DELLE FORMOLE

DIFFERENZIALI

La cui integrazione dipende dalla rettificazione delle Sezioni coniche.

Del Sig. Gian-Francesco Malfatti Pubblico Professore di Matematica nella Pontificia Università di Ferrara.

1. DA che conobbero i Geometri darsi un gran numero di formole differenziali, le quali ricusano di sottomettersi alla integrazione algebraica, o a quella specie d' integrazioni, che suppongono la quadratura del circolo e dell' iperbola, con somma avvedutezza pensarono, che molte di queste formole contumaci potrebbero essere integrate con archi di date ellissi, e di date iperbole; e perciò i loro studj rivolsero all' indagamento delle condizioni, di cui debbon le formole esser dotate, perchè oltre le quantità algebraiche, che possono avervi luogo, le integri uno o più archi di sezion conica.

2. Tra quelli, che si distinsero in sì fatte ricerche, primo dee mettersi il nostro celebre Italiano Conte Giulio Carlo de' *Fagnani* di Sinigaglia, che integrò l' arco della lemniscata, o sia della Cassiniana isocrona (*a*) colla rettificazione dell' arco ellittico e dell' arco iperbolico. Questi fu segui-

(*a*) E' già noto che la lemniscata, e la Cassiniana, che ha il lato del quadrato costante eguale alla semidistanza de' fuochi, sono la medesima curva. L' isocronismo poi di un grave, che discende per un suo arco qualunque cominciato dal punto del nodo, e per la corda corrispondente, è stato da me dimostrato nel libro stampato a Pavia l' anno 1781, che ha per titolo: Della curva Cassiniana e di una nuova proprietà meccanica, di cui essa è dotata Trattato sintetico.

tato dal *Mac-Laurin*, che costrinse alcune formole a soggiacere alle suddette rettificazioni. Moltissime poi ne ridusse il Sig. d' *Alembert*, le quali son raccolte nel Trattato di calcolo integrale del Sig. di *Bougainville*; e vi han posto pur mano, ampliando sempre più la teoria, il Sig. *Lexell* ne' Comentarj della nuova Accademia di S. Pietroburgo, e il P. Vincenzo *Riccati*, che io nominerò sempre con sommo rispetto, nell' Opusc. 2. Tom. 2 de' suoi Opuscoli, e nelle Instituzioni analitiche; cosicchè parer potrebbe, che la cosa fosse ormai ridotta alla sua perfezione.

3. Ciò non pertanto io trovo, che dovendo la variabile delle formole scorrere per tutti i valori, de' quali è suscettibile, quando nelle integrazioni entra l' arco iperbolico unito a quantità algebraica, apparíscono in certe sue determinazioni delle quantità infinite di segno diverso, le quali lasciano incerto il Geometra sul valore di queste differenze, che può essere infinito, e alcuna volta ancora finito. Ove questo valor sia finito, io m' accingo a provare, non esser esso altra cosa che la differenza tra l' intero assintoto e l' arco infinito corrispondente di una data iperbola. Ed anche quando questo valore sia infinito, trasformati i termini in due altri, un de' quali sia la differenza suddetta, l' altro termine mi fa tosto conoscere la sua infinità, e per conseguenza la infinità dell' integrale della proposta formola.

4. Affinchè poi ne' casi pratici, in cui i simboli cangiansi in numeri, si possano avere i valori prossimi de' nostri integrali, presento una serie di notabile convergenza, e da nessun Geometra, per quel ch' io sappia, avvertita, la quale esprime il valore della differenza tra l' assintoto e l' arco d' iperbola infinito. Con che agevolansi al maggior segno i calcoli, e sgombransi quelle oscurità ed incertezze, nelle quali han lasciate involte le formole integrate i mentovati celebri Autori.

5. Gli archi ellittici, che per lo più mescolati cogli archi iperbolici compariscono nelle integrazioni, ci avvisano, che a certi valori della variabile possono rimaner trasformati in quadranti delle rispettive ellissi, e trovarsi eziandio in compagnia della differenza tra l' assintoto e l' arco infinito dell' iperbola. Onde siccome assegniamo la serie convergente,

che equivale a questa differenza, sarà bene che accanto a questa si ponga pure la serie convergente, che rappresenta il quadrante ellittico. Si vedrà, che per le nostre formole dalle due serie unite ne risulta una terza elegantissima: e che il metodo, di cui ci serviamo, per arrivare a ciascuna delle anzidette serie, può esser utile ancora per le approssimazioni de' valori degli archi ellittici ed iperbolici, qualunque siasi la determinazione attribuita alla variabile delle formole.

6. Cominciam dalle serie, che riguardano gli archi ellittici. Nella ellisse VTu (*fig.* 1) di centro C, fuoco F, direttrice HH sia il semiasse $CV = a$; la distanza CA del centro dalla direttrice $= b$. Coll' intervallo del 1.° semiasse CV si descriva da C il quadrante circolare VE, e il raggio CE seghi l' ellisse nel punto T: indi presa un' ascissa CP, si alzi all' ellisse e al cerchio l' ordinata PMN. Chiamato l' arco $EN = u$, sarà $CP = \text{sen.}\,u$; $PN = \text{cos.}\,u$; e in oltre $CT = \frac{a\sqrt{(b^2-a^2)}}{b}$. Ma sta per proprietà dell' ellisse $CE : CT :: PN : PM$. Dunque $a : \frac{a\sqrt{(b^2-a^2)}}{b} :: \text{cos.}\,u : PM$; e però $PM = \frac{\text{cos.}\,u\sqrt{(b^2-a^2)}}{b}$. Il differenziale di questo per le note regole è $= -\frac{du\,.\,\text{sen.}\,u\sqrt{(b^2-a^2)}}{ab}$, e il suo quadrato $= \frac{du^2\,.\,(\text{sen.}\,u)^2\,(b^2-a^2)}{a^2b^2}$. Così il differenziale di CP, cioè di $\text{sen.}\,u$, è $= \frac{du\,.\,\text{cos.}\,u}{a}$, e il suo quadrato $= \frac{du^2\,(\text{cos.}\,u)^2}{a^2}$ $= \frac{b^2du^2\,(\text{cos.}\,u)^2}{a^2b^2}$. Preso pertanto nell' ellissi l' archetto infinitamente piccolo Mm, sarà

$$Mm = \frac{du\sqrt{\left(b^2(\text{sen.}\,u)^2 - a^2(\text{sen.}\,u)^2 + b^2(\text{cos.}\,u)^2\right)}}{ab}$$

$$= \frac{du\sqrt{\left(b^2 - (\text{sen.}\,u)^2\right)}}{b}.$$

7. Coll' ajuto del canone newtoniano si rivolga in serie il radicale della formola, e troverassi;

$$\frac{\sqrt{(b^2-(\text{sen.}\,u)^2)}}{b}=1-\frac{(\text{sen.}\,u)^2}{2b^2}-\frac{1.(\text{sen.}\,u)^4}{2.4\,b^4}-\frac{1.3.(\text{sen.}\,u)^6}{2.4.6\,b^6}$$

$-\dfrac{1.3.5\,(\text{sen.}\,u)^8}{2.4.6.8\,b^8}$ ecc. senza limite. Dunque

$$TM=\int\frac{du\sqrt{(b^2-(\text{sen.}\,u)^2)}}{b}=(A)\;u-\int\frac{du\,(\text{sen.}\,u)^2}{2b^2}$$

$$-\left(\int\frac{1.\,du\,(\text{sen.}\,u)^4}{2.4\,b^4}+\int\frac{1.3\;du\,(\text{sen.}\,u)^6}{2.4.6\,b^6}\right.$$

$$\left.+\int\frac{1.3.5\;du(\text{sen.}\,u)^8}{2.4.6.8\,b^8}\,....+\int\frac{1.3.5.7\,...\,(n-3)(\text{sen.}u)^n du}{2.4.6....n.b^n}+\text{ecc.}\right)$$

in infinito; dove n rappresenta un numero pari della serie 4, 6, 8 ecc. senza confine. Il calcolo poi de' seni e coseni circolari ci dà $\int du\,(\text{sen.}\,u)^2=\dfrac{a^2u}{2}-\dfrac{a\,\text{cos.}\,u\,\text{sen.}\,u}{2}$; e generalmente, quando n nella serie de' pari comincia dal num.° 4;

$$\int du\,(\text{sen.}\,u)^n=\frac{(n-1)(n-3)....\,3a^n u}{n(n-2)....\,4.2}$$

$$-\text{cos.}\,u\left(\frac{(n-1)\,a^3\,(\text{sen.}\,u)^{n-3}}{n(n-2)}+\frac{(n-1)(n-3)\,a^5\,(\text{sen.}\,u)^{n-5}}{n(n-2)(n-4)}\right.$$

$$\left.+\frac{(n-1)(n-3)(n-5)\,a^7\,(\text{sen.}\,u)^{n-7}}{n(n-2)(n-4)(n-6)}+\text{ecc.}\right),$$

intendendo che la serie continui fino a che si arriva al termine di valore infinito. Quest' omogeneo di comparazione può essere espresso in altra maniera coll' invertere i coefficienti numerici, e le podestà che sono ne' termini. Sarà quindi

$$\int du\,(\text{sen.}\,u)^n=\frac{1.3.5.7\,....\,(n-1)\,a^n u}{2.4.6.8\,....\,n}-\frac{a\,\text{cos.}\,u\,(\text{sen.}\,u)^{n-1}}{n}$$

$$-\text{cos.}\,u\left(\frac{3.5.7\,...\,(n-1)\,a^{n-1}\,\text{sen.}\,u}{2.4.6.8\,....\,n}+\frac{5.7.9\,...\,(n-1)a^{n-3}(\text{sen.}\,u)^3}{4.6.8....\,n}\right.$$

$$\left.+\frac{7.9.11....\,(n-1)a^{n-5}\,(\text{sen.}\,u)^5}{6.8.10\,....\,n}+.....+\frac{(n-1)a^3\,(\text{sen.}\,u)^{n-3}}{(n-2)\,n}\right).$$

Per conseguenza $TM=u-\dfrac{a^2u}{4b^2}-\dfrac{a\,\text{cos.}\,u\,.\,\text{sen.}\,u}{4b^2}$

$-1^2.3^2.5^2....$

$$-\frac{1^2.3^2.5^2....(n-3)^2(n-1)a^n u}{2^2.4^2.6^2....n^2 b^n}+\frac{1.3.5.7....(n-3)a\,\text{cof.}\,u(\text{fen.}\,u)^{n-1}}{n(2.4.6....n)b^n}$$

$$+\frac{1.3.5.7....(n-3)\,\text{cof.}\,u}{2.4.6....n.b^n}\left(\frac{3.5.7....(n-1)a^{n-1}\,\text{fen.}\,u}{2.4.6....n}\right.$$

$$+\frac{5.7.9....(n-1)a^{n-3}(\text{fen.}\,u)^3}{4.6.8....n}+\frac{7.9.11...(n-1)a^{n-5}(\text{fen.}\,u)^5}{6.8.10....n}+...$$

$$\left.+\frac{(n-1)a^3(\text{fen.}\,u)^{n-3}}{(n-2)n}\ \text{ecc.}\right).$$ Non s' aggiunge coſtante, perchè tutto ſvaniſce, quando ſono u, e cof. $u = o$.

8. Si deve avvertire, che in queſto ſecondo membro i termini, principiando dal quarto, non eſprimono che i termini generali delle riſpettive ſerie; e che per avere l' arco TM è neceſſario attribuire ſucceſſivamente alla ſpecie n tutti i valori che ſono nella ſerie de' pari 4, 6, 8, ecc. in infinito. Riſulteran quindi infinite ſerie convergenti, una delle quali appartiene ai termini, ov' entra l' arco u; le altre ſpettano alle podeſtà di ſen. u; e queſte ultime non ſolo ſon convergenti, ma di più d' una convergenza creſcente a miſura che creſcono le ſuddette podeſtà. Per la qual coſa è facile il conoſcere, che aſſegnati competenti valori numerici ai ſimboli a, b, u, ſi potrà con non molto calcolo determinare il valor proſſimo di qualunque arco TM della elliſſi.

