CONSIDERAZIONI SINTETICHE

SOPRA DI UN CELEBRE PROBLEMA PIANO, E RISOLUZIONE DI ALQUANTI ALTRI PROBLEMI AFFINI

Del Sig. D. ANNIBALE GIORDANO DI OTTAJANO.

PRESENTATA

Dal Sig. CAVALIERE LORGNA. (*a*)

LE ricerche geometriche, che qui mi ſon propoſto eſporre, da altro principio non nacquero, che da un problema famoſo sì per la ſua eleganza, che per eſſere ſtato l'oggetto delle occupazioni de' ſommi Geometri *Caſtillon*, *la Grange*, *Euler*, *Fuſs*, *Lexel*: eccone brieve iſtoria.

Il Sig. *Cramer*, rinomato Analiſta, e degno Profeſſore in Ginevra, propoſe nel 1742 al Sig. *de Caſtillon* il problema d'inſcrivere in un circolo un triangolo rettilineo, i di cui lati diſteſi paſſaſſero per punti dati: impegnandone codeſto Geometra a riſolverlo coll' analiſi degli antichi (forſe perchè ſe ne ſembrava ſterile qualunque giudizioſa applicazione di quella de' moderni), ed obbligandolo alla ſoluzione colle ſeguenti parole „ Nella mia gioventù amava, come voi, il metodo geo-
„ metrico degli antichi. Un vecchio Geometra per ſaggiare
„ le mie forze in queſto genere mi propoſe il problema, che

(*a*) *Nota del medeſimo*. Queſto ſcritto è ſtato mandato da Napoli alla Società dal Sig. Balì Co. de' Sagramoſi ſin dal dì 2. Ottobre del 1787, ſicchè il Geometra che n'è l'Autore il compoſe nella tenera età di poco più che ſedici anni. Parvemi pertanto dicevole il dargli luogo negli Atti della Società sì per queſto, che per eſſere ſtati occupati intorno allo ſteſſo ſuggetto prima del noſtro giovanetto diverſi illuſtri matematici, e sì ancora per il di più ch'egli fece riſolvendo il Problema principale in tutta la ſua generalità con facile metodo, che ricorda non già propriamente la ſinteſi, ma l'analiſi degli antichi.

„ io vi propongo: tentate di risolverlo, e vedrete quanto il „ medesimo sia difficile„. Il Sig. *de Castillon* accettò questo amichevole invito, e seriamente applicatovisi altro non rinvenne, che alcuni teoremi che sembravano menarne allo snodamento senza però mai produrlo; sicchè quasi disperandone dopo varj tentativi lasciò l'impresa. Coll'occasione poi che l'istesso problema fu nel 1755 publicamente da un Anonimo proposto in Haye, l'illustre *M.r Bouquet* riputandolo come niente indegno delle considerazioni de' Geometri ne incoraggiò il Sig. *de Castillon* alla soluzione. La riprese egli invero, ma il problema come restio alle sottili indagini di un sì valente Sintetico, lo trattenne fintantochè, secondo le sue stesse espressioni, quasi piccato dall' inutilità de' suoi sforzi rinvenne alcuni lemmi a tale uopo, mediante l'ajuto de' quali giunse alla desiderata soluzione; ma sì tardi, che non si discorreva più nè del problema, nè dell' Anonimo. La publicò poi negli Atti dell' Accademia di Berlino per l' anno 1776; ove leggesene ancora una puramente analitica del Sig. *de la Grange*.

