INDAGINI

NEL CALCOLO INTEGRALE.

Del Sig. CAVALIERE LORGNA.

Essendomi propoſto di applicare il metodo mio adoperato nella XIV. Prop. della Mem. ſul Calcolo Integrale dell' equazioni differenziali finite, inſerita nel I. Vol. della *Società Italiana*, all' integrazione dell' equazione differenziale

$$M = y + P\frac{dy}{dx} + Q\frac{ddy}{dx^2} + R\frac{d^3y}{dx^3} \text{ ecc.} \ldots\ldots + T\frac{d^ny}{dx^n};$$

e le prime operazioni avendone chiamato ſucceſſivamente dell' altre, il lavoro di ſaggio in ſaggio preſe forma, e queſta n' è poi venuto, qualunque ella ſiaſi, non lunga indagine, che vo' credere non totalmente indegna dell' attenzione de' Geometri. Ogni paſſo, ogni nuova apertura d' integrabilità è ſommamente pregevole in queſta ſorta di equazioni, che vengono sì ſovente in campo nelle Scienze Meccaniche, e nell' Aſtronomia fiſica, e che non ſenza ragione hanno meritato lo ſtudio de' Signori d' *Alembert*, *Eulero*, de la *Grange*, de *Condorcet*, *Bezout*, de la *Place*, e di altri illuſtri Matematici.

Trattando queſte materie con nuovi artifizj, ſiccome ho fatto, traluce ſempre raggio d' incognita verità, che mena a qualche avanzamento indubitatamente; del che potrà accertarſi chi vorrà al progreſſo di queſta Memoria attendere con qualche accuratezza.

PROPOSIZIONE I.

§. I. *Trasformare l' equazione* (A)

$$(A) \ldots\ldots M = y + P\frac{dy}{dx} + Q\frac{ddy}{dx^2} + R\frac{d^3y}{dx^3} \text{ ecc.} \ldots\ldots T\frac{d^ny}{dx^n}$$

in cui dx *è costante*, M P Q R ecc. *sono funzioni qualunque della variabile* x, *per modo che la sua risoluzione dipenda da due equazioni del grado* $n-1$.

RISOLUZIONE.

Si ponga $y = \mu^{\int z dx} \int (u dx . \mu^{-\int z dx})$, essendo z ed u due nuove variabili, μ il numero di cui l' unità è il logaritmo iperbolico. Passando ai differenziali dell' ordine n, si avrà

$$d^n y = z d^{n-1} y dx + \frac{n-1}{1} dz\, d^{n-2} y dx$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} d^2 z d^{n-3} y dx$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} d^3 z d^{n-4} y dx \ldots\ldots + d^{n-1} u dx.$$

Dunque sostituendo successivamente 1, 2, 3 ecc. per n sarà

I. $dy = zydx + udx$

II. $ddy = zdydx + dzydx + dudx$

III. $d^3 y = zddy + 2dzdydx + ddzydx + ddudx$

ecc.

Si sostituisca nel II. differenziale il valore di dy tratto dal I. e si avrà

(II.) $ddy = z^2 ydx^2 + zudx^2 + ydzdx + dudx$

e similmente nel III. differenziale si ponga il valore di dy ricavato dal I., e il valore di ddy ricavato dal (II.) e così successivamente; ne risulterà per ordine

(I.) $dy = zydx + udx$

(II.) $d^2 y = z^2 ydx^2 + zudx^2 + ydxdz + dudx$

(III.) $d^3 y = z^3 ydx^3 + z^2 udx^3 + zdudx^2 + 3zydzdx^2 + 2udzdx^2$
$+ yd^2 zdx + d^2 udx$

(IV.) $d^4 y = z^4 ydx^4 + z^3 udx^4 + z^2 dudx^3 + 6z^2 ydzdx^3$
$+ zddudx^2 + 5uzdzdx^3 + 3ydz^2 dx^2 + 3dudzdx^2$

$$+ 4zyddzdx^2 + 3uddzdx^2 + yd^3zdx + d^3udx$$

ecc.

Si ſoſtituiſcano tutti queſti valori nell' equazione (A); prenderà ella la ſeguente forma

$$M = y + P(zy + u) + \mathcal{Q}\left(z^2y + zu + \frac{ydz}{dx} + \frac{du}{dx}\right)$$

$$+ R\left(z^3y + z^2u + \frac{zdu}{dx} + \frac{3zydz}{dx} + \frac{2udz}{dx} + \frac{yddz}{dx^2} + \frac{ddu}{dx^2}\right)$$

$$+ S\left(z^4y + z^3u + \frac{z^2du}{dx} + \frac{6z^2ydz}{dx} + \frac{zddu}{dx^2} + \frac{5uzdz}{dx} + \frac{3ydz^2}{dx^2}\right.$$

$$\left. + \frac{3dudz}{dx^2} + \frac{4zyddz}{dx^2} + \frac{3uddz}{dx^2} + \frac{yd^3z}{dx^3} + \frac{d^3u}{dx^3}\right)$$

$+$ ecc.

Di queſta equazione ſe ne faccian due, una delle quali contenga in ogni termine la variabile lineare y, e l' altra abbracci il compleſſo di tutti gli altri termini, che non la comprendono; e ſi avranno le equazioni (B) (C)

$$(B) \ldots 0 = 1 + Pz + \mathcal{Q}\left(z^2 + \frac{dz}{dx}\right) + R\left(z^3 + \frac{3zdz}{dx} + \frac{ddz}{dx^2}\right)$$

$$+ S\left(z^4 + \frac{6z^2dz}{dx} + \frac{3dz^2}{dx^2} + \frac{4zddz}{dx^2} + \frac{d^3z}{dx^3}\right) + \text{ecc.}$$

$$(C) \ldots M = Pu + \mathcal{Q}\left(zu + \frac{du}{dx}\right) + R\left(z^2u + \frac{zdu}{dx} + \frac{2udz}{dx} + \frac{ddu}{dx^2}\right)$$

$$+ S\left(z^3u + \frac{z^2du}{dx} + \frac{zddu}{dx^2} + \frac{5uzdz}{dx^2} + \frac{3dudz}{dx^2} + \frac{3uddz}{dx^2}\right.$$

$$\left. + \frac{d^3u}{dx^3}\right) + \text{ecc.}$$

ognuna delle quali ſarà del grado $n - 1$ relativamente all' equazione principale (A). Ma dalla riſoluzione delle equazioni (B), (C) dipende manifeſtamente la riſoluzione dell' equazione (A). Dunque ſi è traſformata ecc. Il che ecc.

COROLLARIO I.

§. II. Che se nell'equazione (A) si supponga la funzione $M=0$, e si faccia $dy=zydx$, l'equazione (C) non ha più luogo, e ne risulta la sola equazione (B). Dunque reciprocamente l'equazione (B) può sempre trasformarsi nell'equazione (A), in supposizione di $M=0$, con la sostituzione $z=\frac{dy}{ydx}$.

COROLLARIO II.

§. III. E quanto all'equazione (C), ella si riduce agevolmente alla forma dell'equazione (A). Imperciocchè facendo tutti li coefficienti di $u=\Delta$, li coefficienti di $\frac{du}{dx}=\Delta'$, di $\frac{ddu}{dx^2}=\Delta''$ ecc. e di poi $\frac{\Delta'}{\Delta}=P'$, $\frac{\Delta''}{\Delta}=Q'$ ecc. $\frac{M}{\Delta}=M'$, e ordinando finalmente l'equazione per u, si avrà l'equazione

$$(C) \ldots\ldots M'=u+P'\frac{du}{dx}+Q'\frac{ddu}{dx^2} \text{ ecc. } \ldots\ldots\ldots\ldots +T'\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$$

ch'è della forma (A).

COROLLARIO III.

§. IV. In conseguenza se nell'equazione precedente (C) si ponga $du=z'udx+u'dx$, z', u' essendo due nuove variabili, la si farà dipendere (§. I) dalle due equazioni (B') (C') del grado $n-2$

$$(B') \ldots\ldots 0=1+P'z'+Q'\left(z'^2+\frac{dz'}{dx}\right)+\text{ecc.}$$

$$(C') \ldots\ldots M'=P'u'+Q'\left(z'u'+\frac{du'}{dx}\right)+\text{ecc.}$$

E con una simile introduzione di due nuove variabili $z''u''$ si farà dipendere l'equazione (C') da due (B'') (C'') del grado $n-3$, e così successivamente, di modo che si perverrà in fine ad un'equazione finita, siccome è manifesto.

PROPOSIZIONE II.

§. V. *L'integrale completo dell'equazione* (A)

$$(A)\ldots\ldots M = y + P\frac{dy}{dx} + ecc.\ldots\ldots T\frac{d^n y}{dx^n}$$

dipende da un integrale particolare di ciascheduna delle equazioni successive e della stessa forma (B), (B'), (B'') *ecc.*

DIMOSTRAZIONE.

