DELLE STAZIONI
DE' PIANETI.

Del Sig. Antonio Cagnoli.

Del problema, col qual si cerca *quando un pianeta parrà stazionario*, non è stata per anco data, ch' io sappia, una soluzione completa. Le sue difficoltà persuasero i Geometri a contentarsi d' approssimazioni anche alquanto rimote. Così *Keill* e il Sig. *du Sejour* lo ridussero facile, supponendo circolari le orbite del pianeta e della terra: *Halley* avea già fatto un passo di più, restringendosi a trattar come circolare l' orbita terrestre solamente: *Keplero* non potea giunger che a soluzioni molto imperfette, mancandogli allora il modo di esprimere la ragione fra i moti ellittici e i raggi vettori: finalmente F. C. M*ayer* fu il solo che abbia intrapreso (Mem. di Peterburgo, Tom. II., pag. 82, e Tom. V. pag. 57) di risolver direttamente ed esattamente il problema con una equazione algebraica, *licet id non nemini impossibile visum fuerit*, come egli dice. Ma le due soluzioni di quest' ultimo Autore, benchè citate da molti, pur sono gravemente fallaci; a cagione ch' ei vi ha introdotto le variazioni de' seni dell' elongazione e della parallasse annua, come proporzionali ai lati opposti a questi angoli: nella qual parte del suo lavoro egli cade, senza avvedersene, nell' ipotesi delle orbite circolari. Avanti di conoscer le di lui soluzioni, avevo fatto il medesimo tentativo per vie affatto diverse, ed avevo ottenuto l' intento, in quel modo che son per esporre nella presente Memoria.

Sia S la commutazione, T l' elongazione, R la distanza dal sole alla terra, r quella dal sole al luogo del pianeta nell' eclittica. Nel triangolo formato da queste due distanze e da quella che separa la terra dal detto luogo del pianeta, si ha l' equazione seguente, che è facile da verificarsi, e che ho dimostrata (Trigonometria, art. 229): tang. $T = \frac{r\,\text{sen.}\,S}{R - r\,\text{cos.}\,S}$.

Dunque cot. $T = \frac{R}{r\,\text{sen.}\,S} - \text{cot.}\,S$; e prendendo i differenziali,

$$(A)\ldots - \frac{dT}{sen.^2T} = \frac{r\,\text{sen.}\,SdR - R\,\text{sen.}\,Sdr - rR\,\text{cos.}\,SdS}{r^2\,sen.^2\,S} + \frac{dS}{sen.^2S}.$$

Se si nomina V' la longitudine vera del sole, g la longitudine geocentrica del pianeta, u' l' eliocentrica ridotta all' eclittica, è noto che $T = g - V'$, e $S = 180° - (u' - V')$, considerando il pianeta nel primo quarto della elongazione, dopo il di lui passaggio per la congiunzion superiore; quella essendo la situazione ove deesi cercare la soluzione generale de' problemi dei tre corpi. Nel momento della stazione si ha $dg = 0$; per il che le equazioni precedenti danno $dT = -dV'$, e $dS = dV' - du'$. Posti questi valori nell' equazione (A), e fatte le riduzioni convenevoli, nasce la seguente:

$$(B)\ldots \frac{R}{r}dr - dR = \frac{(R\,\text{cos.}\,S - r)(du' - dV')}{\text{sen.}\,S} - \frac{r\,\text{sen.}\,SdV'}{sen.^2T}.$$

Ma $sen.^2T = \frac{r^2\,sen.^2\,S}{R^2 + r^2 - 2rR\,\text{cos.}\,S}$, (Trigon. Tavola III, formola 32ª). Fatta questa sostituzione, facilmente si converte l' equazione (B) in quella che segue:

$$(C)\ldots (dV' + du')\,\text{cos.}\,S + \left(\frac{dR}{R} - \frac{dr}{r}\right)\text{sen.}\,S = \frac{r}{R}\,du' + \frac{R}{r}\,dV'.$$

Chiamo V l' anomalia vera del sole, u quella del pianeta, M il moto medio del sole in un istante di tempo, m quello del pianeta nel medesimo istante, B il semiasse minore dell' orbita terrestre, a il semiasse maggiore, b il semiasse minore dell' orbita del pianeta; e suppongo eguale all' unità la distanza media dal sole alla terra. E' noto agli Astronomi per la teoria del moto ellittico de' pianeti, che $dV = \frac{MB}{RR}$, e $du = \frac{mab}{r'r'}$, detto r' il raggio vettore del pianeta. Di più ho mostrato (775) che per ridurre all' eclittica il moto du, basta moltiplicarlo per $\frac{\text{cof.}\,I}{\text{cos.}^2 L}$, denotando per I l' inclinazione dell' orbita del pianeta, e per L la sua latitudine eliocentrica; il che fatto, si ha poi $r'r' \cos.^2 L = rr$. Pongo questi valori di dV, e di du, in vece di dV' e di du', nell' equazione (C), perchè le variazioni infinitamente piccole dell' anomalia possono senza errore farsi uguali a quelle della longitudine. Ma valori analoghi si hanno di dR e di dr, giacchè (Trigon. 767, 776), $dR = -\frac{ME\,\text{fen.}\,V}{B}$, e