Or essendomi imbattuto in questo luogo de' suddetti Atti ammirando l'eleganza, e semplicità del problema, pensai di esercitarmivi in risolverlo; e perchè *M.r de Castillon* nella prefazione della sua Memoria ne avvisava, non essere il medesimo che il 40.mo di Pappo universalizzato, andato un giorno a riscontrare siffatto luogo delle Collezioni Matematiche del medesimo, tosto mi riuscì, come è facile avvenire, di risolvere il problema generale partendo da que' medesimi semplicissimi principj, onde n'era stato elegantemente risoluto il particolare dagli antichi; e comunicatane la soluzione ad un illustre Geometra mio amico, giudicò costui esserne la medesima molto più semplice, e secondo il raffinato gusto degli antichi, che quella del Signor *de Castillon*; il perchè incoraggiato ardii tentare lo snodamento dell' istesso problema concepito sotto aspetti incomparabilmente più universali, ed impiegarmi in questo dilicato, e piacevole lavoro in quelle poche ore, che mi era permesso vacare dalle serie, e dure occupazioni analitiche: ci pervenni seguitando i medesimi principj degli antichi, e ne distesi una breve dissertazione al solo fine di dimostrare con tali esempj, quanto il metodo geometrico degli antichi in alcune circostanze superi in eleganza, semplicità, ed universalità l'istessa moderna analisi: avverandosi alcune volte, che partendo da semplicissimi principj discoverti con raziocinio sintetico, si pervenga alla soluzione di problemi sommamente astrusi, alla quale l'algebra non arriva se non che per tortuosi giri, ancorchè maneggiata da' più valenti analisti.

Ma dopo qualche tempo essendo qui capitati i Commentarj di Pietroburgo per l'anno 1780, mi avvidi, che questo istesso problema ne avea occupati, dopo il grande *Euler*, i rinomati Signori *Fuss* e *Lexel*, de' quali quest' ultimo esamina principalmente se la soluzione di *M.r de la Grange* sia suscettibile di costruzione, come ne faceva dubitare ad *Euler* la prolissità della medesima. Le soluzioni di codesti Signori sono analitiche; ma siccome vengono interamente quasi appoggiate al medesimo principio degli antichi, mi sembra doversi le medesime riputare sintetiche. Del resto devo credere, che i soprallodati Geometri non abbiano voluto prendersi la pena di considerare la fecondità dell' istesso principio, altrimenti non mi sembra che trascurato avrebbero di applicarlo ad altri problemi elegantissimi.

Per vendicare dunque in qualche maniera il metodo geometrico degli antichi dagl' ingiusti torti di alcuni de' moderni Geometri, mi è sembrato convenevol cosa premettere il problema particolar di Pappo colla genuina soluzione degli antichi, di esporre indi la mia soluzione del problema di *Castillon*, e passare man mano a problemi sempre più universali fino al 6.°, che se non erro, è uno de' più semplici, e generali problemi, che fra geometrici possano proporsi.

Prego intanto il savio ed imparziale lettore ad esaminare il filo, e l'universalità de' seguenti problemi, e a giudicare, se di molti de' medesimi si possono dare soluzioni puramente analitiche, cioè senza servirsi di qualche lemma sintetico a tale uopo ricercato. La cosa mi è sembrata se non disperata, almeno difficilissima; ma credo, che ciò unicamente dipenda da mia insufficienza: perciocchè di molti problemi, che un tempo vantavano i Signori Sintetici, ne sono state date delle soluzioni puramente analitiche da sommi Algebristi, nel che specialmente si è distinto l'incomparabile *M.r de* *la Grange*. Ma quello, che principalmente mi fa disperare di una tale impresa, si è l' esserne la soluzione puramente analitica del sopraccitato problema data dal medesimo Sig. *la Grange* cotanto intralciata, che come abbiam detto, ne dubitava *Euler* della possibilità della sua costruzione. Si giudichi da questa quale dovrebbe esser quella degli altri problemi tanto più universali, che noi qui ne rechiamo.

