DELLA FIGURA DEL GORGO

Che la Natura forma in un vaso cilindrico ripieno d' acqua, nel centro del cui fondo sia aperto un foro circolare.

Del Sig. Co. GIORDANO RICCATI.

I. NEll' Annotazione allo Schediasma XXXVI. del Co. *Jacopo Riccati* mio Padre contenuto nel Tomo III. delle sue Opere ho determinato la figura del gorgo $SMEFNT$ (*Fig. I.*), che si genera girando intorno all' asse ZG la curva SME, la cui equazione $\frac{y\sqrt{g}}{\sqrt{x}}$, nella quale le sezioni circolari $MN=y$, $EF=c$, $ST=b$, ed inoltre le linee $IG=g$, $IZ=\frac{gc^2}{b^2}$, $IO=x$. Ho dedotta questa figura dalla supposizione, che la velocità dell' acqua nel gorgo si acceleri colla legge dei gravi cadenti per la linea del piombo. Chiamata u la velocità, colla quale l' acqua sgorga dal foro, ho dimostrato, che la forza viva dell' acqua contenuta nel gorgo s' eguaglia a $\left(\frac{2}{3}gc+\frac{\frac{1}{7}gc^4}{b^3}\right).\frac{u^2}{2}$.

II. Sia $HG=a$ l' altezza del vaso, $HQ=s$ lo spazio minimo, per cui è discesa l' acqua, e per conseguenza l' acqua uscita dal vaso sia bs, la quale si è conformata in un cilindro cz, la cui base $EF=c$, e la lunghezza $z=\frac{bs}{c}$. Se nella citata Annotazione, che suppone minimo il foro $EF=c$, non avessi trascurato alcune quantità relativamente nulle, ed avessi ridotto le formole alle misure conosciute, sarei pervenuto alle due seguenti

$$\frac{\sqrt{(4eabs)}}{\sqrt{\left(\frac{ac^2-gc^2-sc^2}{b}+bs+\frac{2}{3}gc+\frac{\frac{1}{7}gc^4}{b^3}\right)}}=u$$

$$\frac{\sqrt{(4\varepsilon acz)}}{\sqrt{\left(\frac{ac^2-gc^2}{b}-\frac{zc^3}{b^2}+cz+\frac{2}{3}gc+\frac{\frac{1}{3}gc^4}{b^3}\right)}}=u,$$

nelle quali ε ſignifica lo ſpazio ſcorſo in un minuto ſecondo da un grave, che liberamente diſcende. Dalla ſovraſcritta ſeconda formola ſi comprende, che ſe l' altezza $IG=g$ del gorgo nell' ipoteſi del foro c minimo non è infinitamente minore di z, l' acqua ch' eſce dal foro non giungerà mai ad acquiſtare la velocità $\sqrt{(4\varepsilon a)}$ propria di un grave diſceſo dall' altezza $HG=a$. L' eſperienza c' inſegna, che l' altezza del gorgo è finita, ed oltre a ciò ſe foſſe infiniteſima, il moto dell' acqua incontrerebbe una gran reſiſtenza pel fregamento del fondo del vaſo.

III. Biſogna dunque aſſegnare al gorgo una figura, da cui s' inferiſca nell' ipoteſi del foro minimo, che a z infinitamente picciola corriſponda $u=\sqrt{(4\varepsilon a)}$, quantunque g ſia finita. Tagliata $Oo=dx$, e chiamata W la velocità confacente alla ſezione $MN=y$, ne riſulta la forza viva dello ſtrato d' acqua ydx uguale a $ydx.\frac{W^2}{2}$. Ma ſtando le velocità u, W in ragione inverſa delle ſezioni $EF=c$, $MN=y$, ci ſi preſenta l' analogia $y:c::u:W$, da cui ſi deduce il valore di $W=\frac{cu}{y}$, che ſoſtituito mi dà la predetta forza viva $=\frac{c^2dx}{y}.\frac{u^2}{2}$, e conſeguentemente la forza viva della porzione $SMNT$ dell' acqua contenuta nel gorgo $=\frac{c^2u^2}{2}\int\frac{dx}{y}$. Noto che la velocità u ſi dee conſiderare coſtante, cercandoſi la forza viva dell' acqua nel gorgo, mentre alla ſezione $EF=c$ compete la velocità u. Avremo pertanto generalmente le due formole

$$\frac{\sqrt{(4\varepsilon abs)}}{\sqrt{\left(\frac{ac^2-gc^2-sc^2}{b}+bs+c^2\int\frac{dx}{y}\right)}}=u$$

$$\frac{\sqrt{(4\varepsilon acz)}}{\sqrt{\left(\frac{ac^2-gc^2}{b}-\frac{zc^3}{b^2}+cz+c^2\int\frac{dx}{y}\right)}}=u$$

Se ſuppoſto minimo il foro c, ſia per eſempio $z=c^{1:2}$, dovranno in riguardo a $cz=c^{3:2}$ traſcurarſi i termini $\frac{ac^2-gc^2}{b}-\frac{zc^3}{b^2}$, e quando anche $c^2\int\frac{dx}{y}$ ſia infinitamente minore di $cz=c^{3:2}$, ne proverrà $u=\sqrt{(4\varepsilon a)}$.

IV. Afferma l' Ab. *Vincenzo Riccati* mio fratello nella Lettera XIX. intorno ai *Principj della Meccanica*, che per mancanza di dati non ci è permeſſo di determinare la figura del gorgo. Or ecco il dato da me ſcoperto, col mezzo del quale ſtabiliſco la mentovata figura. La gravità fa ogni sforzo, acciocchè l' acqua cz, che ſcaturiſce dal foro, acquiſti la maſſima velocità u. S' otterrà ciò, quando eſſendo date l'altre grandezze, ſia minima $\int\frac{dx}{y}$. La natura dunque preſceglierà quella figura di gorgo, riſpettivamente a cui ſia minima $\int\frac{dx}{y}$, e per conſeguenza ancora tale $\frac{dx}{y}$, formandoſi da infiniti elementi minimi un minimo tutto.

