S O P R A

L' INTEGRAZIONE DELLA FORMULA

$$\mathfrak{Q}dx + Py^2dx \pm dy = 0$$

M E M O R I A

Del Sig. Cavaliere Lorgna.

L' Equazione enunziata nel titolo di questa Memoria occupa un luogo nel Calcolo integrale sì distinto per sè non meno che per la celebrità della formula

$$ax^m dx + bx^n y^2 dx - dy = 0$$

che le appartiene, detta *Riccaziana* dall' inventore primo di onorata e sempre illustre memoria Co. *Jacopo Riccati*, che ho creduto studio non infruttuoso il promuoverne l' integrazione al segno che ho potuto più lontano. Se mi sia toccato in sorte di fare qualche avanzamento in questa indagine, il conoscano e giudichino i Geometri che vorranno concederle nel riandarla qualche momento delle loro applicazioni.

I.

Ridurre l' equazione differenzio-differenziale (A)

$$(A) \ldots . \; ddt + \mathfrak{Q}tdx^2 = 0$$

in cui dx è costante, $\mathfrak{Q}$ funzione di x, al primo grado.

Si faccia $(\mu) \ldots dt = tydx + udx$, ove y, u son due variabili assunte, e sostituendo per ddt il valore $y^2tdx^2 + yudx^2 + tdxdy + dudx$, si avrà

$$t + \frac{1}{\mathfrak{Q}}\left(y^2t + yu + \frac{tdy}{dx} + \frac{du}{dx}\right) = 0$$

di cui formando due equazioni, come due sono le variabili introdotte, avremo le due equazioni di primo grado (B), (C)

$$(B)\ldots\ldots 0 = dy + y^2dx + \mathfrak{Q}dx$$

$$(C)\ldots\ldots 0 = yudx + du$$

da cui dipenderà l' equazione proposta (A). Il che ecc.

II.

Dato un valore soddisfacente all' equazione (B)

$$(B)\ldots\ldots 0 = dy + y^2dx + \mathfrak{Q}dx$$

integrare l' equazione (A)

$$(A)\ldots\ldots 0 = ddt + \mathfrak{Q}tdx^2$$

Sia $y = \Delta$ un tal valore soddisfacente. Il si sostituisca nell' equazione (C) (§. I.), e s' integri. Sarà $u = Ce^{-\int\Delta dx}$, essendo C la costante arbitraria, ed e il numero di cui l' unità è il logaritmo iperbolico. Ripresa poscia la relazione (μ) (§. I.), vi si ponga Δ per y, $Ce^{-\int\Delta dx}$ per u, e s' integri. Risulterà $t = e^{\int\Delta dx}\left(C' + C\int dx e^{-2\int\Delta dx}\right)$ integrale completo dell' equazione (A). Il che ecc.

III.

Dato il valore particolare Δ soddisfacente all' equazione (B)

$$(B)\ldots\ldots 0 = dy + y^2dx + \mathfrak{Q}dx$$

trovare l' integrale completo dell' equazione (B)

Si faccia $y = \frac{dt}{tdx}$; sarà $y^2 = \frac{dt^2}{t^2dx^2}$, $dy = \frac{tdxddt - dt^2dx}{t^2dx^2}$, posto dx costante. Sostituendo pertanto questi valori in (B), riavremo l' equazione $(A)\ldots\ldots ddt + \mathfrak{Q}tdx^2 = 0$.

Sia poi $y = \omega$ l' integrale completo dell' equazione (B), che si cerca. Riprendendo l' equazione di relazione

$y = \frac{dt}{tdx}$, vi si sostituisca per y il valor generale ω sì che sia $\frac{dt}{t} = \omega dx$, e s' integri. Sarà $t = Ae^{\int \omega dx}$, integrale completo dell' equazione (A), giacchè ω dee comprendere una costante arbitraria. Ma s' è trovato (§. II.) essere

$$t = e^{\int \Delta dx}\left(C' + C \int dx e^{-2\int \Delta dx} \right)$$

integrale completo della medesima equazione (A), se sia Δ valor soddisfacente all' equazione (B). Dunque necessariamente dovrà essere

$$Ae^{\int \omega dx} = C' e^{\int \Delta dx} + C e^{\int \Delta dx} \int dx e^{-2\int \Delta dx}, \text{ cioè}$$

$$A = C' e^{\int (\Delta - \omega) dx} + C e^{\int (\Delta - \omega) dx} \int dx e^{-2\int \Delta dx}$$

e però differenziando, dividendo l' equazione differenziale per $dx . e^{\int (\Delta - \omega) dx}$, e facendo $\frac{C'}{C} = B$, si troverà essere

$$(^*) \ldots . y = \omega = \Delta + \frac{e^{-2\int \Delta dx}}{B + \int dx e^{-2\int \Delta dx}}$$

l' integrale completo dell' equazione (B). Il che ecc.