Avendo in potere un integrale particolare o incompleto dell'equazione (*B*) (§. *I.*) $z = X$ funzione di x, se ne faccia la sostituzione nelle equazioni

$$dy = zydx + udx$$

$$(C)\ldots\ldots M = Pu + \mathfrak{Q}(zu + \frac{du}{dx} + \text{ecc.}$$

è manifesto, che avendo nello stesso tempo un integrale completo $u = X'$ dell' equazione (*C*) del grado $n - 1$, il quale conterrà necessariamente $n - 1$ costanti arbitrarie, si avrà

$$dy = Xydx + X'dx; \text{ e}$$

$$y = e^{\int Xdx}(A + \int X'dx\, e^{-\int Xdx})$$ sarà l' integrale completo dell' equazione (*A*). Ma se in vece dell' integrale completo dell'equazione (C) si avesse un integrale incompleto dell' equazione (*B'*) (§. IV.) $z' = X''$, sostituendo questo valore nelle equazioni

$$du = z'udx + u'dx$$

$$(C')\ldots\ldots M' = P'u' + \mathfrak{Q}'(z'^2 u' + \frac{du'}{dx}) + \text{ecc.}$$

basterebbe che si avesse l'integrale completo $u' = X'''$ dell' equazione (*C'*) del grado $n - 2$, mentre l'equazione $du = X''udx + X'''dx$ somministrerebbe l' integrale $u = X''''$ comprendente $n - 1$ costanti arbitrarie. Sostituendo pertanto questo valore nell'equazione $dy = Xydx + udx$, si avrebbe l'integrale completo dell' equazione (*A*) come prima

$$y = e^{\int Xdx}(A + \int X''''dx\, e^{-\int Xdx}).$$

Si dimostrerebbe nello stesso modo, che avendo un valor particolare dell' equazione (B'') (§. *IV.*), e l' integrale completo dell' equazione (C'') del grado $n-3$, si otterrebbe l' integrale completo dell' equazione (A); e così successivamente. Ma discendendo alle equazioni successive (C'''), (C'''') ecc. del grado $n-4$, $n-5$ ecc. si perviene ad un valore finito. Dunque l' integrale completo dell' equazione (A) dipende da un integrale particolare di ciascheduna delle successive equazioni (B), (B'), (B'') ecc. Il che ecc.

PROPOSIZIONE III.

§. VI. *L' integrale completo dell' equazione* (A)

$$(\mathrm{A}) \ldots\ldots \mathrm{M}=\mathrm{y}+\mathrm{P}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}+\mathrm{Q}\frac{\mathrm{ddy}}{\mathrm{dx}^2}\ldots\ldots+\mathrm{T}\frac{\mathrm{dy}^n}{\mathrm{dx}^n}$$

dipende da un numero n — 1 *di valori particolari di* z, *che soddisfacciano alla prima equazione* (B) (§. I.)

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè sostituendo successivamente nell' equazione (C) del medesimo §.

$$(C) \ldots\ldots M=Pu+Q\left(zu+\frac{du}{dx}\right)+\text{ecc.}$$

questi valori particolari di z, si ricaveranno tante equazioni in u ed x del grado $n-1$, quante ha unità il numero $n-1$. Ma il numero di queste equazioni essendo uguale al numero delle quantità

$$\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}, \quad \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} \text{ ecc.}$$

si potranno queste discacciare, e potrà quindi pervenirsi ad un' equazione del primo grado di questa forma

$$\mathfrak{Q}=S+R\frac{dS}{dx}$$

la quale è risolubile generalmente, e perciò al valore di u. Posto ciò, sia X funzione di x quello che si verrà a trovare per sì fatto valore di u, la qual espressione conterrà in tal caso una costante arbitraria, e sieno β, β' ecc. i valori particolari di z. Facendo successivamente queste sostituzioni in luogo di z nell' equazione $dy = zydx + Xdx$, e integrando, si avranno gl' integrali

$$y = \mu^{\int \beta dx} \left(A + \int X dx \mu^{-\int \beta dx} \right)$$

$$y = \mu^{\int \beta' dx} \left(A' + \int X dx \mu^{-\int \beta' dx} \right)$$

ecc. e per conseguenza

$$y = \mu^{\int \beta dx} \left(A + \int X dx \mu^{-\int \beta dx} \right)$$

$$+ \mu^{\int \beta' dx} \left(A' + \int X dx \mu^{-\int \beta' dx} \right) + \text{ecc.}$$

sarà l' integrale completo dell' equazione (A). Il che ecc.

PROPOSIZIONE IV.

§. VII. *Se può integrarsi completamente l' equazione differenziale* (Δ)

$$(\Delta) \ldots\ldots 0 = y + P\frac{dy}{dx} + Q\frac{ddy}{dx^2} \ldots\ldots + T\frac{d^n y}{dx^n}$$

potrà completamente integrarsi anche l' equazione differenziale (A)

$$(A) \ldots\ldots M = y + P\frac{dy}{dx} + Q\frac{ddy}{dx^2} \ldots\ldots + T\frac{dy^n}{dx^n}.$$

DIMOSTRAZIONE.

Poichè sostituendo nell' equazione (Δ) $zydx$ in luogo di dy, ella si cangia nell' equazione (B) (§. *II.*),

$$(B) \ldots\ldots 0 = 1 + Pz + Q\left(z^2 + \frac{dz}{dx}\right) + \text{ecc.}$$

se si abbia in potere l' integrale completo dell' equazione (Δ), si potrà conchiuderne l' integrale completo dell' equazione (B), e però si avrà $n-1$ valori particolari di z. Ma avendo $n-1$ valori particolari di z nell' equazione (B), si ha l' integrale completo dell' equazione (A) (§. *VI.*). Per conseguenza se può integrarsi completamente l' equazione (Δ), potrà completamente integrarsi l' equazione (A). Il che ecc.

COROLLARIO I.

§. VIII. Si può di qua raccorre, che l' equazione (*A*) è tutte le volte integrabile, e ne' medesimi casi che può esserlo l' equazione (Δ), ch'è il Teorema del Sig. de la *Grange*.

COROLLARIO II.

§. IX. Ma non è neppur necessario il conoscere l' integrale completo dell' equazione (Δ), se sieno in poter nostro $n-1$ valori particolari di y nella medesima equazione, potendo ciò bastare per l' integrazione completa dell' equazione (*A*), siccome è manifesto.

COROLLARIO III.

§. X. Similmente se si conoscano n, o $n-1$ valori di z, che soddisfacciano all' equazione (*B*), sostituendoli successivamente nell' equazione (*C*) (§. *I.*), onde ottenere n, o $n-1$ equazioni differenziali, si è veduto al §. VI. che l' equazione generale (*A*) è completamente integrabile per questa via. Si può dunque dispensarsi dal rintracciare un integrale particolare per ciascheduna di queste equazioni differenziali, come sembra richiedere il Sig. de la *Place* (*Memorie dell' Accademia* R. di *Torino* Vol. IV. §. III.).

PROPOSIZIONE V.

§. XI. *Trovare l' integrale completo dell' equazione* (A)

$$(A) \ldots\ldots M = y + P\frac{dy}{dx} + Q\frac{ddy}{dx^2} + \ldots\ldots T\frac{dy^n}{dx^n}$$

essendo P, Q......T *quantità costanti*, *ed* M *funzione di* x *qualunque*.

RISOLUZIONE.

RISOLUZIONE.

Si ponga nell' equazione di sostituzione (R) (§. *I.*)

$$(R)\ldots\ldots y=\mu^{\int z dx}\int u dx\,\mu^{-\int z dx}$$

la costante indeterminata K in luogo di z. Operando come s' è ivi prescritto, l' equazione (A) si risolverà nelle due (B'), (C')

$$(B')\ldots\ldots o=1+PK+QK^2+RK^3+\text{ecc.}$$

$$(C')\ldots M=Pu+Q\left(Ku+\frac{du}{dx}\right)+\text{ecc.}$$

Essendo ordinata l' equazione (B') per rispetto a K, ascende ella al grado, il di cui esponente uguaglia quello dell' ordine dell' equazione proposta (A). Dunque risoluta con l' Algebra comune l' equazione (B'), si mettano per K successivamente nell' equazione (C') le radici trovate. Si otterrà un numero di equazioni col mezzo delle quali potranno discacciarsi i differenziali di u, e si conseguirà il valore finito di u. Sia X questo valore. Sostituendo in seguito nell' equazione (R) il valore di u, e per z successivamente tutte le radici, per esempio a, a', a'' ecc. dell' equazione (B'), si avrà, prendendone di mano in mano gl' integrali, l' espressione

$$y=\mu^{ax}\left(A+\int X dx\,\mu^{-ax}\right)+\mu^{a'x}\left(A'+\int X dx\,\mu^{-a'x}\right)+\text{ecc.}$$

che sarà l' integrale completo dell' equazione (A), contenendo un numero n di costanti arbitrarie. Il che ecc.

PROPOSIZIONE VI.

§. XII. *Integrare l' equazione* (T)

$$(\mathrm{T})\ldots \mathrm{M}=\mathrm{Ay}+\mathrm{B}(\mathrm{h}+\mathrm{Kx})\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}+\mathrm{C}(\mathrm{h}+\mathrm{Kx})^2\frac{\mathrm{ddy}}{\mathrm{dx}^2}+\text{ecc.}$$

del Sig. de la Grange (Miscell. Taurin. V. III. pag. 190), h, K, A, B, C ecc. *essendo coefficienti costanti*, M *funzione di* x.

RISOLUZIONE.