V. Fa di meſtieri adunque il ricorrere al metodo delle *Variazioni*. Sia SME (*Fig.* 2.) la curva, che girandoſi intorno all' aſſe ZG generi la cercata figura del gorgo $SMEFNT$, e ſieno come ſopra le ſezioni circolari $ST=b$, $EF=c$, $MN=y$, e le linee $ZG=g$, $ZO=x$, $Oo=dx$. Le variazioni della curva SME vengano determinate dalla curva SiE, e la variazione della ſezione $MN=y$ ſi eguaglierà alla zona circolare deſcritta coi raggi OM, Oi, la cui larghezza Mi. Dinotando le variazioni col ſegno δ, ſarà la predetta variazione $=\delta y$. Segnata di più $Oo=dx$, da $oK=\delta dx$ venga eſpreſſa la ſua variazione. La proprietà di minimo, che compete all' elemento $\frac{dx}{y}$, eſige che ſia nul-

la

la la sua variazione, onde s' abbia $\frac{dx}{y} = \frac{dx + \delta dx}{y + \delta y}$. Ne segue per conseguenza, che debba avverarsi l' analogia $dx : \delta dx :: y : \delta y$, e che perciò ne risulti $y\delta dx = dx\delta y$. Ma si sa essere $\delta dx = d\delta x$; dunque $yd\delta x = dx\delta y$. Di questa formola ne faremo uso in progresso al numero VII.

VI. Ripigliata per mano la formola $\frac{c^2 dx}{y}$, ne prendo le differenze espresse per δ indice delle variazioni, e mi si presenta $\frac{c^2 \delta dx}{y} - \frac{c^2 dx \delta y}{y^2} = 0$, e conseguentemente ancora $\int \frac{c^2 \delta dx}{y} - \int \frac{c^2 dx \delta y}{y^2} = 0$, ovvero $\int \frac{c^2 d\delta x}{y} - \int \frac{c^2 dx \delta y}{y^2} = 0$, ponendo in luogo di δdx la grandezza eguale $d\delta x$. Pel metodo delle integrazioni per parti si trova $\int \frac{c^2 d\delta x}{y} = \frac{c^2 \delta x}{y} + \int \frac{c^2 dy \delta x}{y^2}$, e perciò l' equazione precedente si cangia così

$$(A) \int \left(\frac{c^2 dy}{y^2} . \delta x \right)$$
$$- \int \left(\frac{c^2 dx}{y} . \delta y \right)$$
$$+ \frac{c^2}{y} . \delta x = 0$$

Da questa formola si caverà primieramente l' equazione indefinita

$$(B) \frac{c^2 dy}{y^2} . \delta x$$
$$- \frac{c^2 dx}{y^2} . \delta y = 0$$

ed in oltre l' equazione determinata

$$(C) \frac{c^2}{y} . \delta x = 0 .$$

VII. Per liberarci frattanto nell' equazioni trovate dalle differenze indeterminate δx, δy, esamino se per la natura del Problema v' abbia fra loro qualche relazione. E primieramente per la formola (B) trovo $\frac{c^2 dy\delta x}{y^2} = \frac{c^2 dx\delta y}{y^2}$, e dividendo per $\frac{c^2}{y^2}$, $dy\delta x = dx\delta y$. Ma al fine del numero V. ho scoperto $yd\delta x = dx\delta y$; dunque $dy\delta x = yd\delta x$, e perciò $\frac{dy}{y} = \frac{d\delta x}{\delta x}$, ed integrando $\log. y = \log. \frac{\delta x}{dx}$, prendendo dx in qualità di costante. Quindi $y = \frac{\delta x}{dx}$, e finalmente $\delta x = ydx$. Si sostituisca questo valore nella formola $dy\delta x = dx\delta y$, e si troverà $ydydx = dx\delta y$, e poscia $\delta y = ydy$. Per la qual cosa sono resi noti i valori delle due differenze indeterminate.

$$\delta x = ydx$$

$$\delta y = ydy$$

Scorgeremo a chiaro lume essere stati rettamente determinati i valori di δx, δy, se differenziando la formola $\delta x = ydx$, considerata costante dx, come s' è fatto nella predetta determinazione, onde s' abbia $d\delta x = dxdy$, si sostituiscano i valori di $d\delta x$, e di δy nell' equazione $yd\delta x = dx\delta y$ scoperta al fine del numero V. Effettuata la sostituzione, troveremo giustamente $ydydx = ydydx$.

VIII. Surrogati i valori di δx, δy nella formola (A), ci si affaccierà

$$(A) \int\left(\frac{c^2 dy}{y^2}.ydx\right) - \int\left(\frac{c^2 dx}{y^2}.ydy\right) + \frac{c^2}{y}.ydx = 0.$$

Si faccia la riflessione, che gli elementi delle due sommatorie sono eguali a due quantità indentiche affette da segni contrarj, e che perciò l' aggregato delle due sommatorie esſer dee $=0$. E poichè la ſomma dei tre termini della formola (A') eſſer dee uguale a nulla, addiviene che ſia il terzo termine $c^2dx=0$. Il perchè ſarà nullo l' elemento della ſeconda ſommatoria $\frac{c^2dx}{y^2}.ydy=0.\frac{dy}{y}$, e per conſeguenza anche quello della prima.

Avverto in oltre, che dalla formola determinata (C) $\frac{c^2}{y}.\delta x=c^2dx=0$ ſi raccoglie $x=\frac{K}{c^2}$. Ora x ha due valori coſtanti, cioè a dire $x=0$ nel punto Z, $x=g$ nel punto G; e quindi ſi avrà $K=\left\{\begin{matrix} c^2.0 \\ c^2.g \end{matrix}\right.$. Ai due valori di $x=\left\{\begin{matrix} 0 \\ g \end{matrix}\right.$ corriſpondono altrettanti valori di $y=\left\{\begin{matrix} b=ST \\ c=EF \end{matrix}\right.$.