Del resto se di questi problemi si diano delle eleganti soluzioni analitiche da qualche Genio superiore, la conseguenza, che credo ragionevole dedursene, si è di doversi il Geometra esercitare sì nel metodo sintetico, che nell' analitico per servirsene poi, come più gli riesce comodo, nelle occasioni. L' avversione, che hanno alcuni de' migliori Geometri per la sintesi, credo di esser nata dalla poco cura, che i medesimi si han preso di formarsene una giusta idea. Mi sembra che il metodo geometrico degli antichi in altro non consista, che nell' industria di scovrire que' tali principj d' invenzione, d' onde poi quasi da se stesso fluisca il resto della soluzione, sia che si prosegua con raziocinio semplicemente geometrico, sia con un' arte simbolica, come è l' Algebra. Infatti se attentamente si esaminino nel fondo le opere de' sommi Geometri tanto antichi come *Archimede*, *Apollonio*, che moderni, che sono passati pe' migliori sintetici, come *Ugenio*, *Newton*, si ravviserà esser questo stato il loro fare, che forse è l' unico per pervenire alle immortali invenzioni. Ma veniamo al problema.

PROBLEMA I. (*Fig.* 1.)

In un dato cerchio NG *iscrivere un triangolo* DEF, *i di cui lati prolungati passino pe' tre punti* A, B, C *dati di sito, e posti in linea retta.*

O sia (secondo lo stile degli antichi) inclinare *ADB*, e mettere in direzione le rette *EF*, *FC*.

SOLUZIONE.

1. Si unisca *ABC*, alla quale s' intenda condotta per *E* pa-

rallela *EG*, e congiunta *GF* la medesima si distenda in *H*. E perchè l' angolo *EGF* adegua sì l' angolo *EDF*, che l' altro *FHB*, saranno uguali i due angoli *EDF*, *FHB*, e quindi simili i due triangoli *DAB*, *FHB*, che hanno l' angolo *DBA* di comune, e 'l rettangolo *ABH* uguale al dato *FBD*, e con ciò dato il punto *H*.

2. Si tiri per *G* al medesimo circolo la tangente *GK*, che incontri *AC* in *K*.

Sarà dato ancora il punto *K*: imperocchè l' angolo *HGK* è uguale all' altro *GEF*; ma questo a cagione delle parallele *EG*, *AC*, adegua il suo alterno *FCH*; sarà dunque l' angolo *HGK* uguale all' altro *FCH*; ed essendo quindi simili i due triangoli *HGK*, *HFC*, ne sarà il rettangolo *CHK* uguale al dato *FHG*, e conseguentemente essendo dato il punto *K* si ridurrà il problema a condurre dal punto *K* la tangente *KG* al circolo *NG*. Come b. r.

PROBLEMA II. *(Fig. 2.)*

In un dato cerchio NG *iscrivere un triangolo* DEF, *i di cui lati distesi passino pe' tre punti* A, B, C *dati di sito.*

SOLUZIONE.

1. Si unisca *AB*, alla quale s' intenda condotta per *E* parallela *EG* e congiunta *GF* la medesima si protragga in *H*. Sarà dato il punto *H*, dimostrandosi con quella istessa brevità, che nel Prob. I.

2. Similmente unita *HC*, alla medesima si concepisca tirata per E parallela *EI*, e congiunta IG la medesima si distenda in *K*.

Sarà nell' istessa guisa, che prima, dato il punto *K*: imperocchè l' angolo *EIG* costituisce due retti sì coll' angolo *EFG*, che coll' altro *HKG*; dunque l' angolo *EFG* o l' altro *HFC* sarà uguale all' angolo *HKG*, ed essendo quindi simili i due triangoli *HFC*, *HKC*, sarà il rettangolo *KHC* uguale al dato *FHG*, e con ciò dato il punto *K*.

Essendo quindi le rette *EG*, *EI* respettivamente parallele alle

alle rette *HB*, *HC*, sarà l'angolo *IEG* uguale al dato *CHB*, ed unito il raggio *LG* sarà parimenti dato l'angolo *LGK*; e perciò costruendosi sopra di *LK* una porzione di circolo capiente un tale angolo, l'intersezione di questa col circolo *NG* determinerà il punto *G*. Come b. r.

AVVERTIMENTO I.

Si ravvisa, che due siano i passi, che si danno nella soluzione di questo problema, ambedue derivati dal semplicissimo principio degli antichi. Il Sig. *de Castillon* diede invero il primo, ma appligliatosi poi ad altri principj venne a privare la sua soluzione di quella eleganza, di cui era suscettibile.