IV.

Se ha luogo la relazione (1), essendo M qualunque funzione di x, o di y, o di entrambe, si verifica pure l' equazione differenziale (2)

$$(1) \ldots . x^2 y^2 = M$$

$$(2) \ldots . \pm dy \sqrt{M} + y^2 dx - \frac{dM}{2x} = 0$$

Imperciocchè, differenziando l' equazione (1), si ottiene l' equazione $2xy^2 dx + 2yx^2 dy - dM = 0$, la quale si trasforma nell' equazione $2xy(xdy + ydx) - dM = 0$, cioè nella seguente (3)

$$(3) \ldots . xydy + y^2 dx - \frac{dM}{2x} = 0$$

Ma l' equazione (1) somminiſtra $xy = \pm\sqrt{M}$. Soſtituendo pertanto queſto valore nell' equazione (3), ſi verifica l' equazione (2). Il che ecc.

V.

E' dunque $y = \pm\frac{1}{x}\sqrt{M}$ un doppio valore ſoddisfacente all' equazione (2) per l' ambiguità de' ſegni.

VI.

Pertanto ſe ſia $M = y^p$, e però abbia luogo la relazione $(4) \ldots y = x^{2:(p-2)}$, ſi verificherà l' equazione (5)

$$(5) \ldots - \frac{p}{p-2} x^{(4-p):(p-2)} dx + x^{-p:(p-2)} y^2 dx \pm dy = 0$$

Imperciocchè in queſta ſuppoſizione l' equazione (2) del §. IV. prende la forma (6)

$$(6) \ldots \pm 2y^{p:2} dy + 2y^2 dx - p y^{p-1} x^{-1} dy = 0$$

Dunque ſoſtituendo per $y^{p:2}$ nel primo membro, e per $y^{p-1} dy$ nel terzo il reſpettivo valore in x dall' equazione (4) ſi avrà l' equazione

$$\pm 2x^{p:(p-2)} dy + 2y^2 dx - \frac{2p}{p-2} x^{4:(p-2)} dx = 0$$

la quale diviſa per $2x^{p:(p-2)}$ somminiſtrerà l' equazione (5). Il che ecc.

VII.

Se dunque ha valor finito ſoddisfacente l' equazione (5) l' avrà pure la forma generale (7)

$$(7) \ldots n x^m dx + x^n y^2 dx \pm dy = 0$$

allorchè ſia $m + n + 2 = 0$. Giacchè, poſto $\frac{4-p}{p-2} = m$, $-\frac{p}{p-2} = n$, ſi avrà dalla prima relazione $p = \frac{4+2m}{m+1}$, e dalla ſeconda $p=\frac{2n}{n+1}$. Dunque $\frac{4+2m}{m+1}=\frac{2n}{n+1}$, e però $m+n+2=0$. Se dunque ecc.

VIII.

Integrare generalmente l' equazione (5)

$$(5)\ldots\ldots-\frac{p}{p-2}x^{(4-p):(p-2)}dx+x^{-p:(p-2)}y^2dx\pm dy=0$$

Si faccia $x=z^{-(p-2):2}$, ſarà $dx=-\frac{p-2}{2}z^{-p:2}dz$, e l' equazione (5) ſi traſformerà nell' equazione (8)

$$(8)\ldots\ldots\frac{p}{2}z^{-2}dz-\frac{p-2}{2}y^2dz\pm dy=0$$

A queſta equazione pertanto ſoddisfa il valor particolare $y=\pm z^{-1}$ ricavato dal ſoſtituire nella relazione $y=\pm x^{2:(p-2)}$ ſoddisfacente all' equazione (5) (§. VI.) il valore di x in z, in cui corriſponde il ſegno ſuperiore o inferiore al ſegno ond' è affetto l' ultimo termine dell' equazione. Poſto ciò, ſi faccia $y=-\frac{2u}{p-2}$, e l' equazione (8) ſi convertirà nell' equazione (9)