IX. Stabiliſce il ch. Sig. *Luigi de la Grange* nel Tomo II. dell' Accademia di Turino pag. 176, che ſe δx, δy ſono aſſolutamente indipendenti l' una dall' altra, ſi faranno i coefficienti di ciaſcuna d' eſſe uguali a zero. Benchè non ſi avveri queſta indipendenza nel noſtro caſo, ci è nulladimeno permeſſo di ſupporre nella formola (B), che ſieno $\frac{c^2dx}{y^2}=0$, $\frac{c^2dy}{y^2}=0$, ma non già congiuntamente, onde quando $\frac{c^2dx}{y^2}=0$, ſia parimente $\frac{c^2dy}{y^2}=0$. Vediamo coſa ſuccederebbe ammettendo, che $\frac{c^2dx}{y^2}$, $\frac{c^2dy}{y^2}$ ſi riferiſcano in proporzione finita. Se $\frac{c^2dx}{y^2}=0$, ſarà parimente $\frac{Fc^2dx}{y^2}=0$, e perciò ſecondo la premeſſa ſuppoſizione $\frac{c^2dy}{y^2}=\frac{Fc^2dx}{y^2}$, e dividendo per $\frac{c^2}{y^2}$, $dy=Fdx$, ed integrando $y+H=Fx$. Si rifletta, che quando $x=ZG=g$, è $y=EF=c$. Il perchè $c+H=Fg$, e quindi $H=Fg-c$. Fatto uſo di queſto valore, ſi ſcoprirà $y+Fg-c=Fx$. E poichè quando $x=0$, eſſer dee $y=ST=b$, ne riſulta $b+Fg-c=0$, e conſeguentemente $\frac{b-c}{g}=-F$. Troveremo dunque finalmente $y-\left(\frac{b-c}{g}\right).g-c=-\left(\frac{b-c}{g}\right).x$, ossia $\left(\frac{b-c}{g}\right).(g-x)+c=y$, la qual formola si riduce a quest' altra $\left(\frac{b-c}{g}\right).\left(\frac{bg}{b-c}-x\right)=y$. Posti i raggi $SZ=r$, $EG=q$, $MO=p$, onde sieno $b=nr^2$, $c=nq^2$, $y=np^2$, ci si presenterà $\left(\frac{r^2-q^2}{g}\right).\left(\frac{gr^2}{r^2-q^2}-x\right)=p^2$, equazione alla parabola conica, il cui parametro $=\frac{r^2-q^2}{g}$, che girata intorno all' asse ZG genera il gorgo.

X. Ripigliata la formola $\left(\frac{b-c}{g}\right).\left(\frac{bg}{b-c}-x\right)=y$, sostituisco nella formola $\frac{c^2u^2}{2}.\int\frac{dx}{y}$ dinotante la forza viva dell'acqua contenuta nella porzione di gorgo $SMNT$ in cambio di y lo scoperto valore, e trovo

$$\frac{gc^2}{b-c}.\frac{u^2}{2}\int\frac{dx}{\frac{bg}{b-c}-x}=\frac{gc^2}{b-c}.\frac{u^2}{2}.\log.\frac{K}{\frac{bg}{b-c}-x}$$

: ma quando $x=ZO=0$, $\log.\frac{K}{\frac{bg}{b-c}-x}=0$; perchè in tal caso è nulla la forza viva dello strato nullo $SMNT$; dunque supponendosi $l1=0$, dovrà essere $K=\frac{bg}{b-c}$, e conseguentemente

$$\frac{gc^2}{b-c}.\frac{u^2}{2}.\log.\left(\frac{\frac{bg}{b-c}}{\frac{bg}{b-c}-x}\right)$$

sarà la forza viva dell' acqua contenuta nella porzione di gorgo $SMNT$. Ponendo $x=g=ZG$, avremo la forza viva del gorgo intero

$$SMEFNT = \frac{gc^2}{b-c}.\frac{u^2}{2}.\log.\left(\frac{\frac{bg}{b-c}}{\frac{bg}{b-c}-g}\right) = \frac{gc^2}{b-c}.\frac{u^2}{2}.\log.\frac{b}{c},$$ la

qual dovrebbe esser minima nella supposizione, che sieno date le quantità b, c, g, u.

XI. Nelle due formole generali, che si leggono al numero III., si sostituisca in vece di $c^2\int\frac{dx}{y}$ il rinvenuto valore $\frac{gc^2}{b-c}.\log.\left(\frac{b}{c}\right)$, e prenderanno esse il seguente aspetto

$$\frac{\sqrt{(4\epsilon abs)}}{\sqrt{\left(\frac{ac^2-gc^2-sc^2}{b}+bs+\frac{gc^2}{b-c}.\log.\left(\frac{b}{c}\right)\right)}}=u$$

$$\frac{\sqrt{(4\epsilon acz)}}{\sqrt{\left(\frac{ac^2-gc^2}{b}-\frac{zc^3}{b^2}+cz+\frac{gc^2}{b-c}.\log.\left(\frac{b}{c}\right)\right)}}=u$$

Ho già osservato al numero III. che supposto minimo il foro $EF = c$, e fatto $z = c^{1:2}$, svaniscono i termini $\frac{ac^2-gc^2}{b}$ $-\frac{zc^3}{b^2}$, ed ora fa d' uopo provare, ch' è parimente trascurabile il termine $\frac{gc^2}{b-c}.\log.\left(\frac{b}{c}\right)$. Per la natura della logistica il logaritmo d' un numero infinito $= \frac{b}{c}$ è immensamente minore d' esso numero. Dimostro presentemente che $\log.\left(\frac{b}{c}\right)$ è più picciolo infinitamente di $\frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$. Si prendano fra 1, e $\frac{b}{c}$ tre medie continue proporzionali $\frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$, $\frac{b^{1:2}}{c^{1:2}}$,