COMPOSIZIONE (Fig.2.n.2.)

Da questa semplicissima analisi si deduce la seguente costruzione, che ne rapportiamo in grazia della celebrità di siffatto Problema, ed affinchè si vegga non aver bisogno la sua dimostrazione nè di alcun lemma, nè di deduzione ad assurdo.

COSTRUZIONE.

1. Congiunta *AB* si divida la medesima in *H*, sicchè il rettangolo *ABH* pareggi il quadrato della tangente condotta per *B* al circolo *NI*.

2. Similmente unita *HC* si divida la medesima in *K*, sicchè il rettangolo *CHK* sia uguale al quadrato della tangente tirata da *H* al medesimo circolo.

3. Dal punto *H* elevata ad *HB* la perpendicolare *HM*, si costruisca su di *LK* una porzione di circolo capiente l'angolo *CHM*, che intersechi il circolo *NI* in *G*.

4. Si congiunga primieramente la retta *HG*, che tagli il cerchio *NI* in *F*, indi le *BF*, *CF*, che prodotte incontrino di nuovo il medesimo circolo in *D* ed *E*, e finalmente si uniscano i punti *A*, *D* mediante la retta *AD*, che dico passare per *E*, sicchè *DEF* sia il triangolo richiesto. Come b. f.

DIMOSTRAZIONE.

Imperocchè ſi congiungano le rette KGI, EG, EI, e da L ſi cali ſu di KI il perpendicolo LO. E perchè il rettangolo KHC è uguale dalla coſtruzione all' altro FHG, i due triangoli FHC, HKG, che hanno l' angolo GHC di comune, ſaranno fra di loro ſimili, e l' angolo HKG adeguerà l'altro HFC, o ſia EFG, il quale coſtituendo due retti coll' angolo EIG, ſaranno conſeguentemente ancora gli angoli HKI, EIK uguali a due retti, ed EI ne ſarà parallela ad HC.

Inoltre gli angoli GLO, LOG ſono uguali all' altro LGK, o ſia CHM, e tolto di comune l'angolo retto, reſterà l'angolo OLG, o ſia IEG uguale all' angolo CHB; ma dalla dimoſtrazione EI ne giace parallela ad HC, dunque lo ſarà pure EG ad HB, e l'angolo EGF uguaglierà il ſuo alterno FHB. Or dalla coſtruzione il rettangolo HBA è uguale all' altro FBD, dunque i due triangoli FHB, DAB, che hanno l'angolo ABD di comune, ſaranno ſimili, e l'angolo FDA ſarà uguale all'altro FHB; ma ſi è dimoſtrato eſſer queſto uguale all'angolo EGF, dunque ſaranno uguali i due angoli FDA, FGE, e perciò AD paſſerà per E. Come b. d.

AVVERTIMENTO II.

Per brevità tralaſcio i differenti caſi di queſto problema, come pure quando i punti A, B, C, ſono tutti dentro del cerchio; o pure parte dentro, e parte fuori, giacchè le ſoluzioni ſono molte analoghe alla preſente, e di leggieri ſi ravviſa il filo delle medeſime.

PROBLEMA III. (*Fig.* 3, 4, 5)

In un dato cerchio inscrivere un triangolo, di cui due lati passino per due punti dati di sito, e pel terzo quella retta, che col terzo lato costituisce un dato angolo.

SOLUZIONE.

CASO I. Nel circolo *NI* sia da inscriversi il triangolo *DEF*, di cui i lati *DE*, *DF* passino per *A*, e *B*, ed unita *FC* l'angolo *EFC* pareggi un dato.

1. Ad *AB* si conduca parallela *EG*, e congiunta indi la retta *GFH*, sarà dato il punto *H*.

2. Si unisca ora *HC*, e si divida la medesima in *K*, sicchè il rettangolo *KHC* adegui il dato *FHG*: e congiunta *KG* si distenda la medesima in *I*, e si tirino le rette *EI*, *LG*.

