0.00641025 ; 0.02955065 ;

$\frac{l}{17}$; $\frac{m}{19}$

0.179120627843 ; 1.392432216906 ;

$\frac{p}{21}$

13.402864044168 ; ecc.

Osservo in questa serie, che i primi 4 termini costituiscono una serie convergente, facendosi al quinto divergente, e continuando poi sempre tale.

17 Passo all' ipotesi di $n=2$, e (u) prende questa forma;

$$\frac{a}{2}-\frac{b}{3.2^3}+\frac{c}{5.2^5}-\frac{e}{7.2^7}+\frac{f}{9.2^9}-\frac{g}{11.2^{11}}+\frac{h}{13.2^{13}}-\frac{i}{15.2^{15}}$$

$$+\frac{l}{17.2^{17}}-\frac{m}{19.2^{19}}+\frac{p}{21.2^{21}}$$ ecc., la quale espressione ridotta a decimali senza curare il segno, si fa

$\frac{a}{2}$; $\frac{b}{3.2^3}$; $\frac{c}{5.2^5}$

0.04166666 ; 0.00034722 ; 0.00002480 ;

$\frac{e}{7.2^7}$; $\frac{f}{9.2^9}$; $\frac{g}{11.2^{11}}$

0.00000465 ; 0.00000164 ; 0.00000093 ;

$\frac{h}{13.2^{13}}$; $\frac{i}{15.2^{15}}$; $\frac{l}{17.2^{17}}$

0.00000078 ; 0.00000090 ; 0.000001366582 ecc.

In questa i primi 7 termini fanno la parte convergente, e cominciano a divergere nell' ottavo.

18. La 3.^{a} ipoteſi di $n=3$ induce in (u) tal cangiamento;

$$\frac{a}{3}-\frac{b}{3.3^3}+\frac{c}{5.3^5}-\frac{e}{7.3^7}+\frac{f}{9.3^9}-\frac{g}{11.3^{11}}+\frac{h}{13.3^{13}}$$
$$-\frac{i}{15.3^{15}}+\frac{l}{17.3^{17}}-\frac{m}{19.3^{19}} \text{ ecc.}$$

oſſia colla riduzione a decimali;

$$\frac{a}{3}\ \ 0.02777777;\quad \frac{b}{3.3^3}\ \ 0.00010321;\quad \frac{c}{5.3^5}\ \ 0.00000326;\quad \frac{e}{7.3^7}\ \ 0.00000027;$$
$$\frac{f}{9.3^9}\ \ 0.00000004;\quad \frac{g}{11.3^{11}}\ \ 0.00000001;\quad \frac{h}{13.3^{13}}\ \ 0.000000004020;$$
$$\frac{i}{15.3^{15}}\ \ 0.000000002059;\quad \frac{l}{17.3^{17}}\ \ 0.0000000001387;\quad \frac{m}{19.3^{19}}\ \ 0.0000000001198;$$
$$\frac{p}{21.3^{21}}$$

0.0000000001281; ecc., ove ſi vede che la parte convergente della ſerie abbraccia i primi 10 termini, e la parte divergente comincia all' undecimo.

19. Così ſe faremo $n=4$, $n=5$, $n=6$ ecc, troveremo che eſſendo le ſerie corriſpondenti ſul principio convergenti, cominciano a divergere nel 14.^{mo}, 17mo, 20mo ecc. termine, onde generalmente la divergenza avrà il ſuo principio al termine di poſto $3n+2$, coſtituendo tutta la parte antecedente a queſto una ſerie convergente.

20. Da ciò ſi trae, che preſa la ſerie (u) per n numero di termini ſucceſſivi, deve queſta eſſere infallibilmente convergente, mentre riman pur tale ſino al termine di poſto $2n+2$, quando ſi vuol' eſſa produrre oltre n. Dunque nell' ipoteſi di n infinito tutta la ſerie infinita di numero n termini convergerà ſino all' ultimo termine. E ſiccome in tale ipoteſi di n infinito, il 1.° termine della ſerie è un infiniteſimo di 1.° ordine; il 2.° un infiniteſimo di 3.°, il 3.° di 5° ecc., dovendo eſſere per la ragion della convergenza l' ul-

timo termine infinitesimo di un ordine infinitamente superiore, tutta la serie fino al posto n non farà che una quantità infinitamente piccola, cioè tutta la serie (u) affetta dai numeri bernoulliani sarà $=o$.

21. Per poter asserire che la suddetta serie è un quanto nullo, quando n è infinito, posto che il primo suo termine è un infinitesimo di 1.° ordine, erami necessario il riflettere all' accrescimento degli ordini di infinitesimi nel valore de' termini successivi; perchè se il valore di ciascun termine fosse stato solo un infinitesimo di 1.° ordine, l' aggregato infinito di questi termini avrebbemi portato a un valor di serie finito: come accade nella armonica

$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\ldots+\frac{1}{2n}$, di cui, come si sa, la somma ha un valor finito, quando n è infinito, sebbene ciascun de' suoi termini sia una quantità infinitesima.

22. Il raziocinio, che ci ha guidato a provare l' evanescenza della serie de' numeri bernoulliani, ove n è infinito, ci fa conoscere al contrario, che la serie $\frac{2}{n}, \frac{16}{n^2}, \frac{512}{n^3}$ ecc. del §. 10. nella stessa ipotesi di n infinito ha un valore infinito. Imperciocchè, fatto successivamente $n=1,2,3\ldots.7$, tutta la serie riman sempre divergente. Quando poi si fa $n=8$, i due primi termini $\frac{2}{8}, \frac{16}{64}$ si fanno eguali, e divergono i susseguenti. Alle ipotesi di $n=9, 10, 11\ldots.31$, i due primi termini convergono, e poi nel terzo comincia la divergenza che dura per tutta la serie. Ove si ponga $n=32$, il 2.° e il 3.° termine sono eguali, e il resto diverge. Da $n=33$ fino a $n=127$ i tre primi termini convergono, divergendo gli altri che seguono, e si fa eguale il 3.° al 4.° nella supposizione di $n=128$. Così si troverà l' eguaglianza del 4.° al 5.°, quando $n=512$, del 5.° al 6.°, ponendo $n=2048$ ecc. Pertanto se si chiama m il posto del termine, a cui diventa eguale il suo susseguente,

varrà l'equazione $n=2^{2m+1}$, essendo appunto 2^{m+1} il termine generale della serie 8, 32, 128, 2048 ecc.

23 Or, poichè $n=2^{2m+1}$, passando ai logaritmi, si ha $ln=(2m+1)l2$ che ci somministra $m=\frac{ln}{2l2}-\frac{1}{2}$. Dunque prendendo nella serie termini di numero n, e supponendo n infinito, la parte di questa serie, i cui termini convergono, è composta di termini di numero m, cioè di numero $\frac{ln}{2l2}-\frac{1}{2}$, ovvero di un numero, il quale, benchè infinito, è però infinitamente minore del numero n de' termini di tutta la serie, perchè ln, e molto più $\frac{ln}{2l1}-\frac{1}{2}$ è infinitamente minore di n. Dunque il residuo de' termini da m fino a n che è pure un residuo infinito, ma pel quale devesi scorrere per arrivare al numero di termini n, costituisce una serie divergente infinita, e però tutta la serie è un infinito. Questa maniera di considerare le serie divergenti all' infinito aventi ne' denominatori de' termini podestà o funzioni di n, che non so, se sia stata da alcun Geometra adoperata, mi pare molto acconcia a trarne degli utili risultati per rintracciarne i loro valori, massimamente se ci manca il metodo di conoscer la forma comoda de' loro termini generali, come succede nella serie de' numeri bernoulliani.

24. Da ciò discende come natural corollario, che volendo ne' casi particolari di n il valor prossimo della somma de' logaritmi de' numeri naturali, non potremo far uso nella serie de' termini affetti dai numeri bernoulliani altro che della sua parte convergente, della quale, quanto maggior numero di termini prenderemo, tanto più il valore di questa somma sarà vicino al vero. L' aggiunta che si facesse alla parte convergente di uno o più termini della 2.ª parte divergente guiderebbeci sempre più lontano dal valore esatto della stessa somma. Così se $n=1$, poichè di 4 termini costa la parte convergente della serie, l'equazione utile, per ottenere il valor più prossimo possibile, sarà $l1=o=C-1+a$

$-\frac{b}{3}+\frac{c}{5}-\frac{e}{7}$, ossia riducendo tutto a frazioni decimali e compiendo il calcolo; $o=-0.0003075$, con che abbiamo un valore minor del vero per quanto porta la frazione $\frac{3075}{10000000}$. Se si cresce l'omogeneo di un termine solo della parte divergente, cioè di $\frac{f}{9}$, ovvero di 0.0008417, nasce $o=0.0005342$, di cui il 2.° membro è un valor maggiore del vero per quanto porta la frazione $\frac{5342}{10000000}$, la quale essendo maggiore di $\frac{3075}{10000000}$, vuol dire che coll' aggiungere questo primo termine della serie divergente in vece di avvicinarci più al valore esatto di quel che abbiam fatto col prendere la sola parte convergente, ce ne siamo anzi scostati. Se $n=2$, ci saran' utili pei valori prossimi della somma i 7 primi termini contenenti i numeri bernoulliani, ecc. cosicchè generalmente potrem servirci nella medesima serie di numero di termini $3n+1$.

