DELLE PROGRESSIONI RECIPROCHE DELLE POTENZE AFFETTE

Del Sig. Cavaliere Lorgna.

E' Tanto impenetrabile il valore delle progressioni reciproche di questa forma

$$\frac{1}{aK \pm b} \mp \frac{1}{aK^2 \pm b} + \frac{1}{aK^3 \pm b} \mp \text{ecc.} \ldots\ldots \frac{1}{aK^n \pm b}$$

che l' illustre *Eulero* non dubitò di dire nel VI. Vol. de' primi Com. di Pietrob. pag. 97 „ *Quamvis vero hæc methodus tam late pateat, tamen innumeræ occurrere possunt progressiones per eam non summabiles, quarum quidem vel nullo alio modo summæ assignari possunt, ut hujus*

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \text{ecc.} \ldots\ldots \frac{1}{2^n - 1}$, che è pur un caso particolare e semplicissimo della forma precedente. In fatti non sappiamo finora nè trattarle, nè esprimerle per alcun modo. Vo' credere pertanto non discaro a' Geometri il veder fatto un primo passo in questo gineprajo, e suggettata la somma di questa, e d' infinite altre progressioni di tal indole ad una qualche espressione finita. Non è facile per verità l' avvisarsi, che il maneggio di loro si riduce al far passaggio da quantità esponenziali reali a' seni e coseni d' archi immaginarj, se un' occasione propizia non concorra a mostrarcelo a dito. E tanto più che non è in uso questo passaggio come l' altro comune e trito dalle quantità esponenziali immaginarie a' seni e coseni d' archi reali. Ma restava ancora un nodo assai più difficile da sciorsi, dovendo l' analista rintracciare un metodo in appresso, onde sommare le serie reciproche de' seni e coseni, che mancava totalmente. Così fosse tra' vivi quel gran Maestro, cui le Scienze Matematiche, l' Analisi più fina e complicata, e il più de' Geometri viventi d' ogni Nazione debbono i lumi più preziosi, l' avanzamento attuale,

e innumerabili aperture a' nuovi progressi, come son certo, che avrebbe onorato quest' indagine di qualche attenzione.

§. I.

Sia la serie (μ)

$$(\mu)\ldots\ldots\frac{A}{K-1}+\frac{A}{K^2-1}+\frac{A}{K^3-1}\ldots\ldots\frac{A}{K^x-1}$$

in cui A è una quantità invariabile qualunque, K una quantità qualunque maggiore dell' unità, e x l' esponente de' termini. Essendo arbitraria la base de' logaritmi, sarà lecito il prendere per base logaritmica la grandezza K, che che ella siasi, e sarà sempre $l.1=0$, $l.K=1$, $l.K^2=2$ ecc. e sarà facile il passaggio dal sistema de' logaritmi con la base K al sistema comune delle Tavole. In conseguenza, se sia π la semicirconferenza di un cerchio che ha l' unità per raggio, e la lettera ω rappresenti la quantità immaginaria $\sqrt{-1}$, sarà pe' noti Canoni

$$\text{sen.}\, m\pi=(K^{m\pi\omega}-K^{-m\pi\omega}):2\omega,\quad \text{cos.}\, m\pi=\frac{1}{2}(K^{m\pi\omega}+K^{-m\pi\omega});$$

e posto $m\pi=\frac{x}{\omega}$, rappresentando x una grandezza reale; sarà $2\omega\,\text{sen.}\,x:\omega=K^x-K^{-x}$, $2\,\text{cos.}\,x:\omega=K^x+K^{-x}$, sì che ove nelle precedenti formule si esprimono per quantità esponenziali immaginarie seni e coseni d' archi reali, in queste sono espressi seni e coseni d' archi immaginarj per quantità esponenziali reali. Ciò premesso si faccia passaggio dalle dirette alle espressioni reciproche, e sarà

$$\frac{1}{2^x\,\text{sen.}\,x:\omega}=\frac{1}{K^x-K^{-x}}=\frac{1}{K^{2x}-1};\quad \frac{1}{2\,\text{cos.}\,x:\omega}=\frac{1}{K^{2x}+1}.$$

Ma $\frac{K^x}{K^{2x}-1}=\frac{K^x}{(K^x-1)(K^x+1)}$; dunque $\frac{K^x-1}{2\omega K^x\,\text{sen.}\,x:\omega}$ $=\frac{1}{K^x+1}$; $\frac{K^x+1}{2\omega K^x\,\text{sen.}\,x:\omega}=\frac{1}{K^x-1}$, e però essendo $\frac{1}{K^x\pm1}$ il termine generale di una serie, sarà questa serie uguale a quella, che ha $\frac{K^x\mp1}{2\omega K^x}\times\frac{1}{\text{sen.}\,x:\omega}$ per termine generale, sa-

cendo che K rappresenti la base logaritmica. Se dunque il simbolo $S.T$ esprima la somma della serie, di cui T è il termine generale; sarà generalmente

$$S.\frac{A}{K^n \pm 1} = S.\frac{A(K^n \mp 1)}{2\omega K^n} \times \frac{1}{\text{sen.}\, x : \omega}; \; S.\frac{AK^n}{K^{2n}-1} =$$

$$S.\frac{A}{2\omega\, \text{sen.}\, x : \omega}; \; S.\frac{AK^n}{K^{2n}+1} = S.\frac{A}{2\, \text{cos.}\, x : \omega}$$

§. II.

Ed ecco intanto la somma della serie del Sig. *Eulero*

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} \ldots\ldots \frac{1}{2^n - 1}$$

felicemente ridotta alla somma d' una serie, che ha per termine generale $\frac{2^n+1}{\omega 2^{n+1}} \times \frac{1}{\text{sen.}\, x : \omega}$, essendo il 2 la base de' logaritmi.

§. III.

Accignamoci ora a determinare la somma in genere delle serie aventi sì fatte espressioni per termine generale. E' noto che le serie reciproche de' seni, e coseni ecc. d' archi procedenti in arimmetica progressione non erano state tocche da alcuno, e molto meno nel caso, che involgessero, come qui accade, moltiplicatori esponenziali. Il primo cimento in questa materia è quello, che ho fatto pubblico nel I. Vol. della *Società Italiana* nella Dissertazione intorno alle serie al Cap. X. pag. 368, avendo ivi ridotto tali somme alle leggi del Calcolo Integrale. A quel metodo pertanto soggetteremo anche queste più difficili, ed altre analoghe così, facendo vedere come da quelle espressioni integrali si passi non difficilmente a quantità sviluppate, e finite. Si riprenda da quel luogo la formula

$$\int \frac{z^m + z^{n-m}}{1 + z^n} \cdot \frac{dz}{z} = \frac{\pi}{n\, \text{sen.}\, \frac{m\pi}{n}}$$

da integrarsi da $z=0$ fino a $z=1$, in cui π è la semicirconferenza di un cerchio, che ha l' unità per raggio. Facendo $n=1$, $m\pi=x:\omega$, come nel I. §., e posto $\omega\pi=a$ per semplicità, si avrà generalmente

$$\frac{A}{\pi}\int\frac{z^{n:a}+z^{1-n:a}}{1+z}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{A}{\text{sen.}\,x:\omega}$$

In conseguenza (§. I.)

$$(P)\ldots\frac{A}{2a}\int\frac{z^{n:a}+z^{1-n:a}}{1+z}\cdot\frac{dz}{z}\pm\frac{A}{2aK^n}\int\frac{z^{n:a}+z^{1-n:a}}{1+z}\cdot\frac{dz}{z}$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{z^{n:a}}{1+z}\cdot\frac{dz}{z}+\frac{A}{2a}\int\frac{z^{1-n:a}}{1+z}\cdot\frac{dz}{z}\pm\frac{A}{2aK^n}\int\frac{z^{n:a}}{1+z}\cdot\frac{dz}{z}$$