$\frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$, e se fosse $\log.\left(\frac{b}{c}\right)=\frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$, ai detti numeri dovrebbero adattarsi i logaritmi $\frac{1}{4}.\frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$, $\frac{1}{2}.\frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$, $\frac{3}{4}.\frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$, e perciò il numero infinito $\frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$, ed il logaritmo corrispondente $\frac{1}{4}.\frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$ spetterebbero ad un infinito dello stesso grado, il che si oppone alla natura della logaritmica. Ma quantunque fosse $\log.\left(\frac{b}{c}\right)=\frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$, e $\frac{gc^2}{b-c}.\log.\left(\frac{b}{c}\right)=\frac{gc^2}{b-c}.\frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}=\frac{gb^{1:4}}{b-c}.c^{7:4}$, questo termine merita di esser negletto a confronto di $cz=c^{1:2}$; dunque tanto più dovrà trasandarsi la quantità immensamente minore $\frac{gc^2}{b-c}.\log.\left(\frac{b}{c}\right)$. Per la qual cosa quando l' acqua uscita dal foro avrà scorso uno spazio $z=c^{1:2}$ proporzionale al diametro del foro stesso, sarà essa pervenuta alla velocità $u=\sqrt{(4ga)}$, benchè sia finita l' altezza g del gorgo.

XII. Se frattanto il foro $EF=c$ fosse infinitesimo, l' acqua non uscirebbe dal vaso. Fa di mestieri adunque al minimo matematico sostituire il minimo foro fisico, e s' otterrà che l' acqua dopo avere scorso fuori del buco il picciolo spazio z, abbia fatto acquisto d' una velocità, che molto si accosterà a $\sqrt{(4ga)}$. Sia per esempio $b=3600$, $c=1$, il che richiede che i diametri di queste sezioni circolari si corrispondano in ragione di $60:1$. Sia in oltre $a=60$, $g=40$, $z=1$. Avremo l' iperbolico $\log.\left(\frac{b}{c}\right)=\log. 3600$ $=8,18869$. Nella formola esprimente la velocità u per z, e per le costanti si può fisicamente negligere $-\frac{zc^3}{b^2}$, e supporre $b-c=b$. Sarà dunque sostituendo i valori stabiliti

$$\frac{\sqrt{(4ga)}}{\sqrt{\left(\frac{20}{3600}+1+\frac{40}{3600}.8,18869\right)}}=u\text{, e perciò}$$

$\frac{V(4\varepsilon a).60}{V(3947,5476)} = V(4\varepsilon a).\frac{60,00}{62,82} = u$,

e proſſimamente $V(4\varepsilon a).\frac{21}{22} = u$. Il perchè nell' eſempio propoſto dopo che l' acqua uſcita pel foro ha ſcorſo lo ſpazio $z = 1$, la ſua velocità cala ſoltanto la vigeſima ſeconda parte da quella d' un grave verticalmente diſceſo dall' altezza $a = 60$. Se aveſſi ſuppoſto minore l' altezza del gorgo ponendo $g = 20$, avrei trovato $V(4\varepsilon a).\frac{60,00}{61,67} = u$, e proſſimamente $V(4\varepsilon a).\frac{36}{37} = u$, dimodochè la velocità u ſi approſſimerebbe maggiormente a $V(4\varepsilon a)$.

XIII. Ora ecco ciò che ho raccolto dalla mentovata ſuppoſizione, che $\frac{c^2dx}{y^2}$, $\frac{c^2dy}{y^2}$ ſi riferiſcano in proporzione finita. Ma per dir il vero la forza viva dell' acqua contenuta nel gorgo generato dalla porzione della parabola SME, che s' è girata intorno all' aſſe ZG, non è la minima. Mi ſerva di prova il cercare la forza viva dell' acqua, che riempie il gorgo prodotto dal girare la porzione d' elliſſe conica SME intorno all' aſſe ZG. Ritenute le ſopra ſtabilite denominazioni, onde ſieno le ſezioni circolari $ST = b = nr^2$, $EF = c = nq^2$, $MN = y = np^2$, e di più il ſemiaſſe $ZV = e$, l' altezza del gorgo $ZG = g$, l' aſſiſſa $ZO = x$, la ſua fluſſione $Oo = dx$, oſſervo che per la natura dell' elliſſe abbiamo $\frac{r^2}{e^2}.(e^2 - x^2) = p^2 = \frac{y}{n}$, e quindi $\frac{nr^2}{e^2}.(e^2 - x^2) = b.(\frac{e^2 - x^2}{e^2}) = y$. Ma quando $y = c = EF$, è $ZG = x = g$; dunque $b.(\frac{e^2 - g^2}{e^2}) = c$, e perciò $e^2 = \frac{bg^2}{b - c}$, $e = g.\frac{Vb}{V(b-c)}$. Nella formola generale $\frac{c^2u^2}{2}\int\frac{dx}{y}$ eſprimente la forza viva dell' acqua contenuta nella porzione $SMNT$ del gorgo ſi collochi in cambio di y il rinvenuto valore, e ci ſi preſenterà la detta forza viva $=\frac{e^2c^2}{b}\cdot\frac{u^2}{2}\int\frac{dx}{e^2-x^2}=\frac{ec^2}{2b}\cdot\frac{u^2}{2}\int\left(\frac{dx}{e+x}+\frac{dx}{e-x}\right)$ $=\frac{ec^2}{2b}\cdot\log.\left(\frac{e+x}{e-x}\right)\cdot\frac{u^2}{2}$. Non c' è bisogno di aggiunger costante; perchè supponendosi $\log. 1=0$, quando nel sito ST l' assissa $ZO=x=0$, ne risulta rettamente la forza viva $\frac{gc^2}{2b}\cdot\log. 1\cdot\frac{u^2}{2}=0$.

