TEOREMI

SOPRA LE SERIE INFINITE CONVERGENTI

Formate dai Prodotti de' Numeri dispari successivi divisi pe' Prodotti de' Numeri pari corrispondenti

Del P. Gregorio Fontana delle Scuole Pie, Pubblico Professore delle Matematiche superiori nella Regia Università di Pavia.

NOn vi ha forse nella moderna Analisi parte alcuna, in cui da un secolo e mezzo in qua siasi fatto da' Geometri un sì gran viaggio, e tante nuove inaspettate verità sieno state scoperte, quanto in quella, che vien destinata ad esporre la Teoria delle Serie Infinite. Siccome fino da' primi passi, che andò facendo la nuova Analisi, fu facile ad ognuno di accorgersi dell' utilità somma ed importanza, che dalla dottrina delle serie dovea per necessità derivare in tutte le Scienze Matematiche; quindi avvenne, che i più gran Geometri rivolsero le loro meditazioni a quest' interessantissimo oggetto, e facendo a gara d' inoltrarsi più addentro nella materia portarono tanto avanti le loro ricerche, che a considerare l' intervallo percorso dal principio del cammino fino al termine, a cui sono in oggi pervenuti, e avuto riguardo al lento progresso delle altre cognizioni in quel periodo di tempo, si crederebbe senza pena, che non uno o due secoli, ma ben venti e trenta fossero trascorsi. A sostenere l' indefesso studio de' Geometri in questa special parte di analisi a preferenza delle altre contribuì, non ha dubbio, più che ogn' altro motivo l' idea che tosto si concepì de' vantaggi grandissimi e delle preziose ricchezze, che questo nuovo campo fin ne' primi tentativi parve largamente promettere a' suoi coltivatori. In fatti potendosi opportunamente introdurre le serie in un' infinità di ricerche, le più delicate e profonde, e preſentandoſi elleno dappertutto anche quando meno ſi preveggono; ſe ſi giugneſſe a tanto di poter aſſegnare la ſomma di ciaſcheduna, tutto ſi ſarebbe fatto nelle Matematiche, e qualunque arduo intrattabil Problema ſarebbe ſciolto compiutamente. Ma con tutti i progreſſi già fatti ſiamo ancora tanto lontani da queſt' ultima meta, che l' immenſa diſtanza, che ci ſepara, non ſembra ſperabile dover mai eſſere interamente ſormontata. Nelle ſerie ſteſſe numeriche, che con più ſucceſſo delle altre ſonoſi coltivate, in mezzo all' ampia e doviziosa raccolta di nuove fecondiſſime verità ſcoperte nelle ſerie de' numeri *figurati*, de' *poligoni*, delle potenze dirette ed inverſe de' numeri naturali, ecc. è tuttavia tale e tanta la farraggine delle coſe, che ancor reſtano nell' oſcurità, che baſterebbe queſto ſolo argomento, quando tutti gli altri mancaſſero, per convincerſi della povertà e delle anguſtie dell' ingegno umano.

Siccome pertanto infinite ſerie numeriche ſi poſſono comporre moltiplicando per ogni termine un certo aggregato di numeri diſpari ſucceſſivi, e dividendo il riſultato pel prodotto de' numeri pari corriſpondenti, o viceverſa dividendo queſto per quello, ed intorno a tali ſerie poco o nulla ſi è ſcoperto ſino al preſente, e poco altro ſi conoſce oltre il famoſo Teorema di *wallis* per eſprimere il rapporto della circonferenza circolare al diametro; non ſarà inutile l' eſporre qui alcuni curioſi e nuovi Teoremi riſguardanti la ſomma delle predette ſerie: dico nuovi Teoremi, perchè dai due primi in fuori, che per eſſere di facile dimoſtrazione debbono eſſer già conoſciuti, non mi è paleſe, che gli altri ſi trovino prima d'ora pubblicati. Queſti Teoremi a me ſi ſono preſentati mercè di alcuni particolari artifizj di Calcolo Integrale, artifizj talvolta aſſai fini e complicati per dover creder probabile l' eſiſtenza d' una via più corta e ſpedita, che la da me tenuta, per dimoſtrare alcuni di eſſi.