9. Vogliaſi preſentemente la ſerie, che eſprime il quadrante ellittico TV, che chiamo $\mathfrak{Q}$. In tal caſo diventa $u =$ alla 4^a parte EV della circonferenza circolare, ſen. $u = a$, coſ. $u = o$; e denominata col ſimbolo ϕ la circonferenza di raggio 1, avremo $\mathfrak{Q}=\frac{a\phi}{2}-\frac{a^3\phi}{2.4b^2}$

$$-\frac{(n-1)}{2}\frac{(1^2.3^2.5^2.....(n-3)^2a^{n+1}\phi)}{2^2.4^2.6^2......n^2b^n}.$$ Poſto $n=4$, l' ultimo termine ſi fa $=\frac{-1^2.3a^5\phi}{2.2^2.4^2b^4}$. A $n=6$ corriſponde il termine ultimo $=\frac{-1^2.3^2.5a^7\phi}{2.2^2.4^2.6^2b^6}$ ecc. colla legge che è manifeſta.

Dunque $(B)\, \mathfrak{Q} = \frac{a\phi}{2} - \frac{a\phi}{2} \left(\frac{1.a^2}{2^2 b^2} + \frac{1^2.3a^4}{2^2.4^2 b^4} + \frac{1^2.3^2.5a^6}{2^2.4^2.6^2 b^6} + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2 a^8}{2^2.4^2.6^2.8^2 b^8} \text{ ecc.} \right)$, cioè ove A, B, C, D ecc. rappresentino i termini precedenti; $\mathfrak{Q} = \frac{a\phi}{2} - \frac{a\phi}{2} \left(\frac{1.1a^2}{2^2 b^2} + \frac{1.3a^2 A}{4^2 b^2} + \frac{3.5a^2 B}{6^2 b^2} + \frac{5.7a^2 C}{8^2 b^2} \text{ ecc.} \right)$. La ſerie del 2°. membro di queſte due equazioni è convergente, perchè i numeri de' denominatori in tutti i termini ſon maggiori de' numeri de' numeratori, e perchè $\frac{a}{b}$ in tutte le elliſſi è minore dell' unità; onde ne' caſi particolari ſarà facilmente reperibile il valor proſſimo di $\mathfrak{Q}$.

10. Paſſiam' ora a trovar la ſerie, che eguagli la differenza tra l' aſſintoto e l' arco iperbolico infinito. Sia l' iperbola VMM' (*fig.* 2) de' due ſemiaſſi CV, VT, coſicchè CTD divenga il ſuo aſſintoto. Coll' iſteſſo vertice primario V, e i ſemiaſſi eguali ad VC ſi deſcriva l' iperbola equilatera VNN', il cui aſſintoto ſia CL. Aſſunta un' aſciſſa CP, vi s' adatti PMN ad angolo retto, che interſechi l' aſſintoto CD in D, e divenga PM l' ordinata dell' iperbola VM, PN l' ordinata dell' equilatera VN. Da M poi all' aſſintoto CD ſi guidi la $M\mathfrak{Q}$ parallela all' altro aſſintoto Ci, e la MG, che compie il rettangolo de' lati MP, CP, tagli l' aſſintoto CD nel punto O.

I. Sarà $CV:VT::PN:PM$. Perchè, per proprietà dell' iperbola equilatera, abbiamo $(CP)^2 - (CV)^2 = (PN)^2$. Ma l' altra curva ci ſomminiſtra l' analogia $(CP)^2 - (CV)^2 : (PM)^2 :: (CV)^2 : (VT)^2$. Dunque $(PN)^2 : (PM)^2 :: (CV)^2 : (VT)^2$; ovvero $CV:VT::PN:PM = \frac{VT.PN}{CV}$.

II. Eſſendo HH la direttrice dell' iperbola VM, e F il ſuo foco, ſarà $CA:CV::PN:CO$. Perchè la teoria delle ſezioni coniche c' inſegna, che ſta $CA:CV::CV:CF = CT$; e pei triangoli ſimili DMO, DPC; $PD:CD::VT:CT::PM:CO$. Ma pel num.° I. $CV:VT::PN:PM$. Dunque CV:

$CT::PN:CO$, ovvero $AC:CV::PN:CO=\frac{CV.PN}{CA}$.

III. $OG=PN$; $MO=CP-PN$. Imperciocchè $CT:CV::CO:OG$, e perchè $CT:CV::CV:CA$, farà anche $CV:CA::CO:OG$. Ma, per l' antecedente numero, $CV:CA::CO:PN$. Dunque $OG=PN$, e in confeguenza $MO=GM-OG=CP-PN$.

IV. $O\mathfrak{Q}=\frac{CV(CP-PN)}{2CA}$; $C\mathfrak{Q}=\frac{CV(CP+PN)}{2CA}$. Si tiri VZ parallela all' affintoto Ci. Siccome TV è la metà di Ti, così TZ è la metà di TC. Ma i triangoli TVC, DMO fon fimili e fimilmente pofti; in oltre $M\mathfrak{Q}$ è parallela ad VZ. Quindi anche $M\mathfrak{Q}$ dividerà per mezzo la DO. Ora fta $CV:CT::CA:CV::MO:OD$, e però $CA:CV::CP-PN$ (III): OD. Avrem dunque $OD=\frac{CV(CP-PN)}{CA}$, e confeguentemente $O\mathfrak{Q}=\frac{CV(CP-PN)}{2CA}$. E perchè $C\mathfrak{Q}=CO+O\mathfrak{Q}$ $=\frac{CV.PN}{CA}$ (II) $+\frac{CV(CP-PN)}{2CA}$, rifulterà $C\mathfrak{Q}=\frac{CV(CP+PN)}{2CA}$.

V. Non cangiano le cofe dimoftrate ne' precedenti numeri, ancorchè l' iperbola VM cadeffe fuperiormente all' equilatera VN, cioè il femiaffe fecondo foffe maggiore del primo.

VI. Si conduca CLN' affintoto dell' iperbola equilatera, e fi produca VT fino a quefto affintoto in L, farà $CV=VL$. Ora l' eftremo punto dell' affintoto infinito CLN' coincidendo in un punto infinitamente lontano della curva, fe fupporremo CP, PN divenute le infinite CP', $P'N'$, N' cadrà precifamente dove l' affintoto incontra l' iperbola, ed avremo il triangolo infinito $CP'N'$ fimile al triangolo CVL. Ma $CV=VL$. Dunque l' infinita afciffa CP' è eguale all' infinita ordinata $P'N'$.

VII. Raccoglieremo da ciò, che effendo in genere la porzione affintotica $C\mathfrak{Q}=\frac{CV(CP+PN)}{2CA}$ (IV), pel cafo dell' ascissa e dell' ordinata infinite, diventerà l' intero assintoto

$$CTM' = \frac{CV.CP'}{CA} = \frac{CV^2}{CA} \cdot \frac{CP'}{CV} = \frac{CV.P'N'}{CA}.$$

VIII. La TK parallela all' asse primario CV determina la CK eguale al 2.° semiasse: Ora il num.° I. ci presenta $PN = \frac{CV.PM}{TV} = \frac{CV.CG}{CK}$. Il perchè nell' ipotesi delle coordinate infinite, cangiandosi CG nell' infinita $CG' = P'M'$, sarà l' assintoto $CTM' = \frac{CV^2}{CA} \cdot \frac{CG'}{CK}$; il che serve per gli archi iperbolici, che si riferiscono al 2.° asse, quand' essi divengono infiniti.

11. Queste nozioni premesse, chiamo $CV = a$, $CA = b$; il doppio settore CNV diviso per $CV = u$, onde risulta CP $=$ cos. iperb.° u, $PN =$ sen. iperb.° u; e pel num.° I, $PM = \frac{VT.\text{sen. ip}.u}{a}$. Il differenziale di CP si fa $= \frac{du.\text{sen. ip}.u}{a}$, e il differenziale di $PM = \frac{du.VT.\text{cos. ip}.u}{a^2}$. Ma, preso l' archetto minimo Mm, il quadrato di questo archetto è eguale alla somma de' quadrati de' due suddetti differenziali. Dunque, poichè $CT = CF = \frac{a^2}{b}$, e $(\text{cos. ip}.u)^2 - (\text{sen. ip}.u)^2 = a^2$, si avrà $Mm = \frac{du\sqrt{((\text{cos. ip}.u)^2 - b^2)}}{b}$.

12. Per integrare questa formola, butto in serie il radicale, e mi nasce; $\sqrt{((\text{cos. ip}.u)^2 - b^2)} = \text{cos. ip}.u - \frac{b^2}{2\,\text{cos. ip}.u} - \frac{1.b^4}{2.4(\text{cos. ip}.u)^3} - \frac{1.3b^6}{2.4.6(\text{cos. ip}.u)^5} - \frac{1.3.5b^8}{2.4.6.8(\text{cos. ip}.u)^7}$ ecc. senza limite. Questa serie è convergente, perchè le quantità numeriche sono maggiori ne' denominatori de' termini, che ne' numeratori, e di più in tutte le iperbole cos. ip. $u > b$.

Sicchè $\int Mm = VM = (C) \int \frac{du.\text{cos. ip}.u}{b} - \frac{b}{2}\int \frac{du}{\text{cos. ip}.u}$

$$-\left(\frac{1.b^3}{2.4}\int\frac{du}{(\text{cos. ip.}u)^3}+\frac{1.3b^5}{2.4.6}\int\frac{du}{(\text{cos. ip.}u)^5}\right.$$
$$+\frac{1.3.5b^7}{2.4.6.8}\int\frac{du}{(\text{cos. ip.}u)^7}+\ldots\ldots+\frac{1.3.5.7\ldots.(m-2)b^m}{2.4.6\ldots\ldots(m+1)}\times$$
$$\left.\int\frac{du}{(\text{cos. ip.}u)^m}\text{ ecc.}\right)$$ in infinito, rappresentando m un numero qualunque posto nella serie de' dispari 3, 5, 7, 9, ecc.

13. Quanto al 1°. termine di quest' omogeneo, i teoremi de' seni e coseni iperbolici ce 'l danno $=\frac{a.\text{sen. ip.}u}{b}$. Il 2°. lasciamol per ora coll' espressione della sommatoria; e per gl' integrali susseguenti, applichiamo la suddetta dottrina alla integrazione della formola generale $\frac{du}{(\text{cos. ip.}u)^m}$, la qual si trova espressa dalla seguente equazione; $\int\frac{du}{(\text{cos. ip.}u)^m}$

$$=\frac{(m-2)(m-4)(m-6)\ldots..3.2}{(m-1)(m-3)\ldots.4.2a^{m-1}}\int\frac{du}{\text{cos. ip.}u}$$
$$+\frac{\text{sen. ip.}u}{(m-1)a(\text{cos. ip.}u)^{m-2}}$$
$$+\text{sen. ip.}u\left(\frac{m-2}{(m-1)(m-3)a^3(\text{cos. ip.}u)^{m-3}}\right.$$
$$+\frac{(m-2)(m-4)}{(m-1)(m-3)(m-5)a^5(\text{cos. ip.}u)^{m-5}}$$
$$+\frac{(m-2)(m-4)(m-6)}{(m-1)(m-3)(m-5)(m-7)a^7(\text{cos. ip.}u)^{m-7}}$$
$$\left.+\ldots.+\frac{(m-2)(m-4)(m-6)\ldots..3.1}{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots.4.2a^{m-2}(\text{cos. ip.}u)^2}\right),$$

o usando d' un' inversione simile all' altra dell' arco ellittico;

$$\int\frac{du}{(\text{cos. ip.}u)^m}=\frac{1.3.5\ldots..(m-2)}{2.4.6\ldots..(m-1)a^{m-1}}\int\frac{du}{\text{cos. ip.}u}$$
$$+\frac{\text{sen. ip.}u}{(m-1)a(\text{cos. ip.}u)^{m-1}}$$

$$+ \text{sen. ip.}u \left(\frac{3.5.7 \ldots (m-2)}{2.4.6 \ldots (m-1) a^{m-2} (\text{cos. ip.}u)^2} \right.$$

$$+ \frac{5.7.9 \ldots (m-2)}{4.6.8 \ldots (m-1) a^{m-4} (\text{cos. ip.}u)^4}$$

$$+ \frac{7.9.11 \ldots (m-2)}{6.8.10 \ldots (m-1) a^{m-6} (\text{cos. ip.}u)^6} + \ldots$$

$$\left. + \frac{m-2}{(m-1)(m-3) a^3 (\text{cos. ip.}u)^{m-3}} \right).$$

14 Integriamo ora la formola $\int \frac{du}{\text{cos. ip.}u}$. Poichè $D.(\text{sen. ip.}u) = \frac{du.\, \text{cos. ip.}u}{a}$, sarà $du = \frac{aD.(\text{sen. ip.}u)}{\text{cos. ip.}u}$, e quindi $\int \frac{du}{\text{cos. ip.}u} = \int \frac{aD.(\text{sen. ip.}u)}{(\text{cos. ip.}u)^2} = \frac{1}{a} \int \frac{a^2 D.(\text{sen. ip.}u)}{a^2 + (\text{sen. ip.}u)^2}$. Ma $\int \frac{a^2 D.(\text{sen. ip.}u)}{a^2 + (\text{sen. ip.}u)^2}$ è eguale a un arco circolare di raggio a, tangente, sen. ip. u. Dunque, chiamando d quest' arco, risulta $\int \frac{du}{\text{cos. ip.}u} = \frac{d}{a}$.