26. Io spero con ciò di avere sufficientemente dimostrato e posto in sicuro l'elegante e mirabil teorema del grande *Eulero*. Di questo sommo uomo, che ha sparso tanto lume su tutto il Mondo matematico, ed aperte tante ampie vie nella Meccanica e nel Calcolo ai suoi contemporanei ed ai posteri che verranno, si può quasi dire, che le verità più astruse eran per lui verità d' intuizione o almen di presentimento, rimanendo affatto vero ciò che egli asserisce per tale anche quando non lo affida ad una legittima e convincente dimostrazione.

In quest'altra maniera pure, che sarà forse più convincente, si potrà rinforzare la verità della equazione dell' *Eulero*. Nota egli nel citato artic., che i numeri del Bernoullio a, b, c ecc. vengono dati da equazioni della seguente forma

$a=$

$$a = \frac{1}{3.4}$$

$$b = 3.2.\frac{1}{5}a^2$$

$$c = 5.4.\frac{2ab}{7}$$

$$e = 7.6.\frac{2ac}{9} + \frac{7.6.5.4}{1.2.3}.\frac{1}{9}b^2$$

$$f = 9.8.\frac{2ae}{11} + \frac{9.8.7.6}{1.2.3}.\frac{2}{11}bc$$

$$g = 11.10.\frac{2af}{13} + \frac{11.10.9.8}{1.2.3}.\frac{2}{13}be + \frac{11.10.9.8.7.6.}{1.2.3.4.5.}.\frac{1}{13}c^2$$

$$h = 13.12.\frac{2ag}{15} + \frac{13.12.11.10}{1.2.3}.\frac{2}{15}bf + \frac{13.12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5}.\frac{2}{15}ce$$

$$i = 15.14.\frac{2ah}{17} + \frac{15.14.13.12}{1.2.3.}.\frac{2}{17}bg + \frac{15.14.13.2.11.10}{1.2.3.4.5} \times$$

$$\frac{2}{17}cf + \frac{15.14.13.12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5.6.7}.\frac{1}{17}e^2 \text{ ecc.}$$

colla legge che è chiara, facendo ſolo la rifleſſione, che ove s' incontra il quadrato di qualche numero, come a^2, b^2, c^2, e^2 ecc., in vece del 2 che moltiplica i rettangoli ab, ac, ae, bc ecc. ſi mette l'unità.

Di queſti ſimboli a, b, c ecc. troviamo i valori numerici, avvertendo di tener ſeparati negli omogenei delle ſuperiori equazioni i termini l' uno dall' altro; con che ſi ottiene

$$a = \frac{1}{3.4};\ b = \frac{1}{2.3.4.5};\ c = \frac{1}{2.3.6.7};\ e = \frac{20+7}{2.5.8.9.9};$$

$$f = \frac{3+2}{2.3.10.11};\ g = \frac{350+231+110}{2.3.5.7.12.13};\ h = \frac{691+455+429}{2.5.9.14.15};$$

$$i = \frac{4200+2764+2600+1287}{2.\ 5.7.9.16.17};$$

$$l = \frac{75957+49980+46988+46410}{2.3.5.7.18.19};$$

$$m = \frac{24126850 + 15875013 + 14922600 + 14730738 + 7348250}{2.5.7.9.11.20.21} \text{ ecc.}$$

Ora cominciando da e osservo, che prescindendo dai denominatori, i primi termini de' ritrovati valori di e, f, g ecc. sono respettivamente i massimi; che i secondi termini superano in grandezza ciascuno dei susseguenti; e così dicendo gradatamente de' termini terzi, quarti ecc. fino agli ultimi che sono i minimi di tutti. Per veder poi, se anderà sempre così la faccenda, rifletto, che essendo il 1.° numeratore binomio quello che appartiene a e, e il 2.° quello che appartiene a f, sta il primo termine del binomio di e al suo secondo in maggior ragione del 1.° termine del binomio di f al suo 2.°, cioè $20 : 7 > 3 : 2$. Ma se seguitasse a verificarsi questa maggior ragione tra i due primi termini di f che tra i due primi di g, e così fosse maggiore la ragione tra i due primi di g, che tra i due primi di h ecc., potrebbesi temere, che andando innanzi nella serie de' numeri bernoulliani arrivasse in alcun d'essi il 2.° termine a superare non che ad uguagliare il 1.°; e in tal caso non ci sarebbe lecito di asserire, che i suddetti primi termini siano realmente i massimi. Ciò però non accade, perchè realmente presi i due primi termini in ciascuna delle equazioni col cominciare da f, abbiamo $3 : 2 < 350 : 231$; $350 : 231 < 691 : 455$; $691 : 455 < 4200 : 2764$; $4200 : 2764 < 75957 : 49980$; $75957 : 49980 < 24126850 : 15875013$ ecc.; e siam quindi sicuri, che il 1.° termine di qualunque numero bernoulliano è sempre maggiore del 2.°

Il primo numero, che ha il numeratore di 3 termini, è g. Confronto la ragione che passa tra il 2.° e il 3.° termine in g con quella che hanno i 2 termini omologhi nel susseguente h, e veggo che sta $231 : 110 > 455 : 429$. La continuazione di questa maggior ragione ne' termini 2.° e 3.° dei numeri antecedenti riferita a quella che osservan tra loro gli omologhi dei numeri immediatamente susseguenti potrebbe farci risorgere nuovamente il sospetto del superiore §. sull'ingrandimento del 3.° termine sopra il 2.° e fors' anche sopra il 1.° coll'andare avanti nella serie. Ma svanisce subito questo sospetto, perchè minore si fa a un tratto la ragione de' suddetti 2 termini in h che de' corrispondenti termini in i, e seguita poi sempre così negli omologhi susseguenti, essendo $455 : 429 < 2764 : 2600$; $2764 : 2600 < 49980 : 46988$; $49980 : 46988 < 15875013 : 14922600$ ecc. Concluderemo pertanto essere per tutta la serie in qualunque num.° bernoulliano il 2.° sempre maggiore del 3.°, e perciò il 1.° del 2.°, e del 3.° invariabilmente maggiore.

All' istesso modo, poichè i è il primo numero che ha 4 termini nel numeratore, prendendo i 3.^{i} e i 4.^{i} nel confronto con l sarà $2600 : 1287 > 46988 : 46410$, ma poi proseguendo a m; $46988 : 46410 < 1492260 : 14730738$; e questa minor ragione ne' termini 3.° e 4.° de' numeri che seguono continuerà sempre nel confronto colla ragione degli omologhi ne' numeri posteriori. Onde il 3.° termine de' numeratori e conseguentemente il 1.° resta perpetuamente maggiore del 4.°; e così diremo del 5.°, 6.° ecc.; e verrà con ciò stabilito esso il massimo tra i termini che costituiscono i rispettivi numeratori sino al numero bernoulliano infinito.