Le ſomme, che io aſſegno alle ſerie da me trattate, ſono di tre ſorti, altre cioè aſſolutamente infinite, altre traſcendenti, altre algebraiche e ſempliciſſime.

TEOREMA I.

La ſerie $\frac{1}{2}+\frac{1}{2.4}+\frac{1.3}{2.4.6}+\frac{1.3.5}{2.4.6.8}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}+$ ecc. *in inf.* è uguale all' unità.

TEOREMA II.

La ſerie $\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}+$ ecc. *in inf.* ha un valore infinito.

TEOREMA III.

La ſerie $\frac{1^2}{2^2}+\frac{1.3^2}{2.4^2}+\frac{1.3.5^2}{2.4.6^2}+\frac{1.3.5.7^2}{2.4.6.8^2}+\frac{1.3.5.7.9^2}{2.4.6.8.10^2}+$ ecc. *in inf.* ha parimente un valore infinito.

SCOLIO.

Nel Teorema XVII. ſi dimoſtrerà, che queſta ſerie conſerva il ſuo valore infinito quand' anche i due ultimi fattori di tutti i numeratori e denominatori ſieno elevati al quadrato; e lo ſteſſo potrà dimoſtrarſi, quando i tre ultimi, i quattro ultimi, ecc. e generalmente qualunque numero finito di fattori ultimi nel numeratore, e denominatore di ciaſcun termine della ſerie ſi trovi alzato al quadrato. Che ſe tutti i fattori de' termini della ſerie vengono elevati al quadrato, la ſomma ritiene tuttavia un valore infinito, ma d' un' indole però affatto ſingolare, qual è l' infinito logaritmico. Ecco pertanto il ſeguente

TEOREMA IV.

La ſerie $\frac{1^2}{2^2}+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}+\frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}+$ ecc. *in inf.* ha un valore infinito, ma logaritmico.

TEOREMA

TEOREMA V.

Il quadrante inverſo della periferia del cerchio deſcritto col raggio 1, cioè $\frac{2}{\pi}$ è uguale alla ſerie infinita

$$1-\frac{1}{2^2}-\frac{1^2.3}{2^2.4^2}-\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}-\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}-\frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2}-\text{ecc.}$$

in inf.

SCOLIO.

La famoſa ſerie Wallifiana, la quale ſuole dimoſtrarſi mediante un lungo giro di calcoli complicati, diventa un' immediata conſeguenza di queſto Teorema. Imperciocchè ſommando ſucceſſivamente i termini della ſerie, ſi ottiene di mano in mano

1.°

$$1^2-\frac{1^2}{2^2}=\frac{1^2.3}{2^2}.$$

2.°

$$\frac{1^2.3}{2^2}-\frac{1^2.3}{2^2.4^2}=\frac{1^2.3\,(4^2-1^2)}{2^2.4^2}=\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2}.$$

3.°

$$\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2}-\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}=\frac{1^2.3^2.5\,(6^2-1^2)}{2^2.4^2.6^2}=\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2}.$$

4.°

$$\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2}-\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}=\frac{1^2.3^2.5^2.7\,(8^2-1^2)}{2^2.4^2.6^2.8^2}=\frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2}.$$

5.°

$$\frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2} = \frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9\,(10^2 - 1^2)}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2}$$
$$= \frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9^2.11}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2}.$$

6.° ecc.

Quindi apertamente si scorge essere il quadrante inverso $\frac{2}{\pi} = \frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9^2.11^2.13^2.15^2.17.\,\text{ecc.}}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2.12^2.14^2.16^2.\,\text{ecc.}}$ che è appunto la serie Wallisiana formata d' un solo termine contenente il prodotto de' quadrati di tutti i numeri dispari diviso pel prodotto de' quadrati di tutti i numeri pari.

TEOREMA VI.

Il quadrante inverso $\frac{2}{\pi}$ della circonferenza del cerchio descritto col raggio 1 è parimente uguale alla serie infinita
$$\frac{1}{2} + \frac{1^2}{2^2.4} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2.6} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8} + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2.10}$$
$$+ \frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9^2}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2.12} + \text{ecc.}$$

TEOREMA VII.