$$(9)\ldots\ldots\frac{p}{4}(2-p)z^{-2}dz+u^2dz\pm du=0$$

che ha l' iſteſſa forma dell' equazione (B) del §. III., e a cui ſoddisfa il valore particolare $u=\pm\frac{2z^{-1}}{2-p}$. Si ripigli pertanto l' integrale generale di quella (*) e vi ſi ſoſtituiſca per $\triangle$ il valore $\pm\frac{2z^{-1}}{2-p}$. Sarà l' equazione (10)

$$(10)\ldots\ldots u=\mp\frac{2z^{-1}}{p-2}\pm\frac{(p+2)z^{4:(p-2)}}{B(p+2)\pm(p-2)z^{(p+2):(p-2)}}$$

l' integrale completo dell' equazione (9). E perciò rimettendo il valore di u in y, e il valore di z in x, ſarà l' equazione (D)

(D)....

$$(D)\ldots.y=\pm\frac{4x^{2:(p-2)}}{(p-2)^2}\mp\frac{2(p+2)x^{-8:(p-2)^2}}{B(p^2-4)\pm(p-2)^2x^{-2(p+2):(p-2)^2}}$$

l' integrale completo dell' equazione (5). Il che ecc.

IX.

Basterà dunque porre nell' equazione (D) $\frac{2n}{n+1}$, oppure $\frac{4+2m}{m+1}$ in luogo di p, e si otterrà l' integrale generale dell' equazione del §. VII.

$$nx^{-n-2}dx+x^ny^2dx\pm dy=0$$

oppure dell' equazione

$$-(m+2)x^mdx+x^{-m-2}y^2dx\pm dy=0$$

X.

Pertanto l' equazione

$$(11)\ldots.Ax^{-2}dx+By^2dx\pm dy=0$$

avrà integrale completo, qualunque quantità costante sieno A e B. Imperciocchè, fatto $y=u:B$, l' equazione prende la forma canonica

$$(12)\ldots.ABx^{-2}dx+u^2dx\pm du=0$$

però col porre $1\pm\sqrt{(1-4AB)}$ in luogo di p nell' equazione (10) si ottiene l' integrale dell' equazione (12), e in conseguenza quello pure dell' equazione (11) manifestamente.

XI.

Sia $M=-\frac{ax^2}{b}$; l' equazione fondamentale (2) del §. IV. prende la forma (13)

$$(13)\ldots.x^{-2}dx\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)}+x^{-2}y^2dx\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)}\pm dy=0$$

di cui ſarà integrale ſoddisfacente $y=\pm\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)}$. Poſto ciò, inoltriamoci a trovare di queſta equazione l' integrale completo.

Poichè $\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)}=\frac{a}{\sqrt{(-ab)}}$, $\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)}=\frac{b}{\sqrt{(-ab)}}$, ſi faccia $dz=\frac{x^{-2}dx}{\sqrt{(-ab)}}$. Avremo l' equazione

$$adz+by^2dz\pm dy=0$$

la quale prende la forma canonica (B) del §. III. col porre $y=\frac{u}{b}$, nel qual caſo ella diventa l' equazione (14)

$$(14)\ldots\ Adz+u^2dz\pm du=0$$

eſſendo $A=ab$. A queſta ſoddisfa il valore $u=\pm\sqrt{-A}$, e però ripigliando l'equazione integrale (*) dal §. III., poichè $\Delta=\pm\sqrt{-A}$, ſarà la forma

$$u=\pm\sqrt{-A}+\frac{\mp 2e^{\mp 2z\sqrt{-A}}\sqrt{-A}}{\mp 2B\sqrt{-A}+e^{\mp 2z\sqrt{-A}}}=\frac{\mp\sqrt{-A}+2ABe^{2z\sqrt{-A}}}{\mp 2Be^{2z\sqrt{-A}}\sqrt{-A}+1}$$

l' integrale generale dell' equazione (14). Se dunque ſi rimettano i valori di u, z in y, x, ſi avrà l' integrale ricercato dell' equazione (13) di queſta forma

$$y=\frac{\mp\sqrt{-a:b}+2aBx^2}{\mp 2Bx^2\sqrt{-ab}+1}$$

Il che ecc.

XII.