$\pm\frac{A}{2aK^n}\int\frac{z^{1-n:a}}{1+z}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{A}{K^n\mp 1}$, posta K qualunque la base de' logaritmi. Ora si richiami il metodo nostro di sommare le serie citato qui sopra, e però si moltiplichi, e si divida il primo termine per $1-z^{1:a}$, il secondo per $1-z^{-1:a}$ sotto il segno integrale. Sarà

$$(Q)\ldots\frac{A}{2a}\int\frac{z^{n:a}}{(1-z^{1:a})(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}-\frac{A}{2a}\int\frac{z^{n:a+1:a}}{(1-z^{1:a})(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}$$

la forma differenziale del primo; e la forma differenziale del secondo sarà

$$(R)\ldots\frac{A}{2a}\int\frac{z^{1-n:a}}{(1-z^{-1:a})(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}-\frac{A}{2a}\int\frac{z^{1-n:a-1:a}}{(1-z^{-1:a})(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}.$$

Similmente si moltiplichi, e si divida il terzo termine per $1-\frac{z^{1:a}}{K}$, il quarto per $1-\frac{z^{-1:a}}{K}$ sotto il segno integrale; si avrà per forma differenziale del terzo la seguente espressione

$$(S)\ldots\pm\frac{A}{2aK^n}\int\frac{z^{n:a}}{(1-z^{1:a}:K)(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}$$

$$\mp\frac{A}{2aK^{n+1}}\int\frac{z^{n:a+1:a}}{(1-z^{1:a}:K)(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}$$

e la seguente

$$(T)\ldots\pm\frac{A}{2aK^n}\int\frac{z^{1-n:a}}{(1-z^{-1:a}:K)(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}$$

$$\mp\frac{A}{2aK^{n+1}}\int\frac{z^{1-n:a-1:a}}{(1-z^{-1:a}:K)(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}$$

per forma differenziale del quarto. Si faccia $x=1$ ne' primi termini de' primi binarj (2) (R), e riducendo sarà l'espressione (D)

$$\frac{A}{2a}\int\frac{(z^{1:a}+z^{1-n:a})(1-z^{n:a})}{(1-z^{1:a})(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}\ldots\ldots(D)$$

la somma generale della serie avente per termine generale il primo termine della formula (P). Operando similmente sopra i secondi binarj (S), (T), si troverà essere l' espressione ridotta (E)

$$\pm\frac{A}{2aK^n}\int\left(\frac{z^{1:a}(K^n-z^{n:a})}{(K-z^{1:a})(1+z)}+\frac{z^{1-n:a}(K^nz^{n:a}-1)}{(Kz^{1:a}-1)(1+z)}\right)\frac{dz}{z}\ldots(E)$$

la somma generale della serie avente per termine generale il secondo termine della formula (P). Dunque col mezzo delle due espressioni (D), (E) nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione si otterrà la somma generale della serie di cui è termine generale $\frac{A}{K^n\mp1}$; e posto poi $x=\infty$ si avrà la somma della serie all' infinito, ch' è il caso in quistione.

Ora essendo $a=\omega\pi=\pi\sqrt{-1}$, e $x:a=x:\pi\sqrt{-1}$ lo stesso che $\frac{-x\sqrt{-1}}{\pi}$, la formula (D) diverrà

$$\frac{A}{2a}\int\frac{(z^{1:a-1}+z^{n:\pi})(1-z^{n:\omega\pi})\,dz}{(1-z^{1:a})(1+z)}$$

e nel caso contemplato di $x=\infty$, essendo z prima dell' integrazione minore dell' unità, tanto $z^{n:\pi}$ quanto $z^{n:\omega\pi}$ sarà sotto il segno quantità infinitamente piccola, e però per le serie all' infinito l' espressione (D) prenderà la forma

$$\frac{A}{2a}\int\frac{z^{1:a-1}dz}{(1-z^{1:a})(1+z)}\ldots\ldots(M)$$

Nello stesso modo proveremo, che l' espressione (E) diverrà

$$\pm\frac{A}{2aK^n}\int\left(\frac{K^n z^{1:a-1}dz}{(K-z^{1:a})(1+z)}+\frac{K^n dz}{(Kz^{1:a}-1)(1+z)}\right)=$$

$$\pm\frac{A}{2a}\int\frac{z^{1:a-1}dz}{(K-z^{1:a})(1+z)}\pm\frac{A}{2a}\int\frac{dz}{(Kz^{1:a}-1)(1+z)}\ldots(N)$$

nel caso di $x=\infty$

§. IV.

Il passo fatto è quello pertanto di essere da nessuna immaginabile espressione finita pervenuti a trovarne una per questa sorta di progressioni, che può almeno costruirsi e ridursi a rettificazione, o quadratura finita di qualche curva, se si volesse, essendo stranissima pretesa il volere, che tutto si abbia a ridurre a funzioni d' archi o d' iperbole comuni, quasi tutte le trascendenze dovessero essere di una sola natura. Se fosse lecito il trascurare un residuo finito nelle divisioni spinte all' infinito, le formule trovate potrebbero trasformarsi in funzioni trascendenti familiari in questo modo. Si faccia $z^{1:a}=y$, e sarà

$$\int\frac{z^{1:a-1}dz}{(1-z^{1:a})(1+z)}=\int\frac{ady}{(1-y)(1+y^a)}=\int\frac{ady}{1+y^a-y-y^{a+1}}$$

Ma la frazione

$$\frac{1}{-y^{a+1}-y+y^a+1}=-\frac{1}{y^{a+1}}+\frac{1}{y^{2a+1}}-\frac{1}{y^{3a+1}}+\frac{1}{y^{4a+1}}-\text{ecc.}$$

non computando l' ultimo residuo $\frac{1}{y}$ che risulta inoltrando all' infinito la divisione. Moltiplicando dunque per ady, e integrando si avrà

$\frac{y^{-a}}{1}-\frac{y^{-2a}}{2}+\frac{y^{-3a}}{3}-\frac{y^{-4a}}{4}+$ ecc.; sostituendo il valore di y in z, e ponendo $z=1$, perchè messo $z=0$, tutto svanisce, si avrà (μ) pel valore della formula (D) nel caso di $x=\infty$, e di $z=1$ dopo l' integrazione, cioè della formula (M)

$$\frac{A}{2a}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\text{ecc.}\right)\ldots\ldots(\mu)$$

Ma K è la base, che abbiamo assunto pe' logaritmi iperbolici; ed è noto, che prendendo nelle tavole ordinarie il logaritmo iperbolico L di qualunque quantità K, e il logaritmo pure d' altra quantità qualsivoglia m, se si divida il $l.m$ per L, il quoziente è il logaritmo iperbolico della quantità m con la base K.