Posto, come nella I. Proposizione, $dy = zydx + udx$, col metodo ivi adoperato si trasformerà l'equazione (T) nelle due

$$(B') \ldots . 0 = A + B(b + Kx)z + C(b + Kx)^2\left(z^2 + \frac{dz}{dx}\right) + \text{ecc.}$$

$$(C') \ldots \mathrm{M} = B(b + Kx)u + C(b + Kx)^2\left(zu + \frac{du}{dx}\right) + \text{ecc.}$$

Si faccia $z = \frac{r}{b+Kx}$, essendo r una costante indeterminata. Sostituendo questo valore nell' equazione (B'), ella si ridurrà a questa forma (B'')

$$(B'') \ldots . 0 = A + Br + Cr(r - K) + Dr(r^2 - 3Kr + 2K^2) + \text{ecc.}$$

la quale ordinata per r, somministrerà tante radici r', r'', r''' ecc. quante sono le unità nell' ordine dell' equazione (T). Facendo la stessa sostituzione nell' equazione (C'), vi si sostituiscano successivamente per r le radici r', r'' ecc. trovate; con che si avrà un numero di equazioni eguale a quello delle quantità $\frac{du}{dx}, \frac{ddu}{dx^2}$ ecc., le quali maneggiate, come nelle Propos. precedenti, ci faranno pervenire al valore di $u = X$. Ripigliando pertanto l' equazione di sostituzione

$y = \mu^{\int zdx} \int udx \mu^{-\int zdx}$, e posto X in luogo di u, se π, π', π'', ecc. rappresentino i valori $\frac{r'}{b+Kx}, \frac{r''}{b+Kx}, \frac{r'''}{b+Kx}$ ecc., si mettano π, π' ecc. successivamente per z, e si avrà

$$y = \mu^{\int \pi dx}\left(A + \int X dx \mu^{-\int \pi dx}\right)$$
$$+ \mu^{\int \pi' dx}\left(A' + \int X dx \mu^{-\int \pi' dx}\right) + \text{ecc.}$$

per l' integrale completo dell' equazione (T). Il che ecc.

Scolio.

§. XIII. Ancorchè le integrazioni ottenute ne' §. §. XI. XII. si considerino non avere altre difficoltà fuorchè quelle dell' Algebra comune, ridotte come sono a dipendere dalla risoluzione di equazioni algebraiche determinate; ciò non ostante il caso principalmente delle radici eguali, che possono incontrarsi in queste equazioni, obbliga ad operazioni, che sarebbe bene di evitare. Non conosco finora alcun metodo esente dalla necessità di avervi particolare considerazione, allorchè ha luogo questo caso. Eccone uno, che deriva necessariamente da quello che abbiamo adoperato nella risoluzione di queste equazioni differenziali; e fra poco ne daremo un altro ancor più semplice. Si ripigli l' equazione del §. XI. ponendo A, B, C ecc. in luogo di P, $\mathfrak{Q}$, R ecc.

$$(A) \ldots\ldots M = y + A\frac{dy}{dx} + B\frac{ddy}{dx^2} + \text{ecc.}$$

e sieno (B), (C) le due equazioni nelle quali ella si trasforma

$$(B) \ldots\ldots 0 = 1 + Aa + Ba^2 + Ca^3 + \text{ecc.}$$

$$(C) \ldots\ldots M = Au + B\left(au + \frac{du}{dx}\right) + \text{ecc.}$$

con la sostituzione $dy = aydx + udx$, essendo a una costante indeterminata. L' equazione (C) si trasforma nell' equazione

$$M' = u + A'\frac{du}{dx} + B'\frac{ddu}{dx^2} + \text{ecc.}$$

della stessa forma di (A), ma del grado $n-1$ (§. *III.*). Sieno pertanto (B') (C')

$$(B') \ldots\ldots 0 = 1 + A'a' + B'a'^2 + C'a'^3 + \text{ecc.}$$

$$(C') \ldots\ldots M = A'u' + B'\left(au' + \frac{du'}{dx}\right) + \text{ecc.}$$

le equazioni nelle quali si risolve l' equazione precedente con la sostituzione $du = a'udx + u'dx$, essendo u' una nuova variabile, a' una nuova costante indeterminata. E' manifesto che si trasformerà similmente l' equazione (C') nell' equazione

$M'' = u' + A''\frac{du'}{dx} + B''\frac{ddu'}{dx^2} +$ ecc. della forma parimente di (A), e del grado $n-2$. Inoltrando l' operazione successivamente, si perverrà all' equazione $M^m = A^m u^m$ da cui si potrà avere il valore finito di u^m. Si tragga una radice o un valore di a^m dall' equazione prossima e determinata (B^m), e avendolo sostituito nell' equazione $du^{m-1} = a^m u^{m-1} dx + u^m dx$ insieme col valore di u^m, si avrà una prima parte integrale completa

$$\overset{m-1}{u} = \mu^{a^m x}\left(\text{cost.} + \int \overset{m}{u}\, dx\, \mu^{-a^m x}\right)$$

Conoscendo il valore di $u^{m-1} = X$, si ricavi una radice o un valore di a^{m-1} dall' equazione determinata (B^{m-1}). Sostituiti questi valori nell' equazione

$$du^{m-2} = a^{m-1} u^{m-2} dx + u^{m-1} dx$$

si conseguirà una seconda parte integrale

$$\overset{m-2}{u} = \mu^{a^{m-1}x}\left(\text{cost.} + \int X dx\, \mu^{-a^{m-1}x}\right)$$

Procedendo così successivamente si perverrà al valore di $u = X^m$, che comprenderà $n-1$ costanti arbitrarie.

Ricavando in seguito una radice o un valore di a dall' equazione (B), se si faccia la sostituzione di questi valori nell' equazione $dy = aydx + udx$, se ne potrà conchiudere finalmente l' equazione finita

$$y = \mu^{ax}\left(\text{cost.} + \int X^m dx\, \mu^{-ax}\right)$$

integrale completo dell' equazione (A), senza che l' andamento sia turbato dalla considerazione delle radici eguali, che possono avervi nell' equazione (B). E questo metodo può applicarsi anche all' integrazione dell' equazione (T) (§. XII.).

PROPOSIZIONE VII.

§. XIV. *Integrare l' equazione* (A)

$$(A)\ldots\ldots M = y + X\frac{dy}{dx} + \phi . X\frac{ddy}{dx^2} + \phi' . X\frac{d^3y}{dx^3} + \text{ecc.}$$

in cui M, X *sono funzioni di* x *qualunque*, $\phi . X$, $\phi' . X$ ecc. *funzioni di* X *indeterminate*.

RISOLUZIONE.

Suppongasi per maggior semplicità $X = P$, $\phi . X = \mathfrak{Q}$, $\phi' . X = R$ ecc., e si faccia (K) $dy = aydx + udx$, essendo a una costante a piacere. Col metodo della prima Prop. si risolverà l' equazione (A) nelle due (B), (C)

$$(B) \ldots 0 = 1 + Pa + \mathfrak{Q}a^2 + Ra^3 + \text{ecc.}$$

$$(C) \ldots M = (P + \mathfrak{Q}a + Ra^2 + \text{ecc.})\,u + (\mathfrak{Q} + Ra + Sa^2 + \text{ecc.})\frac{du}{dx}$$

$$+ (R + Sa + Ta^2 + \text{ecc.})\frac{ddu}{dx^2} + \text{ecc.}$$

Facendo in seguito

$$\Delta = P + \mathfrak{Q}a + Ra^2 + \text{ecc.}$$

$$\Delta' = \mathfrak{Q} + Ra + Sa^2 + \text{ecc.}$$

$$\Delta'' = R + Sa + Ta^2 + \text{ecc.}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{e } \frac{\Delta'}{\Delta} = P',\ \frac{\Delta''}{\Delta} = \mathfrak{Q}' \text{ ecc. } \frac{M}{\Delta} = M'$$

l' equazione (C) del grado $n-1$ prenderà la forma dell' equazione (A) in questo modo

$$M' = u + P'\frac{du}{dx} + \mathfrak{Q}'\frac{ddu}{dx^2} + \text{ecc.}$$

Di nuovo ponendo in quest' equazione così preparata (K') $du = budx + u'dx$, in cui b è un' altra costante a piacere, u' una nuova variabile, si risolverà ella in altre due (B') (C')

$$(B') \ldots\ldots 0 = 1 + P'b + \mathfrak{Q}'b^2 + R'b^3 + \text{ecc.}$$

$$(C') \ldots\ldots M' = (P' + \mathfrak{Q}'b + R'b^2 + \text{ecc.})\,u'$$

$$+ (\mathfrak{Q}' + R'b + S'b^2 + \text{ecc.})\frac{du'}{dx} + \text{ecc.}$$

la seconda delle quali del grado $n-2$ per una preparazione simile alla precedente diverrà

$$M'' = u' + P'' \frac{du'}{dx} + Q'' \frac{ddu'}{dx^2} + \text{ecc.}$$

la quale con la fostituzione (K'') $du' = cu'dx + u''dx$, e con la fteffa preparazione somminiftrerà le due equazioni del grado $n - 3$

$$(B'') \ldots o = 1 + P''c + Q''c^2 + R''c^3 + \text{ecc.}$$

$$(C'') \ldots M''' = u'' + P''' \frac{du''}{dx} + Q''' \frac{ddu''}{dx^2} + \text{ecc.}$$

e così fucceffivamente. Procedendo in tal modo fi perverrà all' equazione $M^{n-1} = u^{n-2} + P^{n-1} \frac{du^{n-2}}{dx}$ coll' ultima fostituzione (K^n), dall' integrazione della quale fi avrà il valore di u^{n-2} con una coftante arbitraria. Integrando quindi l' equazione (K^n) fi otterrà il valore di u^{n-1}, e fi giugnerà finalmente con queft' ordine a trovare il valore di u. In confeguenza fi potrà integrare l' equazione primitiva di foftituzione (K), e conseguire il valore di y. Ma perchè quefto valore fia l' integrale completo dell' equazione (A) bifogna foddisfare alle equazioni

$$(B) \ldots o = 1 + Pa + Qa^2 + Ra^3 + \text{ecc.}$$

$$(B') \ldots o = 1 + P'b + Q'b^2 + R'b^3 + \text{ecc.}$$

$$(B'') \ldots o = 1 + P''c + Q''c^2 + R''c^3 + \text{ecc.}$$

....