Con queſto metodo troveremo pure l' integrale completo dell' equazione

$$-\frac{dx}{\sqrt{(x^2+c^2)}}+\frac{y^2dx}{\sqrt{(x^2+c^2)}}\pm dy=0$$

procedente dalla ſuppoſizione di $M=x^2+c^2$. Imperciocchè, poſto $\frac{dx}{\sqrt{(x^2+c^2)}}=dz$, avremo immediatamente

$$-dz+y^2dz\pm dy=0$$

cui soddisfa $y=1$, ed è della forma dimandata per l' integrazione (§. III.).

XIII.

L' equazione $Adz+u^2dz\pm du=0$, cioè $dz=\mp\frac{du}{A+u^2}$, cui abbiamo integrato al §. XI. è per sè importantissima, e merita bene, che si faccia riscontro del suo integrale col valore d' altronde noto che ne risulta di un arco circolare per la tangente, allorchè sia A quantità positiva. Essendo pertanto l' integrale trovato

$$u=\frac{\mp\sqrt{-A}+2ABe^{\pm 2z\sqrt{-A}}}{\mp 2Be^{\pm 2z\sqrt{-A}}\sqrt{-A}+1}$$

Sarà facile lo svolgere anche il valore dell' arco circolare z in funzione finita della tangente u. In fatti si troverà essere, moltiplicando sotto e sopra per $\sqrt{-1}$,

$$e^{\pm 2z\sqrt{-A}}=\frac{\mp\sqrt{-A}-u}{\mp 2uB\sqrt{-A}-2AB}=\frac{\pm\sqrt{A}-u\sqrt{-1}}{\pm 2Bu\sqrt{A}-2AB\sqrt{-1}}$$

$$\text{e però } z=\frac{1}{\pm 2\sqrt{A}\sqrt{-1}}\,l.\frac{\pm\sqrt{A}-u\sqrt{-1}}{\pm 2Bu\sqrt{A}-2AB\sqrt{-1}}.$$

Ma nel caso di $z=0$ è pure $u=0$. Dunque, posto nell' equazione $z=0$, $u=0$, si trova essere la costante $B=\frac{\pm\sqrt{-1}}{2\sqrt{A}}$. Sostituendo pertanto questo valore per B, sarà

$$\text{Arc.}\,z=\pm\frac{1}{2\sqrt{A}\sqrt{-1}}\,l.\frac{\pm\sqrt{A}-\sqrt{-1}\ \text{tang.}\,u}{\pm\sqrt{A}+\sqrt{-1}\ \text{tang.}\,u}$$

Se dunque sia $A=1$, ed abbia luogo il segno negativo, sarà

$$\text{Arc.}\, z = -\frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l.\, \frac{-1-\sqrt{-1}\ \text{tang.}\, u}{-1+\sqrt{-1}\ \text{tang.}\, u},\ \text{cioè}$$

$$\text{Arc.}\, z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l.\, \frac{1+\sqrt{-1}\ \text{tang.}\, u}{1-\sqrt{-1}\ \text{tang.}\, u}$$

il che precisamente somministrando il valore dell' arco circolare per la tangente trovato col metodo de' seni e coseni dal Sig. *Eulero* nel Tomo I. dell' Introduzione all' Analisi degl' Infiniti §. 140, comprova l' esattezza dell' integrazione fondamentale al nostro §. III.

XIV.

Ma lasciando di cercare l' integrazione d' altre formule col dare diversi valori alla funzione indeterminata M, mi fo a richiamare a integrazione la formula *Riccaziana* in tutti quegl' infiniti casi, pe' quali l' inventore Co. *Jacopo Riccati* giunse a ottenere la separazione delle indeterminate, cioè a prepararla opportunamente per la costruzione col mezzo delle curve, il che non va confuso coll' analitica e vera integrazione di cui si tratta in questo luogo. Ella è di questa forma (R)

$$(R) \ldots\ a x^m dx + b x^n y^2 dx - dy = 0$$

Pertanto facendo le stesse sostituzioni Riccaziane (μ), (ω)

$$(\mu) \ldots\ y = -\frac{n+1}{b}\, x^{-n-1} + x^{-2n-2}\, t$$

$$(\omega) \ldots\ y = x^{2m+2} : \left(u + \frac{m+1}{a}\, x^{m+1}\right)$$

otterremo le due equazioni (S), (T)

$$(S) \ldots\ a x^{m+2n+2} dx + b x^{-n-2} t^2 dx - dt = 0$$

$$(T) \ldots\ b x^{2m+n+2} dx + a x^{-m-2} u^2 dx - du = 0$$

Supponendo ora, che possa integrarsi compiutamente l' equazione (R), se sia $m = n$, potrà del pari integrarsi l' equazione (S), se sia $m + 2n + 2 = -n - 2$, e l' equazione