15. Surroghiam finalmente in (C) questi valori, ed otterremo l' arco iperbolico $VM = (D)\, \frac{a\,\text{sen. ip.}u}{b} - \frac{bd}{2a}$

$$- \frac{1^2.3^2.5^2 \ldots (m-2)^2 b^m d}{(m+1)(2^2.4^2.6^2 \ldots (m-1)^2 a^m} - \frac{(1.3.5.7 \ldots (m-1) b^m.\, \text{sen. ip.}u}{2.4.6 \ldots (m+1)}$$

$$\left(\frac{3.5.7 \ldots (m-2)}{2.4.6 \ldots (m-1) a^{m-2} (\text{cos. ip.}u)^2} + \frac{5.7.9 \ldots (m-2)}{4.6.8 \ldots (m-1) a^{m-4} (\text{cos. ip.}u)^4} \right.$$

$$+ \frac{7.9 \ldots (m-2)}{6.8.10 \ldots (m-1) a^{m-6} (\text{cos. ip.}u)^6} + \ldots$$

$$\left. + \frac{m-2}{(m-1)(m-3) a^3 (\text{cos. ip.}u)^{m-3}} \text{ ecc.} \right) \text{ in infinito.}$$

16. Qui pure avvertiremo, come abbiam fatto al num.° 8 per l' arco ellittico; 1.°, che in questa integrazione non

va aggiunta alcuna costante, perchè, essendo nullo VM, svanisce sen. ip.u, e in conseguenza l' arco d, onde tutto va a zero; 2.°, che i termini dell' omogeneo, cominciando dal terzo, esprimono i termini generali delle serie corrispondenti, dovendosi, per avere il valore di VM, assegnar successivamente alla specie m tutti i valori de' numeri dispari 3, 5, 7 ecc. senza limite; 3.°, che per essere sempre $b < a$, e molto più $<$ cos. ip.u, le serie indi nascenti, ordinate secondo le podestà de' coseni, avranno maggior convergenza, quanto maggiore è la podestà del coseno; finalmente, che attribuiti valori numerici ai simboli a, b, u, si verrà a determinare in numeri il valor prossimo di qualunque arco iperbolico VM della data iperbola.

17. Stabiliscasi ora l' arco VM infinito. A tale ipotesi corrispondono il seno, e il coseno iperbolici infiniti ed eguali. Dunque svaniranno affatto le serie del 4°. termine nell' omogeneo (D) del numero 15; l' arco circolare d, che ha la tangente infinita, diventerà il quadrante della periferia; e fatto ϕ eguale alla semicirconferenza di raggio 1, sarà l' arco infinito $VM' = \frac{a.\,\text{sen. ip.}u}{b} - \frac{b\phi}{4}$

$$- \frac{b\phi}{2}\left(\frac{1^2.3^2.5^2.\dots(m-2)^2\, b^{m-1}}{(m+1)\,(2^2.4^2.6^2.\dots(m-1)^2\, a^{m-1}}\right),\ \text{cioè};$$

$$\frac{a.\,\text{sen. ip.}u}{b} - VM' = \frac{b\phi}{4}$$

$$+ (E)\,\frac{b\phi}{2}\left(\frac{1^2.3^2.5^2\dots(m-2)^2\, b^{m-1}}{(m+1)(2^2.4^2.6^2\dots(m-1)^2 a^{m-1}}\right).$$

18. Fatto $m=3$, risulta il termine $(E) = \frac{b\phi}{2}\left(\frac{1^2 b^2}{4.2^2 a^2}\right)$. All' ipotesi di $m=5$ compete $(E) = \frac{b\phi}{2}\left(\frac{1^2.3^2 b^4}{6.2^2.4^2 a^4}\right)$. La susseguente di $m=7$ dà $(E) = \frac{b\phi}{2}\left(\frac{1^2.3^2.5^2 b^6}{8.2^2.4^2.6^2 a^6}\right)$ ecc., giacchè la legge è evidente. Di più pel num.° VII. ove infinito sia l' arco dell' iperbola, diventa $\frac{a.\,\text{sen. ip.}\,u}{b}$, l' intero assintoto

CM'; e quindi $\frac{a \,.\, \text{sen. ip} \,.\, u}{b} - VM'$, è eguale alla differenza tra l' aſſintoto e l' arco iperbolico infinito. Eſpreſſa perciò queſta differenza col ſimbolo Δ, ſarà $\Delta = (F) \frac{b\phi}{4} + \frac{b\phi}{2} \Big(\frac{1^2 . b^2}{2^2 4a^2}$

$$+ \frac{1^2 . 3^2 . b^4}{2^2 . 4^2 . 6a^4} + \frac{1^2 . 3^2 . 5^2 b^6}{2^2 . 4^2 . 6^2 . 8a^6} + \frac{1^2 . 3^2 . 5^2 . 7^2 b^8}{2^2 . 4^2 . 6^2 . 8^2 . 10a^8} \text{ ecc.} \Big)$$

$$= \frac{b\phi}{4} + \frac{b\phi}{2} \Big(\frac{1^2 b^2}{4 . 4a^2} + \frac{3^2 b^2 . A'}{4 . 6\, a^2} + \frac{5^2 b^2 . B'}{6 . 8\, a^2} + \frac{7^2 b^2 . C'}{8 . 10\, a^2} \text{ ecc.} \Big),$$

intendendo che A', B', C' ecc. ſignifichino i termini precedenti. Dall' eſſer $b < a$ in qualunque iperbola, la convergenza della preſente ſerie ſi rende manifeſtiſſima; onde al caſo che b, ed a abbian valori numerici, avrem pronto il valor proſſimo di Δ colla addizione di non molti ſuoi termini.

19. Dopo le anzidette teorie mettiamci ſotto all' occhio la forma che hanno i moltipli de' differenziali degli archi ellittici ed iperbolici, i quali ſi riferiſcono ad un' aſciſſa centrale ſituata nel 1.° o nel 2.° aſſe. Chiamato pertanto f il 1.° ſemiaſſe della ſezione conica, g il 2.°, cz l' aſciſſa centrale, e $\frac{1}{\sqrt{b}}$ il moltiplo dell' arco, avremo, ſiccome è noto

1.° $\frac{1}{\sqrt{b}}$. diff. dell' arco ellittico coll' aſciſſa cz nel 1.° aſſe

$$= \frac{dz \sqrt{(f^2 - (f^2 - g^2) c^2 z^2 : f^2)}}{\sqrt{(f^2 b : c^2 - bz^2)}}$$

2.° $\frac{1}{\sqrt{b}}$. diff. dell' arco ellittico coll' aſciſſa cz nel 2.° aſſe

$$= \frac{dz \sqrt{(g^2 + (f^2 - g^2) c^2 z^2 : g^2)}}{\sqrt{(g^2 b : c^2 - bz^2)}}$$

3.° $\frac{2}{\sqrt{b}}$. diff. dell' arco iperbolico coll' aſciſſa cz nel 1.° aſſe

$$= \frac{dz \sqrt{(-f^2 + (f^2 + g^2) c^2 z^2 : f^2)}}{\sqrt{(-f^2 b : c^2 + bz^2)}}$$

4.°

4.° $\frac{1}{\sqrt{b}}$. diff. dell' arco iperbolico coll' ascissa cz nel 2.° asse

$$= \frac{dz\sqrt{(g^2+(f^2+g^2)c^2z^2:g^2)}}{\sqrt{(g^2b:c^2+bz^2)}}$$. Quindi concluderemo, che tutte le formole differenziali, le quali sono integrabili cogli archi ellittici, ed iperbolici, si potranno con opportune sostituzioni trasfigurare nella forma generica $\frac{dx\sqrt{(A+Bx^2)}}{\sqrt{(C+Dx^2)}}$, in cui A, B, C, D possono essere quantità positive o negative. Supporrò dunque, che sotto qualunque diverso aspetto si sian presentate al Geometra formole, che per l' integrazione ammettano i suddetti archi, egli le abbia cogli artifizj dell' analisi ridotte alla suddetta forma generale, la quale nel decorso di questo scritto sarà l' oggetto unico delle nostre considerazioni.

20. Arrivati che saremo alla formola $\frac{dx\sqrt{(A+Bx^2)}}{\sqrt{(C+Dx^2)}}$, non potrem tosto concludere, che il suo integrale sia o un arco semplice di sezion conica, o un moltiplo di quest' arco; perchè ciò dipende non solo dai segni che si voglion prefissi alle quantità costanti A, B, C, D, ma eziandio dal valor maggiore o minore di queste medesime quantità. In alcuni casi la formola differenziale potrebb' essere immaginaria, come se fosse $\frac{dx\sqrt{(-A-Bx^2)}}{\sqrt{(C+Dx^2)}}$, e per conseguenza impossibile la sua integrazione in termini reali. In alcuni altri essa debb' essere nuovamente trasformata, affinchè il confronto colle 4 formole del numero 19 non induca alcun assurdo. Una piccola riflessione farà conoscere il caso della impossibilità; ed ove, essendo reale, senza incongruenze ricusi di farsi identica con una delle quattro suddette, tre Lemmi basteranno a cangiarla in più formole per modo, che di alcune algebraicamente, e dell' altre colla notata identicità se ne possa assegnare l' integrazione.

21. Ecco il 1°. Lemma; $\frac{dx\sqrt{(A+Bx^2)}}{\sqrt{(C+Dx^2)}}$

$= \frac{(BC-AD)x^2dx}{C\sqrt{(A+Bx^2)}\sqrt{(C+Dx^2)}} + \frac{Adx\sqrt{(C+Dx^2)}}{C\sqrt{(A+Bx^2)}}$. La riduzione dell' omogeneo renderà evidente la verità di questo Lemma. Si faccia ora $\sqrt{(A+Bx^2)} = z$. Da questa sostituzione trarremo $\frac{dx\sqrt{(A+Bx^2)}}{\sqrt{(C+Dx^2)}} = \frac{(BC-AD)}{BC} \cdot \frac{dz\sqrt{(-A+z^2)}}{\sqrt{(BC-AD+Dz^2)}}$ $+ \frac{Adx\sqrt{(C+Dx^2)}}{C\sqrt{(A+Bx^2)}}$. Diremo poi: o ciascuna delle due formole di quest'ultimo membro soffre senza assurdo il confronto coi moltipli de' differenziali degli archi, o no. Nel 1.° caso la proposta formola è già integrata; nel 2.° v' è bisogno di una nuova trasformazione.