Essendo dunque

$l.2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ ecc. con la base $e = 2.718281828459$ ecc.

e $L = l.K$ con la stessa base e, sarà $\frac{l.2}{L} = \frac{l.2}{l.K}$ il logaritmo del numero 2 con la base K, cioè il valore della serie nel caso nostro. E perciò $\frac{A}{2a} \cdot \frac{l.2}{l.K} = \frac{Al.2}{2\pi\sqrt{-1}\, l.K}$ sarebbe il valore per approssimazione dell' espressione integrale (M), essendo π la semicirconferenza d' un cerchio avente l' unità per raggio. Passiamo ora dagli esponenti immaginarj agli archi reali, e però essendo K la base de' logaritmi iperbolici, sarà

$$K^{2\pi\sqrt{-1}\, l.K} = \text{cos.}\, 2\pi l.K + \sqrt{-1}\, \text{sen.}\, 2\pi l.K$$

$= (\text{cos.}\, \pi l.K + \sqrt{-1}\, \text{sen.}\, \pi l.K)^2$, e però facendo ripassaggio ai numeri, sarà

$$2\pi\sqrt{-1}\, l.K = 2l.(\text{cos.}\, \pi l.K + \sqrt{-1}\, \text{sen.}\, \pi l.K)$$

Ma questo logaritmo iperbolico è con la base K; dunque dividendolo per $l.K$ riferito alla base comune e, si avrà finalmente pel valore dell' espressione (D) ne' casi contemplati di $x = \infty$, e di $z = 1$, dopo l' integrazione, la formula (D')

$$(D') \ldots \frac{Al.2\, l.K}{2l.(\text{cos.}\, \pi l.K + \sqrt{-1}\, \text{sen.}\, \pi l.K)}$$

in cui K è il numero assoluto qualunque delle nostre serie maggiore dell' unità, e i logaritmi sono tutti gli ordinarj iperbolici riferiti alla base e.

Ma procedendo con un simile metodo integreremo per approssimazione la formula (N) in questa guisa, trascurando l' ultimo residuo giunta la divisione all' infinito. Si faccia, come prima, $z^{1:a} = y$ nel primo membro, e si avrà

$z^{1:a-1} dz$

$\int \frac{z^{1:a-1}dz}{(K-z^{1:a})(1+z)} = \int \frac{ady}{Ky^a+K-y-y^{a+1}}$, e però

$\frac{1}{Ky^a+K-y-y^{a+1}} = \frac{1}{Ky^a} - \frac{1}{Ky^{2a}} + \frac{1}{Ky^{3a}} - \frac{1}{Ky^{4a}} +$ ecc. all' infinito. Moltiplicando dunque per ady, integrando, sostituendo il valore per y in z, e ponendo $z=1$, sarà in questo caso

$$\int \frac{z^{1:a-1}dz}{(K-z^{1:a})(1+z)} = \frac{a}{K}\left(\frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-2a} + \frac{1}{1-3a} - \frac{1}{1-4a} + \text{ecc.}\right).$$

Similmente essendo pel secondo membro

$\frac{1}{Kz^{1:a+1}+Kz^{1:a}-1-z} = \frac{1}{Kz^{1:a+1}} - \frac{1}{Kz^{1:a+2}} + \frac{1}{Kz^{1:a+3}} -$ ecc. all' infinito, sarà moltiplicando per dz, e integrando da $z=0$ fino a $z=1$

$$\int \frac{dz}{(Kz^{1:a}-1)(1+z)} = -\frac{a}{K} + \frac{a}{K}\left(\frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+2a} + \frac{1}{1+3a} - \text{ecc.}\right);$$

dunque $\int\left(\frac{z^{1:a-1}dz}{(K-z^{1:a})(1+z)} + \frac{dz}{(Kz^{1:a}-1)(1+z)}\right)$ uguaglierà nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione

$$-\frac{a}{K} + \frac{a}{K}\left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1-2a} - \frac{1}{1+2a} + \frac{1}{1-3a} + \frac{1}{1+3a} - \text{ecc.}\right) = -\frac{a}{K} + \frac{2a}{K}\left(\frac{1}{(1-a)(1+a)} - \frac{1}{(1-2a)(1+2a)} + \frac{1}{(1-3a)(1+3a)} - \text{ecc.}\right)$$

Si ricorra pertanto al metodo nostro di sommare le serie (Mem. della *Soc. Italiana* Vol. I. Probl. XI.), e si tragga pel caso di due fattori al denominatore l' integrale per la somma generale di questa serie a segni alternativi

$$\frac{1}{nq}\int z^{p:q-m:n-1}dz \int z^{m:n}dz\left(\frac{1-z^n}{1+z}\right)$$

il quale per la somma all' infinito, essendo spezzato e ridotto, si trasforma in questo

$$\frac{1}{nq\left(\frac{p}{q}-\frac{m}{n}\right)}\int\frac{(z^{m:n}-z^{p:q})dz}{1+z}$$

da integrarsi da $z=0$ fino a $z=1$.

Ora nel caso nostro, essendo nel termine generale

$\frac{1}{(m+nx)(p+qx)}=\frac{1}{(1-ax)(1+ax)}$, $m=p=1$, $n=-a$, $q=a$, l' integrale diverrà $-\frac{1}{2a}\int\frac{(z^{-1:a}-z^{1:a})dz}{1+z}$. Ma quest' integrale nasce dalla differenza de' due seguenti integrali

$+\frac{1}{2a}\int\frac{(z^{1:a-1}+z^{1:a})dz}{1+z}-\frac{1}{2a}\int\frac{(z^{1:a-1}+z^{-1:a})dz}{1+z}$; ed è

poi $\int\frac{(z^{1:a-1}+z^{1:a})dz}{1+z}=\int z^{1:a-1}dz=az$, $=a$, posto $z=1$, e in simil caso di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int\frac{(z^{1:a-1}+z^{-1:a})dz}{1+z}=\frac{\pi}{\text{sen. }\pi:a}$$

(Com. nuovi di *S. Pietrob.* Vol. XIX. pag. 32.). Dunque

l' integrale nostro $-\frac{1}{2a}\int\frac{(z^{-1:a}-z^{1:a})dz}{1+z}=-\frac{\pi}{2a\text{ sen. }\pi:a}+\frac{1}{2}$.

In conseguenza questo sarà pure il valore della nostra serie

$$\frac{1}{(1-a)(1+a)}-\frac{1}{(1-2a)(1+2a)}+\text{ecc.}\ldots\frac{1}{(1-ax)(1+ax)}$$

e perciò

$$-\frac{a}{K}+\frac{2a}{K}\left(\frac{1}{(1-a)(1+a)}-\frac{1}{(1-2a)(1+2a)}+\text{ecc.}\right)$$

$$=-\frac{a}{K}+\frac{2a}{K}\left(\frac{-\pi}{2a\text{ sen. }\pi:a}+\frac{1}{2}\right)=\int\left(\frac{z^{1:a-1}dz}{(K-z^{1:a})(1+z)}\right.$$

$+\frac{dz}{(Kz^{1:a}-1)(1+z)}$), posto $z=1$ dopo l' integrazione.

Ma moltiplicando per $\pm\frac{A}{2a}$ quest' espressione integrale, si ha l' espressione superiore (N), cioè l' espressione (E) nel caso di $x=\infty$. Dunque il valore di quell' espressione nel caso di $x=\infty$, e di $z=1$ dopo l' integrazione sarà

$$\pm\frac{A}{2a}\left(-\frac{A}{K}+\frac{2a}{K}\left(\frac{-\pi}{2a\,\text{sen.}\,\pi:a}+\frac{1}{2}\right)\right)=\mp\frac{A\pi}{2aK\,\text{sen.}\,\pi:a}$$

e posto per a il suo valore $\pi\sqrt{-1}$ si avrà

$$\mp\frac{A}{2K\sqrt{-1}\,\text{sen.}\,\pi:\sqrt{-1}}.$$

Ma è K la base de' logaritmi per supposizione; dunque passando dagli archi immaginarj alle quantità esponenziali reali, come nel principio di questo §., sarà

$$\mp\frac{A}{2K\sqrt{-1}\,\text{sen.}\,\pi\sqrt{-1}}=\mp\frac{AK}{K(K^2-1)}=\mp\frac{A}{K^2-1}\ldots(E')$$

e perciò per un' approssimazione sarà

$$(D')\mp(E')=S.\frac{A}{K^n\mp 1}$$

§. V.