(T), se sia $2m+n+2=-m-2$, cioè se sia $m=-3n-4$, $m=\frac{-n-4}{3}$. Nel primo caso ciascuno degli esponenti di x diventa $-n-2$ nell' equazione (S), e nel secondo ciascheduno diventa $\frac{n-2}{3}$ nell' equazione (T), e però l' una e l' altra s' integra, come s' integra (R) se sia $m=n$. Dunque l' equazione (R) può integrarsi tanto se sia $m=-3n-4$, quanto se sia $m=\frac{-n-4}{3}$, essendo le equazioni (S), (T), integrabili in questi casi, derivate dall' equazione (R) con le sostituzioni (μ), (ω). Si apponga P in luogo di $m+2n+2$, Q in luogo di $-n-2$ agli esponenti di x nell' equazione (S), ed L, K in luogo degli esponenti $2m+n+2$, $-m-2$ nell' equazione (T), e si ragioni come qui innanzi dicendo, se è integrabile l' equazione (R) quando sia $m=\frac{-n-4}{3}$, il sarà pure l' equazione (S), quando sia $P=\frac{-Q-4}{3}$, e l' equazione (T) qualor sia $L=\frac{-K-4}{3}$. Avremo pertanto due nuovi valori per m, cioè $m=\frac{-5n-8}{3}$, $m=\frac{-3n-8}{5}$, posto il primo de' quali, l' uno e l' altro degli esponenti di x nell' equazione (S) diventa $\frac{n-2}{3}$, e posto il secondo, ciascuno degli esponenti di x diventa $\frac{m-2}{3}$ nell' equazione (T), oppure $\frac{-5n-10}{9}$. E però è ciascheduna integrabile, come s' integra l' equazione (R), quando sia $m=n$. Procedendo con questo ragionamento, e tenendo conto successivamente de' valori di m in n risultanti dal progresso di questi paragoni, si perverrà a conchiudere che l' equazione (R) può integrarsi compiutamente se tra m ed n abbia luogo questa relazione

$$m(2g\mp 1)+n(2g\pm 1)+4g=0$$

in cui g è qualunque numero intero affermativo, supposto sempre, che sappia integrarsi un' equazione della forma (R) in cui gli esponenti di x sieno tra di sè uguali. Dipende dunque lo scioglimento del nodo dall' integrare compiutamente un' equazione come (R) in supposizione di $m=n$, al che dietro alle cose trovate qui innanzi è facilissimo il pervenire. Imperciocchè si faccia $x^m dx=dz$, qualunque cosa sia m, e l' equazione (R) prenderà questa forma

$$adz+by^2dz-dy=0$$

Posto pertanto $y=u:b$, l' equazione da integrarsi della forma canonica sarà quella del §. XI.

$$(14)\ldots\ldots Adz+u^2dz-du=0$$

essendo $A=ab$, la quale ha per integrale completo

$$u=\frac{\sqrt{-A}-2ABe^{2z\sqrt{-A}}}{2Be^{2z\sqrt{-A}}\sqrt{-A}-1}$$

oppure (§. XIII.)

$$z=\frac{1}{2\sqrt{A}\sqrt{-1}}\,l.\,\frac{\sqrt{A}-u\sqrt{-1}}{2Bu\sqrt{A}-2AB\sqrt{-1}}$$

E poichè $u:b=y$, $x^m dx=dz$, si restituisca in queste equazioni by per u, $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ per z, e ciascheduna delle equazioni (V), (V′)

$$(\mathrm{V})\ldots\ldots y=\frac{\sqrt{-a:b}-2aBe^{\frac{2x^{m+1}\sqrt{-ab}}{m+1}}}{2Be^{\frac{2x^{m+1}\sqrt{-ab}}{m+1}}\sqrt{-ab}-1}$$

$$(\mathrm{V}')\ldots\ldots x^{m+1}=\frac{m+1}{2\sqrt{-ab}}\,l.\,\frac{\sqrt{a}-y\sqrt{b}\sqrt{-1}}{2Bby\sqrt{a}-2aB\sqrt{b}\sqrt{-1}}$$

Sarà l' integrale completo dell' equazione (R) ſe ſia $m=n$, eſſendo B la coſtante arbitraria.