22. Sia in genere $\frac{dt\sqrt{(E+Ft^2)}}{\sqrt{(G+Ht^2)}}$ la formola nuovamente trasformabile. Pongasi $u = \frac{\sqrt{(E+Ft^2)}}{\sqrt{(G+Ht^2)}}$, onde proviene $t = \frac{\sqrt{(E-Gu^2)}}{\sqrt{(-F+Hu^2)}}$; e sarà $\int \frac{dt\sqrt{(E+Ft^2)}}{\sqrt{(G+Ht^2)}} = \int udt$ $= ut - \int tdu = \frac{t\sqrt{(E+Ft^2)}}{\sqrt{(G+Ht^2)}} - \int \frac{du\sqrt{(E-Gu^2)}}{\sqrt{(-F+Hu^2)}}$; e questo è il 2.° Lemma.

23. Se questa trasformazione praticata nella formola $\frac{dt\sqrt{(E+Ft^2)}}{\sqrt{(G+Ht^2)}}$ non valesse a rendere il termine $\int \frac{du\sqrt{(E-Gu^2)}}{\sqrt{(-F+Hu^2)}}$ identico con un moltiplo d' arco di sezion conica, si faccia quest' altra sostituzione; $u' = \frac{\sqrt{(G+Ht^2)}}{\sqrt{(E+Ft^2)}}$, che dà $t = \frac{\sqrt{(-G+Eu'^2)}}{\sqrt{(H-Fu'^2)}}$. Alzata al quadrato l' una o l' altra di queste frazioni, si ha $Eu'^2 + Ft^2u'^2 = G + Ht^2$; e differenziando; $Eu'du' + Ftu'.D.(tu') = Htdt$, cioè $\frac{dt}{u}$ $= \frac{F.D(tu')}{H} + \frac{Edu'}{Ht}$; e quindi $\int \frac{dt\sqrt{(E+Ft^2)}}{\sqrt{(G+Ht^2)}}$

$= \frac{Ft\sqrt{(G+Ht^2)}}{H\sqrt{(E+Ft^2)}} + \frac{E}{H}\int \frac{du'\sqrt{(H-Fu'^2)}}{\sqrt{(-G+Eu'^2)}}$, equazione, in cui consiste il 3.° Lemma. O coll' una o coll' altra trasformazione, che fanno nascere questi due ultimi Lemmi tratti dal citato Opuscolo Riccaziano, otterrem sempre la bramata integrazione.

24. Da ciò si raccoglie, che la formola $\frac{dx\sqrt{(A+Bx^2)}}{\sqrt{(C+Dx^2)}}$ al più resta integrata con due archi di sezion conica, prescindendo dalla quantità algebraica, che pur vi ha luogo. Il metodo usato dal P. *Riccati* porta alcune volte le integrazioni a tre archi coll' unione di più termini algebraici; laddove il mio si raccomanda per la sua maggiore semplicità, avendosi con esso al più 3 soli termini integrali, come vedremo ne' seguenti numeri, cioè una quantità algebraica, un moltiplo d' arco ellittico, e un moltiplo d' arco iperbolico. Ma venghiamo ad esaminare partitamente tutte le combinazioni, che può ricever la formola generale $\frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}}$ e per rapporto ai segni, e per rapporto ai valori delle costanti, che moltiplicano i termini vincolati dai radicali; onde nelle integrazioni o apparisca colla quantità algebraica il solo arco iperbolico, o l' arco ellittico e l' arco iperbolico insieme. Di quelle modificazioni di formole, le cui integrazioni dipendono dalla quantità algebraica e dall' arco ellittico unicamente, non faremo menzione, perchè queste, qualunque valor reale s' attribuisca alla variabile, non avranno mai differenze finite di termini infiniti.

25. Venga innanzi a tutte la formola 1.ª $\frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}}$, nella quale m, n, p, q sian tutte positive. Due ipotesi si posson fare; 1.ª, che sia $np > mq$, 2.ª, che sia $mq > np$. Pel caso della 1.ª ipotesi, confrontata la formola colla 4.ª del num.° 19, si vedrà a un tratto, che il suo integrale è $= \frac{1}{\sqrt{q}}\Big($ arco iperbolico di 1.° semiasse; $\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{q}}$; ascissa 2.° semiasse; $\sqrt{m}$

centrale nel 2.° asse; $\frac{x\sqrt{mq}}{\sqrt{p}}$), e non è soggetto ad alcuna difficoltà. La 2.ª ipotesi di $mq > np$ vuole per l' integrazione della formola il soccorso de' due primi Lemmi notati ai numeri 21, 22, e si avrà $\int \frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}}$

$= -\frac{(mq-np)}{np} \cdot \frac{x\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}} + \frac{(mq-np)}{np\sqrt{q}}$ (arco ellittico di 1.° sem. $\sqrt{m}$; ascissa cent. nel 1.° asse; $\frac{x\sqrt{mq}}{\sqrt{(p+qx^2)}}$)

2.° sem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$

$+ \frac{m}{p\sqrt{n}}$ (arco iperbolico di 1.° sem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; ascissa

2.° sem. $\sqrt{p}$

cent. nel 2.° asse; $\frac{x\sqrt{np}}{\sqrt{m}}$) $+ C$.

26. Si accetti l' ipotesi, che fatto $x = 0$ sia l' integrale $= 0$. Perchè con tale supposizione svaniscono tutti i termini dell' omogeneo, non va aggiunta alcuna costante, e riman $C = 0$. Se si fa $x = \infty$, l' arco ellitico ha $\sqrt{m}$ per ascissa nel 1°. asse, cioè l' ascissa e il primo semiasse sono eguali; e quindi l' arco diventa il quadrante $\mathfrak{Q}$ dell' ellissi. Il termine algebraico si cangia in quest' altra formola;

$-\frac{(mq-np).x}{p\sqrt{nq}}$, che è una quantità infinita negativa. E perchè l' arco ip. ha l' ascissa nel 2°. asse $= \frac{x\sqrt{np}}{\sqrt{m}}$, cioè infinita, sarà pure esso arco un infinito ma positivo.

27. Per avere la differenza di questi due infiniti, riesce opportuno l' esprimere il termine algebraico $-\frac{(mq-np)x}{p\sqrt{nq}}$ in quest' altra maniera equivalente; $\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}} - \frac{mx\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}$, onde, quando x è infinita, risulti $\int \frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}} = \frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}}$

$+\frac{(mq-np)}{np\sqrt{q}}\cdot\mathfrak{Q}-\frac{m}{p\sqrt{n}}\Big(x\sqrt{q}$ — arco ip. di 1° sem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; 2° sem. $\sqrt{p}$ ascissa cent. nel 2° asse; $\frac{x\sqrt{np}}{\sqrt{m}}\Big)$. Consultiamo ora il num°. VIII, che in qualunque iperbola riferita al 2°. asse ci dà il valor dell' assintoto infinito $=\frac{CV^2.CG'}{CA.CK}$. Poichè per le teorie coniche $\frac{CV^2}{CA}$ è eguale alla radice della somma de' quadrati de' due semiassi, sarà nel caso nostro $\frac{CV^2}{CA}=\frac{\sqrt{mq}}{\sqrt{n}}$, e $\frac{CG'}{CK}=\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$. Quindi il nostro assintoto $=x\sqrt{q}$, e $x\sqrt{q}$ — arco ip. suddetto eguale alla differenza Δ tra l' assintoto e l' arco ip. infinito. Perilchè, quando sia $mq>np$ e l' ascissa centrale infinita, si trova $\int\frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}}=\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}}+\frac{(mq-np)}{np\sqrt{q}}\mathfrak{Q}-\frac{m\Delta}{p\sqrt{n}}$. E siccome questi due ultimi termini sono quantità finite, rimanendo il primo $\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}}$ un infinito, nella accettata supposizione; $\int\frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}}$ diventa $=\infty$. Ed ecco, come la incertezza, che potea nascere sulla finità, o infinità della differenza tra i due termini infiniti, resti colla scorta delle nostre teorie totalmente dileguata.

28. 2ª. formola da integrarsi; $\frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}}$. Qui si vede subito, essere il minor valore della $x=\pm\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, potendo poi crescere sì positivamente che negativamente all' infinito. Nella formola presente, siccome in tutte l' altre avvenire per maggior comodo considereremo le sole x positive, e intanto

diremo, che è il minor valore della $x=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, e il massimo eguale all' infinito positivo. Poscia col maneggio de' due primi Lemmi, troverem presto; $\int\frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}}=\left(\frac{mq+np}{np\sqrt{q}}\right)$ $\Big($arco iperbolico di 1.° sem. $\sqrt{m}$; ascissa cent. nel 1.° asse; 2.° sem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$ $\frac{\sqrt{mq}\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(mq+np)}}\Big)-\frac{mx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m+nx^2)}}+\frac{m}{p\sqrt{n}}\Big($arco ellittico di 1.° sem. $\frac{\sqrt{(mq+np)}}{\sqrt{n}}$; ascissa cent. nel 2.°; $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}\times$ 2.° sem. $\sqrt{p}$ $\frac{\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{(m+nx^2)}}\Big)$.

29. Nell' ipotesi che la formola integrata svanisca, quando $x=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, l' ascissa cent. dell' arco iperbolico riesce eguale al 1°. semiasse $\sqrt{m}$; e però l' arco è nullo, siccome nulle risultano le quantità susseguenti, onde per l' integrale completo non si ricerca costante di alcuna sorta. Ma se si pone $x=\infty$, l' arco iperbolico proviene infinito di valore, perchè ha infinita l' ascissa centrale $\frac{x\sqrt{(mnq)}}{\sqrt{(mq+np)}}$; ed infinita eziandio è la quantità algebraica che gli tien dietro, la quale si cangia in $-\frac{mx\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}$. Finalmente riuscendo l' ascissa dell' arco ellittico eguale al 2°. semiasse $\sqrt{p}$, l' arco diventa il quadrante Q dell' ellisse. Quanto ai due termini infiniti, che hanno i segni contrarj, convien vedere, se la loro differenza sia finita o infinita: e a questo fine scriveremo la quantità algebraica e il moltiplo dell' arco iperbolico equivalentemente così; $\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}}-\left(\frac{mq+np}{np\sqrt{q}}\right)\Big(x\sqrt{n}-$ arco iperbolico di

1.° ſem. $\sqrt{m}$; aſciſſa cent. nel 1.°; $\left.\dfrac{x\sqrt{(mnq)}}{\sqrt{(mq+np)}}\right)$. Appreſſo

2.° ſem. $\dfrac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$

dal num.° VII trarremo l' aſſintoto $= \dfrac{CV^2}{CA} \cdot \dfrac{CP}{CV}$

$= \dfrac{\sqrt{(mq+np)}}{\sqrt{q}} \cdot \dfrac{x\sqrt{nq}}{\sqrt{(mq+np)}} = x\sqrt{n}$; dal che ſi rileva, eſſere i termini tra la parenteſi la differenza Δ tra l' aſſintoto e l' arco infinito. Per conſeguenza, fatto $x = \infty$, haſſi $\int \dfrac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}} = \dfrac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}} - \dfrac{(mq+np)}{np\sqrt{q}} \cdot \Delta + \dfrac{m\mathfrak{Q}}{p\sqrt{n}}$; e ſiccome Δ, $\mathfrak{Q}$ ſono quantità finite e $\dfrac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}}$ un infinito, ſarà infinito di valore il noſtro integrale.