Ciò posto, è cosa evidentissima, che principiando da b se ne' secondi membri prendo tanto numero di primi termini quanto è il numero di tutti termini ne' medesimi, e metto 2 in vece dell' unità per coefficiente de' quadrati a^2, b^2, c^2 ecc., vengo a formare una quantità maggiore del valore de' corrispondenti numeri bernoulliani. Noto coll' apice questi numeri, in tal foggia accresciuti, ed ho $b' = 3.2.\frac{2a^2}{5}$;

$c' = 5.4.\frac{2}{7}ab'$; $e' = 2.7.6.\frac{2}{9}ac'$; $f' = 2.9.8.\frac{2}{11}ae'$; $g' = 3.11.10.\frac{2}{13}af'$; $h' = 3.13.12.\frac{2}{15}ag'$;

$i' = 4.15.14.\frac{2}{17}ah'$ ecc., dove è certamente $b' > b$; $c' > c$; $e' > e$ ecc. Pongo ora nel valore di c' il precedente valore di b', e così in e' il valore trovato di c'; il che s' intenda detto per tutti quelli che vengon poi; e nasce

$$b' = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2^2 a^2}{5}$$

$$c' = 3 \cdot 1 \cdot 1^2\, 2 \cdot \frac{2^4 a^3}{7}$$

$$e' = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1^2 \cdot 2 \cdot \frac{2^6 a^4}{9}$$

$$f' = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot \frac{2^8 a^5}{11}$$

$$g' = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot \frac{2^{10} a^6}{13}$$

$$h' = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \frac{2^{12} a^7}{15}$$

$$i' = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot \frac{2^{14} a^8}{17} \quad \text{ecc.}$$

Onde chiamato m il posto pari del num. generale u', cui corrisponde il numero bernoulliano u minore di u', sarà

$$u' = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots m \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \ldots \frac{m^2}{4} \cdot \frac{2^{2m} a^{m+1}}{2m+3}, \text{ ovvero,}$$

perchè $a^{m+1} = \dfrac{1}{3^{m+1} \cdot 2^{2m+2}}$; $u' = \dfrac{1.2.3 \ldots m . 1^2 . 2^2 . 3^2 \ldots . \frac{m^2}{4}}{4 \cdot (2m+3) 3^m}$.

Presentemente noi dobbiamo rimetterci sotto all' occhio la serie Euleriana $\frac{a}{n} - \frac{b}{3n^3} + \frac{c}{5n^5} - \frac{e}{7n^7} + \frac{f}{9n^9}$, che, ove si fissi il suo principio nel 2.° termine col prescinder dal segno, ha il suo termine generale $\dfrac{u}{(2m+1)\, n^{2m+1}}$. Pongo il numeratore accresciuto u' in vece di u, e adoperando il suo valore mi sorge $\dfrac{1.2.3 \ldots . 1^2 . 2^2 . 3^2 \ldots . \frac{m^2}{4}}{4 \cdot 3^m (2m+1)(2m+3)\, n^{2m+1}}$; la qual frazione voglio veder cosa diventa nella ipotesi di m, n infiniti ed eguali. Giacchè possiamo lavorare sul largo, supponendo eziandio che $1.2.3 \ldots m$ fosse $m.m.m$ ecc. fino a fattori di num.° m non si avrebbe altro che m^m; e così in vece di

$1.2.3\ldots\frac{m}{2}$ ponendo $\frac{m}{2}.\frac{m}{2}.\frac{m}{2}\ldots\ldots$ fino a fattori di num.° $\frac{m}{2}$, per l'altro fattore del numeratore avrebbesi $\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{2m}{2}}=\frac{m^m}{2^m}$. Dunque con tale sostituzione diventerebbe il numeratore della formola $m^m.\frac{m^m}{2^m}=\frac{m^{2m}}{2^m}$, e tutta la frazione $\frac{m^{2m}}{2^{m+2}.3^m(2m+1)(2m+3)m^{2m+2}}$ $=\frac{1}{2^{m+2}.3^m(2m+1)(2m+3)m}$, cioè nulla. Quindi si deduce che con maggior ragione si dovrà dir che svanisca la formola $\frac{1.2.3\ldots m.1^2.2^2.3^2\ldots\frac{m^2}{4}}{4.3^m(2m+1)(2m+3)n^{2m+1}}$ cioè $\frac{u'}{(2m+1)n^{2m+1}}$. Ma è $u'>u$, massimo numero bernoulliano. Dunque è egualmente nulla la frazione $\frac{u}{(2m+1)n^{2m+1}}$, cioè l'ultimo termine all'infinito della serie Euleriana. In conseguenza riesce di nessun valore tutta la stessa serie, perchè i denominatori infiniti de' termini $\frac{a}{n}-\frac{b}{3n^3}+\frac{c}{5n^5}$ ecc. non rimangono dello stesso ordine d' infiniti, come nella serie armonica $\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}\ldots\frac{1}{2n}$, la cui somma è un finito, ma crescon sempre di grado.

In una eccellente Memoria del celebre nostro Presidente Sig. Cavalier *Lorgna* inserita nel Tomo III. della R. Ac. di Torino, e capitatami pur ora alle mani per dono gentilissimo dello stesso Autore, trovo una curiosa derivazione dei numeri bernoulliani dai termini dell' infinitinomio $\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{2.3.4}\text{ ecc.}\right)^{-1}$, ove dopo aver trovato qualſivoglia termine, ſi ponga $x=1$. Io non dubito che, coll' ajuto della nuova eſpreſſione di queſti numeri, ſi poſſa anche dimoſtrare più direttamente il teorema dell' *Eulero*.

ARTICOLO II.

Eſame di una famoſa regola per trovare il valor proſſimo delle radici di qualunque equazione.

1. UNa celebre regola ſulle traccie di un illuſtre Geometra preſenta il Ch. Sig. Ab. *Gianella* nella I. Parte dell' Ac. R. di Torino a car. 467, per conoſcere il valor proſſimo delle radici reali di qualunque equazione determinata, e per aſſegnare il numero delle radici immaginarie che in eſſa hanno. A queſta regola egli ſi fa ſtrada nella ſua Memoria con una ſerie di ingegnoſiſſimi teoremi, che paſſo paſſo il guidano al teorema finale, il quale può eſſere così enunziato. Sia $(A)\ldots x=k(z+\phi x^m+\phi' x^n+\phi'' x^p \text{ ecc.})^r$, ove k, ϕ, ϕ', ϕ'', ecc. ſono quantità indipendenti da x e da z; r, m, n, p ecc. ſono podeſtà in qualſivoglia modo intere o rotte, poſitive o negative. Se ſi fa
$(B)\ldots\ldots Z=\phi k^m z^{mr}+\phi' k^n z^{nr}+\phi'' k^p z^{pr}$ ecc, ſarà vera queſta equazione $x=k\left(z+Z+\frac{d(Z^2)}{1.2}+\frac{d^2(Z^3)}{1.2.3}+\frac{d^3(Z^4)}{1.2.3.4}\text{ ecc.}\right)^r$, ovvero queſt' altra, che ſi dimoſtra equivalente;

$$(C)\ldots x=k\left(z^r+Z\,d(z^r)+\frac{d(Z^2d(z^r))}{1.2}+\frac{d^2(Z^3d(z^r))}{1.2.3}\right.$$

$$\left.+\frac{d^3(Z^4d(z^r))}{1.2.3.4}\text{ ecc.}\right),$$ intendendo per comodo che

$d(Z^2)$, $d^2(Z^3)$ ec., e così $d(z^r)$, $d(Z^2d(z^r))$, $d^2(Z^3d(z^r))$, ecc. ſiano i differenziali 1.°, 2.° ecc. delle funzioni di z, z^r, $Z^2d(z^r)$, $Z^3d(z^r)$ ecc., nelle quali varia la ſola z, diviſi dalle riſpettive differenze dz, dz^2 ecc. (*)

2. Ciò poſto, abbiaſi un' equazione di grado m così eſpreſſa; $a+bx+cx^2+dx^3\ldots+x^m=0$, e ſe accade che manchi

(*) Se ne vegga la dimoſtrazione al luogo citato.

qualche termine, si renda essa completa colla trasformazione in un' altra che abbia tutti i suoi termini. Si lasci poi successivamente ciascun termine che contiene x nel 1.° membro, e si trasportino gli altri nel 2.°, riducendo sempre colla divisione il 1.° membro alla sola x lineare. E' chiaro, che essendo l' equazione del grado m, il numero de' termini affetti dalle podestà di x, sarà pure m, e conseguentemente avremo numero m di equazioni, come qui si espongono;

$$1^a \ldots x = -\frac{1}{b}\ (a + cx^2 + dx^3 \ldots + x^m)$$

$$2^a \ldots x = -\frac{1}{c}(b + ax^{-1} + dx^2 \ldots + x^{m-1})$$

$$3^a \ldots x = -\frac{1}{d}\ (c + ax^{-2} + bx^{-1} \ldots + x^{m-2})$$

3. Confrontata ora la 1.^{a} equazione colla ecumenica (A), si vede, che per l' identicità debb' essere $r = 1$, $k = -\frac{1}{b}$, $z = a$, $\phi = c$, $m = 2$, $\phi' = d$, $n = 3$, ecc. Onde colla sostituzione di questi valori in (B), si ottiene $Z = \frac{ca^2}{b^2} - \frac{da^3}{b^3} + \frac{ea^4}{b^4}$ — ecc.; e quindi corrispondendo qui il simbolo a al simbolo z delle equazioni (A), (B), ed essendo $d(z^r) = 1$ perchè $r = 1$, se col suppor variabile la sola a si faranno le differenziazioni delle podestà di Z prescritte dalla equazione (C), si avrà dato il valore di x, cioè di una delle radici dell' equazione. Allo stesso modo operando per la equazione $2^a \ldots x = -\frac{1}{c}\ (b + ax^{-1} + dx^2 \ldots + x^{m-1})$, si troverà $Z = -acb^{-1} + \frac{db^2}{c^2} - \frac{eb^3}{c^3}$ ecc., e fatto b solo variabile nella serie dei differenziali di Z colla legge della equazione (C), risulterà nota la 2.^{a} radice. Così si potrà conoscere il valore della 3.^{a}, 4.^{a} ecc. radice,

avendosi pei valori di x tante serie quant' è il numero m, o quanto è il numero delle radici della proposta equazione.