Lo stesso quadrante inverso $\frac{2}{\pi}$ è uguale alla serie infinita
$$3\left(\frac{1}{2.4} + \frac{1^2.3}{2^2.4.6} + \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6.8} + \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8.10}\right.$$
$$\left. + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2.10.12} + \text{ecc.}\right),$$ di cui è chiara la legge.

TEOREMA VIII.

Lo stesso quadrante inverso $\frac{2}{\pi}$ è parimente eguale alla serie infinita, della quale è pur manifesta la legge,

$$5\left(\frac{1.3}{2.4.6}+\frac{1^2.3.5}{2^2.4.6.8}+\frac{1^2.3^2.5.7}{2^2.4^2.6.8.10}+\frac{1^2.3^2.5^2.7.9}{2^2.4^2.6^2.8.10.12}\right.$$
$$\left.+\frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9.11}{2^2.4^2.6^2.8^2.10.12.14}+\text{ecc.}\right).$$

TEOREMA IX.

Il predetto quadrante inverso $\frac{2}{\pi}$ è uguale a quest' altra serie di legge pur manifesta

$$7\left(\frac{1.3.5}{2.4.6.8}+\frac{1^2.3.5.7}{2^2.4.6.8.10}+\frac{1^2.3^2.5.7.9}{2^2.4^2.6.8.10.12}\right.$$
$$\left.+\frac{1^2.3^2.5^2.7.9.11}{2^2.4^2.6^2.8.10.12.14}+\frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9.11.13}{2^2.4^2.6^2.8^2.10.12.14.16}+\text{ecc.}\right).$$

TEOREMA X

In generale, se n esprime qualsivoglia numero dispari, il quadrante inverso $\frac{2}{\pi}$ è uguale ad n moltiplicato per la serie infinita, la quale ha le seguenti proprietà: 1.° ogni suo termine frazionario ha per numeratore il prodotto dei numeri dispari successivi, i quali arrivano fino al dispari n esclusivamente nel primo termine, e ne' termini susseguenti crescono sempre di uno di più sopra il precedente: 2.° questi fattori dispari sono elevati al quadrato a riserva degli ultimi in numero di $\frac{n-1}{2}$ in ciascun termine: 3.° il denominatore di ogni termine contiene il prodotto dei numeri pari successivi, i quali arrivano nel primo termine fino al pari $n+1$ inclusivamente, e ne' termini susseguenti crescono sempre di un fattore di più sopra il termine precedente: 4.° questi numeri pari sono elevati al quadrato ad eccezione degli ultimi in numero di $\frac{n+1}{2}$ in ciascun termine.

TEOREMA XI.

Il quadrante inverso $\frac{2}{\pi}$ è nuovamente uguale alla serie infinita

$$3\left(\frac{1}{2}-\frac{1.3}{2^2.4}-\frac{1^2.3.5}{2^2.4^2.6}-\frac{1^2.3^2.5.7}{2^2.4^2.6^2.8}-\frac{1^2.3^2.5^2.7.9}{2^2.4^2.6^2.8^2.10}\right.$$
$$\left.-\frac{1^2.3^2.5^2 7^2.9.11}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2.12}-\text{ecc.}\right)$$

TEOREMA XII.

Il quadrante inverso $\frac{2}{\pi}$ è uguale alla serie infinita

$$5\left(\frac{1.3}{2.4}-\frac{1.3.5}{2^2.4.6}-\frac{1^2.3.5.7}{2^2.4^2.6.8}-\frac{1^2.3^2.5.7.9}{2^2.4^2.6^2.8.10}\right.$$
$$\left.-\frac{1^2.3^2.5^2.7.9.11}{2^2.4^2.6^2.8^2.10.12}-\text{ecc.}\right)$$

TEOREMA XIII.

Il quadrante inverso $\frac{2}{\pi}$ viene espresso dalla serie infinita

$$7\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}-\frac{1.3.5.7}{2^2.4.6.8}-\frac{1^2.3.5.7.9}{2^2.4^2.6.8.10}-\frac{1^2.3^2.5.7.9.11}{2^2.4^2.6^2.8.10.12}\right.$$
$$\left.-\frac{1^2.3^2.5^2.7.9.11.13}{2^2.4^2.6^2.10.12.14}-\text{ecc.}\right)$$

TEOREMA XIV.

