SOPRA
LA DISTRIBUZIONE DELLE ALLUVIONI.

Del Sig. Cavaliere Vittorio Fossombroni.

§. 1. La terra delle montagne vien trasportata naturalmente nei sottoposti campi adjacenti. L'amor proprio, e l'ignoranza lusingano sì fattamente che taluno si è figurato ordinarsi dalla natura ogni cosa a seconda dei nostri desiderj, e si è quindi acquietato sulla stolida fidanza che le acque torbide nel loro corso distribuirebbero lateralmente la terra incassandosi nella superficie del globo, risparmiando le spese per gli argini, e le contemplazioni degl'Idrostatici. Ma la natura fa ogni cosa per sè, e si compiace egualmente di una florida coltivazione, e di un nebuloso padule; onde se l'avidità degli uomini vuole oltre la naturale costituzione del paese ampliare l'estensione delle semente, conviene che ponga ogni cura o per raffrenare le bizzarre inclinazioni dei fiumi, o per trarre suo pro dagli stessi sforzi delle acque guidando le alluvioni sopra le frigide più basse terre dei piani, che bene spesso restano in tal guisa sanate, e vestite di una novella superficie pregna dei principj più favorevoli alla vegetazione. Hanno gl'Idrostatici, e specialmente lo *Zendrini* prescritte diverse regole per eseguire le artificiali bonificazioni per alluvione, e possono facilmente venire in capo a' Professori le restrizioni che talvolta esigono tali regole, onde non ci fermeremo a discuterle in questo breve scritto, il quale ha solo per oggetto di accennare dei metodi atti a calcolare il tempo necessario pel compimento di una regolata bonificazione. Questo riflesso non ha luogo quando il paese, che vuol bonificarsi, è affatto infruttifero, e con il solo rompere gli argini del fiume si resta contenti di coltivarne qualche porzione senza essere in pena se il rimanente spazio acquisti, o perda; ma trattandosi di rialzare la superficie di porzioni di campagne circondate da altre fertili, e che possono esser danneggiate dalle inondazioni, la faccenda è ben differente. Coloro, che presiedono alla buona condotta delle vaste possessioni, molte volte si saranno trovati a veder gettare somme non indifferenti per coltivare un terreno, e fabbricarvi coloniche abitazioni, il qual terreno dovette poi porsi sotto l' acque d' un fiume, che si credeva dover trattenersi molti anni di più nel colmare altrove; ed all' incontro essersi lasciata infruttifera, e deserta una porzione di pianura sul supposto di doverla bonificare, mentre il fiume a ciò destinato restò per molto tempo di più che non credevasi occupato a terminare altre già principiate bonificazioni. Per provvedere pertanto al sistema delle colmate da farsi con l' acque di uno o più fiumi comparirà, credo, altrettanto utile quanto nuovo il presente soggetto.

§. 2. Esaminata dopo un dato tempo la quantità della terra portata da un fiume, e supponendo costante la ragione tra la quantità dell' acqua e della terra, che l' intorbida, suole dai periti predirsi un alzamento proporzionale alla moltiplicazione degl' intervalli eguali a quello preso da principio in considerazione; ma ciascheduno si accorgerà dell' errore di tal determinazione, considerando che al variare le circostanze della superficie della colmata variano quelle della foce del fiume, ed in conseguenza di tutto il tronco di esso non interrotto, e quindi la velocità delle sue acque, e la quantità della terra che trasportano, e finalmente l' altezza della superficie della porzione di campagna bonificata.

§. 3. E' manifesto che al primo velo di terra disteso dal fiume sopra la colmata nascerà un alzamento di foce, ed in conseguenza le acque torbide depositeranno per tutto il tronco del fiume stesso (il qual tronco intendo per tutto il corso di questa Memoria che sia non interrotto da *Pescaie*, o altro capace a variare la costituzione della pendenza) uno strato di terra, il quale disponga il fondo del letto in una linea parallela alla prima, e distante da quella (a un dipresso quando è piccolissima la pendenza del tronco) dell' altezza medesima del velo di terra depositato in colmata. Sia A^2 l' area da bonificarsi, m la quantità d' acqua che vi passa in un dato tempo, ed $1 : n$ la ragione che ha il volume dell' acqua a quello della terra, che pel tempo suddetto si deposita. Ciò posto l' altezza del velo di terra onde copresi la colmata nel tempo preaccennato sarà $\frac{mn}{A^2}$. Nel successivo eguale intervallo di tempo, per quanto passerà un volume eguale d' acqua per la colmata, non vi si depositerà però la quantità istessa di terra, essendosi dovuto con essa rialzare il fondo del tronco del fiume. Supposta pertanto a la lunghezza, b la larghezza di questo tronco, avremo la quantità di terra che potrà depositarsi in colmata nel secondo intervallo di tempo che sarà $mn - \frac{mnab}{A^2}$, e l' alzamento della superficie della colmata o sia della foce del fiume $= \frac{mn}{A^2}\left(1 - \frac{ab}{A^2}\right)$. Nel terzo intervallo la quantità di terra che potrà depositarsi in colmata sarà $mn - \frac{mnab}{A^2}\left(1 - \frac{ab}{A^2}\right)$, e perciò l' alzamento della superficie di essa sarà $= \frac{mn}{A^2}\left(1 - \frac{ab}{A^2} + \frac{a^2b^2}{A^4}\right)$ Procedendo così col ragionamento troveremo la serie degli alzamenti di superficie della colmata nei successivi intervalli come segue.

$$\frac{mn}{A^2}$$

$$\frac{mn}{A^2}\left(1 - \frac{ab}{A^2}\right)$$

$$\frac{mn}{A^2}\left(1 - \frac{ab}{A^2} + \frac{a^2b^2}{A^4}\right)$$

$$\frac{mn}{A^2}\left(1 - \frac{ab}{A^2} + \frac{a^2b^2}{A^4} - \frac{a^3b^3}{A^6}\right)$$

$$\frac{mn}{A^2}\left(1 - \frac{ab}{A^2} + \frac{a^2b^2}{A^4} - \frac{a^3b^3}{A^6} + \frac{a^4b^4}{A^8}\right)$$

ecc. ecc.