4. Poichè relativamente alla equazione 1.ª abbiamo $z=a$;

$$Z=\frac{ca^2}{b^2}-\frac{da^3}{b^3} \text{ ecc.; e } x=-\frac{1}{b}\left(a+Z+\frac{d(Z^2)}{1.2}\right.$$

$$\left.+\frac{d^2(Z^3)}{1.2.3} \text{ecc.}\right)$$, fatta $a=o$, si annulla Z e ciascuno de' differenziali che le appartengono, onde anche $x=o$. Così rispetto all'equazione 2.ª si farà zero il valore di x, quansi pone $b=o$; per l' equazione 3.ª x sarà nullo, quando c è nullo, ecc. Dunque, aggiunge il Sig. *Gianella*, questi valori di x dati per le corrispondenti serie sono assolutamente diversi; e perciò ciascuna serie rappresentando una delle radici dell' equazione di grado m, tutte le m serie rappresenteranno tutte le radici. Ora nelle equazioni, oltre le radici reali, potendo bene spesso aver luogo anche le radici immaginarie, tra le suddette serie ve ne saranno ancora delle rappresentative di queste. Le serie convergenti che s' incontreranno, non potranno mai essere di questo numero, perchè, non mescolandosi ne' loro termini alcun coefficiente immaginario, giacchè suppongonsi sempre reali le quantità a, b, c ecc., e dando esse fuor di dubbio coll' aggregato di parecchi di essi un valor prossimo reale, debbono necessariamente appartenere alle radici reali. Quindi per la ragion de' contrarj, conclude il Sig. Abate, le serie divergenti, che compariranno, spettano alle radici immaginarie; e si potrà stabilire la regola, che tante saranno le radici reali della equazione proposta, quante serie convergenti risultano colle operazioni dell'esposto metodo, e tante le immaginarie, quante sono le divergenti.

5. Questo seducente discorso pecca a parer mio in quella parte, ove si stabilisce, che per necessità le serie divergenti debbano rappresentare le radici immaginarie delle equazioni, e non siano atte ad occultare sotto l' aspetto della lor divergenza delle radici reali. Imperciocchè, o la proposizione si asserisce generalmente per tutti i valori di quantità espressi da serie, o si ristringe ai valori rappresentati dalle serie

ſerie trovate col preſente metodo. Accettando la propoſizione nel ſenſo di generalità, non ſarebbe poſſibile ſvolgere un valor di quanto reale in una ſerie divergente, e, per eſempio, la ſerie di tal natura; $1 + \frac{2}{1} - \frac{1.2^2}{1.2} + \frac{1.3.2^3}{1.2.3}$ $- \frac{1.3.5.2^4}{1.2.3.4}$ ecc. dovrebbe equivalere ad una quantità immaginaria. Pure ognuno può accorgerſi di per ſe, che queſta ſerie trae origine dalla formola reale $(1+4)^{\frac{1}{2}}$ maneggiata col canone Newtoniano. La qual coſa ſola, che può però unirſi ad altri frequentiſſimi eſempj di ſerie divergenti eſprimenti quantità reali, e incontrate tutto dì dagli Analiſti, fa conoſcere chiaramente, che non può verificarſi generalmente la neceſſità della corriſpondenza di ſì fatte ſerie alle quantità immaginarie, potendo eſſe talvolta equivalere alle reali. Se poi s' intende limitata la propoſizione alle divergenti che emanano dall' eſpoſto metodo, ragion voleva, che ſi dimoſtraſſe, combinarſi nel caſo noſtro, malgrado la falſità del teorema in genere, tali circoſtanze che obbligano le ſteſſe ſerie a non potere ſignificare altro che le radici immaginarie. Or ciò non eſſendoſi fatto, reſta che ſi conſideri come vizioſo il raziocinio del precedente numero, e almen dubbia la concluſione che da eſſo deriva.

6. Cerchiamo, ſe adattando la regola alle equazioni trinomie, poſſiamo almeno riguardo ad eſſe liberarci da una tale incertezza; e ſupponiamo data l' equazione ecumenica dì 2.° grado $a + bx + x^2 = o$, nella quale a, b, ſiano quantità poſitive, e le cui radici ſono $x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}$; $x = -b - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}$; reali, ſe $\frac{b^2}{4} > a$; immaginarie, ſe $\frac{b^2}{4} < a$. A queſta equazione di 2.° grado ſi dia la forma ſeguente $x = -\frac{1}{b}(a + x^2)$, e confrontandola con (A), ſi

avrà $r=1$; $k=-\frac{1}{b}$, $z=a$, $\phi=1$, $m=2$, ϕ', ϕ'' ecc. $=o$; onde posti questi valori in (B), sarà $Z=\frac{a^2}{b^2}$; e quindi eseguendo le prescritte differenziazioni col far che varj solo a; $\frac{d(Z^2)}{1.2}=\frac{4a^3}{1.2b^4}$; $\frac{d^2(Z^3)}{1.2.3}=\frac{5.6a^4}{1.2.3b^6}$; $\frac{d^3(Z^4)}{1.2.3.4}$ $=\frac{6.7.8a^5}{1.2.3.4b^8}$ ecc.; e generalmente $\frac{d^n(Z^{n+1})}{1.2.3\ldots(n+1)}$ $=\frac{(n+3)(n+4)(n+5)\ldots 2n(2n+1)(2n+2)}{1.2.3\ldots(n)(n+1)}\cdot\frac{a^{n+2}}{b^{2n+2}}$, che dà il termine immediatamente antecedente $\frac{d^{n-1}(Z^n)}{1.2.3\ldots n}=\frac{(n+2)(n+3)(n+4)\ldots(2n)}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{a^{n+1}}{b^{2n}}$. Sostituendo pertanto i valori di Z e de' susseguenti differenziali in (C), si ha

$$x=-\frac{1}{b}\left(a+\frac{a^2}{b^2}+\frac{4a^3}{1.2b^4}+\frac{5.6a^4}{1.2.3b^6}\ldots\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{(n+2)(n+3)\ldots 2n}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{a^{n+1}}{b^{2n}}+\frac{(n+3)(n+4)\ldots(2n+2)}{1.2.3\ldots(n+1)}\cdot\frac{a^{n+2}}{b^{2n+2}};\right)$$

e la serie del 2.° membro di questa equazione vestirà la natura di convergente o divergente secondo le diverse determinazioni de' simboli a, b.

7. Ma questo carattere di convergenza o divergenza nelle serie non va dedotto dal valore de' termini vicini al primo, per non cadere in errore, succedendo assai spesso, che una serie la quale sui primi termini par convergente, andando avanti diverga, oppure al contrario; e la ragione di queste apparenti anomalie si vede ben che deriva dalla natura della curva espressa dalla equazione che ha l' ordinata variabile nel 1.° membro, e la serie contenente un' altra quantità variabile nell' omogeneo di comparazione. Imperciocchè i flessi, i regressi, gli andamenti serpentini, e le altre vicende, che può essa avere in corrispondenza di un accrescimento uniforme dell' ascissa, fanno essere l' ordinata rappresentata dal

valor della ſerie ora maggiore ora minore ſino a che dopo aver ſubíto la curva tutte queſte variazioni, che le competono, le quali reſtan però ſempre riſtrette dentro un finito ſpazio, acquiſti in progreſſo un corſo, dirò così, più libero e regolare, in conſeguenza del quale o ſempre creſca, o cali continuamente ſenza deviare dalla legge della ſua equazione. Egli è dunque meſtieri, perchè le ſerie ſi poſſan chiamare di lor natura o convergenti o divergenti, ſpinger la indagine al di là dei confini di queſti cangiamenti delle curve e conſiderarle in quella regione, nella quale non van più ſoggette alle mentovate antinomie. Ma perchè ſi mettono in regola or più preſto, or più tardi ſecondo le ipoteſi di grandezza ſtabilita alle quantità coſtanti, che entrano ne' termini delle equazioni, ad evitare qualunque pericolo di falſa illazione ſulla convergenza o divergenza delle ſerie, ſarà ottimo conſiglio il cercarne le proprietà ne' termini infinitamente diſtanti dal primo.