Se in generale n rappreſenta qualunque numero diſpari, il quadrante inverſo $\frac{2}{\pi}$ viene eſpreſſo dal prodotto di n moltiplicato per una ſerie infinita di termini frazionarj, tutti negativi a riſerva del primo, la qual ſerie procede con queſta legge: 1.° il numeratore di ciaſcun termine è il prodotto dei numeri diſpari ſucceſſivi, i quali nel primo termine giungono ſino al diſpari n eſcluſivamente, ed ogni termine ſuſſeguente acquiſta un fattore di più ſopra il termine antecedente: 2.° queſti fattori diſpari ſono elevati alla ſeconda potenza a riſerva delli $\frac{n+1}{2}$ ultimi in ciaſcun termine: 3.° il denominatore di ciaſcun termine della ſerie è il prodotto de' numeri pari ſucceſſivi, l' ultimo de' quali nel primo termine è $n-1$, ed ogni termine ſuſſeguente della ſerie acquiſta un fattore di più che il precedente: 4.° tali numeri pari aſcendono alla ſeconda potenza ad eccezione delli $\frac{n-1}{2}$ ultimi in ciaſcun termine.

TEOREMA XV.

Il logaritmo iperbolico del numero 2 è uguale alla ſerie infinita di nota legge $\frac{1}{2^2}+\frac{1.3}{2.4^2}+\frac{1.3.5}{2.4.6^2}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8^2}$ $+\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10^2}+\frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12^2}+$ ecc.

TEOREMA XVI.

Il logaritmo iperbolico del numero 2 è parimente uguale alla ſerie infinita, di cui è pure viſibile la legge

$$\frac{4}{3}\left(\frac{1.3^2}{2^2.4^2}+\frac{1.3.5^2}{2.4^2.6^2}+\frac{1.3.5.7^2}{2.4.6^2.8^2}+\frac{1.3.5.7.9^2}{2.4.6.8^2.10^2}\right.$$

$+ \frac{1.3.5.7.9.11^2}{2.4.6.8.10^2.12^2} + \text{ecc.}\Big)$

TEOREMA XVII.

Il valore della serie di manifesta legge

$$\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} + \frac{1.3^2.5^2}{2.4^2.6^2} + \frac{1.3.5^2.7^2}{2.4.6^2.8^2} + \frac{1.3.5.7^2.9^2}{2.4.6.8^2.10^2} + \frac{1.3.5.7.9^2.11^2}{2.4.6.8.10^2.12^2} + \text{ecc.}$$

in inf. è infinito.

TEOREMA XVIII.

La serie di nota legge

$$\frac{1.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} + \frac{1.3.5^2.7^2}{2.4^2.6^2.8^2} + \frac{1.3.5.7^2.9^2}{2.4.6^2.8^2.10^2} + \frac{1.3.5.7.9^2.11^2}{2.4.6.8^2.10^2.12^2} + \frac{1.3.5.7.9.11^2.13^2}{2.4.6.8.10^2.12^2.14^2} + \text{ecc.}$$

in inf. ha per somma $\frac{41}{64}\log.2 - \frac{1}{128}$.

TEOREMA XIX.

La serie $\frac{1.3}{2^2.4^2} + \frac{1.3.5}{2.4^2.6^2} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6^2.8^2} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8^2.10^2} + \text{ecc.}$ *in inf.* dove i due ultimi fattori di ogni denominatore sono elevati al quadrato, ha per somma $\frac{1}{4}(1 - \log.2)$.

TEOREMA XX.

La serie $\frac{1.3.5}{2^2.4^2.6^2} + \frac{1.3.5.7}{2.4^2.6^2.8^2} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6^2.8^2.10^2} + \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8^2.10^2.12^2} + \frac{1.3.5.7.9.11.13}{2.4.6.8.10^2.12^2.14^2} + \text{ecc.}$ *in inf.*, nella quale i tre ultimi fattori di ciascun denominatore sono elevati alla seconda potenza, ha per somma $\frac{3}{64}\left(\log. 2 - \frac{1}{2}\right)$.

TEOREMA XXI.