30. 3.ª formola, $\dfrac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}}$. In queſta formola è chiaro, che i limiti de' valori di x ſono $x = 0$; $x = \dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, divenendo eſſa immaginaria ne' valori maggiori. Fatto uſo del 1.° e del 3.° Lemma, ſi avrà pronto il ſuo integrale

$= \dfrac{(mq+np)\sqrt{(m-nx^2)}\sqrt{(p+qx^2)}}{npqx} - \dfrac{(mq+np)\sqrt{m}}{npq}$ (arco iperbolico di 1.° ſem. $\sqrt{q}$; aſciſſa cent. nel 1.°; $\left.\dfrac{\sqrt{mq}\sqrt{(p+qx^2)}}{x\sqrt{(mq+np)}}\right)$

2.° ſem. $\dfrac{\sqrt{np}}{\sqrt{m}}$

$+ \dfrac{m}{p\sqrt{n}}$ (arco ellittico di 1.° ſem. $\dfrac{\sqrt{(mq+np)}}{\sqrt{n}}$; aſciſſa cent.

2.° ſem. $\sqrt{p}$

nel 2.°; $\left.\dfrac{x\sqrt{np}}{\sqrt{m}}\right) + C$.

31. Abbracciando l' ipoteſi, che tutto vada a zero, quando $x = 0$, reſterà determinata la coſtante C. In tal caſo ſva-

nisce l' arco ellittico, perchè è nulla l' ascissa centrale; ma i due primi termini, che si mutano in questi altri;

$\frac{(mq+np)\sqrt{m}}{npq}\Big(\frac{\sqrt{p}}{x}$ — arco iperbolico di 1.° sem. $\sqrt{q}$, ascissa cent. nel 1.°, $\frac{\sqrt{(mpq)}}{x\sqrt{(mq+np)}}\Big)$ 2.° sem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{m}}$ sono la differenza di due quantità infinite. Poichè l' ascissa si assume nel 1.° asse, risulta l' assintoto iperbolico $=\frac{CV^2}{CA}\cdot\frac{CP'}{CV}=\frac{\sqrt{(mq+np)}}{\sqrt{m}}\cdot\frac{\sqrt{mp}}{x\sqrt{(mq+np)}}$ $=\frac{\sqrt{p}}{x}$; sicchè i due termini vincolati dalla parentesi dinotano la solita differenza finita Δ. Nella ipotesi di $x=0$, sarà quindi $0=\frac{(mq+np)\Delta\sqrt{m}}{npq}+C$, o sia $C=-\frac{(mq+np)\Delta\sqrt{m}}{npq}$; e il completo integrale della formola $=\frac{(mq+np)\sqrt{m}}{npq}\Big(\frac{\sqrt{(m-nx^2)}\sqrt{(p+qx^2)}}{x\sqrt{m}}-\Delta-$ arco iperbolico di 1.° sem. $\sqrt{q}$; ascissa nel 1.° $\frac{\sqrt{mq}\sqrt{(p+qx^2)}}{x\sqrt{(mq+np)}}\Big)$ 2.° sem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{m}}$

$+\frac{m}{p\sqrt{n}}\Big($ arco ellittico di 1.° sem. $\frac{\sqrt{(mq+np)}}{\sqrt{n}}$; ascissa nel 2.° 2.° sem. $\sqrt{p}$ $\frac{x\sqrt{np}}{\sqrt{m}}\Big)$. Ove poi saper vogliasi, quale integrale competa al valor massimo di x, cioè a $x=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, fatta la sostituzione, si troverà, che l' arco iperbolico, e la quantità algebraica svaniscono, e che l' arco ellittico diventa il quadrante

dell'

dell' ellissi. Onde essendo $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, si ha $\int \frac{dx^2 \sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}}$ $= -\frac{(mq+np)\Delta\sqrt{m}}{npq} + \frac{m\mathfrak{Q}}{p\sqrt{n}}$; il che fa conoscere, non poter mai l' integrale della formola aver valore infinito.

32. 4ª. formola; $\frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}}$. Distinguiamo in questa due ipotesi; la 1ª. che sia $mq > np$; la 2ª. che sia $np > mq$. Nella prima l' integrazione accetta solo l' arco ellittico e non è di quelle che noi consideriamo. Laonde si assuma l' altra di $np > mq$ che porta all' arco iperbolico, e riflettiamo a 3 casi. Il 1°. che il valore di x sia posto tra i limiti $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$; $x = \infty$; il 2°. che stia tra i limiti $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$; $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$; il 3°. che stia tra i limiti $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$; $x = 0$. Non c' è difficoltà alcuna pel 1°. caso, avvegnachè l' integrale della formola è $\frac{1}{\sqrt{q}}$ (arco ip. di 1°. sem. $\sqrt{m}$; ascissa cent. nel 1°. asse;

2°. sem. $\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{q}}$

$\frac{x\sqrt{mq}}{\sqrt{p}}$), supponendo che l' integrale sia zero, quando $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$. Cresciuta poi x sino all' infinito, poichè l' ascissa $\frac{x\sqrt{mq}}{\sqrt{p}}$ è infinita, tosto si scorge, che l' arco, e in conseguenza l' integral della formola è un infinito.

33. Se x è collocata tra i limiti $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$; $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, che è il caso 2°, si fa chiara l' immaginarietà della formola, onde altro non ci resta che il 3°. caso del valore di x posto tra

i limiti $x=0$; $x=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, pel quale l' uso del 3°. Lemma con breve calcolo ci presenta; $\int\frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}}=\frac{nx\sqrt{(p-qx^2)}}{q\sqrt{(m-nx^2)}}$ $-\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{q}}\Big($arco ip. di 1°. sem. $\sqrt{q}$, ascissa nel 1°; $\frac{\sqrt{mq}}{\sqrt{p}}\times$

2.° sem. $\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{m}}$

$\frac{\sqrt{(p-qx^2)}}{\sqrt{(m-qx^2)}}\Big)$. Tralascio la costante, perchè suppongo, che fatto $x=0$, tutto svanisca; il che avviene sì nella parte algebraica, come anche nell' arco iperbolico, la cui ascissa centrale si fa eguale al 1.° semiasse. Pongo ora $x=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$; e i due termini dell' integrazione diventano due quantità infinite che si possono esprimer così; $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{q}}\Big(\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{(m-nx^2)}}$ — arco iperbolico di 1.° sem. $\sqrt{q}$; ascissa nel 1.° $\frac{\sqrt{mq}}{\sqrt{np}}\times\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{(m-nx^2)}}\Big)$.

2.° sem. $\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{m}}$

Ma pel num.° VII. essendo l' assintoto $=\frac{CV^2}{CA}\cdot\frac{CP}{CV}$, nel caso nostro diventa $=\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{(m-nx^2)}}$. Dunque i termini nella parentesi sono la consueta differenza Δ; e conseguentemente se sia $x=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, sarà $\int\frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}}=\frac{\Delta\sqrt{m}}{q}$.

34. 5ª. formola; $\frac{dx\sqrt{(-m+nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}}$. Qui pure han luogo due ipotesi; 1ª. $np>mq$; 2ª. $mq>np$. Nella 1ª. supposizione, i limiti de' valori della x sono; $x=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$; $x=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, de' quali il primo è minore, l' altro maggiore; e coll' unico 2°.

Lemma agevolmente si ottiene; $\int \frac{dx\sqrt{(-m+nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}}$
$= \frac{x\sqrt{(-m+nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}} - \frac{1}{\sqrt{q}}$ (arco ip. di 1°. sem. $\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{q}}$;
2°. sem. $\sqrt{m}$
ascissa nel 2°.; $\frac{\sqrt{mq}}{\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{(-m+nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}}$). Ommetto di aggiunger costante, perchè stabilisco, che la formola integrata s' annulli, quando $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$. Diasi ora a x il maggior valore, cioè si faccia $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$; e i due termini della integrazione diventano due infiniti, che si possono mettere sotto questa forma; $\frac{1}{\sqrt{q}}\left(\frac{\sqrt{p}\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{q}\sqrt{(p-qx^2)}}\right.$ — arco iperbolico di
1°. sem. $\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{q}}$; ascissa nel 2°; $\left.\frac{\sqrt{m}\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{n}\sqrt{(p-qx^2)}}\right)$. In
2°. sem. $\sqrt{m}$
questa iperbola la somma de' quadrati de' semiassi è $\frac{np}{q}$. Dunque $\frac{CV^2}{CA} = \frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$; $\frac{CG}{CK} = \frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{n}\sqrt{(p-qx^2)}}$; e l' assintoto
$= \frac{CV^2}{CA} \cdot \frac{CG}{CK}$ (num. VIII) $= \frac{\sqrt{p}\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{q}\sqrt{(p-qx^2)}}$. Quindi, essendo $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, avremo $\int \frac{dx\sqrt{(-m+nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}} = \frac{\Delta}{\sqrt{q}}$, appartenendo Δ all' iperbola di 1°. sem. $\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{q}}$; 2°. sem. $\sqrt{m}$.

35. La 2ª. ipotesi fissa $mq > np$. Poichè questo è l' ultimo caso tra quelli, in cui le formole esigono per la loro integrazione gli archi iperbolici, noi il tratterem per disteso, affinchè indi trar si possa norma pel maneggio degli altri, che abbiamo ne' superiori numeri considerati. I limiti

de' valori di x nella formola $\frac{dx\sqrt{(-m+nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}}$, quando $mq>np$, sono $x=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, che è il valor minore; $x=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, che è il valor maggiore. Ora dal 1°. Lemma abbiamo;

$$\frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}}=\frac{(mq-np)\,x^2dx}{p\sqrt{(m-nx^2)}\sqrt{(-p+qx^2)}}$$

$-\frac{mdx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}}$; e posto $\sqrt{(m-nx^2)}=z$; risulta

$$\frac{x^2dx}{\sqrt{(m-nx^2)}\sqrt{(-p+qx^2)}}=-\frac{dz\sqrt{(m-z^2)}}{n\sqrt{(mq-np-qz^2)}}.$$

Il confronto poi di quest' ultima formola colla 1ª. del num. 19 ci manifesta essere $\int-\frac{dz\sqrt{(m-z^2)}}{n\sqrt{(mq-np-qz^2)}}=-\frac{1}{n\sqrt{q}}\Big($ arco ellittico di 1°. sem. $\sqrt{m}$; ascissa nel 1°., $\frac{z\sqrt{mq}}{\sqrt{(mq-np)}}\Big)$; on-

2°. sem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$

de $\frac{(mq-np)}{p}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(m-nx^2)}\sqrt{(-p+qx^2)}}=-\frac{(mq-np)}{np\sqrt{q}}$

$\Big($ arco ellittico di 1°. sem. $\sqrt{m}$; ascissa nel 1°;

2°. sem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$

$\frac{\sqrt{mq}\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(mq-np)}}\Big)$. L' altro termine $-\frac{mdx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}}$ non è riducibile a nessuna delle formole del num°. 19. Valendosi perciò del 2°. Lemma si metta $u=\frac{\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{(m-nx^2)}}$, onde abbiasi $\int\frac{dx\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{(m-nx^2)}}=ux-\int\frac{du\sqrt{(p+mu^2)}}{\sqrt{(q+nu^2)}}$. Ma, perchè $mq>np$; $\int\frac{du\sqrt{(p+mu^2)}}{\sqrt{(q+nu^2)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\Big($ arco iperbolico di

1°. sem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; ascissa nel 2°. $\left.\frac{u\sqrt{np}}{\sqrt{q}}\right)$, come fa cono-
2°. sem. $\sqrt{p}$
scere il paragone colla 4 formola del num°. 19. Dunque in vece di u sostituito il suo valore per x, sarà

$$\int -\frac{mdx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}} = -\frac{mx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}} + \frac{m}{p\sqrt{n}}\Big(\text{ arco}$$

iperbolico di 1.° sem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; ascissa nel 2.° $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}\times$
2.° sem. $\sqrt{p}$

$\left.\frac{\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{(m-nx^2)}}\right)$; e finalmente $\int\frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}}$

$= -\frac{(mq-np)}{np\sqrt{q}}\Big($ arco ellittico di 1.° sem. $\sqrt{m}$; ascissa nel
2.° sem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$

1.°; $\left.\frac{\sqrt{mq}\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(mq-np)}}\right) - \frac{mx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}} + \frac{m}{p\sqrt{n}}\Big($ arco iper-

bolico di 1.° sem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; ascissa nel 2.° $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}\times$
2.° sem. $\sqrt{p}$

$\left.\frac{\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{(m-nx^2)}}\right) + C.$

36. L' ipotesi che l' integrale svanisca, quando vuolsi $x=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, valor minimo della variabile, serva a determinare la costante C. In tale supposizione l' ascissa centrale dell' arco ellittico diventa $=\sqrt{m}$, che è il 1°. semiasse, ove si prendon le ascisse. Facendosi pertanto l' arco eguale al quadrante ellittico $\mathfrak{Q}$, ed annullandosi evidentemente gli altri due termini, avrem l' equazione $0 = -\frac{(mq-np)}{np\sqrt{q}}\mathfrak{Q} + C$; e quindi $\int\frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}} = \left(\frac{mq-np}{np\sqrt{q}}\right)\Big(\mathfrak{Q} -$ arco ellittico di

1°. sem. $\sqrt{m}$; ascissa nel 1.°, $\frac{\sqrt{mq}\cdot\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(mq-np)}}\Big)$

2.° sem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$

$-\frac{mx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}}+\frac{m}{p\sqrt{n}}\Big($ arco iperbolico di

1.° sem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; ascissa nel 2.°, $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}\times\frac{\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{(m-nx^2)}}\Big)$.