$dr = -\frac{mae\,\text{fen.}\,u\,\text{cof.}\,L}{b} - \frac{mab\,\text{fen}^2 L\,\text{cot. arg. lat.}}{r}$, chiamando E l' eccentricità del sole, e quella del pianeta. Con queste sostituzioni, e negletto il secondo termine del valor di dr, del qual termine rare volte si avrà bisogno, quand' anche si voglia gran precisione, l' equazione (C), moltiplicata per $\frac{rR}{M}$, diviene

$$(D)\ldots\left(B\frac{r}{R} + \frac{mab\,\text{cof.}\,I}{M} \times \frac{R}{r}\right)\text{cof.}\,S$$
$$+\left(\frac{mae}{Mb} R\,\text{fen.}\,u\,\text{cof.}\,L - \frac{E}{B} r\,\text{fen.}\,V\right)\text{fen.}\,S = B + \frac{mab\,\text{cof.}\,I}{M}.$$

Or si rifletta che i moti simultanei m, M sono in ragione inversa de' tempi delle respettive rivoluzioni, giacchè in tempo eguale il moto angolare medio convien che sia tanto più grande, quanto è più breve la durata della rivoluzione. Nomino P la rivoluzione periodica della terra, p quella del pianeta, ed ho $M : m :: p : P$. Dunque $M^2 : m^2 :: p^2 : P^2 :: a^3 : 1$, secondo la legge di *Keplero*; e le due ragioni estreme producono $\frac{ma}{M} = \frac{1}{\sqrt{a}}$. Si sostituisca questo valore nella formola (D), e si avrà

$$(E)\ldots\left(B\frac{r}{R} + \frac{b\,\text{cof.}\,I}{\sqrt{a}} \times \frac{R}{r}\right)\text{cof.}\,S$$
$$+\left(\frac{e}{b\sqrt{a}} R\,\text{fen.}\,u\,\text{cof.}\,L - \frac{E}{B} r\,\text{fen.}\,V\right)\text{fen.}\,S = B + \frac{b\,\text{cof.}\,I}{\sqrt{a}}.$$

Questa è l' equazione, la qual risolve il problema completamente, nè è molto faticosa pel calcolo numerico, attese le quantità costanti, il computo delle quali, fatto una volta, serve perpetuamente.

L' equazione, a cui siam pervenuti, contiene la relazione che deve aver luogo fra la commutazione e le anomalie medie del sole e del pianeta, nell' atto della stazione: e questa relazione è determinata con ogni esattezza, sì perchè ho tenuto conto di tutte le ineguaglianze de' moti ellittici, sì perchè m'è riuscito di convertir l' equazione (A) contenente quattro differenziali diversi, nell' equazione (E) che racchiude soltanto quantità finite.

In varie maniere si può risolvere l' equazione (E). Abbiamo posto $S = 180° - (u' - V)$. Se s'intende per A l'apogeo del sole, per α l'afelio del pianeta, sarà $S = 180° + A - \alpha + V - u$. Col mezzo di questa equazione si può dunque eliminar dalla (E) la commutazione. Di più è noto che $R = \frac{BB}{1 - E \text{cos.} V}$, $r = \frac{bb \text{cos.} I}{a - e \text{cos.} u}$, (veggasi l' art. 3279 della seconda edizione dell' Astronomia del Sig. *de la Lande*). Si possono dunque scacciare anche i raggi vettori, e si avrà in una equazione algebraica la relazione immediata fra l' anomalia vera del sole e quella del pianeta, nel momento della stazione assoluta. O vero cavando dalle ultime equazioni i valori di cos. V, cos. u, e da questi quelli di sen. V, sen. u, si potranno eliminare le anomalie, e si avrà in una equazione algebraica la relazione immediata fra i raggi vettori nell' eclittica, al momento della stazione. A questo ultimo scopo è diretta la seconda Memoria di *Mayer*; ma le sue equazioni finali non possono esser giuste, perchè costrutte sul fondamento dell' equazione finale della sua prima Memoria, della quale equazione accennai di sopra il difetto, e lo proverò quantoprima con un esempio, abbenchè di questa prova non avrà bisogno chiunque voglia comparar l' equazione medesima con la mia (E).