Sostituito nella nostra formola in luogo di e il suo valore $g\cdot\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}}$, scopriremo la mentovata forza viva

$$=\frac{gc^2}{2b}\cdot\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}}\cdot\log.\left(\frac{\frac{g\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}}+x}{\frac{g\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}}-x}\right)\cdot\frac{u^2}{2},$$

e posta $x=ZG=g$, ne proverrà la forza viva di tutta l'acqua contenuta nel gorgo $=\frac{gc^2}{2b}\cdot\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}}\cdot\log.\left(\frac{\frac{g\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}}+g}{\frac{g\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}}-g}\right)\cdot\frac{u^2}{2}$

$=\frac{gc^2}{2b}\cdot\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}}\cdot\log.\left(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{(b-c)}}{\sqrt{b}-\sqrt{(b-c)}}\right)\cdot\frac{u^2}{2}$, la qual formola vale per qualunque misura del foro c. Che se lo stesso sia minimo o matematicamente, o anche fisicamente in riguardo a b; sarà $\sqrt{(b-c)}=\sqrt{b}-\frac{c}{2\sqrt{b}}$, e la formola si modificherà nel modo seguente

$$\frac{gc^2}{2b}\cdot\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\frac{c}{2\sqrt{b}}}\cdot\log.\left(\frac{2\sqrt{b}-\frac{c}{2\sqrt{b}}}{\frac{c}{2\sqrt{b}}}\right)\cdot\frac{u^2}{2}$$

$=\frac{gc^2}{2b}\cdot\frac{2b}{2b-c}\cdot\log.\left(\frac{4b-c}{c}\right)\cdot\frac{u^2}{2}=\frac{gc^2}{2b}\cdot\log.\left(\frac{4b}{c}\right)\cdot\frac{u^2}{2}$. Una tal

forza

forza viva è minore di quella $\frac{gc^2}{b} . \log.\left(\frac{b}{c}\right)$ determinata al numero X; imperciocchè se il foro c è infinitesimo, $\log.\left(\frac{4b}{c}\right) = \log.\left(\frac{b}{c}\right) + \log. 4$ si eguaglia a $\log.\left(\frac{b}{c}\right)$, e la forza viva dell' acqua nel gorgo ellittico è la metà di quella nel gorgo parabolico. Che se il foro è minimo fisicamente, la prima forza viva sarà alquanto maggiore della metà della seconda.

XIV. Supposti come sopra al numero XII. $b = 3600$, $c = 1$, $a = 60$, $g = 40$, $z = 1$, ed essendo $\log.\left(\frac{4b}{c}\right) = 9,57495$, si troverà $\dfrac{\sqrt{(4ga)}}{\sqrt{\left(\frac{20}{3600} + 1 + \frac{20 . 9,57495}{3600}\right)}} = u$, e ridotto il computo, $\sqrt{(4ga)} . \frac{60}{61,737} = u$, o prossimamente $\sqrt{(4ga)} . \frac{35}{36} = u$. Che se fosse $g = 20$, ne risulterebbe $\dfrac{\sqrt{(4ga)}}{\sqrt{\left(\frac{40}{3600} + 1 + \frac{10 . 9,57495}{3600}\right)}} = u$, e fatte le necessarie operazioni, $\sqrt{(4ga)} . \frac{60}{61,12} = u$, o prossimamente $\sqrt{(4ga)} . \frac{54}{55} = u$. Le scoperte velocità sono maggiori di quelle, che assegnati alle costanti gli stessi valori, abbiamo rinvenuto nella supposizione del gorgo parabolico; e per conseguenza col mezzo del gorgo ellittico si ottiene una più copiosa uscita d' acqua dal vaso,

XV. Ella è agevole da farsi la riflessione, che quanto più sono grandi le sezioni circolari $MN = y$, altrettanto cala la forza viva dell' acqua nel gorgo. Per restar convinti d' una tal verità, basta il considerare la formola $c^2 \cdot \int \left(\frac{dx}{y}\right) \cdot \frac{u^2}{2}$. Ascenderebbero adequatamente al massimo le dette sezioni, se la curva SME accettasse l'equazione $\frac{r^{\infty}}{e^{\infty}} \cdot (e^{\infty} - x^{\infty}) = p^{\infty}$.

Non tralascio di notare, che la formola $\frac{\sqrt{(4\epsilon abz)}}{\sqrt{(ac+bz)}} = u$ determinata nel Problema I. della mentovata Annotazione, la quale dipende dalla supposizione, che sia trascurabile la forza viva dell' acqua nel gorgo, è quella appunto, che con somma approssimazione, e salva la legge di continuità, conviene coll' equazione $\frac{r^{\infty}}{e^{\infty}} \cdot (e^{\infty} - x^{\infty}) = p^{\infty}$. E vaglia il vero, sintanto che (*Fig.* 2.) $ZO = x$ cala da $ZV = e$ per una quantità finita, ed anche infinitesima dentro certi limiti, come vedremo, sarà sempre x^{∞} trascurabile rispettivamente ad e^{∞}, e perciò essendo $SZ = r = MO = p$, le due linee SC, SM coincideranno, e si potrà supporre, che il gorgo principj ad una distanza picciolissima dal punto G, e che conseguentemente sia trascurabile la forza viva dell' acqua, che lo riempie. Prescindendo adunque dalle resistenze, la sovrascritta formola si dee preferire; perchè, paragonata coll' altre, ci dà più grande il valore della velocità u.