2.° sem. $\sqrt{p}$

37. Renderemo anche più semplice questo integrale, se rifletteremo, che la differenza tra il quadrante dell' ellissi e il notato arco è eguale all' arco ellittico de' predetti semiassi, coll'ascissa centrale nel 2.° asse $=\frac{n\sqrt{p}\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{q}\sqrt{(mq-np)}}$. Sicchè, quando $mq>np$; $\int\frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}}=\left(\frac{mq-np}{np\sqrt{q}}\right)\Big($ arco ellittico di 1.° sem. $\sqrt{m}$; ascissa nel 2.°, $\frac{n\sqrt{p}\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{q}\sqrt{(mq-np)}}\Big)$

2.° sem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$

$-\frac{mx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}}+\frac{m}{p\sqrt{n}}\Big($ arco iperbolico di

1.° sem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; ascissa nel 2.° $\frac{\sqrt{np}\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{q}\sqrt{(m-nx^2)}}\Big)$.

2.° sem. $\sqrt{p}$

38. Dal minimo valore di $x=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, che ci ha servito a determinare la costante C, si passi al massimo $x=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, e si cerchi quale integrale gli corrisponda. A buon conto, per l' arco ellittico, riuscendo l' ascissa nel 2.° asse eguale a $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$, che è appunto il 2.° semiasse, il suddetto arco si muta nel quadrante $\mathfrak{Q}$; i due termini poi che seguono sono di valore infinito; ma adoperando l' usitata espressione, colla ntroduzione del valore dato di x li potremo scriver così;

$-\frac{m}{p\sqrt{n}}\left(\frac{\sqrt{m}\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}\sqrt{(m-nx^2)}}\right.$ — arco iperbolico di
1.° sem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; ascissa nel 2.° $\left.\frac{\sqrt{p}\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{q}\sqrt{(m-nx^2)}}\right)$. Ora
2.° sem. $\sqrt{p}$
poichè, coll' adattamento de' valori del num.° VIII. alla presente iperbola, diventa $\frac{CV^2}{CA}=\frac{\sqrt{mq}}{\sqrt{n}}$, e $\frac{CG'}{CK}=\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{q}\sqrt{(m-nx^2)}}$, onde si trae l' intero assintoto $=\frac{\sqrt{m}\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}\sqrt{(m-nx^2)}}$, cioè = al termine algebraico, che dentro la parentesi precede l' arco iperbolico infinito; resta chiarissima la conclusione, che gli anzidetti due termini equivalgono a $\frac{m\Delta}{p\sqrt{n}}$, e che, ove suppongasi $x=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$ si fa (G) $\int\frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}}=\frac{(mq-np)}{np\sqrt{q}}\,\mathfrak{Q}$ $-\frac{m\Delta}{p\sqrt{n}}$.

39. Ritornando ora alle serie (B), (F) de' num. 9, 18, le quali esibiscono il valore del quadrante $\mathfrak{Q}$ dell' ellissi, e la differenza Δ tra l' assintoto e l' arco infinito dell' iperbola, e sono $\mathfrak{Q}=\frac{a\phi}{2}-\frac{a\phi}{2}\left(\frac{1.a^2}{2^2.b^2}+\frac{1^2.3a^4}{2^2.4^2b^4}+\frac{1^2.3^2 5a^6}{2^2.4^2.6^2b^6}\text{ ecc.}\right)$;
$\Delta=\frac{b\phi}{4}+\frac{b\phi}{2}\left(\frac{1^2.b^2}{2^2.4a^2}+\frac{1^2.3^2b^4}{2^2.4^2.6a^4}+\frac{1^2.3^2.5^2.b^6}{2^2.4^2.6^2.8a^6}\text{ ecc.}\right)$, farem la riflessione, che, nell' una e nell' altra serie, a rappresenta il 1°. sem. della curva; b la distanza del centro dalla direttrice, la qual distanza nella ellisse è 3^a. proporzionale dopo la radice della differenza de' quadrati de' due semiassi e il semiasse 1°; nella iperbola è 3.^{a} proporzionale dopo la radice della somma, e lo stesso 1°. semiasse. Pel nostro quadrante $\mathfrak{Q}$, sarà dunque $a=\sqrt{m}$; $b=\frac{m\sqrt{q}}{\sqrt{(mq-np)}}$, e

$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{mq}}$; e però $\mathfrak{Q}=\frac{\phi\sqrt{m}}{2}-\frac{\phi\sqrt{m}}{2}\left(\frac{1.(mq-np)}{2^2mq}\right.$

$+\frac{1^2.3(mq-np)^2}{2^2.4^2m^2q^2}+\frac{1^2.3^2.5(mq-np)^3}{2^2.4^2.6^2m^3q^3}$ ecc.$\Big)$ per la differenza Δ avrem poi $a=\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; $b=\frac{mq-np}{\sqrt{(mnq)}}$, e $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{mq}}$, che è lo ſteſſo valore di $\frac{a}{b}$ nel quadrante ellittico. Quindi $\Delta=\frac{\phi(mq-np)}{4\sqrt{(mnq)}}+\frac{\phi(mq-np)}{2\sqrt{(mnq)}}\Big(\frac{1^2(mq-np)}{2^2.4mq}$ $+\frac{1^2.3^2(mq-np)^2}{2^2.4^2.6m^2q^2}+\frac{1^2.3^2.5^2.(mq-np)^3}{2^2.4^2.6^2.8m^3q^3}$ ecc.$\Big)$. E colla ſoſtituzione di queſte due ſerie nell' equazione (G), quando $x=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, ſarà $\int\frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}}=\frac{\phi\sqrt{m(mq-np)}}{2np\sqrt{q}}$ $-\frac{\phi\sqrt{m(mq-np)}}{2np\sqrt{q}}\Big(\frac{1.(mq-np)}{2^2mq}+\frac{1^2.3(mq-np)^2}{2^2.4^2m^2q^2}$ ecc.$\Big)$ $-\frac{\phi\sqrt{m(mq-np)}}{4np\sqrt{q}}-\frac{\phi\sqrt{m(mq-np)}}{2np\sqrt{q}}\Big(\frac{1^2(mq-np)}{2^2.4mp}$ $+\frac{1^2.3^2(mq-np)^2}{2^2.4^2.6m^2q^2}$ ecc.$\Big)$, ovvero $-\int\frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}}$ $=\frac{\phi\sqrt{m(mq-np)}}{4np\sqrt{q}}-\frac{\phi\sqrt{m(mq-np)}}{2np\sqrt{q}}\Big(\frac{1(mq-np)}{2^2mq}$ $+\frac{1^2(mq-np)}{2^2.4mq}+\frac{1^2.3(mq-np)^2}{2^2.4^2m^2q^2}+\frac{1^2.3^2(mq-np)^2}{2^2.4^2.6m^2q^2}$ $+\frac{1^2.3^2.5(mq-np)^3}{2^2.4^2.6^2m^3q^3}+\frac{1^2.3^2.5^2(mq-np)^3}{2^2.4^2.6^2.8m^3q^3}+$ ecc.$\Big)$. La legge di queſta elegante ſerie è chiariſſima, ſiccome è chiara ancora la ſua convergenza, atteſochè i fattori numerici de' denominatori ſono in ciaſcun termine maggiori de' fattori numerici ne' numeratori; in oltre $\frac{mq-np}{mq}$, e molto più le creſcenti podeſtà intere di queſta frazione ſon ſempre minori dell' unità.

40. Un bell' eſempio della neceſſità di conoſcere il valore della differenza tra l' aſſintoto e l' arco iperbolico infinito ci viene ſomminiſtrato da un de' problemi, che ſcioglie il celebre

celebre P. *Fontana* nel I. Tomo delle Memorie della *Società Italiana* alla pag. 123 e seguenti. Questo problema risguarda la misura della luce, che riceve un punto collocato dentro l' aja d' un cerchio, la cui circonferenza sia raggiante; e viene sciolto dal suddetto Autore prima nell' ipotesi ordinaria, che la quantità del lume ricevuto debba unicamente ripetersi dalla quantità illuminatrice moltiplicata nel quadrato inverso della distanza del punto illuminato dal punto, da cui si scaglia il raggio illuminatore: poi nell' altra di *Bouguer* e di *Lambert*, i quali oltre i detti elementi giudicano necessario d' introdurvi ancora il seno dell' angolo d' emanazione, vale a dire quell' angolo, che fa il raggio lucido colla superficie del corpo luminoso, da cui emana.

41. Non dipartendomi dalle traccie del ch. Autore stabilisco che dalla circonferenza raggiante del cerchio $SMRB$ venga illuminato il punto F (*fig.* 3), per cui e pel centro C del cerchio conduco il diametro BR. Prendo poi l' arco variabile RM, e guidato il raggio CM, indi da M calata sul diametro la normale MN, chiamo ϕ l' angolo MCO, essendo O il punto, ove concorre col raggio prodotto la tangente MO. Fatto poi $CR = r$, $CF = K$, che dà $RF = K + r$, avremo $CN = r.\,\text{cos}.\,\phi$; $NM = r.\,\text{sen}.\,\phi$; $NF = K + r.\,\text{cos}.\,\phi$, e l' archetto infinitesimo $Mm = rd\phi$. Secondo l' ipotesi Euleriana, supposta T una data illuminazione, sarà quella che raccoglie F dall' archetto $Mm = \frac{Trd\phi}{(FM)^2} = \frac{Trd\phi}{K^2 + r^2 + 2Kr.\,\text{cos}.\,\phi}$, perchè $FM = \sqrt{((FN)^2 + (NM)^2)} = \sqrt{(K^2 + r^2 + 2Kr.\,\text{cos}.\,\phi)}$. Adottando poi l' ipotesi di *Lambert*, bisogna moltiplicare il trovato differenziale pel seno dell' angolo FMO, che è l' angolo d' emanazione. Ora $FMO = FMN + MCO = FMN + \phi$, e in conseguenza $\text{sen}.\,FMO = \text{sen}.\,FMN.\,\text{cos}.\,\phi$

$$+ \text{sen}.\,\phi.\,\text{cos}.\,FMN = \frac{(K + r\,\text{cos}.\,\phi)\,\text{cos}.\,\phi + r\,(\text{sen}.\,\phi)^2}{FM}$$

$$= \frac{K.\,\text{cos}.\,\phi + r}{\sqrt{(K^2 + r^2 + 2Kr.\,\text{cos}.\,\phi)}}.$$ Perilchè la quantità di luce, che da Mm si comunica a F con quest' ultima ipotesi, risulta $\frac{Trd\phi\,(r + K.\,\text{cos}.\,\phi)}{(K^2 + r^2 + 2Kr.\,\text{cos}.\,\phi)^{3:2}} = \frac{Tr}{b^{3:2}}\left(\frac{d\phi\,(r + K.\,\text{cos}.\,\phi)}{(1 + e.\,\text{cos}.\,\phi)^{3:2}}\right)$, ove

si ponga $K^2+r^2=b$, $\frac{2Kr}{K^2+r^2}=e$. Quest' ultima sostituzione fa conoscere, che e debb' esser sempre minore dell' unità, perchè $K^2+r^2>2Kr$ in tutti i casi.