che hanno luogo infieme con le equazioni (C), (C') ecc. Si confideri pertanto, che tante fono le funzioni indeterminate P, Q, R ecc. quante unità contiene il numero n, e che $n-1$ è il numero delle equazioni di relazione tra quefte funzioni che debbono aver luogo. Dunque è manifefto, che una di quefte funzioni può effere tutto quello che fi vuole. Sia P quefta funzione arbitraria. Maneggiando le altre come incognite, fe ne potrà dedurre il valore in P e coftanti con le folite regole dell' Algebra comune. E poichè $P = X$, $Q = \phi . X$, $R = \phi' . X$ ecc. fi perverrà a determinare le forme ϕ, ϕ', ϕ'' ecc. dell' equazione (A), effendo X una funzione di x qualunque, e a, b, c ecc. coftanti a piacere. Egli è vifibile, che non la fola P, ma una qualfivoglia delle indeterminate P, Q, R ecc. può pigliarfi da principio per funzione di arbitrio, e le altre si determineranno col mezzo delle equazioni (B), (B') ecc. Il che ecc.

ESEMPIO I.

Sia da integrare l' equazione differenziale (A)

$$(A)\ldots\ldots M = y + X\frac{dy}{dx} + \frac{1+aX}{a^2}\cdot\frac{ddy}{dx^2}$$

essendo M, X funzioni di x di qualunque forma.

Facendo $X = P$, $\frac{1+aX}{a^2} = -\mathfrak{Q}$, si avranno con la sostituzione $(K)\, dy = aydx + udx$ le due equazioni

$$(B)\ldots 0 = 1 + Pa + \mathfrak{Q}a^2$$

$$(C)\ldots M = (P + \mathfrak{Q}a)u + \mathfrak{Q}\frac{du}{dx}$$

Prendendo l' integrale completo dell' equazione (C) $u = V$, si sostituisce il valore di u nell' equazione (K), e si avrà

$$(L)\ldots y = \mu^{au}(\text{Cost.} + \int Vdx\, \mu^{-au}$$

integrale completo dell' equazione (A), purchè si soddisfaccia all' equazione (B). Ma sostituendo in (B) X in luogo di P, $-\frac{1+aX}{a^2}$ in luogo di $\mathfrak{Q}$, l' equazione svanisce. Dunque l' espressione (L) è l' integrale completo dell' equazione (A)

ESEMPIO II.

Sia da integrare l' equazione differenziale di terzo grado (A)

$$(A)\ldots\ldots M = y + X\frac{dy}{dx} + \left(\frac{a^4 + a^3 b - b^2}{a^2 b^2} + \frac{(a^2 - b)X}{ab}\right)\frac{ddy}{dx^2}$$

$$- \left(\frac{a + b + abX}{a^2 b^2}\right)\frac{d^3y}{dx^3}$$

M, X essendo funzione di x qualunque, a, b costanti a piacere. Supponendo per maggior semplicità, che l' equazione sia

$$M = y + P\frac{dy}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{ddy}{dx^2} + R\frac{d^3y}{dx^3}$$

si avrà con la sostituzione $(K)\, dy = aydx + u\,dx$ le due equazioni

$(B) \ldots . 0 = 1 + Pa + \mathfrak{Q}a^2 + Ra^3$

$(C) \ldots . \; M' = u + P'\frac{du}{dx} + \mathfrak{Q}'\frac{ddu}{dx^2}$

eſſendo $M' = M : (P + \mathfrak{Q}a + Ra^2)$, $P' = (\mathfrak{Q} + Ra) : (P + \mathfrak{Q}a + Ra^2)$ $\mathfrak{Q}' = R : (P + \mathfrak{Q}a + Ra^2)$; e con la ſoſtituzione (K') $du = budx + u'dx$ nell' equazione (C) ſi avranno le equazioni

$(B') \ldots . 0 = 1 + P'b + \mathfrak{Q}'b^2$

$(C') \ldots . \; M'' = u' + P''\frac{du'}{dx}$

eſſendo $M'' = M : (\mathfrak{Q} + R(a+b))$, $P'' = R : (\mathfrak{Q} + R(a+b))$ Prendendo l' integrale completo dell' equazione (C'), ſi avrà $u' = V$; e ſoſtituendo queſto valore in (K') ſi avrà integrando $u = V'$. In conſeguenza ſoſtituendo queſto valore per u nell' equazione (K), e integrando ſi otterrà

$$y = e^{ax}\left(\text{coſt.} + \int V' dx \mu^{-ax}\right)$$

integrale completo dell' equazione (A), giacchè comprende tre coſtanti arbitrarie, purchè ſi ſoddisfaccia alle equazioni (B), (B'). Ma appunto mettendo X in vece di P, $\frac{a^4 + a^3 b - b^2}{a^2b^2} + \frac{(a^2 - b)X}{a\,b}$ in vece di $\mathfrak{Q}$, e $-\frac{a + b + abX}{a^2b^2}$ in luogo di R entrambe quelle equazioni ſvaniſcono. Dunque ecc.

§. XV.

Ma ſu le tracce della Prop. precedente poſſiamo aprirci un campo di ſpeculazione più vaſto, e poggiare ad una più grande generalità coll' ajuto delle funzioni indeterminate. Per queſta via prenderemo a fare qualche tentativo generale intorno all' integrazione dell' equazione (A) (§. I.) allorchè i coefficienti P, $\mathfrak{Q}$, R ecc. ſono funzioni di x, nè più nè meno come s' è fatto nella Mem. ſopra citata per le equazioni a differenze finite.

Si cominci primieramente dal mettere ſotto le forme ſeguenti le equazioni differenziali di grado in grado, negletto il primo, compreſe nell'equazione (A) (§. I.) in ſuppoſizione di $M = 0$

$(B) \ldots . 0$

$$(B)\ldots.0=y+F(\phi,\upsilon)\frac{dy}{dx}+F'(\phi,\upsilon)\frac{ddy}{dx^2}$$

$$(B')\ldots0=y+F(\phi,\ \upsilon,\ \Delta)\frac{dy}{dx}+F'(\phi,\ \upsilon,\Delta)\frac{ddy}{dx^2}$$

$$+F''(\phi,\ \upsilon,\ \Delta)\frac{d^3y}{dx^3}$$

$$(B'')\ldots.0=y+F(\phi,\ \upsilon,\ \Delta,\ \lambda)\frac{dy}{dx}+F'(\phi,\ \upsilon,\ \Delta,\ \lambda)\frac{ddy}{dx^2}$$

$$+F''(\phi,\ \upsilon,\ \Delta,\ \lambda)\frac{d^3y}{dx^3}+F'''(\phi,\ \upsilon,\ \Delta,\ \lambda)\frac{d^4y}{dx^4}$$

ecc. essendo ϕ, υ, Δ, λ ecc. funzioni di x, $F(\phi, \upsilon)$, $F'(\phi, \upsilon, \Delta)$ ecc. funzioni di ϕ, υ, di ψ, υ, Δ ecc. Il numero delle funzioni ϕ, υ, Δ ecc. introdotte in ogni equazione differenziale è uguale al grado dell' equazione da risolvere. Si concepisca poi, che l' equazione (K)

$$(K)\ldots.y=\mu^{\int\phi dx}\left(A+\int dx\mu^{\int\upsilon dx}\left(A'+\int dx\mu^{\int\Delta dx}\left(A''\right.\right.\right.$$

$$+\int dx\mu^{\int\lambda dx}\left(A'''+\text{ecc.}\right.$$

all' infinito rappresenti l' integrale completo dell' equazione (A), essendo A, A', A'' ecc. le costanti arbitrarie, di modo che, richiedendosi l' integrale di un' equazione differenziale del grado n, basta fare la costante A^{n+1}, e tutte le susseguenti $=0$. La serie allora s' interrompe, e l' equazione finita risultante comprende n costanti arbitrarie, e tante funzioni ϕ, υ, Δ ecc. quante unità sono in n. In conseguenza pigliando la differenza n^{ma}. di quest' equazione, dovrà ella rappresentare un' equazione (A) del grado n, cioè la forma (B), (B') ecc. corrispondente a quel grado, sì che le forme $F(\phi, \upsilon)$, $F'(\phi, \upsilon, \Delta)$ ecc. verranno ad essere determinate.