§. 4 Sommando questi alzamenti avremo quelli, che accadono in un numero d' intervalli, in ciascheduno dei quali paſſa per la colmata la quantità d' acqua m con l' iſteſſa quantità di terra incorporata, eſpreſſi come ſegue.

In intervalli	
1	$\frac{mn}{A^2}$
2	$\frac{mn}{A^2}\left(2-\frac{ab}{A^2}\right)$
3	$\frac{mn}{A^2}\left(3-\frac{2ab}{A^2}+\frac{a^2b^2}{A^4}\right)$
4	$\frac{mn}{A^2}\left(4-\frac{3ab}{A^2}+\frac{2a^2b^2}{A^4}-\frac{a^3b^3}{A^6}\right)$
ecc.	ecc. ecc.

quindi in un numero x d' intervalli come ſopra ſarà la ſomma degli alzamenti eſpreſſa dalla formola $\frac{mn}{A^2}\Big(x-(x-1)\frac{ab}{A^2}$

$$+(x-2)\frac{a^2b^2}{A^4}-(x-3)\frac{a^3b^3}{A^6}\ldots\pm(x-(x-1))\frac{a^{x-1}b^{x-1}}{A^{2x-2}}$$

§. 5. Queſta formola ſi traſforma in tal guiſa

$$\frac{mnx}{A^2}\left(1-\frac{ab}{A^2}+\frac{a^2b^2}{A^4}-\frac{a^3b^3}{A^6}\ldots\pm\frac{a^{x-1}b^{x-1}}{A^{2x-2}}\right)+$$

$$\frac{mnab}{A^4}\left(1-\frac{2ab}{A^2}+\frac{3a^2b^2}{A^4}-\frac{4a^3b^3}{A^6}\ldots\mp(x-1)\frac{a^{x-2}b^{x-2}}{A^{2x-4}}\right)=$$

$$\frac{mnx}{A^2}\left(1+\frac{a^2b^2}{A^4}+\frac{a^4b^4}{A^8}+\frac{a^6b^6}{A^{12}}\ldots+\frac{a^{x-1}b^{x-1}}{A^{2x-2}}\right)-$$

$$\frac{mnx}{A^2}\times\frac{ab}{A^2}\left(1+\frac{a^2b^2}{A^4}+\frac{a^4b^4}{A^8}\ldots+\frac{a^{x-3}b^{x-3}}{A^{2x-6}}\right)+$$

$$\frac{mnab}{A^4}\left(1+3\frac{a^2b^2}{A^4}+5\frac{a^4b^4}{A^8}+7\frac{a^6b^6}{A^{12}}\ldots+(x-2)\frac{a^{x-3}b^{x-3}}{A^{2x-6}}\right)-$$

$$\frac{2mna^2b^2}{A^6}\left(1+\frac{2a^2b^2}{A^4}+\frac{3a^4b^4}{A^8}+\frac{4a^6b^6}{A^{12}}\ldots+\frac{x-1}{2}\times\frac{a^{x-3}b^{x-3}}{A^{2x-6}}\right),$$

attendendo

attendendo alle debite modificazioni secondo che sia x numero pari, o impari.

§. 5. Si scorge a prima vista da quest' espressioni che quando x sia molto grande, l' alzamento è

$$=\left(1-\frac{ab}{A^2}\right)\frac{mnx}{A^2}\left(1+\frac{a^2b^2}{A^4}+\frac{a^4b^4}{A^8}+\text{ecc.}\right.$$ *in infinito*, ed in conseguenza $=\frac{mnx}{ab+A^2}$ cioè dopo un numero d' intervalli tanto grande da potersi disprezzare l' effetto occorso in uno più, o uno meno di essi, sarà l' alzamento in ragione diretta della quantità della terra, ed inversa della somma dell' aree della colmata, e del tronco del fiume, come può facilmente confermarsi dal raziocinio accennato in principio.

§. 6. Esaminando la legge degli alzamenti che occorrono in ciascheduno intervallo, troveremo quell' alzamento competente all' intervallo $(2x+1)^{esimo}$ espresso così

$$\frac{mn}{A^2}\left(1-\frac{ab}{A^2}+\frac{a^2b^2}{A^4}-\frac{a^3b^3}{A^6}\ldots\ldots+\frac{a^{2x}b^{2x}}{A^{4x}}\right)=$$

$$\frac{mn}{A^2}\left(1+\frac{a^2b^2}{A^2}+\frac{a^4b^4}{A^8}\ldots\ldots+\frac{a^{2x}b^{2x}}{A^{4x}}\right)-\frac{mn}{A^2}\times\frac{ab}{A^2}\left(1+\frac{a^2b^2}{A^4}\right.$$

$$\left.+\frac{a^4b^4}{A^8}\ldots\ldots+\frac{a^{2x-2}b^{2x-2}}{A^{4x-4}}\right)=\frac{mn}{A^2}\times\frac{a^{2x+2}b^{2x+2}-A^{4x+4}}{(a^2b^2-A^4)A^{4x}}-$$

$$\frac{mn}{A^2}\times\frac{ab}{A^2}\times\frac{a^{2x}b^{2x}-A^{4x}}{(a^2b^2-A^4)A^{4x-4}}=$$

$$\frac{mn}{a^2b^2+A^4}\times\frac{a^{2x+2}b^{2x+2}-A^{4x+4}-a^{2x+1}b^{2x+1}A^2+abA^{4x+2}}{A^{4x+2}}=$$