Ma contentandoci della riduzione scoperta al §. III., e ripigliando le somme esatte, sarà $(M)+(N)$ la somma della serie

$$\frac{A}{K-1}+\frac{A}{K^3-1}+\frac{A}{K^3-1}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{A}{K^n-1}$$

e $(D)+(E)$ la somma generale; sì che posto $A=1$, $K=2$, si avrà tosto la somma della serie del Sig. *Eulero*, e $(M)-(N)$ la somma della serie

$$\frac{A}{K+1}+\frac{A}{K^2+1}+\frac{A}{K^3+1}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{A}{K^n+1}$$

e $(D)-(E)$ la somma generale. Parimenti sommando, e riducendo sarà (M) la somma della serie

$$\frac{AK}{K^2-1}+\frac{AK^2}{K^4-1}+\frac{AK^3}{K^6-1}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{AK^n}{K^{2n}-1}$$

e (D) la somma generale.

E perchè $\frac{A}{K^n-1}-\frac{A}{K^n+1}=\frac{2A}{K^{2n}-1}$, sarà (N) la somma della serie

$$\frac{A}{K^2-1}+\frac{A}{K^4-1}+\frac{A}{K^6-1}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{A}{K^{2n}-1}$$

ed (E) la somma generale.

§. VI.

Essendo poi $\frac{A}{K^n-1}+A=\frac{AK^n}{K^n-1}$, e $A-\frac{A}{K^n+1}$ $=\frac{AK^n}{K^n+1}$, si avrà l' aggregato $(D)+(E)+Ax$ per somma generale della serie

$$\frac{AK}{K-1}+\frac{AK^2}{K^2-1}+\frac{AK^3}{K^3-1}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{AK^n}{K^n-1}$$

e l' aggregato $Ax-(D)+(E)$ sarà la somma generale della serie

$$\frac{AK}{K+1}+\frac{AK^2}{K^2+1}+\frac{AK^3}{K^3+1}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{AK^n}{K^n+1}$$

In conseguenza $Ax+(E)$ sarà la somma generale della serie

$$\frac{AK^2}{K^2-1}+\frac{AK^4}{K^4-1}+\frac{AK^6}{K^6-1}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{AK^{2n}}{K^{2n}-1}$$

§. VII.

Di nuovo essendo

$$\frac{1}{\text{sen.}\frac{\pi(p-x)}{2p}}=\frac{1}{\text{cos.}\frac{\pi x}{2p}}$$

se si faccia $2p=\pi\omega=a$ (§. *III.*), sarà

$$\frac{1}{\text{sen.}\left(\frac{a}{2}-x\right):\omega}=\frac{1}{\text{cos.}\,x:\omega}$$

Dunque $S.\dfrac{1}{\text{sen.}\left(\frac{a}{2}-x\right):\omega}=S.\dfrac{1}{\text{cos.}\,x:\omega}$, e però moltiplicando i membri per $\dfrac{A}{2\omega}$ sarà parimenti

$$S.\frac{A}{2\omega\,\text{sen.}\left(\frac{a}{2}-x\right):\omega}=\frac{1}{\omega}S.\frac{A}{2\,\text{cos.}\,x:\omega}$$

Ora essendo l' espressione (D) (§. V.) la somma generale della serie, che ha per termine generale $\dfrac{AK^x}{K^{2x}-1}=\dfrac{A}{2\omega\,\text{sen.}\,x:\omega}$ (§. I.), se si metta in (D) $\dfrac{a}{2}-x$ in luogo di x sì che (D) diventi $(D_{,})$, sarà

$$(D_{,})=S.\frac{A}{2\omega\,\text{sen.}\left(\frac{a}{2}-x\right):\omega}=\frac{1}{\omega}S.\frac{A}{2\,\text{cos.}\,x:\omega}$$

Ma $\dfrac{1}{2\,\text{cos.}\,x:\omega}=\dfrac{AK^x}{K^{2x}+1}$ (§. I.). Dunque $\omega(D_{,})$ sarà la somma generale della serie

$$\frac{AK}{K^2+1}+\frac{AK^3}{K^4+1}+\frac{AK^3}{K^6+1}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{AK^x}{K^{2x}+1}$$

posta K qualunque la base de' logaritmi iperbolici.

§. VIII.

Quindi possiamo ricavare il modo di ridurre a legge le somme di altre innumerabili serie, che non erano state soggettate a verun calcolo per l' innanzi. Potremo pertanto sommare la serie

$$\frac{AK^2}{K^2+1}+\frac{AK^4}{K^4+1}+\frac{AK^6}{K^6+1}\cdots\cdots\frac{AK^{2x}}{K^{2x}+1}$$

in questo modo, qualunque cosa sieno A e K, purchè K sia maggiore dell' unità.

Essendo $\frac{\text{sen.}\,x:\omega}{\text{cos.}\,x:\omega}=\text{tang.}\,x:\omega$ si sostituiscano pel seno, e coseno i valori corrispondenti esponenziali, posta K la base de' logaritmi iperbolici, e sarà

$$\text{tang.}\,x:\omega=\frac{1}{\omega}\left(\frac{K^x-K^{-x}}{K^x-K^{-x}}\right)=\frac{1}{\omega}\left(\frac{K^{2x}-1}{K^{2x}+1}\right)$$

Ma la somma della serie

$$\text{tang.}\,1:\omega+\text{tang.}\,2:\omega+\text{tang.}\,3:\omega\ldots\ldots\text{tang.}\,x:\omega$$

è $\frac{1}{a}\int\frac{z^{n:2a}dz(1-z^x)(z^{-x-1}-1)}{(1-z)(1-z^{n:a})}=(F)$

(Mem. della *Soc. Italiana* pag. 300.) posta $a=1:\omega$; e se nelle due espressioni (D), (E) del §. III. si metta $2x$ in luogo di x, sì che (D) diventi (D''), (E) diventi (E''), si trova essere $(D'')-(E'')=AS.\frac{1}{K^{2x}+1}$. Dunque essendo $\omega S.\,\text{tang.}\,x:\omega=S.\frac{K^{2x}}{K^{2x}+1}-S.\frac{1}{K^{2x}+1}$, sarà

$$A\omega(F)+S.\frac{A}{K^{2x}+1}=S.\frac{AK^{2x}}{K^{2x}+1}=A\omega(F)+(D'')-(E'')$$

Ma si è trovato (§. VI.) $Ax-(D)+(E)=S.\frac{AK^x}{K^x+1}$; dunque mettendo, come qui innanzi, $2x$ in luogo di x, sarà parimenti $2Ax-(D'')+(E'')=S.\frac{AK^{2x}}{K^{2x}+1}=A\omega(F)+(D'')-(E'')$, e però avrà luogo nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione l' equazione seguente

$$2Ax-A\omega(F)-2(D'')+2(E'')=0$$

Similmente sommeremo la serie

$$\frac{AK^3}{K^4-1}+\frac{AK^6}{K^8-1}+\frac{AK^9}{K^{12}-1}\cdots\cdots\frac{AK^{3x}}{K^{4x}-1}$$

giacchè il termine generale si risolve ne' due termini generali particolari

$$\frac{AK^n}{2(K^{2n}-1)}+\frac{AK^n}{2(K^{2n}+1)}$$

ed è $\frac{1}{2}(D)=S.\frac{AK^n}{2K^{2n}-1}$ (§. V.), e $\frac{\omega}{2}(D_{,})=S.\frac{AK^n}{2(K^{2n}+1)}$ (§. VII.). Nello ſteſſo modo conſeguiremo la ſomma della ſerie

$$\frac{AK}{K^4-1}+\frac{AK^2}{K^8-1}+\frac{AK^3}{K^{12}-1}\cdots\cdots\frac{AK^n}{K^{4n}-1}$$

riſolvendoſi il termine generale di lei ne' due termini

$$\frac{AK^n}{2(K^{2n}-1)}-\frac{AK^n}{2(K^{2n}+1)}$$

§. IX.