XV.

E' dunque integrabile generalmente la formula (X)

$$(X)\ldots\ldots ax^{(-n(2g\pm1)-4g):(2g\mp1)}dx+bx^{n}y^{2}dx-dy=0$$

in cui dimoſtrò ſeparabili le indeterminate il ſopralIodato Geometra, ſenza il ſoccorſo di sì fatta ſeparazione, e co' puri e diretti artificj dell' Algebra. Prendiamo, a fine di darne qualche eſempio, a ſvolgere i due primi caſi che riſultano dal porre $g=1$. Il metodo è lo ſteſſo per tutti gli altri.

I. Eſ.

Sia da integrarſi l' equazione (a)

$$(a)\ldots\ldots ax^{-3n-4}dx+bx^{n}y^{2}dx-dy=0$$

S' intenda fatta la ſoſtituzione (μ) del §. XIV., cioè nell' equazione (S) fatto $m=-3n-4$. L' equazione (S) ſi traſforma nell' equazione (b)

$$(b)\ldots\ldots ax^{-n-2}dx+bx^{-n-2}t^{2}dx-dt=0$$

della forma (R) (§. preced.) in ſuppoſizione di $m=n$. Nell' integrale pertanto (V') dell' equazione (R) ſi ponga $-n-2$ per m, t per y, e ſarà

$$x^{-n-1}=\frac{-n-1}{2\sqrt{-ab}}\,l.\frac{\sqrt{a}-t\sqrt{b}\sqrt{-1}}{2Bbt\sqrt{a}-2aB\sqrt{b}\sqrt{-1}}$$

l' integrale completo dell' equazione (b). Ma dall' equazione (μ), $t=\left(y+\frac{n+1}{b}x^{-n-1}\right):x^{-2n-2}$. Per conſeguenza ſoſtituendo in queſto integrale sì fatto valore per t, ſarà

$$x^{-n-1}=\frac{-n-1}{2\sqrt{-ab}}\,l.\frac{\sqrt{a}-\left(y+\frac{n+1}{b}x^{-n-1}\right)\left(\sqrt{b}\sqrt{-1}\right):x^{-2n-2}}{2Bb\left(y+\frac{n+1}{b}x^{-n-1}\right)\sqrt{a}:x^{-2n-2}-2aB\sqrt{b}\sqrt{-1}}$$

l' integrale generale dell' equazione (a). Il che ecc.

II. Es.

Sia da integrarsi l' equazione (c)

$$(c)\ldots.\, ax^{(-n-4):3}dx + bx^n y^2 dx - dy = 0$$

Si ponga $m = \frac{-n-4}{3}$ nell' equazione (T) (§. XIV.). Diverrà ella della forma (d)

$$(d)\ldots.\, bx^{(n-2):3}dx + ax^{(n-2):3}u^2 dx - du = 0$$

ch'è la forma (R) in supposizione di $m = n$, permutati soltanto i coefficienti. Si ripigli pertanto l' integrale (V') di (R), e vi si ponga $\frac{n-2}{3}$ per m, u per y, a per b, b per a. Sarà

$$x^{(n+1):3} = \frac{n+1}{6\sqrt{-ab}}\, l.\, \frac{\sqrt{b} - u\sqrt{a}\sqrt{-1}}{2aBu\sqrt{b} - 2bB\sqrt{a}\sqrt{-1}}$$

l' integrale completo dell' equazione (d). Ma per l' equazione (ω) è $u = x^{2m+2}y^{-1} - \frac{m+1}{2}x^{m+1} = x^{(-2n-2):3}y^{-1} + \frac{n+1}{6}x^{(-n-1):3}$, posto per m il suo valore in n. Dunque surrogato in quest' integrale il valore di u, sarà

$$x^{(n+1):3} = \frac{n+1}{6\sqrt{-ab}}\, l.\, \frac{\sqrt{b} - \left(x^{(-2n-2):3}y^{-1} + \frac{n+1}{6}x^{(-n-1):3}\right)\sqrt{-a}}{2aB\left(x^{(-2n-2):3}y^{-1} + \frac{n+1}{6}x^{(-n-1):3}\right)\sqrt{b} - 2bB\sqrt{-a}}$$

l' integrale completo dell' equazione (c). Il che ecc.