$$\frac{mn}{ab+A^2}\left(1+\frac{a^{2x+1}b^{2x+1}}{A^{4x+2}}\right)$$ l' alzamento corrispondente all' intervallo $(2x+2)^{esimo}$ sarà $=\frac{mn}{A^2}\left(1+\frac{ab}{A^2}-\frac{a^2b^2}{A^4}\ldots\ldots\right.$

$$\left.-\frac{a^{2x+2}b^{2x+1}}{A^{4x+2}}\right)=\frac{mn}{ab+A^2}\left(1-\frac{a^{2x+2+}b^{2x+2}}{A^{2x+4}}\right),$$ similmente trove-

remo l' alzamento corrispondente all' intervallo $(2x+3)^{simo}$ essere $= \frac{mn}{ab+A^2}\left(1+\frac{a^{2x+3}b^{2x+3}}{A^{4x+6}}\right)$ e così in seguito.

§. 7. Pongasi per brevità $\frac{mn}{ab+A^2}=C$, $ab=B^2$, e gli alzamenti suddetti diverranno

$$\left(C\,1+\frac{B^{4x+2}}{A^{4x+2}}\right)$$

$$\left(C\,1-\frac{B^{4x+4}}{A^{4x+4}}\right)$$

$$\left(G\,1+\frac{B^{4x+6}}{A^{4x+6}}\right)$$

ecc.

d' onde l' indole dei medesimi molto meglio che dalle superiori espressioni si manifesta. In fatto considerando il più semplice caso in cui sia $\frac{B^2}{A^2}=1$ cioè che l' area della colmata eguagli quella del tronco del fiume, occorrono nei successivi intervalli gli alzamenti $2C$, 0, $2C$, 0, $2C$ ecc., e perciò la somma degli alzamenti che occorrono negl' intervalli impari eguaglia quella degli alzamenti, che accadono negl' impari insieme e nei pari essendo questi ultimi $=0$; se poi sia $\frac{B^2}{A^2}<1$ gl' intervalli pari portano alzamenti (più o meno) ma sempre più piccoli che i respettivi impari, e finalmente se $\frac{B^2}{A^2}>1$ gl' intervalli pari portano delle escavazioni piuttosto che alzamenti, e questo risultato merita di essere esaminato a parte.

§. 8. Si osservino frattanto gli alzamenti che occorrono nel tronco del fiume. Nel primo intervallo che porta in colmata l' alzamento $\frac{mn}{A^2}$, l' alzamento nel tronco è $=0$, nel secondo l' alzamento in colmata $=\frac{mn}{A^2}\left(1-\frac{ab}{A^2}\right)$, e nel tronco $=\frac{mn}{A^2}$, e così in seguito di maniera che gli alzamenti nel tronco sono gl' istessi che in colmata, se non che sempre uno di meno nell' ordine degl' intervalli, e quindi principiando dal primo gli alzamenti saranno disposti come segue:

	nella Colmata	nel Tronco
1.°	$C(1+\frac{B^2}{A^2})$	o
2.°	$C(1-\frac{B^4}{A^4})$	$C(1+\frac{B^2}{A^2})$
3.°	$C(1+\frac{B^6}{A^6})$	$C(1-\frac{B^4}{A^4})$
	ecc.	ecc.
x.^{mo}	$C(1\pm\frac{B^{2x}}{A^{2x}})$	$C(1\mp\frac{B^{2x-2}}{A^{2x-2}})$

e quindi in un intervallo qualunque x.^{mo} la quantità della terra depositata tra la colmata ed il tronco sarà $=A^2C(1\pm\frac{B^{2x}}{A^{2x}})+B^2C(1\mp\frac{B^{2(x-1)}}{A^{2(x-1)}})$ che fatte le debite sostituzioni trovasi $=mn$, come esige la supposizione fatta in principio.

§. 9. Pongasi per brevità $\frac{B^2}{A^2}=D$, ed avremo nell' intervallo $(2x+1)^{esimo}$ l' alzamento $C(1+D^{2x+1})$ nel seguente $(2x+2)^{esimo}$ $C(1-D^{2x+2})$, nel successivo $C(1+D^{2x+3})$ e così degli altri; la somma pertanto degli alzamenti che accaderanno in $2z$ intervalli principiando dal $(2x+1)^{esimo}$ *inclusive* sarà $=2zC+C(D^{2x+1}-D^{2x+2}+D^{2x+3}\ldots-D^{2x+2z})$ $=2zC+CD^{2x+1}(1+D^2+D^4\ldots+D^{2z-2})-CD^{2x+2}(1+D^2+D^4\ldots+D^{2z-2})=2zC+CD^{2x+1}(1-D)\frac{D^{2z}-1}{D^2-1}=2zC+\frac{CD^{2x+1}}{D+1}(1-D^{2z})$, e la somma degli alzamenti in intervalli $2z+1$ sarà $=(2z+1)C+C(D^{2x+1}-D^{2x+2}+D^{2x+3}\ldots$

$+D^{2n+2z+1})=(2z+1)C+CD^{2n+1}(1+D^2+D^4\ldots+D^{2z}) - CD^{2n+2}(1+D^2+D^4\ldots\ldots+D^{2z-2})=(2z+1)C+\frac{CD^{2n+1}}{D+1}(1+D^{2z+1})$. Supposto pertanto $\frac{CD^{2n+1}}{D+1}=E$, saranno le somme successive corrispondenti ad intervalli $2z$, $2z+1$, $2z+2$, $2z+3$ ecc.

$$2zC+E(1-D^{2z})$$
$$(2z+1)C+E(1+D^{2z+1})$$
$$(2z+2)C+E(1-D^{2z+2})$$
$$(2z+3)C+E(1+D^{2z+3})$$
ecc.

in ciascheduna delle quali formole posto $x=0$, si ottiene la somma degli alzamenti principiando dal primo, e posto $z=\infty$ si ritrova $\frac{mnz}{A^2+ab}$ come conviene per corrispondere all' accennato di sopra.