8. Onde volendo ſapere di qual condizione debba eſſer fornita la noſtra ſerie, affinchè abbia il natural carattere di convergente o divergente, prenderemo i due termini proſſimi che ſono collocati ne' poſti indeterminati $n-1$, n §. 6; e diremo che la ſerie converge, ove ſia

$$\frac{(n+2)(n+3)\ldots 2n}{1.2.3.\ldots n}\cdot\frac{a^{n+1}}{b^{2n}} > \frac{(n+3)(n+4)\ldots 2n(2n+1)(2n+2)}{1.2.3\ldots n(n+1)}\cdot\frac{a^{n+2}}{b^{n+2}};$$

divergendo poi la medeſima, quando ſuccede il contrario. Levato pertanto dalle 2 formule il comun fattore $\frac{(n+3)(n+4)\ldots 2n}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{a^{n+1}}{b^{2n}}$, la condizione della detta convergenza ſi riduce a queſt' altra; $n+2 > \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1}\cdot\frac{a}{b^2}$ eſſendo per la condizione della divergenza $n+2 < \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1}\cdot\frac{a}{b^2}$; cioè, fatto n infinito, per la convergenza dovrà eſſere $\frac{b^2}{4} > a$; per la divergenza $\frac{b^2}{4} < a$. Ma queſte condizioni ſon le ſteſſe che abbiamo trovato §. 6

colla risoluzione dell' equazione trinomia per determinare la realità o l'immaginarietà della radice. Dunque la regola del Sig. *Gianella* ci guida bene; ed effettivamente alla radice reale le corrisponde la serie convergente, alla immaginaria la divergente.

9. Data alla equazione di 2.° grado la forma 2.ª del §. 2, cioè $x = -1\,(b + ax^{-1})$, somministrerà nel confronto con (A) $k = -1$, $r = 1$, $z = b$, $\phi = a$, $m = -1$, annullandosi tutto il resto. Quindi nasce $Z = -ab^{-1}$, e supponendo b solo variabile; $\frac{d(Z^2)}{1.2} = -\frac{2a^2}{1.2b^3}$; $\frac{d^2(Z^3)}{1.2.3} = -\frac{3.4a^3}{1.2.3b^5}$;

$$\frac{d^3(Z^4)}{1.2.3.4} = -\frac{4.5.6a^4}{1.2.3.4b^7} \text{ ecc. } \frac{d^n(Z^{n+1})}{1.2.3\ldots(n+1)}$$

$$= -\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2.3\ldots(n+1)} \cdot \frac{a^{n+1}}{b^{2n+1}};$$ e perciò il valore della 2.ª radice verrà così espresso;

$$x = -b + \frac{a}{b} + \frac{2a^2}{1.2b^3} + \frac{3.4a^3}{1.2.3b^5} + \frac{4.5.6a^4}{1.2.3.4b^7} \ldots$$

$$+ \frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{a^n}{b^{2n-1}} + \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2.3\ldots(n+1)} \cdot \frac{a^{n+1}}{b^{2n+1}}.$$

Per la convergenza poi di questa serie si esige che sia

$$\frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{a^n}{b^{2n-1}} > \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2.3\ldots(n+1)} \cdot \frac{a^{n+1}}{b^{2n+1}},$$ cioè, tolto il fattor comune $n > \frac{(2n-1)(2n)}{n+1} \cdot \frac{a}{b^2}$, e fatto n infinito, $\frac{b^2}{4} > a$. Così per la divergenza dovrà essere $\frac{b^2}{4} < a$, come appunto per la prima radice. Dunque alla supposizione della 2.ª radice reale corrisponde eziandio la serie convergente, e la divergente all' altra della 2ª. radice immaginaria: nel che non v'è dissenso tra i risultati del metodo con ciò che altronde è già noto.

10. Abbiam supposto fin qui le specie a, b dell' equazione trinomia positive. Se b è negativo, ci vengon prodotti gli stessi valori ne' termini delle serie colla sola diversità de' segni mutati, ritornano le stesse condizioni per la lor convergenza e divergenza, quando convergono, sicuramente le radici son reali, quando divergono, immaginarie, e niente declina dal vero. Ci rimane perciò da esaminare l' ipotesi di a negativa, che cangia l' equazione quadratica in quest' altra $-a+bx+x^2=0$. In tal caso è chiaro, che, per avere i due valori di x, per mezzo delle serie, basterà nelle già notate ai §§. 6, 9 mutare il segno a tutte le podestà dispari di a, e saran quindi le radici 1.ª e 2.ª

$$x=-\frac{1}{b}\left(-a+\frac{a^2}{b^2}-\frac{4a^3}{1.2b^4}\ldots\pm\frac{(n+2)(n+3)\ldots 2n}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{a^{n+1}}{b^{2n}}\right.$$

$$\left.\mp\frac{(n+3)(n+4)\ldots(2n+2)}{1.2.3\ldots(n+1)}\cdot\frac{a^{n+2}}{b^{2n+2}}\right);\ x=-b-\frac{a}{b}+\frac{2a^2}{1.2b^3}$$

$$-\frac{3.4a^3}{1.2.3.b^5}\cdots\cdots\mp\frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{a^n}{b^{2n-1}}$$

$\pm\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2.3\ldots(n+1)}\cdot\frac{a^{n+1}}{b^{2n+1}}$. Ora l' alternativa de' segni, che s' incontrano ne' termini di queste 2 serie non influendo niente nella divergenza o convergenza delle medesime, egli è indubitato, che ambedue saranno divergenti, qualora sia in ciascuna di esse $\frac{b^2}{4}<a$; e coll' ammettere questa ipotesi il Sig. *Gianella* c' insegna, che riescono immaginarie le due radici dell' equazione. Ma la risoluzione dell' equazione di 2.° grado ci porta alle 2 radici $x=-b+\sqrt{\frac{b^2}{4}+a}$;

$x=-b-\sqrt{\frac{b^2}{4}+a}$, che sono radici reali. Dunque è falso, che la natura del suo metodo tolga alle serie divergenti che indi risultano la proprietà di esprimere le radici reali, e le obblighi a rappresentar solo le immaginarie. Il perchè ci tradisce la regola da lui stabilita, che non può assegnarsi come regola generale nemmeno nelle equazioni di 2.° grado.

11. Applichiamola presentemente alle equazioni cubiche, e siccome vuolsi dal metodo, che le equazioni sian fornite di tutti i lor termini, ci proporremo l' equazione generale di 3.° grado; $a-bx+cx^2+x^3=o$, col solo coefficiente b negativo; cioè dandole la forma 1.ª del §. 2;

$x=\frac{1}{b}(a+cx^2+x^3)$. Instituiscasi il confronto di questa con (A), ed avremo $r=1$, $k=\frac{1}{b}$, $z=a$, $\phi=c$, $m=2$, $\phi'=1$, $n=3$, facendosi nulli gli altri termini. Sicchè introdotti questi valori in (B) diverrà $Z=\frac{a^3+bca^2}{b^3}$ $=\frac{a^3}{b^3}\left(1+\frac{bc}{a}\right)$, dove a dee far figura di variabile nelle differenziazioni delle podestà di Z. Dal ritrovato valore di Z emanano le seguenti ugualtà;

$$Z^2=\frac{(a^3+bca^2)^2}{b^6};\ Z^3=\frac{(a^3+bca^2)^3}{b^9};\ Z^4=\frac{(a^3+bca^2)^4}{b^{12}};$$

$Z^5=\frac{(a^3+bca^2)^5}{b^{15}}$ ecc. Onde passando alla 1.ª differenziazione di Z^2, alla 2.ª di Z^3, alla 3.ª di Z^4, ecc. poichè $d(z')=1$, avremo; $\frac{d(Z^2)}{1.2}=\frac{(6a^5+4bca^4)}{1.2b^6}\left(1+\frac{bc}{a}\right)$; $\frac{d^2(Z^3)}{1.2.3}$

$$=\frac{(72a^7+96bca^6+30b^2c^2a^5)}{1.2.3b^9}\left(1+\frac{bc}{a}\right);\ \frac{d^3(Z^4)}{1.2.3.4}$$

$$=\frac{(1320a^9+2640bca^8+1680b^2c^2a^7+336b^3c^3a^6)}{1.2.3.4b^{12}}\left(1+\frac{a}{bc}\right)\text{ ecc.}$$