XVI. Sia come sopra al numero XII. $a = 60$, $b = 3600$, $c = 1$, $z = 1$, e dopo che l' acqua uscita dal foro avrà scorso lo spazio $z = 1$, sarà fornita della velocità $\sqrt{(4\epsilon a)} \cdot \frac{60}{\sqrt{(3660)}} = \sqrt{(4\epsilon a)} \cdot \frac{120}{121} = u$, la qual è maggiore delle due $\sqrt{(4\epsilon a)} \cdot \frac{21}{22} = u$, $\sqrt{(4\epsilon a)} \cdot \frac{36}{37} = u$ dipendenti dalla figura parabolica del gorgo registrate al predetto numero XII., e delle altrettante $\sqrt{(4\epsilon a)} \cdot \frac{35}{36} = u$, $\sqrt{(4\epsilon a)} \cdot \frac{54}{55} = u$ dipendenti dalla figura ellittica registrate al numero XIV., che suppongono l' altezza del gorgo, quella posta in primo luogo $= 40$, e quella posta in secondo luogo $= 20$. Ma quand' anche si fosse stabilito $g = 1$, si sarebbe trovato

$\sqrt{(4\varepsilon a)}\cdot\frac{109}{110}=u$ in riguardo alla figura parabolica, e $\sqrt{(4\varepsilon a)}\cdot\frac{113}{114}=u$ in riguardo alla figura ellittica; velocità tutte e due minori della $\sqrt{(4\varepsilon a)}\cdot\frac{120}{121}$.

XVII. Vediamo presentemente come dall' equazione $\frac{r^\infty}{e^\infty}\cdot(e^\infty-x^\infty)=p^\infty$ si deduca analiticamente la formola $\frac{\sqrt{(4\varepsilon abz)}}{\sqrt{(ac+bz)}}=u$, che suppone minimo il foro $EF=c$. Poichè $\frac{r^\infty}{e^\infty}\cdot(e^\infty-x^\infty)=p^\infty$, sarà parimente $\frac{nr^2}{e^2}\cdot(e^\infty-x^\infty)^{2:\infty}=np^2$: ma $nr^2=b$, $np^2=y$; dunque $\frac{b}{e^2}\cdot(e^\infty-x^\infty)^{2:\infty}=y$. Sia (*Fig.* 3.) $ZV=K$ minima di tal misura relativamente all' infinito ∞, che la sezione circolare $S'T'$ s' adegui colla $ST=b$. Segno $OV=t$, ed essendo $ZV=e$, $ZO=x$, ne proviene $x=e-t$. Supponendosi t infinitesima, avremo $x^\infty=e^\infty-\infty e^{\infty-1}.t$, e quindi $e^\infty-x^\infty=\infty e^{\infty-1}.t$, e perciò $\frac{b}{e^2}\cdot\frac{\infty^{2:\infty}.e^2.t^{2:\infty}}{e^{2:\infty}}$ $=\frac{b.\infty^{2:\infty}.t^{2:\infty}}{e^{2:\infty}}=y$. Sarà pertanto la forza viva dell' acqua contenuta nella porzione $S'MNT'$ del gorgo $=c^2\int\left(\frac{dx}{y}\right)\cdot\frac{u^2}{2}=e^{2:\infty}c^2\int\left(\frac{-dt}{b.\infty^{2:\infty}.t^{2:\infty}}\right)\cdot\frac{u^2}{2}$. Passo all' integrazione, e trovo la detta forza viva

$$=\frac{e^{2:\infty}.c^2}{\infty^{2:\infty}.b}\cdot\frac{\infty}{\infty-2}\cdot\left(K^{(\infty-2):\infty}-t^{(\infty-2):\infty}\right)\cdot\frac{u^2}{2}$$

$=\frac{e^{2:\infty}.c^2}{\infty^{2:\infty}.b}\cdot(K-t)\cdot\frac{u^2}{2}$. Ho aggiunta la costante K, acciocchè si annulli la sommatoria, quando $OV=t=ZV=K$.

Nella formola $\frac{b\,.\,\infty^{2:\infty}\,.\,t^{2:\infty}}{e^{2:\infty}}=y$ si ponga $y=c$, e ne proverrà $t=\frac{ec^{\infty\,:\,2}}{\infty\,.\,b^{\infty\,:\,2}}=GV$. Sostituito questo valore, ci si presenterà la forza viva dell' acqua contenuta nella parte di gorgo $S'MEFNT'=\frac{e^{2\,:\,\infty}c^2}{\infty^{2:\infty}\,.\,b}\,.\left(K-\frac{ec^{\infty\,:\,2}}{\infty\,.\,b^{\infty\,:\,2}}\right).\frac{u^2}{2}$ $=\left(\frac{e^{2:\infty}\,c^2K}{\infty^{2:\infty}\,.\,b}-\frac{e^{1+2:\infty}\,c^{\infty\,:\,2+2}}{\infty^{1+2:\infty}\,.\,b^{\infty:2+1}}\right).\frac{u^2}{2}$. Ora quando $t=K$, $y=b$; dunque per la formola $\frac{b\,.\,\infty^{2:\infty}\,.\,t^{2:\infty}}{e^{2:\infty}}=y$ avremo $\frac{b\,.\,\infty^{2:\infty}K^{2:\infty}}{e^{2:\infty}}=b$, e perciò $K=\frac{e}{\infty}$. Fatta la sostituzione, la detta forza viva riceverà la seguente espressione $\left(\frac{c^2e^{1+2:\infty}}{\infty^{1+2:\infty}\,.\,b}-\frac{c^{\infty\,:\,2+2}\,.\,e^{1+2:\infty}}{\infty^{1+2:\infty}\,.\,b^{\infty\,:\,2+1}}\right).\frac{u^2}{2}$. Supponendosi il foro c minimo, la quantità trascendentemente infinitesima $\frac{-c^{\infty\,:\,2+2}\,.\,e^{1+2:\infty}}{\infty^{1+2:\infty}\,.\,b^{\infty\,:\,2+1}}$ è nulla in paragone di $\frac{c^2e^{1+2:\infty}}{\infty^{1+2:\infty}\,.\,b}=\frac{c^2e}{\infty b}$; dunque la mentovata forza viva $=\left(\frac{c^2e}{\infty\,b}\right).\frac{u^2}{2}=\frac{c^2K}{b}.\frac{u^2}{2}$. Si aggiunga la forza viva della parte $SSTT$ del gorgo, che s' eguaglia ad $(e-K).\frac{c^2}{b}.\frac{u^2}{2}$, o adequatamente a $(g-K).\frac{c^2}{b}.\frac{u^2}{2}$, meritando d' essere trascurata la $GV=\frac{ec^{\infty\,:\,2}}{\infty\,.\,b^{\infty\,:\,2}}$, e ne risulterà la forza viva di tutto il gorgo $SMEFNT$ uguale a $\left((g-K).\frac{c^2}{b}+\frac{Kc^2}{b}\right).\frac{u^2}{2}=\frac{gc^2}{b}.\frac{u^2}{2}$.