Sieno pertanto (P), (P') ecc. questi differenziali successivi dell' equazione (K)

$$(P)\ldots.0=(\phi(\phi+\upsilon)-\phi')y-(\upsilon+2\phi)\frac{dy}{dx}+\frac{ddy}{dx^2}$$

$$(P')\ldots.0=((\phi+\upsilon+\Delta)(\phi'-\phi^2-\upsilon\phi)-\phi''+2\phi\phi'+\phi\upsilon'+\upsilon\phi')y$$

$$+\left((\upsilon+2\phi)(\upsilon+\phi+\Delta)-\upsilon'-3\phi'+\upsilon\phi+\phi^2\right)\frac{dy}{dx}$$

$$-(\Delta+2\upsilon+3\phi)\frac{ddy}{dx^2}+\frac{d^3y}{dx^3}$$

ecc. ne' quali $\phi'=\frac{d\phi}{dx}$, $\phi''=\frac{d\phi'}{dx}$ ecc. $\upsilon'=\frac{d\upsilon}{dx}$, $\upsilon''=\frac{d\upsilon'}{dx}$ ecc. Queſta differenziazione può continuarſi agevolmente, mentre l' equazione (P) moltiplicata per $\mu^{-\int(\phi+\upsilon+\Delta)dx}$ e differenziata ſomminiſtra l' equazione (P'); l' equazione (P') moltiplicata per $\mu^{-\int(\phi+\upsilon+\Delta+\lambda)dx}$ e differenziata ſomminiſtrerebbe l' equazione proſſima ſuſſeguente (P''); e così all' infinito. Ciò premeſſo è manifeſto, che perchè l' equazione (K) aſſunta ſia l' integrale completo dell' equazione (A) del grado n, quella delle equazioni differenziali (P), (P'), (P'') ecc. ch' è dello ſteſſo grado, dee identificarſi coll' equazione (A). In conſeguenza tutte le volte, che l' equazione (A) potrà ridurſi alla forma (P), o (P') ecc. l' eſpreſſione (K) ſarà il ſuo integrale completo. Non ſarebbe difficile coſa il dimoſtrare, che in queſte formule ſi contengono tutte le traſformazioni che poſſono darſi all' equazione generale (A), onde ſoggettarla ad integrali della forma (K). Ora, eſſendoſi dimoſtrato, che l' equazione (A) in ſuppoſizione di M funzione di x è integrabile tutte le volte e ne' medeſimi caſi che può eſſerlo in ſuppoſizione di $M=0$ (§. *VIII.*), è ben chiaro per sè, che il metodo ci conduce a una grandiſſima generalità, e abbraccia caſi d' integrabilità ſenza confini per l' equazione (A) a coefficienti variabili. Ora mi riſtringo a riſolvere il caſo de' coefficienti coſtanti per un eſempio.

PROPOSIZIONE VIII.

§. XVI. *Integrare l' equazione* (A)

$$(\mathrm{A})\ldots\mathrm{M}=\mathrm{y}+\mathrm{A}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}+\mathrm{B}\frac{\mathrm{ddy}}{\mathrm{dx}^2}+\text{ecc.}$$

in cui M *è funzione di* x, A, B, C ecc. *ſono quantità coſtanti.*

RISOLUZIONE.

Pongasi $M = 0$; e poichè i coefficienti de' termini sono quantità costanti, dovranno parimente essere quantità costanti le funzioni indeterminate ϕ, υ, Δ ecc.

Dunque la formola rappresentante l'integrale completo dell' equazione (A), in supposizione di $M = 0$, sarà

$$(K) \ldots y = \mu^{\phi x} \left(A + \int dx \mu^{\upsilon x} \left(A' + \int dx \mu^{\Delta x} \left(A'' + \text{ecc.} \right.\right.\right.$$

Ora nella differenza n^{ma}. di questa equazione i coefficienti di tutte le potenze differenziali $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{dx^2}$, ecc. sono funzioni di ϕ, υ, Δ ecc. e n di numero, come risulta da quanto si è esposto nel §. precedente. Ed è pure n il numero de' coefficienti A, B ecc. dell' equazione (A). Dunque identificando le equazioni differenziali, si potrà ricavare da' paragoni un numero n di equazioni in ϕ, υ, Δ ecc. A, B, C ecc. col mezzo delle quali si potranno determinare i valori delle ϕ, υ, Δ ecc. in A, B, C ecc. Se dunque si sostituiranno questi valori nell' equazione (K), si otterrà l' integrale completo dell' equazione differenziale (A) nel caso di $M = 0$. Ma dato l' integrale di (A) in supposizione di $M = 0$, si ha pure l' integrale di (A) in supposizione di M funzione di x qualunque (§. *VIII.*). Dunque ecc.

§. XVII.

Questa risoluzione dell' equazione (A) non è turbata dal caso delle radici eguali (§. *XIII.*) alle quali cogli altri metodi fa d'uopo avere considerazione particolare (Veggasi il II. Vol. del Calc. Integr. del Sig. *Eulero* pag. 429 e segg., e il III. Vol. degli atti di Torino nell' eccell. Mem. del Sig. de la *Grange*).

ESEMPIO.

Sia da integrarsi l' equazione differenzio-differenziale

$$(\mathfrak{Q})\ldots\ldots M = y - \frac{2dy}{adx} + \frac{ddy}{a^2dx^2}$$

Si facciano nell' espressione (K) (§. XV.) le costanti arbitrarie A'', A''' ecc. $= 0$, e però l' integrale ricercato in supposizione di $M = 0$ sarà della forma seguente

$$(R)\ldots\ldots y = \mu^{\phi x}\left(A + \int A' dx \mu^{vx}\right)$$

la quale differenziata due volte darà l' equazione (S)

$$(S)\ldots\ldots 0 = y - \frac{v + 2\phi}{\phi^2 + v\phi} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{\phi^2 + v\phi} \cdot \frac{ddy}{dx^2}$$

Dal suo paragone pertanto con l' equazione $(\mathfrak{Q})$ si otterrà $\frac{v + 2\phi}{\phi^2 + v\phi} = \frac{2}{a}$, $\frac{1}{\phi^2 + v\phi} = \frac{1}{a^2}$, e però $\phi = -a$, $v = 0$.

Sostituiti questi valori nell' equazione (R), l' integrale completo dell' equazione $(\mathfrak{Q})$, supposto $M = 0$, sarà

$$y = \mu^{-ax}\left(A + \int A' dx\right) = \mu^{-ax}(A + A'x)$$

I metodi ordinarj avrebbero fatto dipendere quest' integrazione dalla risoluzione dell' equazione

$$0 = 1 - \frac{2z}{a} + \frac{z^2}{a^2}$$

in cui due radici sono eguali. Ma essendo noto l' integrale in supposizione di $M = 0$, lo sarà pure in supposizione di M funzione di x. Dunque ecc.

§. XVIII.

Non essendomi proposto in questa Memoria, che d' indicare alcune vie, che mi sono aperto per l' integrazione di questa sorta di equazioni differenziali coll' intenzione di ripigliar, se sia possibile, la materia più di proposito, che ora per avventura non m' è conceduto di fare, passiamo a fare qualche ricerca sull' equazione

$$(A)\ldots\ldots Mdx^n = x^{\phi+1}(a+bX)ydx^n + x^{\phi+2}(c+eX)dydx^{n-1}$$
$$+ x^{\phi+3}(f+gX)ddydx^{n-2} + \text{ecc.}$$

in cui M, X ſono funzioni qualunque di x, ϕ a b c ecc. coſtanti a piacere. Non è ignoto a' Geometri di quanto uſo ſia la ſola equazione di ſecondo grado $Mdx^2 = x^2(a+bx^n)ddy + x(e+fx^n)dxdy + (g+hx^n)ydx^2$ ch' è un caſo particolariſſimo dell' equazione (A), e ſu cui più di tutti ha diffuſamente verſato il Sig. *Eulero* nel X. Vol. de' nuovi Com. di St. *Pietroburgo*, e in appreſſo nel II. Vol. del ſuo Calc. Integrale. Ci fermeremo pertanto prima ſu queſta, ed eſtenderemo poi le noſtre indagini ſull' equazione generale.

PROPOSIZIONE. IX.

§. XIX. *Svolgere infiniti caſi d' integrabilità dell' equazione*

$$(\Delta)\ldots\ldots \mathrm{Mdx^2 = x^2(a+bx^n)ddy + x(e+fx^n)dxdy}$$
$$\mathrm{+(g+hx^n)ydx^2}$$

indipendenti dall' eſponente n.

RISOLUZIONE.