La somma della serie $\frac{1.3.5^2}{2^2.4^2.6^2} + \frac{1.3.5.7^2}{2.4^2.6^2.8^2} + \frac{1.3.5.7.9^2}{2.4.6^2.8^2.10^2} + \frac{1.3.5.7.9.11^2}{2.4.6.8^2.10^2.12^2} +$ ecc., nella quale i tre ultimi fattori di ciascun denominatore, e l' ultimo di ciascun numeratore si trovano alzati al quadrato, ha per valore $\frac{17}{128} - \frac{7}{64}\log. 2$.

TEOREMA XXII.

La serie $1 - \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} - \frac{1}{5.7} - \frac{1}{7.9} - \frac{1}{9.11} -$ ecc. *in inf.* ha la sua somma $= \frac{1}{2}$.

TEOREMA XXIII.

La somma della serie $\frac{2}{1.3} - \frac{4}{1.3.5} - \frac{6}{3.5.7} - \frac{8}{5.7.9} - \frac{10}{7.9.11} - \frac{12}{9.11.13} - \frac{14}{11.13.15} -$ ecc., di cui è manifesto l' andamento, è $= \frac{1}{4}$.

TEOREMA XXIV.

La serie $\frac{2.4}{1.3.5} - \frac{4.6}{1.3.5.7} - \frac{6.8}{3.5.7.9} - \frac{8.10}{5.7.9.11} - \frac{10.12}{7.9.11.13} - \frac{12.14}{9.11.13.15} -$ ecc. ha per somma $\frac{1}{6}$.

TEOREMA XXV.

La somma della serie $\frac{2.4.6}{1.3.5.7} - \frac{4.6.8}{1.3.5.7.9} - \frac{6.8.10}{3.5.7.9.11} - \frac{8.10.12}{5.7.9.11.13} - \frac{10.12.14}{7.9.11.13.15} - \frac{12.14.16}{9.11.13.15.17}$ — ecc., di cui è palese la legge, è $= \frac{1}{8}$.

TEOREMA XXVI.

La serie $\frac{2.4.6.8}{1.3.5.7.9} - \frac{4.6.8.10}{1.3.5.7.9.11} - \frac{6.8.10.12}{3.5.7.9.11.13} - \frac{8.10.12.14}{5.7.9.11.13.15} - \frac{10.12.14.16}{7.9.11.13.15.17} - \frac{12.14.16.18}{9.11.13.15.17.19}$ — ecc. di manifesta legge ha per somma $\frac{1}{10}$.

TEOREMA XXVII.

La serie $\frac{2.4.6.8.10}{1.3.5.7.9.11} - \frac{4.6.8.10.12}{1.3.5.7.9.11.13} - \frac{6.8.10.12.14}{3.5.7.9.11.13.15} - \frac{8.10.12.14.16}{5.7.9.11.13.15.17} - \frac{10.12.14.16.18}{7.9.11.13.15.17.19}$ — ecc. di evidente andamento ha per somma $\frac{1}{12}$.

TEOREMA XXVIII.

La somma della serie $\frac{2.4.6.8.10.12}{1.3.5.7.9.11.13} - \frac{4.6.8.10.12.14}{1.3.5.7.9.11.13.15} - \frac{6.8.10.12.14.16}{3.5.7.9.11.13.15.17} - \frac{8.10.12.14.16.18}{5.7.9.11.13.15.17.19}$

— 10.12

$-\frac{10.12.14.16.18.20}{7.9.12.13.15.17.19.21}$ — ecc. di legge manifesta è $=\frac{1}{14}$.

TEOREMA XXIX.

Essendo n qualunque numero intero, la frazione $\frac{1}{2n}$ è uguale alla somma della serie che ha tutti i termini negativi a riserva del primo, ed è dotata delle seguenti proprietà: 1.° Il numeratore del primo termine è il prodotto de' numeri pari successivi continuati fino al pari $(2n-2)$ inclusivamente: 2.° il numeratore di ogni termine susseguente è il numeratore precedente sminuito del suo primo fattore, e aumentato del fattore successivo all' ultimo: 3.° il denominatore così del primo come del secondo termine è il prodotto de' numeri dispari successivi continuati fino a $(2n-1)$ inclusivamente nel primo termine, e fino a $(2n+1)$ inclusivamente nel secondo termine: 4.° il denominatore di ogni altro termine susseguente è lo stesso che il denominatore antecedente, a cui manca il primo fattore, e cresce il fattore consecutivo all' ultimo.