Ma veggiamo di ſpignere più oltre la generalità per altra via, ſenza farlo a parte a parte combinando le eſpreſſioni ritrovate. Il faremo ſopra alcune forme principali, e reſterà così fatta ſtrada a chi voleſſe applicare il metodo a caſi particolari ſecondo l' occorrenza. Si ripigli perciò la formula $\frac{1}{2\omega\,\text{ſen.}\,x:\omega}=\frac{K^n}{K^{2n}-1}$ (§. I.), e poſto $p+qx$ in luogo di x, affinchè gli eſponenti poſſano procedere in qualunque progreſſione aritmetica, dando i valori convenienti a p, e q, ſommeremo generalmente le ſerie

$$\frac{AK^{p+q}}{K^{2(p+q)}-1}+\frac{AK^{p+2q}}{K^{2(p+2q)}-1}+\text{ecc.}\cdots\cdots\frac{AK^{p+qn}}{K^{2(p+qn)}-1}$$

Si ricorra dunque alla noſtra Memoria nel I. Vol. della *Società* pag. 369; ed eſſendoſi ivi determinata la ſomma della ſerie avente per termine generale $\frac{1}{\text{ſen.}\,(p+qx)\,a}$, vi ſi metta $\frac{1}{\omega}$ in luogo di a, e ſi moltiplichi l' eſpreſſione per A, e la ſi divida per 2ω; ſarà

$$S.\frac{A}{2\omega\,\text{ſen.}\,(p+qx):\omega}=S.\frac{AK^{p+qn}}{K^{2(p+qn)}-1}$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{(1-z^{qn})(z^{p+q}+z^{mn-p-qn})}{(1-z^{q})(1+z^{mn})}\cdot\frac{dz}{z}=(\mathfrak{Q})$$

Di nuovo essendo (§. I.) $\frac{1}{2\cos.x:\omega}=\frac{K^{n}}{K^{2n}+1}$, e

$$S.\frac{1}{\cos.(p+qx)a}=\frac{1}{a}\int\frac{z^{n:2a}(1-z^{qn})(z^{-p-qn}+z^{p+q})}{(1-z^{q})(1+z^{n:a})}\cdot\frac{dz}{z}=(R)$$

per semplicità di calcolo (ivi pag. 370), si metta $\frac{1}{\omega}$ in luogo di a nell'espressione (R) sì che diventi (R'), $p+qx$ in luogo di x nell' espressione $\frac{1}{2\cos.x:\omega}=\frac{K^{n}}{K^{2n}+1}$, sarà

$S.\frac{A}{2\cos.(p+qx):\omega}=\frac{A}{2}(R')=S.\frac{AK^{p+qn}}{K^{2(p+qn)}+1}$, ch'è la somma delle serie

$$\frac{AK^{p+q}}{K^{2(p+q)}+1}+\frac{AK^{p+2q}}{K^{2(p+2q)}+1}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{AK^{p+qn}}{K^{2(p+qn)}+1}$$

§. X.

Inoltre sommeremo con pari generalità le serie aventi per termini generali le espressioni

$$\frac{K^{2(p+qn)}-1}{K^{2(p+qn)}+1},\ \frac{K^{2(p+qn)}+1}{K^{2(p+qn)}-1}$$

Imperciocchè essendo $\frac{\text{sen}.x:\omega}{\cos.x:\omega}=\text{tang}.x:\omega=\frac{1}{\cos.x:\omega}:\frac{1}{\text{sen}.x:\omega}$,

sarà $\frac{1}{2\cos.(p+qx):\omega}:\frac{1}{2\omega\,\text{sen}.(p+qx):\omega}$

$$=\omega\,\text{tang}.(p+qx):\omega=\frac{K^{p+qn}}{K^{2(p+qn)}+1}:\frac{K^{p+qn}}{K^{2(p+qn)}-1}=\frac{K^{2(p+qn)}-1}{K^{2(p+qn)}+1}$$

Ma ripigliando la somma della serie $\text{tang}.(p+qx)a$ determinata

minata nelle Mem. ſopraccitate alla pag. 368, e ponendo $\frac{1}{\omega}$ in luogo di a ſarà

$$A\omega^2 \int \frac{z^{\pi\omega:2}(1-z^{qx})(z^{-p+qx}-z^{p+q})}{(1-z^q)(1-z^{\pi\omega:2})} \cdot \frac{dz}{z}$$

la ſomma della ſerie

$$\frac{AK^{2(p+q)}-A}{K^{2(p+q)}+1} + \frac{AK^{2(p+2q)}-A}{K^{2(p+2q)}+1} + \text{ecc.}\ldots\ldots \frac{AK^{2(p+qx)}-A}{K^{2(p+qx)}+1}$$

Similmente eſſendo

$$\frac{K^{p+qx}}{K^{2(p+qx)}-1} : \frac{K^{p+qx}}{K^{2(p+qx)}+1} = \frac{1}{2\omega \text{ ſen.}(p+qx):\omega} : \frac{1}{2 \text{ coſ.}(p+qx):\omega}$$

$= \frac{1}{\omega \text{ tang.}(p+qx):\omega}$, ſe nell' eſpreſſione della ſomma di $\frac{1}{\text{tang.}(p+qx)\,a}$ (ivi pag. 371) ſi metta $\frac{1}{\omega}$ in luogo di a, ſarà

$A \int \frac{(1-z^{qx})(z^{p+q}-z^{\pi\omega-p-qx})}{(1-z^q)(1-z^{\pi\omega})} \cdot \frac{dz}{z}$ nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione la ſomma generale della ſerie

$$\frac{AK^{2(p+q)}+A}{K^{2(p+q)}-1} + \frac{AK^{2(p+2q)}+A}{K^{2(p+2q)}-1} + \text{ecc.}\ldots\ldots \frac{AK^{2(p+qx)}+A}{K^{2(p+qx)}-1}$$

Di nuovo poichè $\frac{K^{(p+qx)}}{2(K^{2(p+qx)}-1)} + \frac{K^{(p+qx)}}{2(K^{2(p+qx)}+1)}$ $= \frac{K^{3(p+qx)}}{K^{4(p+qx)}-1}$, ſarà manifeſtamente $\frac{A}{2}(\mathfrak{Q}) + \frac{A}{4}(R')$ la ſomma della ſerie

$$\frac{AK^{3(p+q)}}{K^{4(p+q)}-1} + \frac{AK^{3(p+2q)}}{K^{4(p+2q)}-1} + \text{ecc.}\ldots\ldots \frac{AK^{3(p+qx)}}{K^{4(p+qx)}-1}$$

Nello ſteſſo modo ſi troverà eſſere $\frac{A}{2}(\mathfrak{Q}) - \frac{A}{4}(R')$ la ſomma generale della ſerie

$$\frac{AK^{p+q}}{K^{4(p+q)}-1} + \frac{AK^{p+2q}}{K^{4(p+2q)}-1} + \text{ecc.}\ldots\ldots \frac{AK^{p+qx}}{K^{4(p+qx)}-1}$$

§. XI.