I. Si ſupponga $y = \frac{z}{x}$, eſſendo z una nuova variabile, e ſi ſoſtituiſca queſto valore nell' equazione (Δ). Ella prende queſta forma

$$(B)\ldots\ldots(a+bx^n)\left(xddz - 2dxdz + \frac{2zdx^2}{x}\right)$$
$$+(e+fx^n)\left(dzdx - \frac{zdx^2}{x}\right) + (g+hx^n)\frac{zdx^2}{x} - Mdx^2 = 0$$

Di queſta equazione ſe ne faccian due nel modo ſeguente

$$(a+bx^n)\frac{2zdx^2}{x} - (e+fx^n)\frac{zdx^2}{x} + (g+hx^n)\frac{zdx^2}{x} = 0$$
$$(a+bx^n)(xddz - 2dxdz) + (e+fx^n)dzdx - Mdx^2 = 0$$

le quali ſemplificate e ordinate divengono

$$(C)\ 2a - e + g + (2b - f + h)x^n = 0$$

$(D)\ x(a+bx^n)\,ddz+(e-2a+(f-2b)x^n)\,dxdz-Mdx^2=0$

Posto nell' equazione (D) $dz=udx$, si passi all' integrazione.

Si avrà $u=\dfrac{dz}{dx}=\mu^{-\int\frac{Qdx}{P}}\left(A+\int\dfrac{Mdx}{P}\mu^{\int\frac{Qdx}{P}}\right)=V$

essendo $Q=e-2a+(f-2b)x^n$, $P=x(a+bx^n)$. Per conseguenza $z=A'+\int Vdx$, e però $y=A'z^{-1}+x^{-1}\int Vdx$ sarà l' integrale completo dell' equazione (Δ), ognora che si soddisfaccia alle due equazioni

$2a-e+g=0$; $2b-f+h=0$, le quali non involgono l' esponente n.

II. Di nuovo si ordini l' equazione (B), e si supponga $M=0$. Si avrà

$$(B')\ldots\; 0=x^2(a+bx^n)ddz+x(e-2a+(f-2b)x^n)dxdz$$
$$+(2a-e+g+(2b-f+h)x^n)zdx^2$$

Posto pertanto $e-2a=e'$, $f-2b=f'$, $2a-e+g=g'$, $2b-f+h=h'$, l' equazione

$$0=x^2(a+bx^n)ddz+x(e'+f'x^n)dxdz+(g'+h'x^n)zdx^2$$

con la sostituzione di $\dfrac{z'}{x}$ in luogo di z si cangerà in questa

$$x^2(a+bx^n)ddz'+x(e'-2a+(f'-2b)x^n)dxdz'$$
$$+(2a-e'+g'+(2b-f'-h')x^n)z'dx^2=0,$$ cioè in questa

$$(B'')\ldots\; x^2(a+bx^n)ddz'+x(e-4a+(f-4b)x^n)dxdz'$$
$$+(6a-2e+g+(6b-2f+h)x^n)z'dx^2=0$$

Similmente si troverà che l' equazione (B'') con la sostituzione di $\dfrac{z''}{x}$ in luogo di z' si trasformerà in questa

$$(B''')\ldots\; x^2(a+bx^n)ddz''+x(e-6a+(f-6b)x^n)dxdz''$$
$$+(12a-3e+g+(12b-3f+h)x^n)z''dx^2=0$$

Questa poi con la sostituzione di $\dfrac{z'''}{x}$ in luogo di z'' diverrà

$$(B'''')\ldots\; x^2(a+bx^n)ddz'''+x(e-8a+(f-8b)x^n)dxdz'''$$

$$+(20a-4e+g+(20b-4f+h)x^n)z^{m}dx^2=0$$

e così successivamente in modo, che dopo m trasformazioni si perverrà all' equazione

$$(B^m)\ldots x^2(a+bx^n)ddz^{m-1}+x(e-2ma+(f-2mb)x^n)dxdz^{m-1}$$

$$+((m+m^2)a-me+g$$

$$+((m+m^2)b-mf+h)x^n)z^{m-1}dx^2=0$$

Ma di questa equazione fatte due come nell' articolo precedente, si troverà ch' ella è integrabile qualvolta si verifichino le due equazioni

$$m^2a+m(a-e)+g=0$$

$$m^2b+m(b-f)+h=0$$

Dunque in tutti questi infiniti casi di relazione tra i coefficienti, ove non entra l' esponente n, essendo m numero intero e positivo, e in supposizione di $M=0$, si avrà l'integrale completo dell' equazione (Δ); e però (§. *VIII.*) anche in supposizione di M funzione della variabile x.

III. Ma di nuovo ancora si ripigli l' equazione (B), e se ne combinino tre paja come segue in ipotesi di $M=0$

$$\left\{\begin{array}{l}(E)\ldots x^2(a+bx^n)ddz+x(e-2a+(f-2b)x^n)dxdz\\ \qquad +(2a+2bx^n)zdx^2=0\\ (E')\ldots g-e+(h-f)x^n=0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}(F)\ldots x^2(a+bx^n)ddz+x(e-2a+(f-2b)x^n)dxdz\\ \qquad -(e+fx^n)zdx^2=0\\ (F')\ldots 2a+g+(2b+h)x^n=0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}(G)\ldots x^2(a+bx^n)ddz+x(e-2a+(f-2b)x^n)dxdz\\ \qquad +(g+hx^n)zdx^2=0\\ (G')\ldots 2a-e+(2b-f)x^n=0\end{array}\right.$$

Se nell' equazione (Δ) si ponga $M=0$, e in luogo di g, f in luogo di h, sì che si soddisfaccia all'equazione (E'), e ne risulti l' equazione

$$(\Delta')\ldots x^2(a+bx^n)ddy+x(e+fx^n)dxdy$$

$$+(e+fx^n)ydx^2=0$$

è certo, che qualvolta s' integri l'equazione (E) si potrà integrare l' equazione (Δ'). Si faccia pertanto in (E) $e-2a=e'$, $f-2b=f'$. Si cangia l' equazione in questa

$$(E'')\ldots\ldots x^2(a+bx^n)\,ddz+x(e'+f'x^n)\,dxdz$$
$$+(2a+2bx^n)\,zdx^2=0$$

la quale è integrabile (*Art.* I.) ognora che si verifichino queste due relazioni $6a-e=0$; $6b-f=0$

Dunque in questi casi sarà pure integrabile l'equazione (Δ').

Ma sostituendo $\frac{z'}{x}$ in luogo di z nell' equazione (E''), ella si trasforma per la stessa ragione nell' equazione seguente

$$x^2(a+bx^n)\,ddz'+x(e'-2a+b(f-2b)x^n)\,dxdz'$$
$$+(2a+2bx^n)\,z'dx^2=0$$

cioè nella seguente, facendo $e'-2a=e''$, $f'-2b=f''$,

$$(E''')\ldots\ldots x^2(a+bx^n)\,ddz'+x(e''+f''x^n)\,dxdz'$$
$$+(2a+2bx^n)\,z'dx^2=0$$

e così successivamente. Dunque dopo m trasformazioni si perverrà all' equazione

$$(E^m)\ldots\ldots x^2(a+bx^n)\,ddz^{m-1}+x\big(e-2ma$$
$$+(f-2mb)\,x^n\big)\,dxdz^{m-1}$$
$$+(2a+2bx^n)\,z^{m-1}\,dx^2=0$$

della forma di (Δ'). Ma fatte due equazioni dell' equazione (E^m) col metodo adoperato nel I. *Art.*, si troverà ch' ella è integrabile qualvolta si verifichino queste equazioni

$(2m+4)a-e=0$; $(2m+4)b-e=0$

Dunque generalmente in tutti questi casi sarà integrabile completamente l' equazione (Δ'), essendo m numero intero e positivo.

Nello stesso modo mettendo nell' equazione (Δ) $M=0$, $-2a$ in luogo di g, $-2b$ in luogo di h, onde soddisfare all' equazione (F'), si troverà che l' equazione

$$(\Delta'')\ldots\ldots x^2(a+bx^n)\,ddy+(e+fx^n)\,dxdy$$
$$-(2a+2bx^n)\,ydx^2=0$$

con la sostituzione $y=\frac{z}{x}$ si trasforma prima nell' equazione

(H)

$$(H)\ldots . x^2(a+bx^n)ddz+x\big(e-2a+(f-2b)x^n\big)dxdz$$
$$-(e+fx^n)zdx^2=0$$

questa con la sostituzione $z=\frac{z'}{x}$ nell' equazione

$$(H')\ldots x^2(a+bx^n)ddz'+x\big(e-4a+(f-4b)x^n\big)dxdz'$$
$$-(e+fx^n)z'dx^2=0$$

e così successivamente, sicchè dopo m trasformazioni si perviene all' equazione

$$(H^m)\ldots x^2(a+bx^n)ddz^m+x\big(e-2am+(f-2bm)x^n\big)dxdz^m$$
$$-(e+fx^n)z^m dx^2=0$$

la quale essendo integrabile (*Art. I.*) ognivolta che si verifichino le seguenti equazioni

$$(m+1)a-e=0;\ (m+1)b-f=0$$

lo sarà pure negli stessi casi l' equazione (Δ''). E finalmente procedendo nella stessa guisa si dedurrà che l' equazione (Δ''')

$$(\Delta''')\ldots x^2(a+bx^n)ddy+x(2a+2bx^n)dxdy+(g+bx^n)ydx^2=0$$

è integrabile qualora si verifichino le due equazioni

$$2am+g=0;\ 2bm+f=0.$$

E questo per ora basti intorno all' equazione (Δ). Il che ecc.

PROPOSIZIONE X.