12. Questi valori si possono presentare sotto una forma più

chiara così, $\frac{d(Z^2)}{1.2} = \frac{6a^5}{1.2b^6}\left(1+\frac{bc}{a}\right)\left(1+\frac{1}{1}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{bc}{a}\right)$;

$$\frac{d^2(Z^3)}{1.2.3} = \frac{9.8a^7}{1.2.3b^9}\left(1+\frac{bc}{a}\right)\left(1+\frac{2}{1}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{bc}{a}+\frac{2.1}{1.2}\cdot\frac{6.5}{9.8}\cdot\frac{b^2c^2}{a^2}\right);$$

$$\frac{d^3(Z^4)}{1.2.3.4} = \frac{12.11.10}{1.2.3.4}\cdot\frac{a^9}{b^{12}}\left(1+\frac{bc}{a}\right)\left(1+\frac{3}{1}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{bc}{a}\right.$$

$$\left.+\frac{3.2}{1.2}\cdot\frac{8.7}{12.11}\cdot\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{3.2.1}{1.2.3}\cdot\frac{8.7.6}{12.11.10}\cdot\frac{b^3c^3}{a^3}\right); \quad \frac{d^4(Z^5)}{1.2.3.4.5}$$

$$= \frac{15.14.13.12}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{a^{11}}{b^{15}}\left(1+\frac{bc}{a}\right)\left(1+\frac{4}{1}\cdot\frac{10}{15}\cdot\frac{bc}{a}\right.$$

$$+\frac{4.3}{1.2}\cdot\frac{10.9}{15.14}\cdot\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{4.3.2}{1.2.3}\cdot\frac{10.9.8}{15.14.13}\cdot\frac{b^3c^3}{a^3}$$

$\left.+\frac{4.3.2.1.}{1.2.3.4}\cdot\frac{10.9.8.7.}{15.14.13.12}\cdot\frac{b^4c^4}{a^4}\right)$; ecc. Onde saranno generalmente i due termini prossimi di posto $n-1$, n;

$$\frac{d^{n-1}(Z^n)}{1.2.3...n} = \frac{3n(3n-1)(3n-2)...(2n+2)}{1.2.3...n}\cdot\frac{a^{2n+1}}{b^{3n}}\left(1+\frac{bc}{a}\right)$$

$$\left\{1+\frac{(n-1)}{1}\cdot\frac{2n}{3n}\cdot\frac{bc}{a}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\cdot\frac{(2n)(2n-1)}{3n(3n-1)}\cdot\frac{b^2c^2}{a^2}\right.$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}\cdot\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)}{3n(3n-1)(3n-2)}\cdot\frac{b^3c^3}{a^3}\;\ldots$$

$\left.+\frac{2n(2n-1)(2n-2)...(n+2)}{3n(3n-1)(3n-2)...(2n+2)}\cdot\frac{b^{n-1}c^{n-1}}{a^{n-1}}\right\}$, che chiamo P.

$$\frac{d^n(Z^{n+1})}{1.2.3....(n+1)} = \frac{(3n+3)(3n+2)....(2n+4)}{1.2.3...(n+1)}\cdot\frac{a^{2n+3}}{b^{3n+3}}\left(1+\frac{bc}{a}\right)$$

$$\left\{1+\frac{n}{1}\,\frac{(2n+2)}{3n+3}\cdot\frac{bc}{a}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)}\cdot\frac{b^2c^2}{a^2}\right.$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{(2n+2)(2n+1)(2n}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}\cdot\frac{b^3c^3}{a^3}+\ldots\ldots$$

$$\left.+\frac{(2n+2)(2n+1)\ldots(n+3)}{(3n+3)(3n+2)\ldots(2n+4)}\cdot\frac{b^nc^n}{a^n}\right\}\text{ che chiamo }\mathcal{Q}.$$

E ſoſtituendo tutti queſti valori in (C), ho

$$(D)\ldots x=\frac{1}{b}\left(a+\frac{a^3}{b^3}\left(1+\frac{bc}{a}\right)+\frac{6a^5}{1.2b^6}\left(1+\frac{bc}{a}\right)\right.$$

$$\left(1+\frac{4bc}{6a}\ldots\ldots+P+\mathcal{Q}.\right.$$

13. Per conoſcere la convergenza o la divergenza di queſt' ultima ſerie, biſognerebbe ſapere, ſe in caſo di n infinito ſia $P>\mathcal{Q}$, o al contrario; e a queſto fine, preſcindendo dai primi fattori che moltiplican le ſerie ne' valori di P, $\mathcal{Q}$ converrebbe anticipatamente poter ſommare le ſerie, che vengono da quelli moltiplicate, cioè una di eſſe, per eſempio l'ultima, giacchè eſſendo cognita la ſomma di queſta, reſta pur nota quella del termine precedente. Ma la ſerie che è in $\mathcal{Q}$ è una di quelle, la cui ſomma generale non cade ſotto neſſuno de' metodi conoſciuti. Ciò nonoſtante ci verrà fatto di trar dalla forma loro qualche concluſione utile al noſtro intento, e prima di tutto, chiamata K la ſomma della ſerie che ſpetta a $\mathcal{Q}$, e K' quella del termine precedente P, onde riſulti $P=\frac{3n(3n-1)\ldots.(2n+2)}{1.2\ldots..n}\cdot\frac{a^{2n+1}}{b^{3n}}$ $\left(1+\frac{bc}{a}\right)K'$; $\mathcal{Q}=\frac{(3n+3)(3n+2)\ldots(2n+4)}{1.2\ldots(n+1)}\cdot\frac{a^{2n+3}}{b^{3n+3}}$ $\left(1+\frac{bc}{a}\right)K$, diremo, che la ſerie in (D) ſarà convergente, qualora ſia nell' ipoteſi di n infinito

$$\frac{3n(3n-1)\ldots(2n+4)(2n+3)(2n+2)}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{a^{2n+1}}{b^{3n}}\left(1+\frac{bc}{a}\right)$$

$$K'>\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\ldots(2n+4)}{1.2.3.\ldots n(n+1)}\cdot\frac{a^{2n+3}}{b^{3n+3}}\left(1+\frac{bc}{a}\right)K,$$

eſſendo

essendo nel caso contrario divergente. Divido le due formole per i comuni fattori, e riduco la condizione della convergenza alla seguente; $(2n+3)(2n+2)K' >$ $\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{n+1}\frac{a^2}{b^3}K$, ovvero, perchè n è infinito, a quest' altra $4b^3 > \frac{27a^2K}{K'}$; e così la condizione della divergenza a $4b^3 < \frac{27a^2K}{K'}$.

14. Faccio poi l' attual divisione sino al 3.° termine della serie K per l' altra K' notando i veri coefficienti numerici, dai quali restano affetti questi tre primi termini, ed indicando i coefficienti de' termini rimanenti sino all' infinito coi simboli H, H', H'' ecc., e mi nasce

$$\frac{K}{K'} = \frac{1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{(2n+2)}{3n+3}\cdot\frac{bc}{a} + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)}\cdot\frac{b^2c^2}{a^2}\ \cdots + \frac{(2n+2)(2n+1)\ldots(n+3)}{(3n+3(3n+2)\ldots(2n+4)}\cdot\frac{b^nc^n}{a^n}}{1 + \frac{(n-1)}{1}\cdot\frac{(2n)}{3n}\cdot\frac{bc}{a} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\cdot\frac{(2n)(2n-1)}{3n(3n-1)}\cdot\frac{b^2c^2}{a^2}\ \cdots + \frac{(2n)(2n-1)\ldots(n+2)}{(3n)(3n-1)\ldots(2n+2)}\cdot\frac{b^{n-1}c^{n-1}}{a^{n-1}}}$$

$$= 1 + \frac{2bc}{3a} - \frac{(3n+4)(n-1)}{3^2(3n+2)(3n-1)}\cdot\frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{Hb^3c^3}{a^3} + \frac{H'b^4c^4}{a^4} + \frac{H''b^5c^5}{a^5}\ \text{ecc.}$$

$$= 1 + \frac{2bc}{3a} - \frac{b^2c^2}{27a^2} + \frac{Hb^3c^3}{a^3} + \frac{H'b^4c^4}{a^4} + \frac{H''b^5c^5}{a^5}\ \text{ecc.},$$

perchè n è infinito. Facendo pertanto uso dell' ultimo notato valore di $\frac{K}{K'}$ nella espressione della condizione, che costituisce nella serie in (D) il carattere di convergenza, dovrà essere $4b^3 > 27a^2 + 18abc - b^2c^2 + 27a^2$ $\left(\frac{Hb^3c^3}{a^3} + \frac{H'b^4c^4}{a^4}\ \text{ecc.}\right)$; della quale quantità se $4b^3$ è minore, la serie in (D) si fa divergente. Gioverà poi il riflettere, che nel 2.° membro di confronto la somma de' termini dopo il 3°, cioè

$27a^2\left(\frac{Hb^3c^3}{a^3}+\frac{Hb^4c^4}{a^4}\text{ecc.}\right)$ qualunque ella siasi, deve necessariamente contenere il simbolo b.