Nella formola generale, che si legge al numero III. $\frac{V(4acz)}{V\left(\frac{ac^2}{b}-\frac{gc^2}{b}-\frac{zc^2}{b^2}+cz+c^2\int\frac{dx}{y}\right)}=u$ si sostituisca in cambio di $c^2\int\frac{dx}{y}$ lo scoperto valore $\frac{gc^2}{b}$, e ci si presenterà, trascurando il termine rispettivamente nullo $\frac{zc^2}{b}$, e fatte le convenienti riduzioni, $\frac{\sqrt{(4sabz)}}{\sqrt{(ac+bz)}}=u$, ch' è quella stessa formola, che ho determinata nel Problema I. della più volte nominata Annotazione, supponendo minimo il foro c, e che si possa negligere la forza viva dell' acqua, dalla quale il gorgo è riempiuto.

XVIII. Ho detto al numero IX., che $\frac{c^2dx}{y^2}$, $\frac{c^2dy}{y^2}$ non possono congiuntamente uguagliarsi a nulla. In fatti stando $\frac{c^2dx}{y^2}:\frac{c^2dy}{y^2}::dx:dy$, può accadere, che sia dy infinitamente minore di dx, o al contrario. Suppongasi $dy=0$ rispettivamente a dx; e poichè $-\frac{c^2dy}{y^2}=0$, avremo integrando $\frac{c^2}{y}=M$: ma quando $x=0$, $y=b$; dunque $M=\frac{c^2}{b}$, e perciò sempre $y=b$, e $dy=0$, qualunque sia il valore di x; dimodochè la linea retta SC è il luogo, che serve al minimo valore di $c^2\int\frac{dx}{y}$. Lo stesso intento ottiene adequatamente, come ho fatto vedere, l' ellisse di grado infinito $\frac{y^{\infty}}{c^{\infty}}\cdot(e^{\infty}-x^{\infty})=p^{\infty}$, la quale di più osserva la legge di continuità, e fa transito gradatamente dalla sezione y alla c.

In oltre $y=c$, quando $x=g$; dunque $M=\frac{c^2}{c}=c$, e per conseguenza $y=c$, qualunque sia il valore di x, e questa è la determinazione, che serve al massimo valore di $c\int\frac{dx}{y}$. Si conseguirebbe con somma approssimazione lo stesso, se la curva (*Fig.* 1.) *SME* fosse tale, che supposta minima

$ZO = x$, la ſezione $MN = y$ s'adeguaſſe alla ſezione $EF = c$. In tal caſo per tutto lo ſpazio OG ſi potrebbe conſiderar coſtante il valore di $y = c$, e la forza viva dell' acqua nel gorgo adequatamente al maſſimo aſcenderebbe, ſalva la legge di continuità.

XIX. La fluſſione $\frac{c^2 dx}{y^2}$ dedotta anch' eſſa dalla formola indefinita (B) ſi può ſtabilire infinitamente minore di $\frac{c^2 dy}{y^2}$. Ciò poſto ſi otterrebbe $c^2 dx = 0$, e quindi integrando $c^2 x = N$, e qualunque foſſe la y, dovrebb' eſſere $x = \frac{N}{c^2}$, cioè uguale ad una coſtante. Richiedono le condizioni del Problema, che x poſſa ricevere due valori coſtanti $x = 0$, $x = g$. Accettato il ſecondo, ad $x = g$ ſi riferirebbe qualunque valore di y fra i limiti b, c: ma per la formola $-\frac{c^2 dy}{y^2} = 0$ a qualſivoglia grandezza di x fra il nulla, e g dee corriſpondere $y = b$; dunque reſta determinato il gorgo (*Fig.* 3.) $ECSTDF$, in cui l' acqua è fornita della minima forza viva. Suppoſta $x = 0$, potrebbe y ricevere tutti i valori fra b, e c. E poichè per la formola $-\frac{c^2 dy}{y^2} = 0$ eſſer dee ſempre $y = c$, aſſegnato ad x qualunque valore fra il nulla e g; ne proviene il gorgo $SeEFfT$ (condotte Ee, Ff parallele a GZ) la cui acqua è dotata della maſſima forza viva.