E perchè sono simili i due triangoli *HKG*, *HFC*, saranno uguali i due angoli *HKG*, *HFC*; ma queste coll'angolo *EFH*, o sia *EIG* constituisce un dato angolo *EFC*: sarà dunque data la somma de' due angoli *HKI*, *EIK*, e perciò se le rette *EI*, *HC* si producano, dovranno incontrandosi costituire un dato angolo. Or le rette *HC*, *HB* sono date di posizione, dunque ancora *EI* incontrando *AB* deve formare con questa un dato angolo; il quale essendo uguale all'altro *IEG*, a cagione delle parallele *EG*, *AB*, sarà dato un tale angolo *IEG* e conseguentemente l'altro *LGK*, e 'l punto *K*. Come b. r.

CASO II. Debbano ora i lati *DF*, *EF* del triangolo *DEF* passare pe' punti *B*, *C*, ed esser dato l'angolo *DEA*.

1. Per *D* menata *DG* parallela a *BC*, ed unita *GEH*, sarà dato il punto *H*.

2. Si unisca *HA*, e fatto il rettangolo *AHK* uguale al dato *EHG*, si congiunga *KG*, e si produca in *I*, e si tiri la retta *DI*.

Ed essendo simili i due triangoli *GKH*, *EAH*, sarà l'angolo *GKH* uguale all'altro *AEH*; ma questo coll'angolo *HED*, o sia *GID* constituisce un dato angolo *AED*, dunque saranno ancora una data somma i due angoli *DIK*, *HKI*, e seguitando il medesimo raziocinio, che nel CASO I. si ritroverà esser dato il punto *G*.

CASO III. Si richiegga finalmente, che i lati *DE*, *EF* passino per *A*, e *C*, e sia dato l'angolo *DFB*.

La soluzione di questo caso immantinente si rimette a quella del 2.° imperocchè si produca *BF* in *S*, ed uniscasi *ES*: sarà il dato angolo *DFS* uguale all' altro *DES*; ed essendo quindi dato ben anche il suo conseguente *AES*, il problema ridurrassi ad inscrivere il triangolo *SEF*, i di cui lati *SF*, *EF* passino per *B* e *C*, e sia dato l'angolo *SEA*. Ma affinchè si ravvisi l'universalità de' nostri principj, rapportiamone la soluzione secondo i medesimi principj.

1. Alla retta *AC* si conduca per *D* parallela *DG*, e si unisca *GFH*. Sarà dato il punto *H*.

2. Si congiunga *HB*, e fatto il rettangolo *BHK* uguale al dato *FHG*, si unisca *KG*, che tagli di nuovo il circolo in *I*, e tirisi la retta *DI*.

Simili essendo i due triangoli *BFH*, *GKH*, sarà l'angolo *GKH* uguale all' altro *BFH*; ma questo, essendo dato l'angolo *DFB*, differisce dall'angolo *DFG*, o sia *DIG* per una data differenza; sarà dunque ancora data la differenza de'due angoli *GKH*, *DIG*, e perciò le rette *DI*, *HK*, incontrandosi prodotte devono formare un dato angolo, e seguendo il medesimo raziocinio, che ne' due precedenti casi, si troverà il punto *G*. Come b. r.

AVVERTIMENTO (*Fig. 6.*)

Moltissimi altri casi o si risolvono nella medesima maniera, o si rimettono facilmente ai rapportati. Così sia da inscriversi il triangolo *DEF*, sicchè i lati *DE*, *EF* passino per *B*, e *C*, ed unita *DA* dato sia l'angolo *FDA*. In siffatto caso, che affatto sembra rassomigliar agli antecedenti, unita *SE* è dato l'angolo *SEC*, e'l problema si è immediatamente ridotto ad inscrivere il triangolo *DSE*, i di cui lati *DS*, *DE* passino per *A* e *B*, e dato sia l'angolo *SEC* (CASO I.).

PROBLEMA IV.

In un dato cerchio inscrivere un triangolo, di cui un lato passi per un punto dato di sito, e per due altri punti passino quelle rette, che con i due rimanenti lati costituiscono angoli dati.