I due modi, che ho additati per risolvere l' equazione (E), la condurrebbero a gradi elevati e difficili. Or mi basta d' averli accennati, onde far vedere con ogni chiarezza, che essa contiene la soluzione completa del problema, poichè determina, a tutto rigore, quale eſſer debba, per ogni anomalia del pianeta o del ſole, l' anomalia del ſole o del pianeta, affinchè queſto ſembri ſtazionario. Una tale propoſizione non par differente da quelle di *Keplero* e di *Halley*, ma ſe eſſi od altri vi abbiano ancora pienamente ſoddisfatto, giudicheranno i Geometri. Egli è poi chiaro che la ſtazione dipende dalla combinazione appropriata delle due anomalie: per il che una equazione, la qual ſomminiſtri e contenga quella ſiffatta combinazione, adempie a quanto può eſigerſi nel preſente problema.

La via più ſpedita per calcolare la formola (E) è ſenza dubbio quella di falſa poſizione; aſſumendo le anomalie del pianeta e del ſole, e deducendone la commutazione col mezzo dell' equazione $S = 180° + A - \alpha + V - u$. Come il tempo della ſtazione è ſempre noto a un di preſſo, così gli errori delle falſe poſizioni ſaranno tenui, e due baſteranno ordinariamente per determinare non ſolo il dì, ma l' ora e il minuto, ſe ſi voleſſe, della ſtazione aſſoluta; alla qual preciſione non ſarebbe poſſibile di giungere per alcun altro metodo conoſciuto fin qui.

In queſta maniera ho trovato (ſervendomi delle Tavole del Sig. *de la Lande*, e traſcurando l' aberrazione del ſole) che Marte fu ſtazionario il dì 20 Ottobre 1785 a $0^{ore}\ 32'\frac{1}{2}$ di tempo medio. Della eſattezza di queſta determinazione ſi può avere un argomento dalle ſeguenti longitudini geocentriche computate ſulle medeſime Tavole

19 Ottobre 1785 a	12^{ore}	2^s	$15°$	$23'$	$30''$
20	$0^{ore}\ 32'\frac{1}{2}$ . . .	2	15	23	37
	12^{ore}	2	15	23	32

Avendo calcolato, per l' accennato momento della ſtazione di Marte, la formola di *Mayer*, mi ha dato la commutazione di $15°\ 12'\ 23''$, o vero di $344°\ 47'\ 37''$, in vece di $342°\ 13'\ 41''$ che danno le Tavole per quel punto. L' errore della formola di *Mayer* è dunque in queſto caſo di $2°\ 34'$, il che dà la ſtazione ſei giorni circa più tardi del vero: error più grande di molto di quel che darebbe la ſoluzione intiera del problema ſopra l' ipoteſi delle orbite circolari. In fatti ſu queſta ipoteſi ſi ha $B = 1 = R$, $b = a = r$, $e = 0$, $E = 0$; e la formola (E) ſi riduce alla ſeguente:

$$(F)\ldots \text{cos.}\, S = \frac{\text{cos.}\, I\sqrt{a}+1}{a+\frac{\text{cos.}\, I}{\sqrt{a}}};$$

la qual dà 16° 46′ 36″, o vero 343° 13′ 24″, per la commutazione costante di Marte stazionario.

Ma come questa commutazione può variare a un di presso da 10° a 23°, così la formola (*F*) (e per conseguenza ogni soluzion del problema sopra l' ipotesi delle orbite circolari) non saprebbe essere di alcun uso, potendo dare un errore persin di quattordici giorni sulla stazione. Al più si potrebbe ricorrere a detta formola, quando non si avesse veruna idea del tempo della stazione, onde assumere dati non remotissimi nel calcolo dell' equazione (*E*).

A gravi errori va pur soggetta la formola di *Keill*, che si trova nelle Istituzioni Astronomiche del Sig. *Le Monnier*, e della quale ho dato la dimostrazione (Trigon. 766). Questa formola dà l' elongazione pel tempo della stazione, ed è in errore di 4° 6′ nell' esempio precedente. Per aver un' approssimazione maggiore, ho suggerito d' impiegare nel calcolo di detta formola i raggi vettori attuali, in vece delle distanze medie, il quale espediente mi è ben riuscito moltissime volte; ma non è così in questo esempio, dove l' errore viene anzi a crescere di qualche minuto. Questa scoperta mi ha stimolato a indagare una soluzione completa del problema, e capace di ogni esattezza, qual mi sembra essere la presente.

Siccome la distanza dell' afelio della terra da quello de' pianeti varia molto lentamente, così presa una epoca, si potrebbe costruir facilmente, col mezzo dell' equazione (*E*), una tavola di stazioni d' ogni pianeta, la qual servirebbe per molti anni. Questa tavola avrebbe per argomento l' anomalia media del pianeta o del sole, e farebbe conoscere quella corrispondente del sole o del pianeta, perchè la stazione apparente potesse aver luogo.