Veduto di una natura di potenze reciproche affette, resta che si faccia per occasione parola di un altro genere di simili potenze. In quelle che abbiamo maneggiato finora, assunto che siasi un numero qualunque per K, come base de' logaritmi iperbolici, egli è radice costante delle potenze successive d' ogni termine nella serie proposta. All' opposito è d' un' altra natura la serie, ne' di cui termini è bensì costante l' esponente delle potenze, ma la radice varia in ogni termine rappresentando ella l' esponente successivo de' termini, come sarebbe per esempio la famiglia delle serie espresse dalla formula $\frac{A}{ax^m \pm b}$. Non abbiamo, ch' io sappia, altri tentativi su quest' indole di serie, fuorchè alcuni di *Leibnitz*, di Jacopo *Bernoulli*, e di Leonardo *Eulero*, e niente più che oltrepassi le seconde potenze. Il primo negli Atti di Lipsia in occasione di parlare della quadratura del cerchio fa menzione di alcune serie infinite reciproche de' quadrati de' numeri naturali scemati di un' unità, tenendo secreto il metodo misteriosamente. Il secondo trova i valori delle stesse serie, essendo scemati i medesimi quadrati in genere di un comune quadrato, e quei pure di serie reciproche aventi al denominatore numeri trigonali diminuiti d' un costante numero trigonale nel Trattato delle serie infinite posto in calce del Libro che ha per titolo *Ars conjectandi*. L' *Eulero* finalmente nel I. Vol. dell' Analisi degl' Infiniti §. §. 181. 182. somma le serie aventi per termine generale $\frac{1}{n^2x^2 - m^2}$, ove x è l' esponente de' termini.

Come da principio avea preso a credere, che simili serie fossero astruse, così mi feci a tentare la somma di loro all' infinito per una via, che mi condusse a farle dipendere dalle serie conosciute a fattori sempre crescenti. Ma tutto ad un tratto riconobbi, che non le sole seconde potestà maneggiate da' tre nominati illustri uomini, ma generalmente tutta questa Classe di serie, qualunque sieno le potestà, e co-

munque affette, è reducibile a quelle, di cui ho trattato nel V. Capitolo della Mem. citata intorno alle serie, e non richieggono al più, che le note quadrature dell' iperbola, e del cerchio, qualor non sono algebraicamente sommabili. Questo schiaramento mi fè vedere, che non sempre i più semplici e migliori pensieri sono i primi ad offerirsi, di che si può avere una prova anche in questo caso rivedendo attentamente ciò che ne hanno lasciato *Leibnitz*, *Bernoulli*, ed *Eulero* successivamente. Ma mi sia conceduto di passar prima di fuga sul primo tentativo, perchè ottenendo altri risultamenti col metodo più semplice e naturale, i quali debbono in fondo coincidere co' primi, si potrà trarne qualche nuova verità non dispregevole.

Sia primamente da sommarsi la serie infinita

$$(A) \ldots\ldots \frac{1}{1+1} + \frac{1}{4+1} + \frac{1}{9+1} + \text{ecc.} \ldots\ldots \frac{1}{x^2+1}$$

S' instituisca la continua divisione del termine generale, e si avrà

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \text{ecc.}$$

Se dunque potessero aversi le somme all' infinito $S.\frac{1}{x^2}$, $S.\frac{1}{x^4}$ ecc. e tutte insieme espresse per una sola quantità finita M, sarebbe $M = S.\frac{1}{x^2+1}$. Ricorriamo dunque alla Mem. nostra intorno alle serie citata qui innanzi, e alla pag. 304 troveremo essere nel caso di $z = 1$ dopo l' integrazione

$$S.\frac{1}{x^2} = \frac{1}{1}\int\frac{dz}{1-z}\left(l.\frac{1}{z}\right)$$

$$S.\frac{1}{x^4} = \frac{1}{1.2.3}\int\frac{dz}{1-z}\left(l.\frac{1}{z}\right)^3$$

$$S.\frac{1}{x^6} = \frac{1}{1.2\ldots.5}\int\frac{dz}{1-z}\left(l.\frac{1}{z}\right)^5$$

. . . . . .

$$S.\frac{1}{x^{2n}}=\frac{1}{1.2....(-1+2n)}\int\frac{dz}{1-z}\left(l.\frac{1}{z}\right)^{-1+2n}$$

Posto pertanto $l.\frac{1}{z}=Z$ per semplicità di calcolo, sarà

$$\int\frac{dz}{1-z}\left(\frac{Z}{1}-\frac{Z^3}{1.2.3}+\frac{Z^5}{1.2....5}-\frac{Z^7}{1.2....7}+\text{ecc.}\right)=S.\frac{1}{x^2+1}$$

Ma $Z-\frac{Z^3}{1.2.3}+\frac{Z^5}{1.2....5}-\text{ecc.}.....=\text{sen.}Z$ in un cerchio avente l' unità per raggio. Dunque

$$\int\frac{dz}{1-z}\,\text{sen.}\left(l.\frac{1}{z}\right)=S.\frac{1}{x^2+1}$$

ch' è la somma ricercata all' infinito della serie (A)

§. XII.

Ma il valore di questa serie trovato dal Sig. *Eulero* alla pag. 143, posto -1 in luogo di a, è $\frac{\pi\sqrt{-1}}{2\,\text{tang.}\,\pi\sqrt{-1}}-\frac{1}{2}$. Dunque abbiamo questo nuovo Teorema, che nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int\frac{dz}{1-z}\,\text{sen.}\left(l.\frac{1}{z}\right)=\frac{\pi\sqrt{-1}}{2\,\text{tang.}\,\pi\sqrt{-1}}-\frac{1}{2};$$

ma $\frac{1}{2\omega\,\text{sen.}\,m:\omega}=\frac{K^m}{K^{2m}-1}$ (§. I.), posto $\omega=\sqrt{-1}$, m quantità reale, K la base de' logaritmi; e $\frac{1}{2\,\text{cos.}\,m:\omega}=\frac{K^m}{K^{2m}+1}$; e inoltre, essendo $\frac{\text{cos.}\,m:\omega}{\omega\,\text{sen.}\,m:\omega}=\frac{1}{\omega\,\text{tang.}\,m:\omega}$, se facciasi $\frac{m}{\omega}=\pi\omega$, sarà $m=-\pi$, e $\frac{\pi\sqrt{-1}}{2\,\text{tang.}\,\pi\sqrt{-1}}=\frac{m}{2\sqrt{-1}\,\text{tang.}\,m:\sqrt{-1}}$

$$=\frac{m}{2}\cdot\frac{1}{\omega\,\text{tang.}\,m:\omega}=\frac{m}{2}\cdot\left(\frac{K^{2m}+1}{K^{2m}-1}\right)=-\frac{\pi}{2}\left(\frac{K^{-2\pi}+1}{K^{-2\pi}-1}\right)$$

$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{K^{2\pi}+1}{K^{2\pi}-1}\right)$ e però di nuovo nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione ſarà

$$\int\frac{dz}{1-z}\,\text{ſen.}\left(l.\frac{1}{z}\right)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{K^{2\pi}+1}{K^{2\pi}-1}\right)-\frac{1}{2}$$

quantità eſponenziali reali, il che ſomminiſtra un altro Teorema degno di conſiderazione

§. XIII.

Con un ſimile metodo ſommeremo pure la ſerie avente per termine generale $\frac{1}{x^2-1}$. Imperciocchè eſſendo

$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}-\frac{1}{x^8}+$ ecc., e laſciando ſuſſiſtere

$Z=l.\frac{1}{z}$, ſarà

$$\int\frac{dz}{1-z}\left(Z+\frac{Z^3}{1.2.3}+\frac{Z^5}{1.2....5}+\text{ecc.}\right)=S.\frac{1}{x^2-1}$$

Ma, preſa K per baſe de' logaritmi iperbolici,

$$K^Z-1=Z+\frac{Z^2}{1.2}+\frac{Z^3}{1.2.3}+\text{ecc.}$$

$$1-K^{-Z}=Z-\frac{Z^2}{1.2}+\frac{Z^3}{1.2.3}-\frac{Z^4}{1.2....4}+\text{ecc.}$$

e però ſommando

$\frac{K^Z-K^{-Z}}{2}=Z+\frac{Z^3}{1.2.3}+\frac{Z^5}{1.2....5}+$ ecc. cioè paſſando agli archi immaginarj, ſarà la medeſima ſerie

$$Z+\frac{Z^3}{1.2.3}+\text{ecc.}=\omega\,\text{ſen.}\,Z:\omega$$

e però nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\omega \int \frac{dz}{1-z} \text{sen.}\left(l.\frac{1}{z}\right)\omega = S.\frac{1}{x^2-1}$$

E poichè in questo caso il valore della serie secondo il Sig. *Eulero* è $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2 \text{ tang.} \pi}$; sarà integrando da $z=0$ fino a $z=1$

$$\omega \int \frac{dz}{1-z} \text{sen.}\left(l.\frac{1}{z}\right)\omega = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2 \text{ tang.} \pi}$$

nuovo Teorema da non trascurarsi.