§. XX. *Svolgere infiniti casi d' integrabilità dell' equazione*

$$(Q)\ldots . x^{\phi+3}(a+bX)ddy+x^{\phi+2}(e+fX)dxdy$$
$$+x^{\phi+1}(g+hX)ydx^2-Mdx^2=0$$

in cui M, X *sono funzioni di* x *qualunque*, ϕ a b e f ecc. *costanti a piacere*.

RISOLUZIONE.

I. Suppongasi $y=\frac{v}{x^{\phi+1}}$. Fatta questa sostituzione nell' equazione (Q), ne risulterà l' equazione (R)

$$(R)\ldots(a+bX)\big(x^2ddv-2(\phi+1)xdvdx+(\phi+1)(\phi+2)vdx^2\big)$$

$$+(e+fX)\big(xdvdx-(\phi+1)vdx^2\big)+(g+hX)vdx^2$$
$$-Mdx^2=0$$

dalla quale se ne combinino due

$$(R')\ldots x^2(a+bX)ddv+x\big(e-2a\phi-2a+(f-2b\phi-2b)X\big)dvdx$$
$$=Mdx^2$$

$$(R'')\ldots a(\phi+1)(\phi+2)-e(\phi+1)+g$$
$$+\big(b(\phi+1)(\phi+2)-f(\phi+1)+h\big)X=0$$

Avendo poi fatto $dv=zdx$ nell' equazione (R'), ella si riduce all' equazione

$$x^2(a+bX)dz+x\big(e-2a\phi-2a+(f-2b\phi-2b)X\big)zdx=Mdx$$

la quale integrata ci somministra $z=Z$ funzione di x contenente una costante arbitraria. Dunque

$v=\text{cost.}+\int Zdx$; e però $y=\text{cos.}\,x^{-\phi-1}+x^{-\phi-1}\int Zdx$

sarà l' integrale completo dell' equazione ($\mathfrak{Q}$) sempre che si verifichino le due equazioni

$$a(\phi+1)(\phi+2)-e(\phi+1)+g=0$$
$$b(\phi+1)(\phi+2)-f(\phi+1)+h=0$$

II. Si ordini l' equazione (R) (*Art. preced.*) in questo modo, facendo $M=0$, e moltiplicando tutto per $x^{\phi+1}$

$$x^{\phi+3}(a+bX)ddv+x^{\phi+2}\big(e-2a\phi-2a+(f-2b\phi-2b)X\big)dvdx$$
$$+x^{\phi+1}\big(a(\phi+1)(\phi+2)-e(\phi+1)+g$$
$$+\big(b(\phi+1)(\phi+2)-f(\phi+1)+h\big)X\big)vdx^2=0$$

sì che sarà ella della forma ($\mathfrak{Q}$) in ipotesi di $M=0$.

Se dunque si faccia $e-2a\phi-2a=e'$, $f-2\phi b-2b=f'$, $a(\phi+1)(\phi+2)-e(\phi+1)+g=g'$, $b(\phi+1)(\phi+2)-f(\phi+1)+h=h'$, sarà ella integrabile (*Art. I.*) qualvolta si verifichino le due equazioni

$$a(\phi+1)(\phi+2)-e'(\phi+1)+g'=0$$
$$b(\phi+1)(\phi+2)-f'(\phi+1)+h'=0$$

e però negli stessi casi lo sarà pure l' equazione ($\mathfrak{Q}$) supposto $M=0$, indi (§. *VIII.*) supposto M funzione di x. Ma ponendo $\frac{v'}{x^{\phi+1}}$ in luogo di v, l' equazione

$$x^{\phi+3}(a+bX)ddv+x^{\phi+2}(e'+fX)dvdx$$
$$+x^{\phi+1}(g'+h'X)vdx^2=0$$

si trasforma come prima in questa

$$x^{\phi+3}(a+bX)ddv'+x^{\phi+2}\big(e'-2a\phi-2a+(f'-2b\phi-2b)X\big)dxdv'$$
$$+x^{\phi+1}\big(a(\phi+1)(\phi+2)-e'(f+1)+g'$$
$$+\big(b(\phi+1)(\phi+2)-f'(\phi+1)+h'\big)X\big)v'dx^2=0$$

la quale, posto $e'-2a\phi-2a=e''$, $f'-2b\phi-2b=f''$

$a(\phi+1)(\phi+2)-e'(\phi+1)+g'=g''$, $b(\phi+1)(\phi+2)-f'(\phi+1)+h'=h''$,
è integrabile ognivolta che abbiano luogo le due equazioni

$$a(\phi+1)(\phi+2)-e''(\phi+1)+g''=0$$
$$b(\phi+1)(\phi+2)-f''(\phi+1)+h''=0$$

Dunque negli stessi casi lo sarà pure l' equazione ($\mathfrak{Q}$); e così successivamente. In conseguenza progredendo in questo modo dopo m trasformazioni, si conchiuderà, che l' equazione ($\mathfrak{Q}$) è generalmente integrabile qualvolta si verifichino le due equazioni

$$a(\phi+1)(\phi+2)-e^{m}(\phi+1)+g^{m}=0$$
$$b(\phi+1)(\phi+2)-f^{m}(\phi+1)+h^{m}=0$$

Ed è ben facile cosa l' ottenere le forme e^{m}, f^{m}, g^{m}, h^{m} in e, f, g, h con le sostituzioni successive, essendo generalmente

$$e^{m}=e^{m-1}-2a\phi-2a,\quad f^{m}=f^{m-1}-2b\phi-2b$$
$$g^{m}=a(\phi+1)(\phi+2)-e^{m-1}(\phi+1)+g^{m-1},$$
$$h^{m}=b(\phi+1)(\phi+2)-f^{m-1}(\phi+1)+h^{m-1}$$

III. Ma di nuovo a questi infiniti casi d' integrabilità dell' equazione ($\mathfrak{Q}$) altri infiniti possono aggiugnersi, come si è fatto nell' antecedente Proposizione, ricavando tre paja di equazioni dall' equazione (R), e procedendo in modo analogo a quello del §. XIX. Art. III., cosa, cui m' astengo dal fare, non implicando alcuna difficoltà.

SCOLIO.

§. XXI. L' equazione (Δ) della Prop. IX. non è che un caso ben particolare di questa, com' è manifesto, cioè quando $X = x^n$, $\phi = -1$. Ma si può estendere il metodo, come ho accennato di sopra, ad una più grande generalità cioè a tutti i gradi di questa speciale natura di equazioni differenziali.

PROPOSIZIONE XI.

§. XXII. *Svolgere infiniti casi d' integrabilità dell' equazione* (A)

$$(A)\ Mdx^n = x^{m+1}(a+bX)ydx^n + x^{m+2}(c+eX)dydx^{n-1}$$
$$+ x^{m+3}(f+gX)ddydx^{n-2} + x^{m+4}(h+KX)d^3ydx^{n-3}$$
$$+ x^{m+5}(l+pX)d^4ydx^{n-4} + \text{ecc.}$$

in cui M, X *sono funzioni di* x, a b c e ecc. m *costanti a piacere*.

RISOLUZIONE.

Si faccia $y = \frac{v}{x^{m+1}}$. Sostituito questo valore nell' equazione (A) prende ella la forma (A')

$$(A')\ldots Mdx^n = (a+bX)vdx^n$$
$$+(c+eX)\left(xdvdx^{n-1} - (m+1)vdx^n\right)$$
$$+(f+gX)\left(x^2ddvdx^{n-2} - 2(m+1)xdvdx^{n-1}\right.$$
$$\left.+(m+1)(m+2)vdx^n\right)$$
$$+(h+KX)\left(x^3d^3vdx^{n-3} - 3(m+1)x^2ddvdx^{n-2}\right.$$
$$\left.+3(m+1)(m+2)xdvdx^{n-1} - (m+1)(m+2)(m+3)vdx^n\right)$$
$$+(l+pX)\left(x^4d^4vdx^{n-4} - 4(m+1)x^3d^3vdx^{n-3}\right.$$
$$+6(m+1)(m+2)x^2ddvdx^{n-2}$$
$$\left.-4(m+1)\ldots(m+3)xdvdx^{n-1} + (m+1)\ldots(m+4)vdx^n\right)$$

$$+(q+rX)\left(x^5d^5vdx^{n-5}-5(m+1)x^4d^4vdx^{n-4}\right.$$
$$+10(m+1)(m+2)x^3d^3vdx^{n-3}$$
$$-10(m+1)\ldots(m+3)x^2ddvdx^{n-2}$$
$$\left.+5(m+1)\ldots(m+4)xdvdx^{n-1}-(m+1)\ldots(m+5)vdx^n\right)$$
$$+\text{ ecc.}$$