XX. Le due ſuppoſizioni di $-\frac{c^2 dy}{y^2} = 0$, $\frac{c^2 dx}{y^2} = 0$ ci guidano alla concluſione, che ſia nulla quell' altezza, in cui gradatamente ſi paſſa dalla velocità conveniente alla ſezione b alla velocità, che compete alla ſezione c. Succede ciò o nel ſito CD, o nel ſito ST, ſecondochè la forza viva dell' acqua nel gorgo è minima, o maſſima. Una tal altezza uguale a nulla non appartiene alla Fiſica, la quale può ſoltanto ſupporla minima sì ma finita. Nel Problema I. della citata Annotazione ho ſuppoſto minima e traſcurabile la forza viva dell' acqua nel gorgo. Un effetto equivalente naſce ammettendo per la curva $SS'ME$, che genera il gorgo, l' equazione $\frac{r^\infty}{e^\infty} \cdot (e^\infty - x^\infty) = p^\infty$, eſſendo traſcurabile la differenza fra le forze vive dell' acqua $SS'MEFNT'T$, e dell' acqua $SCDT$. Se non ſi doveſſero evitare i ſoverchj fregamenti, e le particole acquee foſſero infiniteſime, baſterebbe un menomiſſimo ſpazio $Z'G$, nel quale ſi faceſſe tranſito dalla velocità conveniente alla ſezione $S'T' = ST$ adequatamente a quella che compete alla ſezione EF. Ma tentando la gravità dell' acqua d' eſercitare la maſſima azione, ed eſſendo queſta tanto maggiore, quanto ſono minori le reſiſtenze, ed oltre a ciò eſſendo le particole acquee piccioliſſime sì ma finite; egli è neceſſario, che lo ſpazio $Z'G$ ſia tale, che poſſa eſſere compoſto da innumerabili ſtrati d' acqua, la velocità dei quali vada gradatamente creſcendo, e di più la curva $S'ME$ ſia quanto baſta diſtante dalle pareti, e dal fondo del vaſo. Il perchè la natura ſceglierà per la figura del gorgo l' elliſſe SME di quel grado, che laſci un conveniente ſpazio $SMECS'$ fra il gorgo, le pareti, ed il fondo del vaſo, onde minorate le reſiſtenze, eſerciti la gravità dell' acqua la maſſima poſſibile azione.

XXI. Si conchiuda pertanto, che il metodo delle Variazioni ſerve alla ſoluzione del propoſto Problema col mezzo delle formole $-\frac{c^2dy}{y^2} = 0$, $\frac{c^2dx}{y^2} = 0$, preſcindendo dalle reſiſtenze, e ſupponendo infiniteſime le particole acquee, dimodochè lo ſpazio piccioliſſimo $Z'G$ baſti, ſalvata la legge di continuità, per paſſare dalla velocità ſpettante alla ſezione $S'T'$ all' altra, che appartiene alla ſezione EF. Il valore coſtante $y = b$ mi dà la minima forza viva dell' acqua nel gorgo, ed il valore coſtante $y = c$ mi dà la maſſima. Ai mentovati minimo, e maſſimo ci poſſiamo accoſtare bensì, ma non giammai pervenirvi, a cagione di dover paſſar l' acqua dalla velocità propria della ſezione $ST = b$ a quella, che conviene alla ſezione $EF = c$ col mezzo d' infiniti inaſſegnabili incrementi. Alla curva $SS'ME$ generante il gorgo, la cui equazione $\frac{r^{\infty}}{e^{\infty}}.(e^{\infty}-x^{\infty})=p^{\infty}$, proccura la natura di accostarsi quanto lo permettono le resistenze, e la grandezza menomissima delle particole acquee, ma dentro i limiti del finito.

XXII. Do compimento alla presente Memoria con una riflessione, che sembrami molto importante. Si può dubitare che sia una continuazione del gorgo la porzione di vena $EFF'E'$ situata tra il foro EF, e la massima sua contrazione $E'F'$. In questa ipotesi la curva SME, che colla sua rivoluzione intorno all' asse ZG genera la figura del gorgo, non potrebb' esser un' ellisse: ma io l' ho dimostrata tale; dunque la curva EE' non è una continuazione dell'ellisse SME. Qual è dunque l' indole della curva EE'? Ristrignendosi gli strati acquei procedendo da ST verso EF, l'acqua guadagna qualche velocità da M, e da N verso O, la quale, non essendo sensibilmente costipabili le particole acquee, ben presto prende la direzione OG, onde le velocità degli strati ST, MN, EF per la detta direzione stiano in ragion inversa delle sezioni ST, MN, EF. Dalle velocità per le direzioni EG, FG nel sito EF, e dall' uscir l' acqua rarefatta dal foro EF, dipende il ristrignimento della vena. Applicando al foro EF un cannone convergente, si suol far retto il lato EE'. Se le velocità della particola E per le direzioni EG, GG' fossero costanti, sarebbe EE' una linea retta: ma annullandosi nel sito $E'G'$ della massima contrazion della vena la velocità per EG', e poco crescendo la velocità per GG'; il lato EE' è una curva, che volge il convesso GG'. Sia giusta il Cav. *Newton* il diametro del foro $EF=\frac{25}{40}$ di dito, ed alla distanza $GG'=\frac{20}{40}$ corrisponderà il più ristretto diametro della vena $E'F'=\frac{21}{40}$. Le velocità dunque della particola E per le direzioni GG', EG starebbero come $20:\frac{25-21}{2}=2$, ovvero come $10:1$, se la velocità per EG fosse

fosse equabile: ma poichè questa si eguaglia a nulla nel sito *E'G'*; la velocità per *GG'* a quella per *EG* si riferirà in minor proporzione di 10:1.

S' inferisca pertanto, che la curva *EE'* non è una continuazion dell'ellisse *SME*. Volge questa il concavo verso l'asse *ZG'*, e quella tutto al contrario il convesso, così richiedendo la velocità per la direzione *EG*, che s' annienta nel sito *E'G'* della massima contrazion della vena.

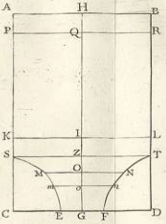

Fig : I.

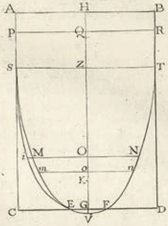

Fig : II.

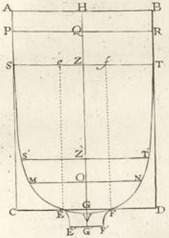

Fig : III.