§. 10. Dalla somma degli alzamenti $2zC+C(D^{2n+1}-D^{2n+2}\ldots\ldots-D^{2n+2z})$ si avranno le due formole seguenti, la prima delle quali rappresenta gli alzamenti corrispondenti agl' intervalli impari, e la seconda quelli corrispondenti ai pari, nella totalità degl' intervalli $2z$, cioè $zC+CD^{2n+1}(1+D^2+D^4\ldots\ldots+D^{2z-2})$, $zC-CD^{2n+2}(1+D^2+D^4\ldots+D^{2z-2})$ ovvero $zC+CD^{2n+1}\times\frac{D^{2z}-1}{D^2-1}$, $zC-CD^{2n+2}\times\frac{D^{2z}-1}{D^2-1}$. Se la totalità degl' intervalli fosse $2z+1$ cioè numero impari, sarebbero le due divisate somme come segue $\frac{2z+2}{2}C+CD^{2n+1}\times\frac{D^{2z+2}-1}{D^2-1}$, $zC-CD^{2n+2}\times\frac{D^{2z}-1}{D^2-1}$. Le differenze pertanto tra gli alzamenti occorsi negl' intervalli impari, e quelli occorsi nei pari nei due casi generalissimi di $2z$, e $2z+1$, farannno come appresso $CD^{2n+1}\times\frac{1-D^{2z}}{1-D}$, $C+CD^{2n+1}\times\frac{1-D^{2z+1}}{1-D}$. Si osservi di passaggio che queste due espressioni nel caso di $D = 1$ si riducono (con i conosciuti soccorsi del calcolo infinitesimale) alle due seguenti $2zC$, $(2z+2)C$ che sono identiche con le espressioni in cui si trasformano in tale occorrenza le due altre $2zC + E(1 - D^{2z})$, $(2z+1)C + E(1 + D^{2z+1})$, lo che combina con quanto osservammo al §. 7. che quando l' area della colmata eguaglia quella del tronco, gli alzamenti corrispondenti agl' intervalli impari sono $= 0$.

§. 11. Essendo che pertanto si ottenga maggior alzamento dagli alzamenti corrispondenti agl' impari intervalli, che ai pari; si avrebbe maggior alzamento in colmata ad un dato numero di alzamenti corrispondenti ai soli impari intervalli, che da quelli in egual numero ma corrispondenti agl' intervalli impari, e pari insieme. Si aumenti adunque di s termini la progressione esprimente gli alzamenti corrispondenti agl' impari intervalli in ambi i casi generali precedenti, cioè che la totalità degl' intervalli pari ed impari insieme sia $2z$, ovvero $2z+1$, ed avremo le due espressioni seguenti

I.ª

$$(s+z)C + CD^{2n+1}(1 + D^2 + D^4 \ldots + D^{2z-2} + D^{2z} + D^{2z+2} \ldots + D^{2z+2s-2}) = (s+z)C + CD^{2n+1} \times \frac{D^{2z+2s}-1}{D^2-1}$$

II.ª

$$(s+z+1)C + CD^{2n+1}(1 + D^2 + D^4 \ldots + D^{2z} + D^{2z+2} + D^{2z+4} \ldots + D^{2z+2s}) = (s+z+1)C + CD^{2n+1} \times \frac{D^{2z+2s+2}-1}{D^2-1};$$

eguagliando queste respettivamente alle due trovate di sopra al §. 9. $2zC + E(1 - D^{2z})$, $(2z+1)C + E(1 + D^{2z+1})$ otterremo le due seguenti equazioni

$$zC + E(1 - D^{2z}) = sC + \frac{E}{D-1}(D^{2z+2s} - 1)$$

$$zC + E(1 + D^{2z+1}) = sC + \frac{E}{D-1}(D^{2z+2s+1} - 1)$$

da una delle quali in ciaſchedun caſo dipende il numero s degl' intervalli impari da aggiungerſi agli z nel primo caſo, o $z+1$ nel ſecondo a fine di ottenere con i ſoli alzamenti corriſpondenti agl' intervalli impari l' iſteſſa ſomma che riſulta da $2z$ ovvero $2z+1$ alzamenti corriſpondenti ad intervalli ſucceſſivamente impari, e pari.

§. 12. Nella circoſtanza di $D=1$ diventa $E=\frac{C}{2}$, e le due equazioni col calcolo differenziale riduconſi alle ſeguenti

$$zC=sC+\frac{C}{2}(2s+2z),\quad zC+C=sC+\frac{C}{2}(2s+2z+2)$$

che danno ambedue $s=0$, lo che s'accorda a meraviglia con i reſultati ſuperiori. Se poi ſia D frazionario, accennerò due ripieghi per ottenere in molti caſi il valore di s. Qualora la frazione D ſia piccoliſſima, ed s debba eſſer numero conſiderabilmente grande, le due equazioni ſi riducono a queſte

$$zC+E(1-D^{2z})=sC-\frac{E}{D-1}$$

$$zC+E(1+D^{2z+1})=sC-\frac{E}{D-1}$$

dalle quali in molti caſi ſi deduce aſſai proſſimamente $s=z$, onde ſi può ſtabilire che quando l' area della colmata è aſſai grande in proporzione di quella del tronco del fiume, ſi avrà per lo più quaſi l' iſteſſo effetto dagli alzamenti corriſpondenti agl' intervalli alternativamente pari ed impari, che ſi avrebbe da un egual numero di alzamenti corriſpondenti agl' impari intervalli, e quindi può naſcere l' idea di conſigliare in pratica la eſecuzione delle bonificazioni col tronco più piccolo che ſia poſſibile. Quando poi D ſia frazione aſſai proſſima all' unità, ed s non ſia da preſumerſi aſſai grande, poſto $D=1-P$, ſarà P piccoliſſima frazione, e per conſeguenza potrà aſſumerſi