42. Arrivato il P. *Fontana* alla formola $\frac{d\phi(r+K.\operatorname{cos}.\phi)}{(1+e.\operatorname{cos}.\phi)^{3:2}}$, intraprende d' integrarla coll' ajuto delle serie; ma queste gli risultano sì incomode e inviluppate, che io ho creduto tornar meglio assai di rivolgersi ad integrarla colle rettificazioni degli archi ellittici ed iperbolici, ottenendosi per tal mezzo una illuminazione totale, che riesce al maggior segno elegante.

43. Per piegar la formola a ricever l' aspetto di una di quelle, che negli antecedenti numeri abbiamo già integrato, faccio $1+e.\operatorname{cos}.\phi=\frac{1}{x^2}$; onde nasce $\operatorname{cos}.\phi=\frac{1-x^2}{ex^2}$;

$r+K.\operatorname{cos}.\phi=\frac{erx^2-Kx^2+K}{ex^2}$; $1+\operatorname{cos}.\phi=\frac{1-x^2(1-e)}{ex^2}$;

$1-\operatorname{cos}.\phi=-\frac{1+x^2(1+e)}{ex^2}$;

$\operatorname{sen}.\phi=\frac{\sqrt{(1-x^2(1-e))}\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}{ex^2}$. E perchè $\operatorname{cos}.\phi$ cala a misura che cresce l' arco RM, sarà, differenziando la prima equazione, $-ed\phi.\operatorname{sen}.\phi=-\frac{2dx}{x^3}$, cioè

$$d\phi=\frac{2dx}{x\sqrt{(1-x^2(1-e))}\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}$$ e quindi

$$\frac{Tr}{b^{3:2}}.\frac{d\phi(r+K.\operatorname{cos}.\phi)}{(1+e.\operatorname{cos}.\phi)^{3:2}}$$
$$=\frac{2Tr}{b^{3:2}}.\frac{dx(erx^2-Kx^2+K)}{e\sqrt{(1-x^2(1-e))}\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}.$$

44. Lascio da parte il fattor costante $\frac{2Tr}{b^{3:2}}$, e m' accingo ad integrare la formola;

$\frac{dx(erx^2-Kx^2+K)}{e\sqrt{(1-x^2(1-e))}\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}$, che eſprimo con equivalenza in tal modo; $\frac{dx(erx^2+eKx^2-eKx^2+K-Kx^2)}{e\sqrt{(1-x^2(1-e))}\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}$

$$=\frac{(r+K)x^2dx}{\sqrt{(1-x^2(1-e))}\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}-\frac{Kdx\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}{e\sqrt{(1-x^2(1-e))}}.$$

Poſto in ſeguito $\sqrt{(1-x^2(1-e))}=z$, mi naſce;

$$\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2(1-e))}\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}=\frac{-dz\sqrt{(1-z^2)}}{(1-e)\sqrt{(2e-z^2(1+e))}},$$

di cui l' integrale è $=\frac{-1}{(1-e)\sqrt{(1+e)}}$ (arco ellittico di 1.° ſem. 1; aſciſſa cent. nel 1.° aſſe; $\frac{z\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{2e}}$), come

2.° ſem. $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}$

porta il confronto colla 1.ª formola del num. 19. Coll' ajuto poi del 2.° Lemma ſi troverà l' integrale dell' altra formola; $\frac{dx\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}{\sqrt{(1-x^2(1-e))}}=\frac{x\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}{\sqrt{(1-x^2(1-e))}}$

$-\frac{1}{\sqrt{(1-e)}}$ (arco iperbolico di 1.° ſem. $\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; aſciſſa
2.° ſem. 1

cent. nel 2.° aſſe; $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}\times\frac{\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}{\sqrt{(1-x^2(1-e))}}$). Quindi nella precedente integrazione ſurrogando a z il ſuo valore $\sqrt{(1-x^2(1-e))}$, ſarà;

$$\int\frac{dx(erx^2-Kx^2+K)}{e\sqrt{(1-x^2(1-e))}\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}=-\frac{(r+K)}{(1-e)\sqrt{(1+e)}}$$

(arco ellittico di 1.° ſem. 1; aſciſſa cent. nel 1.°,

2.° ſem. $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}$

$$\frac{\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{2e}}\cdot\sqrt{(1-x^2(1-e))}\Big)-\frac{Kx\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}{e\sqrt{(1-x^2(1-e))}}$$

$+\dfrac{K}{e\sqrt{(1-e)}}\Big($ arco iperbolico di 1.° sem. $\dfrac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; ascissa

2.° sem. 1

cent. nel 2.°; $\dfrac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}\times\dfrac{\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}{\sqrt{(1-x^2(1-e))}}\Big)+C$: o ritornando al simbolo cos. ϕ; $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{d\phi(r+K.\cos.\phi)}{(1+e.\cos.\phi)^{3:2}}$

$=-\dfrac{(r+K)}{(1-e)\sqrt{(1+e)}}\Big($ arco ellittico di 1.° sem. 1 ; ascissa

2.° sem. $\dfrac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}$

cent. nel 1.° $\dfrac{\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{(1+\cos.\phi)}}{\sqrt{(1+e.\cos.\phi)}}\Big)$

$-\dfrac{K\sqrt{(1-\cos.\phi)}}{e\sqrt{(1+e.\cos.\phi)}\sqrt{(1+\cos.\phi)}}+\dfrac{K}{e\sqrt{(1-e)}}\Big($ arco iperbolico di 1.° sem. $\dfrac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; ascissa centrale nel 2.°,

2.° sem. 1

$\dfrac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}\cdot\dfrac{\sqrt{(1-\cos.\phi)}}{\sqrt{(1+\cos.\phi)}}\Big)+C.$

45. Quando l' arco RM è nullo, necessariamente debb' esser nulla l' illuminazione. Fatto pertanto cos. $\phi=1$, che corrisponde all' arco $RM=0$, verremo a determinare la costante C. Ora in questa supposizione l' ascissa centrale dell' arco ellittico diventa 1, cioè il 1°. semiasse; il che vuol dire, che l' arco si cangia nel quadrante $\mathfrak{Q}$ dell' ellissi; in oltre svaniscono i due susseguenti termini dell' integrazione. Dunque ci si presenterà l' equazione;

$0=-\dfrac{(r+K)\mathfrak{Q}}{(1-e)\sqrt{(1+e)}}+C$, cioè $C=\dfrac{(r+K)\mathfrak{Q}}{(1-e)\sqrt{(1+e)}}$; e perciò sarà l' integrale completo della nostra formola

$$= \frac{(r+K)}{(1-e)\sqrt{(1+e)}} \Big(\mathfrak{Q} - \text{arco ellittico di } 1^{\circ}.\ \text{sem. } 1\ ;\ \text{ascissa nel } 1^{\circ}\ ;\ \frac{\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{(1+\text{cos}.\phi)}}{\sqrt{(1+e.\,\text{cos}.\phi)}} \Big)$$

$2^{\circ}.$ fem. $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}$

$$- \frac{K}{e\sqrt{(1-e)}} \Big(\frac{\sqrt{(1-e)}\sqrt{(1-\text{cos}.\phi)}}{\sqrt{(1+e.\,\text{cos}.\phi)}\sqrt{(1+\text{cos}.\phi)}} - \text{arco iperbolico di } 1^{\circ}.\ \text{fem. } \frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}\ ;\ \text{ascissa nel } 2^{\circ}\ ;$$

$2^{\circ}.$ fem. 1

$$\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}} \cdot \frac{\sqrt{(1-\text{cos}.\phi)}}{\sqrt{(1+\text{cos}.\phi)}} \Big) = (H) \Big(\frac{r+K}{(1-e)\sqrt{(1+e)}} \Big) \Big(\text{arco ellittico di } 1^{\circ}.\ \text{fem. } 1\ ;\ \text{ascissa nel } 2^{\circ}\ ;$$

$2^{\circ}.$ fem. $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}$

$$\frac{(1-e)\sqrt{(1-\text{cos}.\phi)}}{\sqrt{2}\sqrt{(1+e)}\sqrt{(1+e.\,\text{cos}.\phi)}} \Big)$$

$$- \frac{K}{e\sqrt{(1-e)}} \Big(\frac{\sqrt{(1-e)}\sqrt{(1-\text{cos}.\phi)}}{\sqrt{(1+e.\,\text{cos}.\phi)}\sqrt{(1+\text{cos}.\phi)}} - \text{arco iperbolico di } 1^{\circ}.\ \text{fem. } \frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}\ ;\ \text{ascissa nel } 2^{\circ}\ ;$$

$2.^{\circ}$ fem. 1

$$\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}} \cdot \frac{\sqrt{(1-\text{cof}.\phi)}}{\sqrt{(1+\text{cof}.\phi)}} \Big).$$

46. Crefciuto l' arco *RM* fino a divenire la femiperiferia *RMB*, fi cangia cof. ϕ in -1, e l' afciffa centrale dell' arco ellittico in (H) fi fa eguale al 2°. femiaffe ; ovvero l' arco fi fa il quadrante $\mathfrak{Q}$ dell' elliffe, mentre gli altri due termini, che feguitano, fon due quantità infinite. Quefte, introdotta la modificazione di cof. $\phi = -1$, fi fcrivan così;

$$- \frac{K}{e\sqrt{(1-e)}} \Big(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1+\text{cof}.\phi)}} - \text{arco iperbolico di}$$

1°. sem. $\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; ascissa nel 2°; $\frac{\sqrt{2}\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}\sqrt{(1+\text{cos}.\phi)}}$);
2°. sem. 1
ed invocato il numero VIII, che ci dà per nostra iperbola $\frac{CV^2}{CA}=\frac{\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{(1-e)}}$; $\frac{CG'}{CK}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}\sqrt{(1+\text{cos}.\phi)}}$, troverem l' assintoto $=\frac{CV^2}{CA}.\frac{CG'}{CK}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1+\text{cos}.\phi)}}$. Sicchè i due sopranno-tati termini dentro la parentesi vengono ad esprimere la differenza Δ tra l' assintoto e l' arco iperbolico infinito; e perciò l' integrale spettante alla semicirconferenza RMB sarà; $\frac{(r+K)\mathfrak{Q}}{(1-e)\sqrt{(1+e)}}-\frac{K\Delta}{e\sqrt{(1-e)}}$, appartenendo $\mathfrak{Q}$ all' ellissi di 1.° sem. 1; 2.° sem. $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}$, e Δ all' iperbola di 1.° sem. $\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; 2.° sem. 1.