15. Riprendasi presentemente in mano l' equazione cubica; $a-bx+cx^2+x^3=o$; e colla sostituzione $x=u-\frac{c}{3}$, si trasformi essa nella seguente; $u^3-\frac{(c^2+3b)u}{3}$ $+\frac{27a+2c^3+9bc}{27}=o$ mancante del 2.° termine. Affinchè la trasformata, e in conseguenza la proposta abbia 3 radici reali, sanno tutti i Geometri, che debb' essere

$\frac{(27a+2c^3+9bc)^2}{4}<(c^2+3b)^3$; cioè dopo le riduzioni;

$4b^3>27a^2+18abc-b^2c^2+4ac^3$. Dunque, dico io, ove sia giusta la regola del Sig. *Gianella*, questa condizione sarà identica con quella che risulta dai suoi canoni, ed è

$$4b^3>27a^2+18abc-b^2c^2+27a^2\left(\frac{Hb^3c^3}{a^3}+\frac{Hb^4c^4}{a^4}\text{ecc.}\right).$$

Onde $4ac^3$ esprimerà la somma della serie $27a^2\left(\frac{Hb^3c^3}{a^3}+\frac{Hb^4c^4}{a^4}\text{ecc.}\right)$. Ma questo è impossibile, generalmente parlando, perchè $4ac^3$ non contiene la specie b, e la suddetta serie è una funzion necessaria de' simboli a, b, c. Egli potrebbe perciò avvenire, che una equazione cubica soddisfacesse alla formula di condizione, che dà la regola del Sig. Abate, e non all' altra, che danno i metodi conosciuti, che con questi si dovesse decidere la presenza nella equazione delle 3 radici reali, e con quella si dovesse concludere avervi nella medesima 2 radici immaginarie. Il che fa vedere, quanto a torto si stabilisca il criterio della divergenza della serie per inferirne da essa la necessaria immaginarietà della radice.

16. A confermar maggiormente la verità della mia proposizione, valgami l'equazione $x^3 - \frac{4x^2}{3} - \frac{2x}{3} + \frac{4}{9} = 0$, la quale ha 3 radici reali; $x = -\frac{2}{3}$; $x = 1 + \sqrt{\frac{1}{3}}$ $x = 1 - \sqrt{\frac{1}{3}}$. Il confronto di questa coll'ecumenica $a - bx + cx^2 + x^3 = 0$ ci fa nascere queste determinazioni; $a = \frac{4}{9}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = -\frac{4}{3}$, $bc = -2$; $1 + \frac{bc}{a} = -1$; $\frac{a^3}{b^3} = \frac{2^3}{3^3}$, $\frac{a^5}{b^6} = \frac{2^4}{3^4}$, $\frac{a^7}{b^9} = \frac{2^5}{3^5}$ ecc., coi quali valori posti in (D) si ottiene $x = \frac{3}{2}\left(\frac{2^2}{3^2} - \frac{2^3}{3^3} + \frac{2^4}{3^4} + 0 - \frac{2^6}{3^5} + \frac{7 \cdot 2^7}{3^7} \text{ ecc.}\right)$. Ora essendo in questo 2.° membro convergenti i soli primi 4 termini, e divergenti gli altri che seguitano sino all' infinito, la serie è di sua natura divergente, e nondimeno sarebbe falsa la illazione, che l' equazione comprenda 2 radici immaginarie, perchè si è già veduto, essere tutte e tre le sue radici reali. Si consideri oltracciò, che, per ragione della divergenza della serie, dovrà essere ne' termini all' infinito $4b^3 < 27a^2 + 18abc - b^2c^2 + 27a^2\left(\frac{Hb^3c^3}{a^3} + \frac{Hb^4c^4}{a^4} \text{ ecc.}\right)$, nel tempo stesso che abbiamo $4b^3 > 27a^2 + 18abc - b^2c^2 + 4ac^3$, come porta la realità delle 3 radici, e come si troverà in fatti, se in vece di a, b, c si sostituiscono i lor valori. Il perchè sarà proposizione di palpabile verità l'asserire che $27a^2\left(\frac{Hb^3c^3}{a^3} \text{ ecc.}\right)$ è quantità diversa da $4ac^3$, e che la condizione di realità nelle radici può star benissimo in compagnia delle serie divergenti, che s'incontrano col mentovato metodo.

17. Nella ipotesi però delle 3 radici reali di un' equazione cubica si può salvare, quando si voglia, la corrispondenza tra il convergere delle serie, e la realità delle radici sempre che in vece di render completa l'equazione, ove le man-

chi qualche termine, ficcome prefcrive il Sig. Abate, fi trasformi al contrario l' equazione cubica che fia completa in un' altra che del 2.°, o del 3.° termine reftaffe privata. Supponendola mancante del 2.° termine, l' equazione generale $a - bx + cx^2 + x^3 = 0$ diventa $a - bx + x^3 = 0$ che fa effer $c = 0$; e tale ipotefi porta all' ugualtà $\frac{K}{K'} = 1$. Ma abbiam veduto, che effendo $4b^3 > \frac{27a^2K}{K'}$, la noftra ferie è convergente. Dunque pel cafo della equazione mancante del 2.° termine, convergerà la ferie del valor della 1.ª radice ove fi verifichi la condizione di $4b^3 > 27a^2$; che è la condizione notiffima della realità di quefta 1.ª radice.

18. Ma, non fol quefta prima, anche le altre due radici reali verranno efpreffe da ferie convergenti, col dare alla cubica la forma $x^2 = b - ax^{-1}$, da cui eftraendo la radice quadrata, fi ha $x = \pm 1\,(b - ax^{-1})^{\frac{1}{2}}$. Di quefte due radici prendo la pofitiva $x = 1\,(b - ax^{-1})^{\frac{1}{2}}$, e confrontandola colla canonica (A), rifulta $k = 1$, $r = \frac{1}{2}$, $z = b$, $\phi = -a$, $m = -1$, effendo tutto il refto zero. Quindi $Z = -ab^{-\frac{1}{2}}$, e facendo variar folo b nelle confuete differenziazioni, avremo $d(z^r) = \frac{1}{2}\,b^{-\frac{1}{2}}$, $Zd(z^r) = -\frac{a}{2b^{\frac{3}{2}}}$; $\frac{d\left(Z^2 d(z^r)\right)}{1.2}$

$$= -\frac{3}{1.2} \cdot \frac{a^2}{2^2 b^{\frac{5}{2}}}; \quad \frac{d^2\left(Z^3 d(z^r)\right)}{1.2.3} = -\frac{6.4}{1.2.3} \cdot \frac{a^3}{2^3 b^{\frac{8}{2}}};$$

$$\frac{d^3\left(Z^4 d(z^r)\right)}{1.2.3.4} = -\frac{9.7.5}{1.2.3.4} \cdot \frac{a^4}{2^4 b^{\frac{11}{2}}} \text{ ecc., onde } \frac{d^n\left(Z^{n+1} d(z^r)\right)}{1.2.3\ldots(n+1)}$$

$$= \frac{3n(3n-2)(3n-4)\ldots(n+2)}{1.2\ldots.(n+1)} \cdot \frac{a^{n+1}}{2^{n+1} b^{\frac{3n+2}{2}}}.$$ Queft' ultima formola, che è il termine generale della ferie dei differenziali, equivale alla feguente;

$$\frac{n^n\left(\frac{3n}{2}\right)\left(\frac{3n}{2}-1\right)\left(\frac{3n}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right).\frac{a^{n+1}}{2^{n+1}b^{\frac{3n+2}{2}}}}{1.2\ldots(n+1)}$$; e perciò

adoperando i ritrovati valori nella equazione (C), ſi avrà

$$x=b^{\frac{1}{2}}-\frac{a}{2b^{\frac{3}{2}}}-\frac{3}{1.2}.\frac{a^2}{2^2b^{\frac{5}{2}}}-\frac{6.4}{1.2.3}.\frac{a^3}{2^3b^{\frac{8}{2}}}-\frac{9.7.5}{1.2.3.4}.\frac{a^4}{2^4b^{\frac{11}{2}}}$$

$$\ldots-\frac{\left(\frac{3n}{2}\right)\left(\frac{3n}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)a^{n+1}}{1.2\ldots(n+1).2b^{\frac{3n+2}{2}}}$$