$$D^{2z+2s}=1-(2s+2z)P+\frac{(2s+2z)(2s+2z-1)}{1.\quad 2.}P^2$$

$$-\frac{(2s+2z)(2s+2z-1)(2s+2z-2)}{1.\quad 2.\quad 3.}P^3;$$

$$D^{2z+2s+2}=1-\frac{2s+2z+2}{1.}P+\frac{(2s+2z+2)(2s+2z+1)}{1.\quad 2.}P^2$$
$$-\frac{(2s+2z+2)(2s+2z+1)(2s+2z)}{1.\quad 2.\quad 3.}P^3$$; e le due equazioni ſi ridurranno alle ſeguenti

$$zC+E(1-D^{2z})=sC+\frac{E}{1-D}\Big((2s+2z)P$$
$$-\frac{(2s+2z)(2s+2z-1)}{1.\quad 2.}P^2$$
$$+\frac{(2s+2z)(2s+2z-1)(2s+2z-2)}{1.\quad 2.\quad 3.}P^3\Big);$$
$$zC+E(1+D^{2z+2})=sC+\frac{E}{1-D}\Big((2s+2z+2)P$$
$$-\frac{(2s+2z+2)(2s+2z+1)}{1.\quad 2.}P^2$$
$$+\frac{(2s+2z+2)(2s+2z+1)(2s+2z)}{1.\quad 2.\quad 3.}P^3\Big)$$ ed eſſendo in ciaſcheduna di eſſe una radice almeno, neceſſariamente reale (mentre ſi poſſono prendere le terze, ſeſte, ſettime poteſtà ſe l' occorrenza il richieda) ſi verrà a calcolare il valore di s, come ſi voleva.

§. 13. L' iſteſſa approſſimazione avrà luogo in molti caſi per ritrovare il numero r degl' intervalli neceſſarj per giungere ad avere un dato alzamento M; infatti ponendo $rC+E(1\pm D^r)=M$ ſarà in caſo che D ſia piccoliſſima frazione $r=\frac{M-E}{C}$, lo che reſtituendo i valori $E=\frac{CD^{2z+1}}{D+1}$, $D=\frac{ab}{A^2}$, $C=\frac{mn}{ab+A^2}$ diventa $r=\frac{M(ab+A)}{mn}$, come richiedeſi dalla natura della queſtione ; ed in caſo che D ſia frazione poco inferiore all' unità ponendo come ſopra $1-P=D$ troveremo col diſprezzare le ſuperiori potenze di P, da una equazione di 3.°, 4.°, 5.° grado ecc. dipendere il valore di r.

§. 14. Fino ad ora non abbiamo determinato queſti intervalli, in ciaſcheduno dei quali ſi è ſuppoſto depoſitarſi la quantità di terra mm, e quindi non apparisce come possa trarsi alcun lume dalle formole ritrovate; prescindendo nonostante dalla cognizione della quantità mm si viene a stabilire molto più di quello, che in principio possa aspettarsi, per mezzo della seguente considerazione. Astraggasi dalle meteorologiche stravaganze, delle quali occorrendo si può tener conto, e riflettasi che il tempo delle piene d' un fiume per esempio in un anno è costante; grandi, o piccoli che siano gl' intervalli nel decorso di ciascheduno dei quali si deposita la terra mm, il numero di essi nel corso di tutti gli anni potrà assumersi per costante; osservando in conseguenza l' alzamento prodotto in colmata in un anno, si avrà (avvertendo che non si abbandonino le debite dimensioni degli argini, e dei regolatori) il paragone con i successivi ed il cercato alzamento come segue.

§. 15. Sia r il numero indeterminato degl' intervalli che decorrono nel primo anno della bonificazione, ed avremo l' alzamento in colmata $= rC + \frac{CD}{D+1}(1 \pm D^r)$. Abbiasi dall' osservazione quest' istesso alzamento $= M$; e per le cose preaccennate sarà l' alzamento nel secondo anno

$$= rC + \frac{CD^{r+1}}{D+1}(1 \pm D^r), \text{ nel terzo } = rC + \frac{CD^{2r+1}}{D+1}(1 \pm D^r)$$

e così degli altri; accumulando in conseguenza gli alzamenti di un numero y di anni avremo questa somma

$$= yrC + \frac{CD(1 \pm D^r)}{D+1}(1 + D^r + D^{2r} \dots + D^{(y-1)r}$$

$$= yrC + \frac{CD(1 \pm D^r)}{D+1} \times \frac{D^{yr} - 1}{D^r - 1}.$$ Posta questa quantità $= N$ alzamento ricercato, otterremo una equazione della forma di quella del §. 13, dalla soluzione della quale dipenderà il numero y degli anni necessarj per arrivare all' alzamento N. Ma prescindendo dalla soluzione diretta di questa equazione, dato per l' osservazione l' alzamento dell' anno primo M, si vede come assumendo arbitrariamente il numero r possa aversi la proporzione tra M e l' alzamento che è per competere ad un anno qualunque nell' ordine dei seguenti.