XVI.

Due illustri geometri *Daniello* e *Nicola Bernoulli* presero per mano in quel torno di tempo la formula *Riccaziana*, e si volsero a rintracciare i casi di separazione delle variabili nell' equazione (Z)

(Z)....

$$(Z)\ldots\ldots ax^m + y^2dx - dy = 0$$

Con molta eleganza pertanto dimoſtrarono entrambi, che in queſta equazione ſono ſeparabili le indeterminate allorchè ſia l' eſponente $m = \frac{-4g}{2g \pm 1}$. Ma non è ſtata neppur queſta forma integrata completamente, ch' io ſappia, per altro mezzo fuorchè per opera delle ſerie infinite dal Sig. *Eulero* nel T. II. del ſuo Calcolo Integrale alla pag. 182. Ora col fare $n = 0$ nella formula (X) del §. XV. riceve ella integrazione non ſolamente per una via diretta e ſemplice, ma eziandio per un mezzo puramente algebraico.

XVII.

Non ſi riſtrigne per altro a queſto ſolo il frutto, che poſſiamo ricavare dal Teorema del §. IV., avendovi una forma da eſſo dipendente, generale e fecondiſſima, cui mi propongo di additare, non del tutto immeritevole di attenzione.

XVIII.

Se ha luogo l' equazione (1)

$$(1)\ldots\ldots y = \frac{dM}{Mdx}$$

ſi verifica pure l' equazione differenziale (2)

$$(2)\ldots\ldots -\frac{ddM}{Mdx} + y^2dx + dy = 0$$

qualunque funzione di x, o di y, o d'entrambe le variabili promiſcuamente ſia il ſimbolo M.

Imperciocchè, eſſendo $y = \frac{dM}{Mdx}$, ſarà $yMdx = dM$, e quadrando $y^2M^2dx^2 = dM^2$. Dunque differenziando

$$2yMdx(ydMdx + dyMdx) - 2dMddM = 0$$

cioè

$$Mdx(y^2dMdx + ydyMdx) - dMddM = 0$$

e però

$$y^2 dMdx + ydyMdx - \frac{dMddM}{Mdx} = 0$$

Ma $yMdx = dM$. Sostituendo pertanto questo valore nel secondo termine, e dividendo l' equazione per dM, si verificherà l' equazione (2). Il che ecc.

XIX.

L' equazione (2) essendo della forma canonica (B) (§. III.), col valore finito (1) in pronto, che le soddisfa, e potendo in oltre essere M qualunque funzione ad arbitrio, si comprende agevolmente essere senza limiti il numero delle equazioni trascendenti della forma (B)

$$(B) \ldots . \; dy + y^2 dx + Qdx = 0$$

le quali a completa integrazione si conducono col metodo esposto nel §. III., ed altrettante essere le equazioni differenzio-differenziali della forma (A)

$$(A) \ldots . \; ddt + Qtdx^2 = 0$$

che possono generalmente integrarsi, dato l' integrale (§. II.) della forma (B). Diamone alcuni esempli.

I. Es.

Sia da integrarsi l' equazione (3)

$$(3) \ldots . \; dy + y^2 dx - dx\left(m(m-1)x^{m-2} + m^2 x^{2m-2}\right) = 0$$

Si faccia nell' equazione (2) del §. XVIII. $M = e^{x^m}$; sarà $dM = mx^{m-1}dx e^{x^m}$, $ddM = m(m-1)x^{m-2}dx^2 e^{x^m} + m^2 x^{2m-2} dx^2 e^{x^m}$, e si verificherà l' equazione (3). Fatta poi una simile sostituzione nell' equazione (1) del medesimo §., avrà luogo l' equazione $y = mx^{m-1}$, il qual valore rappresenta in conseguenza il valore soddisfacente Δ dell' equazione canonica (B). Se dunque nell' equazione (*) dell' §. III. si sostituisca questo valore per Δ, sarà

$$y = mx^{m-1} + e^{-2x^m} : \left(B + \int dxe^{-2x^m}\right)$$

l' integrale completo dell' equazione (3). Il che ecc.