SOLUZIONE.

CASO I. I punti A, B, C, (*Fig.* 7.) e 'l cerchio EF sian dati di posizione, e sia d' uopo inscrivere in questo un triangolo DEF, sicchè il lato DF passi per B, e dati siano gli angoli DEA, EFC.

1. Unita BC, e fatto il rettangolo CBH uguale al dato FBD, si uniscano le rette DGH, EG.

Si proverà facilmente, che se le rette EG, BH si distendano finchè s'incontrino, debbono formare un dato angolo. Onde per H condotta HR parallela ad EG, dovrà questa costituire con BH quel dato angolo, e perciò esser data di posizione.

2. Si prenda ora in HR ad arbitrio un determinato punto R, e si uniscano le rette DIR, EIS. Sarà evidentemente dato ancora il punto S: imperocchè essendo l'angolo DHR uguale all'altro DGE, o sia DIE, o pure RIS, i due triangoli DRH, RIS saranno simili, e 'l rettangolo SRH uguale all' altro IRD, ch'è dato per essersi preso il determinato punto R. E perciò il problema si rimetterà ad inscrivere il triangolo DIE, i di cui lati DI, EI passino pe' dati punti R ed S, ed unita AE dato sia l' angolo DEA (CAS. II. prob. 3.) Come b. f.

ALTRI CASI. Se sia diversa la posizione de' punti B, C, A, come per esempio il punto A si ritrovi in a, la soluzione è analoga all'esposta; e tralascio i moltissimi casi di questo Problema, che con un poco d' industria si rimettono ai problemi antecedenti, o si risolvono seguendo il metodo, che si è praticato nel CAS. I., come io stesso ho veduto sempre riuscire: v. g. se sia da inscriversi (*Fig.* 8.) il triangolo DEF, il di cui lato DF passi per B, e dati siano gli angoli DEA, *EFC*, questo caso si può ridurre all' esposto producendo le rette *AE*, *CF* in *S* ed *R*, ed unendo *SR*: cioè si dovrà inscrivere il triangolo *RSF*, sicchè siano dati gli angoli *SFB*, *RSA*, ed *RF* passi per *C*. Che se poi non si voglia fare siffatta riduzione, si potranno unire i punti *B*, *C*, e seguire l' istesso raziocinio, che nel CAS. I.

PROBLEMA V. (*Fig.* 9.)

Inscrivere in un dato circolo un triangolo rettilineo, sicchè condotte a due angoli del medesimo tre rette da tre punti dati di sito, queste comprendano co i rispettivi lati angoli dati.

SOLUZIONE.

Agevolmente rimetto tutti i possibili casi di questo Problema agli antecedenti, come si ravvisa da ciò che siegue.

CASO I. Nel cerchio *RS* sia d' uopo inscrivere il triangolo *DEF*, sicchè unite le rette *AE*, *BF*, *CF*, siano dati gli angoli *DEA*, *DFB*, *EFC*.

Prodotta *BF* in *S*, ed unita *ES*, sarà l'angolo *DES* uguale al dato *DFS*; ma l' intero angolo *DEA* è dato, dunque ne sarà data la loro differenza, cioè l' angolo *SEA*, e con ciò il problema sarassi ridotto ad inscrivere il triangolo *SEF*, il di cui lato *SF* passi per *B*, e sian dati gli angoli *DEA* *EFC*; cioè si rimette al I. CASO Prob. anteced.

CASO II. Debbano essere dati gli angoli *DEA*, *EFB*, *DFC*.

Si distenda *CF* in *R*, e si congiunga *ER*: sarà l' angolo *RED* uguale al dato *DFR*; ma è dato ancora l'angolo *DEA*, dunque sarà data la somma de' medesimi, ch' è l' angolo *REA*, e'l problema si rimette ad inscrivere il triangolo *REF* sicchè *RF* passi per *C*, e dati siano gli angoli *EFB*, *REA*.