§. 16. Se allor quando è seguita la bonificazione per il corso

corſo di un anno ſi deviaſſero le acque dalla colmata fino a tanto che nel corſo per eſempio di un altro anno il reſpettivo tronco del fiume ſiaſi ridotto relativamente alla ſuperficie della colmata nelle iſteſſe circoſtanze nelle quali trovavaſi al principio dell' anno primo, è chiaro che nel terzo anno l' alzamento in colmata ſarebbe l' iſteſſo che fu nel primo cioè $= rC + \frac{CD}{1+D}(1 \pm D^r)$, e l' iſteſſo dicaſi (ſeguendo l' iſteſſa ipoteſi) nel 5° nel 7° anno ecc., di modo che ſeguitando queſta maniera di bonificare interpolatamente nel corſo di anni $2m+1$ avrebbeſi l' alzamento $(m+1)C\left(r + \frac{D}{D+1}(1 \pm D^r)\right)$, là dove continuando l' alluvione ogni anno ſarebbe l' alzamento

$$= (2m+1)rC + \frac{CD}{D+1} \times \frac{1 - D^{(2m+1)r}}{1 - D^r}(1 \pm D^r).$$

§. 17. Può ciaſcheduno paragonare queſte due eſpreſſioni uſando qualche deſtrezza nelle diverſe ipoteſi del valor di r, ma generalmente ſupponendo x il numero degli anni per i quali è durata la continua bonificazione, e per conſeguenza $xrC + \frac{CD}{D+1} \times \frac{1 - D^{xr}}{1 - D^r}(1 \pm D^r)$ l' alzamento occorſo, troveremo il numero y degli anni che biſognano a fine di avere l' iſteſſo alzamento per mezzo della bonificazione nella guiſa ſopraeſpoſta alternativa; in fatti dalle coſe premeſſe ſi ha l' equazione $y = \frac{xr(1+D)(1-D^r) + D(1-D^{xr})(1 \pm D^r)}{r(1+D)(1-D^r) + D(1-D^r)(1 \pm D^r)}$; queſta eſpreſſione può ridurſi a queſt' altra cioè

$$x + \frac{D(1 \pm D^r)}{(1-D^r)\left(r(1+D) + D(1 \pm D^r)\right)}(1 + xD^r - x - D^{xr}) =$$

$$x - \frac{D(1 \pm D^r)}{(1-D^r)\left(r(1+D) + D(1 \pm D^r)\right)}\left(x - 1 + xD^r\left(\frac{D^{xr-r}}{x} - 1\right)\right);$$

ma la quantità $\frac{D(1 \pm D^r)}{(1-D^r)\left(r(1+D) + D(1 \pm D^r)\right)}$ è ſempre poſitiva, come pure nella maſſima parte dei caſi l' altra

$x - 1 + xD^r\left(\frac{D^{ur-r}}{x} - 1\right)$, ed in conseguenza si ultimerà la bonificazione in minor numero d' anni (in moltissimi casi almeno i quali possono a piacere dettagliarsi per mezzo di queste formole) operando interpolatamente piuttosto che continuamente ogni anno; e quando ancora fosse un poco superiore il numero degli anni che occorrono per la bonificazione alternativa in paragone della continua, ciascheduno si accorge quanto metta maggior conto il seguire il primo metodo piuttosto che il secondo (per quanto generalmente preferito) mentre negli anni nei quali la colmata è senza acqua può mettersi a profitto il suo terreno per le più facili semente, e di più in molti casi s' impiega per ultimare la bonificazione minor dispendio.

§. 18. Finalmente per accorgersi quanto sia fallace il dedurre dall' alzamento del primo, o secondo anno con una semplice proporzione quelli, che occorreranno nei successivi, basta osservare che con tal computo si avrebbe in anni y l' alzamento $y\left(rC + \frac{CD}{D+1}(1 \pm D^r)\right)$, ed in realtà l' alzamento è stato trovato sopra $= yrC + \frac{CD}{D+1}(1 \pm D^r)\frac{1-D^{yr}}{1-D^r}$, e la prima somma eccede la seconda della quantità $\frac{CD}{D+1}(1 \pm D^r)\left(y - \frac{1-D^{yr}}{1-D^r}\right)$ la quale in certi valori assegnabili specialmente alle quantità y, ed r diventa molto sensibile.

§. 19. Abbiamo sempre supposto che nel principio della bonificazione il tronco del fiume sia di una tal giacitura che il fondo della foce resti a livello colla superficie del terreno da bonificarsi, lo che talvolta non succede potendo la linea del fondo essere alquanto superiore o inferiore a quella che occorrerebbe per adempire tal condizione; allora nascono formole diverse pel calcolo degli alzamenti, e la serie che gli esprime, lungi dal seguitare una legge costante, ne prende altra meno regolare, ma riducibile nonostante con i principj quasi medesimi sopraesposti. Con quelle formole si risolvono diverse questioni che si presentano in seguito di queste con-

ſiderazioni nel voler diſporre le colmate da farſi in diverſe porzioni di terreno ſucceſſivamente una dopo l' altra; per eſempio ſuppoſto che il tronco per aver colmato una porzione di campagna abbia talmente alzato il ſuo fondo che la foce reſti aſſai ſuperiore alla ſuperficie della porzione di terreno che debbeſi ſucceſſivamente bonificare, è chiaro che introducendo l' acqua in colmata, nel primo gli alzamenti ſaranno molto maggiori dei calcolati ſino ad ora, lo che ſarebbe vantaggioſo; ma ſe con chiuſa, o palafitta ſituata alla foce s' impediſca l' eſcavazione del tronco, perderemo il vantaggio ſopraccennato, ed invece ne avremo un altro cioè ſinattantochè la ſuperficie della colmata non ſiaſi alzata al livello del fondo della foce diventando $=0$ il tronco non interrotto, negl' intervalli impari e nei pari ſaranno uguali gli alzamenti in colmata, e quindi la ſomma di tutti formerà più preſto una quantità ſignificante; trovo pertanto nei diverſi caſi quale dei due partiti ſia da preferirſi. In oltre ſe il terreno da bonificarſi ſia alquanto ſcoſceſo, e poſſano introdurſi l' acque tanto per la più baſſa quanto per la più alta parte, le diverſe modificazioni del tronco nei due diverſi caſi producono l' ultimazione della colmatura in tempo differente, e queſto tempo ancora ſi calcola; ma io mi luſingo di potere eſporre ſimili riſultati in altra occorrenza, allorchè mi fermerò a dettagliare delle avvertenze pratiche neceſſarie per profittare delle accennate teorie. In fatti convien diſtinguere l' eſtenſione del tronco del fiume da introdurſi nel calcolo, ed in certi caſi ſoſtituire la quantità $\frac{rmnab}{2A^2}$ invece della $\frac{rmnab}{A^2}$.
Volendo poi aſſegnare *a priori* un valor proſſimo alla quantità r, fa d' uopo indagare la maſſa terroſa traſportata dal fiume, ed a tale oggetto ho praticato una macchinetta aſſai ſemplice per ottenere i ſaggi a diverſe profondità ſotto la ſuperficie del fiume iſteſſo: l' altezza del corpo d' acqua corrente, e lo ſtrato d' onde prendeſi quella, ſopra della quale vuole iſtituirſi l' eſperimento, ſono elementi da conſiderarſi per avere qualche deciſivo reſultato, quantunque ſiano ſtati negletti nelle famoſe eſperienze fatte ſu tale propoſito nel Reno di Germania, in quello di Bologna, nell' Arno ed al-