II. Es.

Sia da integrarsi l' equazione (5)

$$(5) \ldots . dy + y^2 dx + (x^{-2} dx) : l.x = 0$$

Si ponga $M = l.x$, e fatte per M, dM, ddM le convenevoli sostituzioni nelle equazioni (1), (2) del §. XVIII., si verificherà l'equazione (5), di cui sarà un valore soddisfacente $y = x^{-1} : l.x$. Surrogando pertanto questo valore per Δ nell' equazione (*), si troverà essere

$$y = \frac{x^{-1}}{l.x} + e^{-2\int \overline{x^{-1} dx : l.x}} : \left(B + \int \left(dxe^{-2\int \overline{x^{-1} dx : l.x}} \right) \right)$$

l' integrale completo dell' equazione (5). Il che ecc.

III. Es.

Sia l' equazione differenziale (6)

$$(6) \ldots . dy + y^2 dx - \frac{dx}{1 + x^2} = 0$$

di cui si cerca l' integrale.

Si faccia $M = \sqrt{(1 + x^2)}$. Fatte le sostituzioni per M, e suoi differenziali nelle equazioni (1), (2) del §. XVIII., si verificherà l' equazione (6), ed avrà luogo il valor particolare $y = x : \sqrt{(1 + x^2)}$. Si sostituisca pertanto $x : \sqrt{(1 + x^2)}$ per Δ nell' equazione fondamentale (*), e si troverà, che l' equazione

$$y = x : \sqrt{(1 + x^2)} + e^{-2\sqrt{(1+x^2)}} : \left(B + \int dxe^{-2\sqrt{(1+x^2)}} \right)$$

è l' integrale completo dell' equazione (6) Il che ecc.

XX.

E per avere gl' integrali immediatamente ne' casi particolari, integriamo generalmente l' equazione (2)

$$(2)\ldots\ldots -\frac{ddM}{Mdx}+y^2dx+dy=0$$

Essendo pertanto $y=\frac{dM}{Mdx}$ il valor particolare che le soddisfa, si sostituisca nell' integrale canonico (*) questa espressione per Δ, e sarà

$$y=\frac{dM}{Mdx}-\frac{M^2}{B-\int M^2dx}$$

l' integrale completo dell' equazione (2), di qualunque forma ad arbitrio sia M.

XXI.

Ed ecco fatta strada alla determinazione di un' opportuna equazione di relazione tra le funzioni indeterminate P, $\mathfrak{Q}$, perchè abbia luogo l' integrazione dell' equazione generale

$$\mathfrak{Q}dx+Py^2dx+dy=0$$

avendola verificata qui innanzi soltanto in casi particolari. Porremo in chiaro nel seguente Teorema il trovato, che non ha bisogno nè di schiaramenti, nè di esemplificazioni, apparendo tosto nell' esposizione di lui il campo che s' apre per lo scioglimento di sì fatta equazione. Il che basti nel presente argomento.

XXII.

Se ha luogo la relazione finita (ξ)

$$(\xi)\ldots.\ P\mathfrak{Q}+\frac{ddM}{Mdx^2}=0$$

qualunque cosa sia M, l' equazione (ω)

$$(\omega)\ldots.\ \mathfrak{Q}dx+Py^2dx+dy=0$$

è generalmente integrabile.

Imperciocchè, sostituendo nell' equazione (ω) il valore di Qdx tratto dalla relazione (ξ), risulta l' equazione (π)

$$(\pi)\ldots - \frac{ddM}{MPdx} + Py^2dx + dy = 0$$

Se dunque si faccia in (π) $Pdx = dz$, si avrà l' equazione (μ)

$$(\mu)\ldots - \frac{ddM}{Mdz} + y^2dz + dy = 0$$

E l' equazione (μ) ha per integrale completo (§. XX.)

$$y = \frac{dM}{Mdz} - \frac{M^2}{B - \int M^2dz}$$

Sostituendo pertanto in questo integrale Pdx in luogo di dz, sarà

$$y = \frac{dM}{MPdx} - \frac{M^2}{B - \int M^2Pdx}, \text{ oppure}$$

$$y = -\frac{dMQdx}{MddM} - \frac{M^2}{B + \int MddM : Qdx}$$

l'integrale completo in M, P, oppure in M, Q dell' equazione (ω), qualunque funzione di x sieno M, P nel primo caso, ed M, Q nel secondo. Il che ecc.