19. Dato a n un valore infinito, poichè pel teorema Euleriano, che è ſtato nel 1.° articolo rigoroſamente dimoſtrato, ſi ha; $1.2.3\ldots n=\frac{n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^n}$; ſe in vece di n ſoſtituiſco prima $\frac{n}{2}$, poi $\frac{3n}{2}$, ſarà $1.2.3\ldots\frac{n}{2}$

$$=\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^{\frac{n}{2}}};\quad 1.2.3\ldots\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\ldots\frac{3n}{2}$$

$$=\frac{\left(\frac{3n}{2}\right)^{\frac{3n+1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^{\frac{3n}{2}}}.$$ Dunque dividendo queſta 2.ª equazione per la precedente, ſi avrà dopo le riduzioni;

$$\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+2\right)\ldots\left(\frac{3n}{2}\right)=\frac{3^{\frac{3n+1}{2}}n^n}{2^ne^n};$$ e i due ultimi

termini della ſerie, che rappreſenta il valore di x, ſaranno i ſeguenti;

$$-\frac{3^{\frac{3n-2}{2}}(n-1)^{n-1}}{1.2.3\ldots n.e^{n-1}}.\frac{a^n}{2^nb^{\frac{3n-1}{2}}};\quad-\frac{3^{\frac{3n+1}{2}}n^n}{1.2.3\ldots(n+1)e^n}.\frac{a^{n+1}}{2^{n+1}b^{3\frac{n-1}{2}}}.$$

Laonde concluderemo, che la predetta ſerie ſarà convergente, quando abbia luogo la condizione;

$$\frac{3^{\frac{3n-2}{2}}(n-1)^{n-1}}{1.2\ldots n.e^{n-1}}\cdot\frac{a}{2^n.b^{\frac{3n-1}{2}}}>\frac{3^{\frac{3n+1}{2}}n^n}{1.2\ldots(n+1)e^n}\cdot\frac{a^{n+1}}{2^{n+1}b^{\frac{3n+2}{2}}};$$ ovvero

dopo l'eſpurgo; $(n-1)^{n-1}>\frac{3^{\frac{3}{2}}n^n}{(n+1)e}\cdot\frac{a}{2b^{\frac{3}{2}}}$. Ma $(n-1)^{n-1}$

$$=\frac{(n-1)^n}{n-1}=\frac{n^n\left(1-\frac{n}{n}+\frac{n(n-1)}{1.2n^2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3n^3}\right.}{n-1}$$

$$\frac{\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4n^4}\text{ ecc.}\right)}{n-1}$$

$$=\frac{n^n}{n-1}\left\{1-1+\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}\text{ ecc.}\right.$$

$$-\frac{1}{1.2n}+\frac{3}{1.2.3n}-\frac{6}{1.2.3.4n}+\frac{10}{1.2.3.4.5n}$$

$$\ldots\ldots\pm\frac{\frac{m(m+1)}{1.2}}{1.2\ldots(m+1)n}-\frac{2}{1.2.3n^2}+\frac{11}{1.2.3.4n^2}-\frac{35}{1.2.3.4.5n^2}$$

$$\left.+\frac{85}{1.2.3.4.5.6n^2}\ldots\ldots\pm\frac{\frac{m(m+1)(m+2)(3m+5)}{1.2.3.4}}{1.2.3\ldots(m+2)n^2}\text{ ecc.}\right\};$$

e fatto m infinito dell' ordine di cui è n, le ſerie aggiunte alla prima vanno viſibilmente a zero, eſſendo la prima $1-1+\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}$ ecc. $=\left(1+1\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}\text{ ecc.}\right)^{-1}=\frac{1}{e}$, poſta e la ſolita baſe de' logaritmi iperbolici. Dunque $\frac{(n-1)^n}{n-1}=\frac{n^n}{(n-1)e}$; e quindi la condizione $\frac{n^n}{(n-1)e}>\frac{3^{\frac{3}{2}}n^n}{(n+1)e}\cdot\frac{a}{2b^{\frac{3}{2}}}$, oſſia $1>\frac{3^{\frac{3}{2}}a}{2b^{\frac{3}{2}}}$, che quadrando dà $4b^3 > 27a^2$, farà la condizione della convergenza della serie, che è nello stesso tempo quella appunto delle 3 radici reali.

20. La 3.ª radice finalmente è $x = -1(b - ax^{-1})^{\frac{1}{2}}$, alla quale, instituiti i debiti confronti colle canoniche, corrisponde l' equazione

$$x = -b^{\frac{1}{2}} - \frac{a}{2b^{\frac{2}{2}}} + \frac{3a^2}{1.2.2^2b^{\frac{5}{2}}} - \frac{6.4}{1.2.3}.\frac{a^3}{2^3b^{\frac{8}{2}}} + \frac{9.7.5}{1.2.3.4}.\frac{a^4}{2^4b^{\frac{11}{2}}}$$

ecc., nella quale, principiando dal 2.° termine, i segni vanno alternando, e in ciò sol diversifica dalla serie appartenente alla 2.ª radice. Sicchè per questa pure la condizione di $4b^3 > 27a^2$ farà essere la serie convergente in corrispondenza della realità di questa 3.ª radice.

21. Fallace poi si rende la regola, se la cubica, cui manca il 2.° termine, sia di tal natura, che una sola radice reale abbiavi in essa, essendo le altre due immaginarie. Imperciocchè unica essendo la condizione, che determina la divergenza di tutte e tre le serie che rappresentano le tre radici, cioè $4b^3 < 27a^2$, siccome per ragione delle 2 radici immaginarie, due di esse devono essere divergenti, segue che verificandosi anche per la serie della terza radice la condizione $4b^3 < 27a^2$, questa serie debba parimente essere divergente, e ciò si verifichi, quando appunto la radice è reale.

22. L'esame, che abbiamo fatto della regola del Sig. *Gianella* sul punto della corrispondenza tra la realità delle radici e la convergenza delle serie, che le esprimono, così pure tra la immaginarietà delle prime e la divergenza delle seconde, ce l'ha fatta trovare talvolta giusta, ma generalmente erronea e difettosa. Vedremo ora, che non possiamo di essa fidarci nemmeno in quella parte, ove si dice, che in una equazione completa di qualunque grado, coll' ajuto delle canoniche §. 2, si potranno avere tante radici diverse, quanto è il grado della equazione, e per dimostrarlo non ci dipartiremo dalla cubica; $a + bx + cx^2 + x^3 = o$, la quale sulla forma della 1.ª e 3.ª del citato §. 2 presenteremo così; $x = -\frac{1}{b}(a + cx^2 + x^3)$; $x = -1(c + ax^{-2} + bx^{-1})$. Fat-

ti i soliti confronti, per la prima di queste due si ottiene $k = -\frac{1}{b}$, $r = 1$, $z = a$, $Z = -\frac{a^2(a-bc)}{b^3}$; ed essendo in Z variabile solo a, si scorge evidentemente, che i valori de' differenziali delle podestà di Z, cioè $\frac{d(Z^2)}{1.2}$, $\frac{d^2(Z^3)}{1.2.3}$ ecc. saranno tutti moltiplicati pel fattor comune $a - bc$; onde ammessa l'ipotesi che sia $bc = a$, saranno nulli questi differenziali, e insieme Z nullo; onde l'equazione (C) diventerà $x = kz$, ovvero $x = -\frac{a}{b} = -c$. I confronti poi della seconda somministrano $k = -1$, $r = 1$, $z = c$, $Z = \frac{a-bc}{c^2}$; e qui pure nella assunta ipotesi di $bc = a$, sì Z che i differenziali delle sue podestà svaniscono onninamente. Laonde avremo anche colla 3.ª delle canoniche, $x = kz = -c$, cioè la stessa radice che abbiam trovata colla 1.ª. Nè ciò si dee attribuire all'eguaglianza di 2 radici, che potesse avere la nostra cubica così modificata, perchè nella equazione generale $a + bx + cx^2 + x^3 = 0$, sostituito bc in vece di a, è sibbene un fattor di questa $x + c = 0$; ma l'altro fattore diventa $x^2 + b = 0$, le cui radici immaginarie, ove sia b positivo, sono $x = \pm\sqrt{-b}$.

23. Quest'unico esempio ci dee bastare per concludere la insufficienza della regola ad esibire eziandio le tre diverse radici della equazione; e questo difetto, unito all'altro di esprimere assai spesso con serie divergenti i valori delle radici reali, ci fa desiderare, che si studj dai Geometri la maniera di liberarla da tali inconvenienti, che ce la rendon poco utile, o si trovi un altro metodo generale, che ci faccia conoscere con facilità e sicurezza, il che riesce di molta importanza, i valori prossimi di queste reali radici, insiem col criterio per determinare il numero delle immaginarie, che si occultano nelle equazioni.

MEMORIA