trove, ed io mi ſon trovato ad ottenere dall' iſteſſo volume d' acqua torbida preſo a diverſe altezze fino un quinto di terra più, o meno non ſolo nell' iſteſſo fiume, ma ancora nella iſteſſa piena, e nell' iſteſſo tempo.

APPENDICE.

Nel principio di queſta Memoria trovammo ſotto due differenti forme la ſomma d' una quantità di progreſſioni Geometriche, e ciò ne porge occaſione di accennare come alle ſomme delle progreſſioni ſuddette ſi riducano quelle di infinite ſerie, ed il reſpettivo riſcontro con infinite equazioni a differenze finite integrabili.

Siano le progreſſioni

$$1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{a-1}{a-1}$$

$$1+a \quad \ldots\ldots\ldots = \frac{a^2-1}{a-1}$$

$$1+a+a^2 \ldots\ldots\ldots = \frac{a^3-1}{a-1}$$

$$1+a+a^2+a^3 \quad \ldots\ldots = \frac{a^4-1}{a-1}$$

$$\text{ecc.} \qquad\qquad \text{ecc.}$$

$$1+a+a^2+a^3 \ldots\ldots + a^{x-1} = \frac{a^x-1}{a-1}$$

raccogliendo le ſomme da ambe le parti ſarà

$$x+(x-1)a+(x-2)a^2+(x-3)a^3 \ldots\ldots + (x-x+1)a^{x-1}$$

$= \frac{1}{a-1}(-x+a+a^2+a^3+a^4 \ldots\ldots + a^x)$, ma il primo membro di queſta equazione ſi riduce $= x(1+a+a^2 \ldots + a^{x-1}) - a(1+2a+3a^2+4a^3 \ldots\ldots (x-1)a^{x-2})$; dunque avremo

$\frac{1}{a-1}(-x+a+a^2+a^3 \ldots\ldots a^x) = x(1+a+a^2 \ldots\ldots + a^{x-1}) - a(1+2a+3a^2+4a^3 \ldots\ldots + (x-1)a^{x-2})$; ſommando in conſeguenza le progreſſioni, e dividendo per a, otterremo

$$\frac{1}{a-1} \times \frac{a^{x+1}-a}{(a-1)a} - \frac{x}{(a-1)a} = \frac{x(a^x-1)}{(a-1)a}$$

$-1-2a-3a^2-4a^3\dots-(x-1)a^{x-2}$ ovvero la fomma della ferie $1+2a+3a^2\dots+(x-1)a^{x-2}$
$= \frac{(x+1)(a-1)a^{x+1}-a(a^{x+1}-1)}{a(a-1)^2}$, e ponendo $x+1$ in vece d' x farà la fomma della ferie

$$1+2a+3a^2\dots+xa^{x-1}=\frac{1+a^x(ax-x-1)}{(a-1)^2}.$$

§. 2. La ferie $1+2a+3a^2\dots+xa^{x-1}$
$=2a(1+2a^2+3a^4+4a^6\dots+ya^z)+1+3a^2+5a^4$
$+7a^6\dots+(2r+1)a^{2r}$; ma la prima di quefte due ferie fi fomma per mezzo delle progreffioni ponendo a^2 in vece di a, ovvero facendo come al §. 1.

$$1 \; \dots\dots\dots\dots \; =\frac{a^2-1}{a^2-1}$$

$$1+a^2 \; \dots\dots\dots \; =\frac{a^4-1}{a^2-1}$$

$$1+a^2+a^4 \; \dots\dots \; =\frac{a^6-1}{a^2-1}$$

ecc. ecc.

$$1+a^2+a^4\dots+a^{2y} \; \dots \; =\frac{a^{2y+2}-1}{a^2-1}$$

donde fi ottiene
$z(1+a^2+a^4\dots+a^{2y})-a^2(1+2a^2+3a^4\dots+(z-1)a^{2y-2})$
$=\frac{-z}{a^2-1}+\frac{a^2+a^4+a^6\dots+a^{2y+2}}{a^2-1}$, e per confeguenza fommando le due progreffioni, avremo la fomma della ferie $1+2a^2+3a^4+4a^6\dots+ya^z$. Chiamifi S la fomma della ferie $1+2a+3a^2+4a^3\dots+xa^{x-1}$, ed S' la fomma della ferie $1+2a^2+3a^4+4a^6\dots+ya^z$, ed avremo la fomma della ferie $1+3a^2+5a^4+7a^6\dots(2r+1)a^{2r}=S-2aS'$, e dell' altra $1+4a^2+6a^4+8a^6\dots+(2r+2)a^{2r}$
$=S-2aS'+\frac{a^{2r+2}-a^2}{a^2-1}$.