ALTRI CASI. Se la posizione de' punti *A*, *B*, *C* comunque si muti, o pure si cangi la grandezza de' dati angoli, le riduzioni, che per altro di per se stesse si presentano, poco vengono a differire; onde per questa ragione tralascio moltissimi altri casi, potendo per questi servir di norma i già esposti.

AVVERTIMENTO (*Fig.* 10.)

Il chiariſſimo Sig. *Lexel* verſo la fine della ſopraccitata Memoria dice, che avendoſi propoſto il problema d' inſcrivere in un dato cerchio un quadrilatero, di cui due lati oppoſti paſſaſſero per un dato punto, e gli altri due per un altro, rinvenne che il medeſimo in generale era piucchè determinato; ma che in un certo caſo diveniva indeterminato; il che, ſecondo lui, diſcovre una proprietà niente indegna della conſiderazione de'Geometri. Comunque la coſa ſi ſia, mi ſembra che una tale proprietà quaſi di per ſe ſteſſa fluiſca dal ſoprallodato principio degli antichi: infatti la medeſima ſi può trovar col ſeguente ſempliciſſimo raziocinio.

Sia *DCFE* un quadrilatero inſcritto nel cerchio, i di cui lati oppoſti *DC*, *FE* prodotti ſi uniſcano in *A*, e gli altri due *CF*, *DE* in *B*. Uniſcaſi al ſolito *AB*, e ſe li conduca per *C* parallela *CG*; ed unita *GE*, ſi diſtenda la medeſima in *H*. Il rettangolo *ABH* adegua il quadrato della tangente condotta da *B* al cerchio, o ſia (unito il centro *L* col punto *B* mediante la retta *LNB*) alla differenza de' quadrati di *LB*, e di *LN*. Similmente unita *AL* dev'eſſere il rettangolo *BAH* uguale alla differenza de' quadrati di *AL*, e di *LM*: dunque ſarà l'intero quadrato di *AB* uguale ai due quadrati di *LB*, e di *AL* meno il doppio quadrato di *LM*. Ma ſi ſa, che abbaſſato il perpendicolo *BP* i quadrati di *AL*, ed *LB* devono ſuperare quello di *AB* pel doppio rettangolo *ALP*. Sarà dunque il doppio quadrato del raggio uguale al doppio rettangolo *ALP*, ed il rettangolo *ALP* uguale al quadrato del raggio *LM*, e con ciò il raggio medio proporzionale fra *LA* ed *LP*, ch'è la proprietà del quadrilatero ſcoverta dal Sig. *Lexel*. (*Fig.* 11.)

Mi ſembra che uno de' problemi molto eleganti ſia quello dell'inſcrizione nel cerchio di un quadrilineo, i di cui lati diſteſi paſſino per punti dati: problema, di cui non trovo fatto menzione, ma che ſi riſolve con gran ſemplicità mediante il principio, che ci è ſtato ſolamente di ſcorta in queſte noſtre ricerche. Infatti nel circolo *GI* ſi deſideri inſcrivere il quadrilatero *MNQP*, i di cui lati prodotti paſſino pei punti A, B, C, D dati di posizione. Unite le rette AB, CD, che prodotte si unifcano in X, si menino per M respettivamente alle medesime le parallele MI, MG, e si unifcano le rette IPH, GPK. Saranno dati i punti A, e K. Ma l' angolo HPK uguale dev' essere ad IPG, o sia IMG, o pure al dato CXA; dunque si è trovato il punto P, che bisognava trovare.

Ma vediamo di risolvere il seguente generalissimo Problema, affinchè non si desideri la soluzione di alcuno elegante quesito in sissatta materia.

(*Fig.*12.) PROBLEMA VI. UNIVERSALE.

In un dato cerchio inscrivere una figura rettilinea di un qualunque dato numero di lati, i quali distesi passino per altrettanti punti dati comunque di sito.

SOLUZIONE.

Dati sian di posizione i punti A, B, C, D, ecc., e'l circolo SR: e sia di mestieri nel medesimo inscrivere il poligono $MNOPQ$ ecc., i di cui lati prodotti passino per que' dati punti.