§. XIV.

Ma generalmente

$$\frac{1}{x^m \pm 1} = \frac{1}{x^m} \mp \frac{1}{x^{2m}} + \frac{1}{x^{3m}} \mp \frac{1}{x^{4m}} + \text{ecc.}$$

ed è pel nostro metodo (Mem. della *Soc. Italiana* pag. 304)

$$\frac{1}{1.2....(m-1)} \int \frac{dz}{1-z} Z^{m-1} = S.\frac{1}{x^m}$$

$$\frac{1}{1.2....(2m-1)} \int \frac{dz}{1-z} Z^{2m-1} = S.\frac{1}{x^{2m}} \text{ ecc. Dunque}$$

$$\int \frac{dz}{1-z}\left(\frac{Z^{m-1}}{1.2....(m-1)} \mp \frac{Z^{2m-1}}{1.2....(2m-1)} + \frac{Z^{3m-1}}{1.2...(3m-1)} \mp \text{ecc.}\right)$$

$= S.\frac{1}{x^m \pm 1}$. Con che abbiamo l' espressione generalissima di queste serie ridotta alle serie conosciute a fattori crescenti.

§. XV.

Passiamo ora al metodo diretto e semplicissimo di sommare sì fatte serie con tutta la possibile generalità, e prendiamo per gradi la serie di *Leibnitz*

$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} +$ ecc. all' infinito

Si trovi il termine di lei generale, il quale sarà manifesta-

mente $\frac{1}{2x+x^2}$. Ma $\frac{1}{2x+x^2}=\frac{1}{x(2+x)}$. Dunque è ella una ſerie algebraica reciproca di ſecondo ordine, che ha per fattori x, $2+x$. Poſto ciò ricorriamo alle formule generali della noſtra Memoria, e ſi tragga dall'eſpreſſione della Prop. XI. pag. 294 i due ultimi integrali, cioè

$$\frac{A}{nq}\int\overline{z^{p:q-m:n-1}dz\int z^{m:n}dz\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right)}, \text{ e poichè}$$

$A=1$, $m=0$, $n=q=1$, $p=2$, queſt' eſpreſſione diverrà

$$\int\overline{zdz\int dz\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right)}=\frac{z^2}{2}\int dz\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right)-\frac{1}{2}\int z^2dz\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right)$$

e fatto $z=1$ fuori del primo ſegno, avremo, riducendo, integrando, e facendo $z=1$, la formula $\frac{3}{4}-\frac{1}{2(x+1)}$ $-\frac{1}{2(x+2)}$, che ſarà la ſomma generale della ſerie; e poſto $x=\infty$ reſterà $\frac{3}{4}$ per la ſomma all' infinito, come quel gran Geometra ha trovato. Di poi pigliamo a maneggiare un termine generale di queſta forma $\frac{1}{ax^2+b}$ qualunque coſa ſiaſi a, e b. Toſto veggiamo, che $\frac{1}{ax^2+b}$ $=\frac{1}{(-\sqrt{-b}+x\sqrt{a})(+\sqrt{-b}+x\sqrt{a})}$. Dunque ripigliando lo ſteſſo integrale precedente, e ponendo $x=\infty$, onde cercar toſto la ſomma all'infinito, diverrà $\frac{1-z^n}{1\mp z}$ $=\frac{1}{1\mp z}$, e però dividendolo in due, e riducendolo, prenderà eſſo queſta forma

$$\frac{1}{nq\left(\frac{p}{q}-\frac{m}{n}\right)}\int\frac{(z^{m:n}-z^{p:q})dz}{1\mp z}$$

valendo il ſegno ſuperiore per la ſerie

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{4a+b}+\frac{1}{9a+b}+\text{ecc.}$$

e l' inferiore per la ſerie

$$\frac{1}{a+b}-\frac{1}{4a+b}+\frac{1}{9a+b}-\text{ecc.}$$

Ora eſſendo nel caſo noſtro $m=-\sqrt{-b}$, $p=\sqrt{-b}$, $n=q=\sqrt{a}$, ſe ſi faccia $\sqrt{-\frac{b}{a}}=c$ per ſemplicità, avremo

$$\frac{1}{2ac}\int\frac{(z^{-c}-z^{c})dz}{1\mp z}=\frac{1}{2ac}\int\frac{z^{-c}dz}{1\mp z}-\frac{1}{2ac}\int\frac{z^{c}dz}{1\mp z}\ldots\ldots(A)$$

Ma $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\text{ecc.}$

$$\int\frac{z^{-c}dz}{1-z}=\frac{z^{-c+1}}{1-c}+\frac{z^{-c+2}}{2-c}+\frac{z^{-c+3}}{3-c}+\text{ecc.}$$

Dunque nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\frac{1}{2ac}\int\frac{z^{-c}dz}{1-z}=\left(\frac{1}{1-c}+\frac{1}{2-c}+\frac{1}{3-c}+\text{ecc.}\right)\frac{1}{2ac}$$

e però anche

$$\frac{1}{2ac}\int\frac{z^{c}dz}{1-z}=\left(\frac{1}{1+c}+\frac{1}{2+c}+\frac{1}{3+c}+\text{ecc.}\right)\frac{1}{2ac};\ \text{quindi}$$

$$\text{l' integrale } (A)=\frac{1}{2ac}\left\{\begin{matrix}\frac{1}{1-c}+\frac{1}{2-c}+\frac{1}{3-c}+\text{ecc.}\\ -\frac{1}{1+c}-\frac{1}{2+c}-\frac{1}{3-c}-\text{ecc.}\end{matrix}\right\}$$

E poichè l' aggregato di queſte due ſerie è lo ſteſſo che $\frac{1}{2ac}\left(\frac{1}{c}-\frac{\pi}{\text{tang. }c\pi}\right)$ (Com. nuovi dell' Accad. di Pietrob. Vol. XIX

XIX. pag. 30) posto $n=1$ nell' espressione Euleriana sarà

$$\frac{1}{2\sqrt{-ab}}\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}-\frac{\pi}{\text{tang.}\,\pi\sqrt{-b:a}}\right)=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{4a+b}$$

$$+\frac{1}{9a+b}+\text{ecc.}$$

Se dunque sia b quantità positiva, essendo a negativa, sarà

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}}\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}-\frac{\pi}{\text{tang.}\,\pi\sqrt{b:a}}\right)=\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-4a}+\frac{1}{b-9a}+\text{ecc.}$$

il qual valore sarà pure quello della serie

$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{4a-b}+\frac{1}{9a-b}+$ ecc., cioè essendo b negativa, e a positiva. E se fosse b positiva, e a negativa, sì che il valore della serie fosse espresso per funzione d' arco immaginario, potremo sempre avere la medesima serie espressa per esponenziali reali come segue

$-\frac{1}{2b}-\frac{\pi}{2\sqrt{ab}}\cdot\frac{K^{-\pi b}+K^{\pi b}}{K^{-\pi b}-K^{\pi b}}$ posto $b=\sqrt{\frac{b}{a}}$, e K il numero che ha per logaritmo iperbolico l' unità.