47. Poichè il 1.° semiasse dell' ellissi, cui spetta il quadrante $\mathfrak{Q}$, è 1, e il 2.° $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}$, nella serie ($B$) del num. 9. sarà $a=1$, $b=\frac{\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{2e}}$, $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1+e)}}$, dai quali valori risulta $\mathfrak{Q}=\frac{\phi}{2}-\frac{\phi}{2}\left(\frac{1.2e}{2^2(1+e)}+\frac{1^2.3.2^2e^2}{2^2.4^2(1+e)^2}\right.$ $\left.+\frac{1^2.3^2.5.2^3e^3}{2^2.4^2.6^2(1+e)^3}\text{ ecc.}\right)$. Parimente riferendosi Δ all' iperbola di 1.° sem. $\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; 2.° sem. 1, nell'altra serie (F) del num. 18. sarà $a=\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; $b=\frac{2e}{\sqrt{(1+e)}\sqrt{(1-e)}}$, e $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1+e)}}$, onde si trae $\Delta=\frac{e\phi}{2\sqrt{(1+e)}\sqrt{(1-e)}}$ $+\frac{e\phi}{\sqrt{(1+e)}\sqrt{(1-e)}}\left(\frac{1^2.2e}{2^2.4(1+e)}+\frac{1^2.3^2.2^2e^2}{2^2.4^2.6(1+e)^2}\right.$

$+\frac{1^2.3^2.5^2.2^3e^3}{2^2.4^2.6^2.8(1+e)^3}$ ecc.). Sostituendo pertanto questi valori nell' integrale $\frac{(r+K)\mathfrak{Q}}{(1-e)\sqrt{(1+e)}}-\frac{K\Delta}{e\sqrt{(1-e)}}$, e rimesso ancora il fattore $\frac{2Tr}{b^{3:2}}$, si avrà la metà dell' illuminazione che investe il punto $F=\frac{Tr^2\phi}{b^{3:2}(1-e)\sqrt{(1+e)}}-\frac{Tr\phi(r+K)}{b^{3:2}(1-e)\sqrt{(1+e)}}$

$$\left(\frac{1.2e}{2^2(1+e)}+\frac{1^2.3.2^2e^2}{2^2.4^2(1+e)^2}\text{ ecc.}\right)-\frac{2TrK\phi}{b^{3:2}(1-e)\sqrt{(1+e)}}$$

$$\left(\frac{1^2.2e}{2^2.4(1+e)}+\frac{1^2.3^2.2^2e^2}{2^2.4^2.6(1+e)}\text{ ecc.}\right)=(H)\ \frac{Tr^2\phi}{(r-K)^2(r+K)}$$

$$-\frac{Tr\phi}{(r-K)^2}\left(\frac{1.2^2Kr}{2^2(r+K)^2}+\frac{1^2.3.2^4K^2r^2}{2^2.4^2(r+K)^4}+\frac{1^2.3^2.5.2^6K^3r^3}{2^2.4^2.6^2(r+K)^6}\text{ ecc.}\right)$$

$$-\frac{2TrK\phi}{(r-K)^2(r+K)}\left(\frac{1^2.2^2Kr}{2^2.4(r+K)^2}+\frac{1^2.3^2.2^4K^2r^2}{2^2.4^2.6(r+K)^4}\right.$$

$$\left.+\frac{1^2.3^2.5^2.2^6K^3r^3}{2^2.4^2.6^2.8(r+K)^6}\text{ ecc.}\right)=\frac{Tr^2\phi}{(r-K)^2(r+K)}$$

$$-\frac{Tr\phi}{(r-K)^2}\left(\frac{1.1.2^2Kr}{2^2(r+K)^2}+\frac{1.3.2^2Kr.A}{4^2(r+K)^2}+\frac{3.5.2^2Kr.B}{6^2(r+K)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{5.7.2^2Kr.C}{8^2(r+K)^2}\text{ ecc.}\right)-\frac{2TrK\phi}{(r-K)^2(r+K)}\left(\frac{1^2.2^2Kr}{4.4(r+K)^2}\right.$$

$+\frac{3^2.2^2Kr.A'}{4.6(r+K)^2}+\frac{5^2.2^2Kr.B'}{6.8(r+K)^2}+\frac{7^2.2^2Kr.C'}{8.10(r+K)^2}$ ecc.) Le majuscole A, B, C ecc.; A', B', C' ecc. di quest' ultima serie sono i termini, che precedono immediatamente.

48. Vogliasi a cagion d' esempio, che il punto F resti collocato alla metà del raggio CB. Divenendo in tal caso $K=\frac{r}{2}$, la metà della illuminazione si fa $=\frac{8T\phi}{r}-\frac{4T\phi}{r}$

$$\left(\frac{1.1.8}{2^2.9}+\frac{1.3.8A}{4^2.9}+\frac{3.5.8B}{6^2.9}+\frac{5.7.8C}{8^2.9}\text{ ecc.}\right)=\frac{8T\phi}{3r}\left(\frac{1^2.8}{4.4.9}\right.$$

$+\frac{3^2.8A'}{4.6.9}+\frac{5^2.8B'}{6.8.9}+\frac{7^2.8C'}{8.10.9}$ ecc.). Nell' una e nell' altra serie vanno presi 32 termini, se si vuole spingere l' approssimazione fino a tre, o quattro decimali; e dopo le necessarie riduzioni proviene la suddetta metà di luce $= \frac{T\phi}{r}$ (1. 246066), ovvero per maggior esattezza ne' numeri, $= \frac{T\phi}{r}$ (1. 246). Ora, siccome quando F cade nel centro C, svaniscono K ed e, e nasce il valore della semi-illuminazione $= \frac{T\phi}{r}$, se faremo, che $\frac{T\phi}{r}$ rappresenti l' unità di luce, sarà quella, che riceve F situato alla metà del raggio CB alla semiperiferia raggiante $= 1.246$, cioè 1 e poco più di $\frac{1}{5}$.

49. A misura che s' intende F ritirarsi verso B, K s' accosta al valore di r, ed e al valore di 1, cosicchè fatto $K = r$, diventa $e = 1$, e per ragione del fattore $(r - K)^2$ ne' denominatori della serie (H), la illuminazione riesce infinita. Ciò però meglio si rileva, se ci riportiamo alla formola differenziale; $\frac{2Trdx(erx^2 - Kx^2 + K)}{b^{3:2}.e\sqrt{(1-x^2(1-e))}\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}$. Questa nell' ipotesi di $e=1$ così si modifica; $\frac{2Tr^2dx}{b^{3:2}\sqrt{(-1+2x^2)}}$ $= \frac{Tdx}{r\sqrt{2}\sqrt{(-1+2x^2)}}$, di cui l' integrale completo è $= \frac{T}{2r} l.\left(\frac{1}{x\sqrt{2}-\sqrt{(2x^2-1)}}\right) = \frac{T}{2r} l.\left(\frac{\sqrt{(1+\text{cos}.\phi)}}{\sqrt{2}-\sqrt{(1-\text{cos}.\phi)}}\right)$ $= \frac{T}{2r} l.\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{(1-\text{cos}.\phi)}}{\sqrt{(1+\text{cos}.\phi)}}\right)$, onde si deduce, che quando $\text{cos}.\phi = -1$, cioè quando F cade in B, viene F investito da una luce infinita.

50. Questa infinità di luce non gli può derivare, che dall' unico punto raggiante B, in cui esso s' immerge, perchè qualunque arco RM minore di RB non gliene comunica che una quantità finita. Dunque l' indole del problema non permette,

permette, che dopo aver ſuppoſta nulla l' illuminazione di F nella nullità dell' arco RM, ſi cerchi quanto lume inveſta F ſituato in R; a motivo che la coincidenza di F con qualunque punto raggiante della periferia lo rende infinitamente illuminato; e ciò ripugna all' ipoteſi della nullità di luce, che F raccoglie da R. Per la qual coſa appunto, volendo immergere F in qualche punto luminoſo, ho ſcelto il punto oppoſto B, che ſalva egregiamente la prima ſuppoſizione.

51. E' coſa per altro curioſa il vedere a che s' agguagliano in tal caſo i termini della noſtra integrazione. Poichè l' immerſione di F in B produce che ſia $K=r$, $e=1$, naſce la ſemi-illuminazione in genere $= \frac{T}{r(1-e)}\Big($ arco ellittico di 1°. ſem. 1; aſciſſa nel 2°; $\frac{(1-e)\sqrt{(1-\text{coſ.}\,\phi)}}{2\sqrt{(1+\text{coſ.}\,\phi)}}\Big)$

2°. ſem. $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{2}}$

$-\frac{T\sqrt{(1-\text{coſ.}\,\phi)}}{r\sqrt{2(1+\text{coſ.}\,\phi)}} + \frac{T}{r\sqrt{2}\sqrt{(1-e)}}\Big($ arco iperbolico di

1°. ſem. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1-e)}}$; aſciſſa nel 2°; $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{(1-\text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{(1+\text{coſ.}\,\phi)}}\Big)$.

2°. ſem. 1

Il 1°. termine è un moltiplo infinito d' un arco ellittico, che ha il ſemiaſſe ſecondo e l' aſciſſa centrale nulli; l' ultimo è parimente un moltiplo infinito ma di un arco iperbolico che ha infinito il primo ſemiaſſe e nulla l' aſciſſa centrale, coſicchè parer potrebbe, che, prendendoſi le aſciſſe nel 2°. aſſe, l' arco non differiſſe per niente dall' aſciſſa centrale e foſſe il ſuo moltiplo $= \frac{T}{r\sqrt{(1-e)}.\sqrt{2}} \times$

$$\left(\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{(1-\text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{(1+\text{coſ.}\,\phi)}}\right) = \frac{T}{2r} \times \frac{\sqrt{(1-\text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{(1+\text{coſ.}\,\phi)}}$$

, quantità algebraica e finita. E pure con tal concluſione cadrebbeſi in parallogiſmo, perchè differenziando sì il moltiplo dell' arco ellittico come anche il moltiplo dell' arco iperbolico, dopo aver posto $u = \frac{\sqrt{(1 - \text{cos}.\,\phi)}}{\sqrt{(1 + \text{cos}.\,\phi)}}$ e fatte le dovute sostituzioni, si arriva nell' uno e nell' altro caso al differenziale $\frac{Tdu\sqrt{(1+u^2)}}{2r}$, il cui integrale sarà ai suddetti due moltipli comune. Ora quest' integrale è $\frac{T}{4r}\left(u\sqrt{(1+u^2)} + l.\left(u + \sqrt{(1+u^2)}\right)\right) = \frac{T}{4r}\left(\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{(1 - \text{cos}.\,\phi)}}{1 + \text{cos}.\,\phi} + l.\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{(1 - \text{cos}.\,\phi)}}{\sqrt{(1 + \text{cos}.\,\phi)}}\right)\right)$, cioè d' un valore onninamente diverso dal superiore; $\frac{T}{2r} \times \frac{\sqrt{(1 - \text{cos}.\,\phi)}}{\sqrt{(1 + \text{cos}.\,\phi)}}$; e può servir d' avviso ai calcolatori di non trar troppo presto conclusioni dai loro calcoli, senza aver prima esaminato ogni cosa colla maggiore attenzione. Intanto noi diremo, che, quando $e = 1$, varrà l' equazione; $\frac{1}{\sqrt{(1-e)}}\Big($ arco ellittico di 1°. sem. 1; 2°. sem. $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{2}}$ ascissa nel 2°; $\frac{(1-e)\sqrt{(1 - \text{cos}.\,\phi)}}{2\sqrt{(1 + \text{cos}.\,\phi)}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big($ arco iperbolico di 1°. sem. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1-e)}}$; 2°. sem. 1 ascissa nel 2°; $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{(1 - \text{cos}.\,\phi)}}{\sqrt{(1 + \text{cos}.\,\phi)}}\Big)$; e che i due archi moltipli presi insieme verranno a formar l' integrale $\frac{T}{2r}\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{(1 - \text{cos}.\,\phi)}}{1 + \text{cos}.\,\phi} + l.\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{(1 - \text{cos}.\,\phi)}}{\sqrt{(1 + \text{cos}.\,\phi)}}\right)\right) = \frac{T\sqrt{(1 - \text{cos}.\,\phi)}}{r\sqrt{2(1 + \text{cos}.\,\phi)}} + \frac{T}{2r}\,l.\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{(1 - \text{cos}.\,\phi)}}{\sqrt{(1 + \text{cos}.\,\phi)}}\right)$. Aggiunto poi a questi due il termine algebraico $-\frac{T\sqrt{(1 - \text{cos}.\,\phi)}}{r\sqrt{2(1 + \text{cos}.\,\phi)}}$, si ottiene la mezza illuminazione $= \frac{T}{2r}\,l.\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{(1 - \text{cos}.\,\phi)}}{\sqrt{(1 + \text{cos}.\,\phi)}}\right)$ tal quale precisamente s' è trovata al num°. 49.