1. Unifcasi AB, ed alla medesima condotta intendasi per M parallela MR, e congiungasi ROH.

2. Si congiunga HC, e menatavi per R parallela RS, si unifca SPK.

3. Uniti i punti K, D mediante la retta DKX, si conduca alla medesima per S parallela ST, e si congiunga TQX.

4. Si unifca EXY, e condottavi per T parallela TU, si unifca ben anche UMY.

E così si seguiti innanzi se vi sono più punti dati.

Immediatamente si vedrà esser dati gli angoli, MRS, RST, STV ecc. del poligono $MRSTV$ ecc., come quelli che pareggiano i dati AHK, HKX, KXY ecc. Se dunque è pari il numero de' lati MR, RS, ST, TV ecc. di esso poligono (il che addiviene quando la figura da inscriversi ha un numero dispari di lati) comprendendo angoli dati il primo lato MR col 2.° RS, il 3.° ST col 4.° TU, ecc. sarà dato l' intero arco

arco $MRSTU$ ecc., e quindi UM che n'è sottesa, ed il punto M che basta a determinare tutti gli altri necessarj per l'inscrizione della suddetta figura.

Che se la figura $MNOPQ$ ecc. da inscriversi abbia un numero pari di lati, allora quello delle rette MR, SR, ST, TU ecc. sarà dispari, e quindi non verrà ad essere MU la sottesa di un dato arco; ma essendo intanto pari il numero delle rette RS, ST, TU ecc. sarà dato l'arco $RSTU$ ecc., e quindi l'angolo RMU; e distesa YMU in F, ne sarà dato ancora l'angolo YFA a cagione delle parallele RM, AB, onde sarà ancora in questo caso determinato il punto M. Come b. f.

AVVERTIMENTO I.

Se il poligono $MRSTU$ ecc. venga ad angoli rientranti, il raziocinio per la determinazion del punto M è evidentemente il medesimo.

AVVERTIMENTO II.

Sarebbe veramente cosa desiderabile, che qualche perspicace Algebrista si prendesse la pena di rinvenire una soluzione puramente analitica di un sì elegante problema piano, che nella semplicità non la cedesse alla sintetica già rapportata.

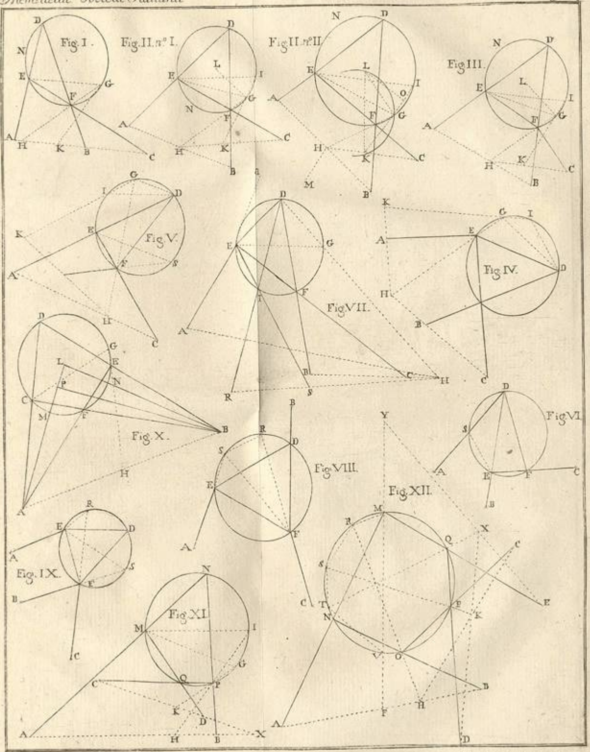
Fig. I.
Fig. II. n.° I.
Fig. II. n.° II.
Fig. III.
Fig. V.
Fig. VII.
Fig. IV.
Fig. X.
Fig. VI.
Fig. VIII.
Fig. XII.
Fig. IX.
Fig. XI.