TEOREMA XXX.

La serie $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+\frac{1}{9.11}+\frac{1}{11.13}+$ ecc. *in inf.* ha la sua somma $=\frac{1}{2}$.

SCOLIO.

Questo Teorema non differisce dal Teorema XXII., ma non doveva qui omettersi, perchè forma il primo anello della catena seguente.

TEOREMA XXXI.

La somma della serie $\frac{2}{1.3.5}+\frac{4}{3.5.7}+\frac{6}{5.7.9}+\frac{8}{7.9.11}$

$+ \frac{10}{9.11.13} + \frac{12}{11.13.15} +$ ecc. non è altro che $\frac{1}{4}$.

TEOREMA XXXII.

La serie $\frac{2.4}{1.3.5.7} + \frac{4.6}{3.5.7.9} + \frac{6.8}{5.7.9.11} + \frac{8.10}{7.9.11.13}$ $+ \frac{10.12}{9.11.13.15} +$ ecc. ha per somma $\frac{1}{6}$.

TEOREMA XXXIII.

La somma della serie $\frac{2.4.6}{1.3.5.7.9} + \frac{4.6.8}{3.5.7.9.11} + \frac{6.8.10}{5.7.9.11.13}$ $+ \frac{8.10.12}{7.9.11.13.15} + \frac{10.12.14}{9.11.13.15.17} +$ ecc., il di cui andamento è evidente, è $= \frac{1}{8}$.

TEOREMA XXXIV.

La serie $\frac{2.4.6.8}{1.3.5.7.9.11} + \frac{4.6.8.10}{3.5.7.9.11.13} + \frac{6.8.10.12}{5.7.9.11.13.15}$ $+ \frac{8.10.12.14}{7.9.11.13.15.17} +$ ecc. ha per somma $\frac{1}{10}$.

TEOREMA XXXV,

La somma della serie $\frac{2.4.6.8.10}{1.3.5.7.9.11.13} + \frac{4.6.8.10.12}{3.5.7.9.11.13.15}$ $+ \frac{6.8.10.12.14}{5.7.9.11.13.15.17} + \frac{8.10.12.14.16}{7.9.11.13.15.17.19}$ $+ \frac{10.12.14.16.18}{9.11.13.15.17.19.21} +$ ecc. è $= \frac{1}{12}$.

TEOREMA XXXVI.

La somma della serie $\frac{2.4.6.8.10.12}{1.3.5.7.9.11.13.15}$ $+\frac{4.6.8.10.12.14}{3.5.7.9.11.13.15.17}+\frac{6.8.10.12.14.16}{5.7.9.11.13.15.17.19}$ $+\frac{8.10.12.14.16.18}{7.9.11.13.15.17.19.21}+\frac{10.12.14.16.18.20}{9.11.13.15.17.19.21.23}+$ ecc. ha per valore $\frac{1}{14}$.

TEOREMA XXXVII.

Preso per n qualunque numero intero, la frazione $\frac{1}{2n}$ è uguale alla somma della serie continuata in infinito, e composta di termini tutti positivi e frazionarj, e regolati dalle seguenti leggi: 1.° il numeratore del primo termine è il prodotto de' numeri pari successivi continuati fino a $(2n-2)$ inclusivamente: 2.° il numeratore di ciascun termine susseguente è lo stesso che il numeratore precedente sminuito del primo fattore, ed accresciuto del fattore consecutivo all' ultimo: 3.° il denominatore del primo termine è il prodotto de' numeri dispari successivi continuati fino a $(2n+1)$ inclusivamente: 4.° il denominatore di qualunque termine susseguente è il prodotto dei fattori del denominatore antecedente incominciando dal fattor secondo, e terminando nel fattore consecutivo all' ultimo.

SI AVVERTONO I LIBRAJ

Che il passaggio dalla pag. 187 alla pag. 220 è error tipografico, perchè non sia creduto difettivo il volume.