§. 3. Ponendo inoltre

$$1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{1+a(a-2)}{(a-1)^2}$$

$$1+2a \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{1+a^2(2a-3)}{(a-1)^2}$$

$$1+2a+3a^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{1+a^3(3a-4)}{(a-1)^2}$$

ecc. ecc.

$$1+2a+3a^2+4a^3 \ldots + xa^{x-1} = \frac{1+a^x(ax-x-1)}{(a-1)^2}$$

sarà sommando da ambe le parti

$$x+(x-1)2a+(x-2)3a^2 \ldots\ldots + (x-x+1)xa^{x-1} =$$

$$\frac{x}{(a-1)^2} + \frac{\begin{pmatrix} a^2+2a^3+3a^4 \ldots\ldots + xa^{x+1} \\ -2a-3a^2-4a^3 \ldots\ldots -(x+1)a^x \end{pmatrix}}{(a-1)^2}$$; ma il primo membro si riduce $= xS - 2a(1+3a+6a^2+10a^3 \ldots + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}a^{x-2}$, ed il secondo $= F.S$ (intendendo per F la funzione che trovasi sommando le serie S); dunque la somma della serie

$$1+3a+6a^2+10a^3 \ldots\ldots + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}a^{x-2} = \frac{xS-F.S}{2a}$$

$$= \frac{(a^2x-2ax+x-a^2+1)S-(1+x)(1-a^x)}{2a(a-1)^2}.$$

§. 4. Disponendo di nuovo queste serie ora sommate come abbiamo fatto dell' altre, otterrannosi infinite altre serie, la somma delle quali si riduce alla semplice nozione delle Geometriche progressioni, aggiungendo o sottraendo una delle quali si ridurrà a legge nota l' andamento dei coefficienti numerici. Si potranno anco variare le disposizioni, e ottenere serie più complicate per esempio

$$1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{1+a(a-2)}{(a-1)^2}$$

$$1+2a+3a^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{1+a^3(3a-4)}{(a-1)^2}$$

$$1+2a+3a^2+4a^3+5a^4 \;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{1+a^5(5a-6)}{(a-1)^2}$$

$$1+2a+3a^2+4a^3+5a^4+6a^5+7a^6 = \frac{1+a^7(7a-8)}{(a-1)^2}$$

$$1+2a+3a^2+4a^3+5a^4+6a^5+7a^6 \ldots\ldots$$
$$+xa^{x-1}+(x+1)a^x \;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{1+a^{x+1}\big((x+1)a+x+2\big)}{(a-1)^2}$$

ſommando da ambe le parti otterremo

$$z+(z-1)(2a+3a^2)+(z-2)(4a^3+5a^4)+(z-3)(6a^5+7a^6)\ldots$$
$$+(z-z+1)\left(xa^{x-1}+(x+1)a^x\right)=\frac{z}{(a-1)^2}$$
$$+\frac{1}{(a-1)^2}\Big(a(a-2)+a^3(3a-4)+a^5(5a-6)+a^7(7a-8)\ldots$$
$$+a^{x+1}\big((x+1)a-x-2\big)\Big).$$

Ma il ſecondo membro ſi riduce alle note ſerie già ſommate ed il primo ſi decompone in una delle medeſime meno la ſerie $2a+3a^2+2(4a^3+5a^4)$ $+3(6a^5+7a^6)+4(8a^7+9a^8)\ldots.+(z-1)\left(xa^{x-1}+(x+1)a^x\right)$ la quale per conſeguenza reſterà ſommata, e nell' iſteſſa guiſa ſenza altra pena che di maggior proliſſità di calcolo queſta molto più generale

$$2a+3a^2+4a^3\ldots.+na^{n-1}+$$
$$2\left((n+1)a^n+(n+2)a^{n+1}+(n+3)a^{n+2}\ldots+(2n-1)a^{2n-2}\right)+$$
$$3\left(2na^{2n-1}+(2n+1)a^{2n}+(2n+2)a^{2n+1}\ldots.+(3n-2)a^{3n-3}\right)+$$
$$4\left((3n+1)a^{3n}+(3n+2)a^{3n+1}+(3n+3)a^{3n+2}\ldots.+(4n-3)a^{4n-4}\right)+$$
$$\text{ecc.} \qquad\qquad \text{ecc.}$$
$$(z-1)\left(xa^{x-1}+(x+1)a^x+(x+2)a^{x+1}\ldots..(x+n-1)a^{x+n-2}\right).$$

attendendo a diverſe avvertenze neceſſarie per la riduzione alle ſerie già ſommate.

§. 5. Servirà queſto cenno per indicare quante ſiano le famiglie delle ſerie complicatiſſime, e fino ad ora ſommate col calcolo delle differenze finite, o infiniteſime, o colla teoria delle ſerie ricorrenti, e nonoſtante riducibili alle più ſemplici Geometriche progreſſioni; trovando il valore di una frazione $\frac{P}{Q}$ nel caſo di $P=0$, $Q=0$ avremo ſenza principj più ſublimi il valore delle ſerie $1+2+3+4\ldots+x$,

$1+5+7+9\ldots+2x+1$ e de' numeri figurati ecc. Applicando poi questi stessi artifizj si trovano le integrazioni d' infinite differenziali a differenze finite ridotte alla somma di progressioni Geometriche, e la corrispondenza tra l' aggiunta, o la sottrazione della costante coll' aggiunta, o la sottrazione d' una progressione per ridurre i coefficienti numerici; dalle quali cose se possa trarsi utilità, molto meglio da una momentanea attenzione de' sagacissimi Geometri verrà posto in chiaro, che da' diffusi complicati calcoli, i quali io fossi qui per distendere.

SAGGIO