Che se fosse c quantità razionale intera o rotta, si potrà sempre avere il valore dell' espressione (A) nel caso di $z=1$ particolarmente o algebraico, o trascendente con facilità. Sia per esempio $a=4$, $b=-9$, sarà $c=\sqrt{-\frac{b}{a}}=\frac{3}{2}$, e però la formula diverrà $\frac{1}{12}\int\frac{(1-z^2)dz}{1-z}=\frac{11}{6.12}$ nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione, e $\frac{1}{12}\int\frac{(1-z^2)\,dz}{1+z}=\frac{1}{6}l.2-\frac{5}{6.12}$; sì che sarà

$$\frac{11}{6.12}=\frac{1}{-5}+\frac{1}{4.4-9}+\frac{1}{4.9-9}+\frac{1}{4.16-9}+\text{ecc.}$$

$$\frac{1}{6}l.2-\frac{5}{6.12}=\frac{1}{-5}-\frac{1}{4.4-9}+\frac{1}{4.9-9}-\frac{1}{4.16-9}+\text{ecc.}$$

Similmente sommeremo la serie

$\frac{1}{a+b}-\frac{1}{4a+b}+\frac{1}{9a+b}-\frac{1}{16a+b}+$ ecc. per cui il nostro metodo ci dà la formula (B) $\frac{1}{2ac}\int\frac{(z^{-c}-z^{c})dz}{1+z}$ da integrarsi da $z=0$ fino a $z=1$. Operando come qui innanzi troveremo

$$(B)=\frac{1}{2ac}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1-c}-\frac{1}{2-c}+\frac{1}{3-c}-\text{ecc.}\\ -\frac{1}{1+c}+\frac{1}{2+c}-\frac{1}{3+c}+\text{ecc.}\end{array}\right\}$$

$=\left(\frac{\pi}{\text{sen.}\,c\pi}-\frac{1}{c}\right)\frac{1}{2ac}$ (Com. nuovi di St. Pietrob. ivi) posto $n=1$, su cui potremo instituire le medesime operazioni del caso precedente.

Ma senza ricorrere alla convenienza del nostro integrale sviluppato con le serie di *Eulero* citate qui sopra, possiamo direttamente dimostrare il valore di lui. Imperciocchè è certo pe' principj del Calcolo Integrale (Com. nuovi di St. Pietrob. Vol. XIX. pag. 32.) che

$$(M)\ldots\ldots\int\frac{(z^{c-1}+z^{-c})dz}{1+z}=\frac{\pi}{\text{sen.}\,c\pi}$$

$$(N)\ldots\ldots\int\frac{(z^{c-1}-z^{-c})dz}{1-z}=\frac{\pi}{\text{tang.}\,c\pi}$$

Si sottragga pertanto dall' integrale (M) l' integrale nostro (A) per le serie alternative, e si avrà

$$\int\frac{(z^{c-1}+z^{-c})dz}{1+z}-\int\frac{(z^{-c}-z^{c})dz}{1+z}=\int\frac{(z^{c-1}+z^{c})dz}{1+z}$$

$=\int z^{c-1}dz=\frac{z^{c}}{c}=\frac{1}{c}$ posto $z=1$. Dunque $\frac{\pi}{\text{sen.}\,c\pi}$ $-\frac{1}{c}=\int\frac{(z^{-c}-z^{c})dz}{1+z}$. Stessamente sommando l' integrale (N) col nostro per le serie positive, avremo

$$\int\frac{(z^{c-1}-z^{-c})dz}{1-z}+\int\frac{(z^{-c}-z^{c})dz}{1-z}=\int\frac{(z^{c-1}-z^{c})dz}{1-z}$$

$=\int z^{c-1}dz=\frac{z^c}{c}=\frac{1}{c}$ posto $z=1$; e però $\frac{1}{c}-\frac{\pi}{\text{tang.}\,c\pi}$

$=\int\frac{(z^{-c}-z^{c})dz}{1-z}$, come abbiamo per l' uno e per l' altro stabilito precedentemente.

§. XVI.

E passando alle terze potenze affette, sia la serie (C)

$$\frac{1}{a+b}-\frac{1}{8a+b}+\frac{1}{27a+b}-\frac{1}{64a+b}+\text{ecc.}\ldots\frac{1}{ax^3+b}\ldots(C)$$

Se facciasi $\frac{b}{a}=f^3$, il termine generale diventa $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x^3+f^3}$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(x+f)\left(x+\frac{1}{2}(f+f\sqrt{-3})\right)\left(x+\frac{1}{2}(f-f\sqrt{-3})\right)}$$

Dunque scorgesi immediatamente, che la somma della serie (C) si riduce a integrare da $z=0$ fino a $z=1$ la formula del Probl. XI. pag. 293 del I. Vol. della *Società Italiana*, allorchè sieno i tre fattori al denominatore della forma qui proposta. Il che non involgendo, che un puro affare di calcolo secondo i valori di a, e b, non mi vi trattengo di più.

Quindi possiamo agevolmente conchiudere, che qualunque sia il grado n della potenza affetta, come nella serie generale

$$\frac{1}{a+b}\pm\frac{1}{a2^n+b}+\frac{1}{a3^n+b}\pm\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{1}{ax^n+b}$$

l' arcano di questa serie sta unicamente nel risolvere in fattori semplici il denominatore, che può sempre farsi, e ricorrere al metodo nostro generale di sommare le serie algebraiche reciproche nel luogo citato qui innanzi.

In questa guisa, ottenuto il valore della serie, avremo quello pure dell' espressione singolare

$$\int \frac{dz}{z}\left(\frac{(-l.z)^{n-1}}{1.2...(n-1)} \mp \frac{(-l.z)^{2n-1}}{1.2...(2n-1)} + \frac{(-l.z)^{3n-1}}{1.2...(3n-1)} \mp \text{ecc.}\right)$$

da $z=0$ fino a $z=1$ trovata al §. XIII.

§. XVII.

E dando all' argomento tutta l'eſtenſione, di cui è ſuſcettibile, ſi vede, che le ſerie frazionali aventi al denominatore numeri figurati accreſciuti o ſcemati d' altro numero figurato recate dall' illuſtre *Bernoulli*, non ſono che caſi particolariſſimi del metodo, che abbiamo qui indicato. Imperciocchè ſia per eſempio

$$\frac{1}{8+10} \pm \frac{1}{69+66} + \frac{1}{224+196} \pm \frac{1}{515+430} + \text{ecc.}$$

In queſta ſerie non ſono altrimenti i numeri del denominatore potenze affette, ma sì bene numeri di una ſerie algebraica del terz' ordine affetta da un' altra dello ſteſſo ordine. Di fatti i numeri 8, 69, 224, 515 ecc. appartengono alla ſerie, che ha per termine generale $7x^3 - 3x + 5x^2 - 1$, e il termine generale de' numeri 10, 66, 196 ecc. è $5x^3 + 7x^2 - 2$. Il metodo pertanto ſi riduce a ſommare i due termini, con che ſi avrà il termine

$(A) \ldots . 12x^3 + 12x^2 - 3x - 3$; e riſoluto queſto ne' fattori $2x - 1$, $2x + 1$, $3x + 3$, non ſi tratta che di ſommare la ſerie $\frac{1}{(-1+3x)(1+2x)(3+3x)}$, che potrà ſempre farſi col metodo noſtro o algebraicamente, o per funzioni d'archi circolari, o per logaritmi. Di che avendo dato qui ſopra eſempli baſtevoli non occorre parlarne più diffuſamente.