Da questa equazione se ne combinino tre nel seguente modo

$$(B)\ldots Mdx^n = xdvdx^{n-1}\left(c-2f(m+1)+3h(m+1)(m+2)\right.$$
$$-4l(m+1)(m+2)(m+3)+5q(m+1)\ldots(m+4)-\text{ecc.}$$
$$+\left(e-2g(m+1)+3K(m+1)(m+2)-4p(m+1)\ldots(m+3)\right.$$
$$\left.\left.+5r(m+1)\ldots(m+4)-\text{ecc.}\right)X\right)$$
$$+x^2ddvdx^{n-2}\left(f-3h(m+1)+6l(m+1)(m+2)\right.$$
$$-10q(m+1)\ldots(m+3)+\text{ecc.}+\left(g-3K(m+1)\right.$$
$$\left.\left.+6p(m+1)(m+2)-10r(m+1)\ldots(m+3)+\text{ecc.}\right)X\right)$$
$$+x^3d^3vdx^{n-3}\left(h-4l(m+1)+10q(m+1)(m+2)-\text{ecc.}\right.$$
$$\left.+\left(K-4p(m+1)+10r(m+1)(m+2)-\text{ecc.}\right)X\right)$$
$$+\text{ ecc.}$$

$$(C)\ldots a-(m+1)c+(m+1)(m+2)f-(m+1)(m+2)(m+3)h$$
$$+(m+1)\ldots(m+4)l-(m+1)\ldots(m+5)q+\text{ ecc.}=0$$

$$(C)\ldots b-(m+1)e+(m+1)(m+2)g-(m+1)(m+2)(m+3)K$$
$$+(m+1)\ldots\ldots(m+4)p-(m+1)\ldots\ldots(m+5)r+\text{ ecc.}=0$$

E' certo che avendo luogo le equazioni (C), l' integrazione dell' equazione (A) dipende dall' integrazione dell' equazione (B), cioè dell' equazione (B')

$$(B')\ldots Mdx^{n-1} = xv'dx^{n-1}\left(c-2f(m+1)+\text{ecc.}\right)$$
$$+x^2dv'dx^{n-2}\left(f-3h(m+1)+\text{ecc.}\right)$$
$$+x^3ddv'dx^{n-3}\left(h-4l(m+1)+\text{ecc.}\right)+\text{ecc.}$$

in cui si trasforma l' equazione (B), posto $dv=v'dx$, e che è inferiore di un' unità all' equazione (A), cioè del grado $m-1$.

Di nuovo l' equazione (B') con la ſoſtituzione $v' = \frac{v''}{x}$ ſi cangia in queſta

$$
\begin{aligned}
(B'')\dots Mdx^{n-1} = v''dx^{n-1}\big(&c - 2f(m+1) + 3b(m+1)(m+2)\\
&- 4l(m+1)\dots(m+3) + 5q(m+1)\dots(m+4) - \text{ecc.}\\
&+ \big(e - 2g(m+1) + 3K(m+1)(m+2) - 4p(m+1)\dots(m+3)\\
&+ 5r(m+1)\dots(m+4) - \text{ecc.}\big)X\big) + \big(f - 3b(m+1)\\
&+ 6l(m+1)(m+2) - 10q(m+1)(m+2)(m+3) + \text{ecc.}\\
&+ \big(g - 3K(m+1) + 6p(m+1)(m+2)\\
&- 10r(m+1)\dots(m+3) + \text{ecc.}\big)X\big)\left(xdv''dx^{n-2} - v''dx^{n-1}\right)\\
&+ \big(b - 4l(m+1) + 10q(m+1)(m+2) - \text{ecc.}\\
&+ \big(K - 4p(m+1) + 10r(m+1)(m+2) - \text{ecc.}\big)X\big)\\
&\quad\left(x^2ddv''dx^{n-3} - 2xdv''dx^{n-2} + 2v''dx^{n-1}\right)\\
&+ \text{ecc.}
\end{aligned}
$$

dalla quale combinandone ſimilmente tre, come ſegue,

$$
\begin{aligned}
(B''')\dots Mdx^{n-1} = xdv''dx^{n-2}\big(&f - 3b(m+1) + 6l(m+1)(m+2)\\
&- 10q(m+1)\dots(m+3) + \text{ecc.} - 2b + 2.4l(m+1)\\
&- 2.10q(m+1)(m+2) + \text{ecc.} + \big(g - 3K(m+1)\\
&+ 6p(m+1)(m+2) - 10q(m+1)\dots(m+3) + \text{ecc.}\\
&- 2K + 2.4p(m+1) - 2.10r(m+1)(m+2) + \text{ecc.}\big)X\big)\\
&+ x^2ddv''dx^{n-3}\big(b - 4l(m+1) + 10q(m+1)(m+2) - \text{ecc.}\\
&+ \big(K - 4p(m+1) + 10r(m+1)(m+2) - \text{ecc.}\big)X\big)\\
&+ \text{ecc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(C')\dots c &- 2f(m+1) + 3b(m+1)(m+2) - 4l(m+1)\dots(m+3)\\
&+ 5q(m+1)\dots(m+4) - \text{ecc.} - f + 3b(m+1)\\
&- 6l(m+1)(m+2) + 10q(m+1)\dots(m+3) - \text{ecc.}\\
&+ 2b - 2.4l(m+1) + 2.10q(m+1)(m+2) - \text{ecc.} = 0
\end{aligned}
$$

$$
(C')\dots e - 2g(m+1) + 3K(m+1)(m+2) - 4p(m+1)(m+2)(m+3)
$$

$$+5r(m+1)\ldots.(m+4)-\text{ecc.}-g+3K(m+1)$$
$$-6p(m+1)(m+2)+10q(m+1)\ldots(m+3)-\text{ecc.}$$
$$+2K-2\,.\,4p(m+1)+10r(m+1)(m+2)-\text{ecc.}=0$$

si può tornar a conchiudere, che ognora che si verifichino le relazioni (C), (C'), la risoluzione dell'equazione (A) dipenderà da quella dell'equazione (B'''). Ma continuando simili trasformazioni, mentre il numero delle relazioni combinate tra coefficienti cresce, l'equazione da cui dipende successivamente l'integrazione dell'equazione (A) va digradando, dimodochè dopo $n-1$ trasformazioni l'equazione ultima (B^{λ}) è di primo grado che si sa integrare generalmente.

Dunque l'equazione (A) è generalmente integrabile ognora che si verifichino $n-1$ equazioni di relazioni combinate (C), (C'), (C'').....$(C^{\lambda-1})$.

II. Ma di nuovo si possono moltiplicare i casi d'integrabilità dell'equazione (A) all'infinito. Imperciocchè vi si faccia $M=0$; l'equazione (A') (*Art. preced.*) in questo caso, essendo ordinata e moltiplicata per x^{m+1}, prende la stessa forma di (A), cioè

$$
\begin{aligned}
0=x^{m+1}\big(&a-(m+1)c+(m+1)(m+2)f-(m+1)\ldots(m+3)b\\
&+(m+1)\ldots(m+4)l-(m+1)\ldots(m+5)q+\text{ecc.}\\
&+\big(b-(m+1)e+(m+1)(m+2)g-(m+1)\ldots(m+3)K\\
&+(m+1)\ldots(m+4)p-(m+1)\ldots(m+5)r+\text{ecc.}\big)X\big)v\,dx^{n}\\
&+x^{m+2}\big(c-2f(m+1)+3b(m+1)(m+2)\\
&-4l(m+1)\ldots(m+3)+5q(m+1)\ldots(m+4)-\text{ecc.}\\
&+\big(e-2g(m+1)+3K(m+1)(m+2)-4p(m+1)\ldots(m+3)\\
&+5r(m+1)\ldots(m+4)-\text{ecc.}\big)X\big)\,dv\,dx^{n-1}\\
&+x^{m+3}\big(f-3b(m+1)+6l(m+1)(m+2)\\
&-10q(m+1)\ldots(m+3)+\text{ecc.}+\big(g-3K(m+1)\\
&+6p(m+1)(m+2)-10r(m+1)\ldots(m+3)\\
&+\text{ecc.}\big)X\big)\,ddv\,dx^{n-2}+\text{ecc.}
\end{aligned}
$$

cioè la forma (A'')

$$(A'')\ldots 0 = x^{m+1}(a'+b'X)v\,dx^n + x^{m+2}(c'+e'X)dv\,dx^{n-1}$$
$$+ x^{m+3}(f'+g'X)ddv\,dx^{n-2} + \text{ecc.}$$

posto

$$a' = a-(m+1)c+(m+1)(m+2)f-(m+1)\ldots(m+3)h+\text{ecc.}$$
$$b' = b-(m+1)e+(m+1)(m+2)g-(m+1)\ldots(m+3)K+\text{ecc.}$$
$$c' = c-2f(m+1)+3h(m+1)(m+2)-4l(m+1)\ldots(m+3)+\text{ecc.}$$
$$e' = e-2g(m+1)+3K(m+1)(m+2)-4p(m+1)\ldots(m+3)+\text{ecc.}$$

ecc.

Similmente l' equazione (A'') con la sostituzione $v=\frac{v'}{x^{m+1}}$ si trasforma nell' equazione (A''')

$$(A''')\ldots 0 = x^{m+1}(a''+b''X)v'dx^n + x^{m+2}(c''+e''X)dv'dx^{n-1}$$
$$+ x^{m+3}(f''+g''X)ddv'dx^{n-2} + \text{ecc.}$$

facendo

$$a'' = a'-(m+1)c'+(m+1)(m+2)f'-(m+1)\ldots(m+3)h'+\text{ecc.}$$
$$b'' = b'-(m+1)e'+(m+1)(m+2)g'-(m+1)\ldots(m+3)K'+\text{ecc.}$$
$$c'' = c'-2f(m+1)+3h'(m+1)(m+2)-4l'(m+1)\ldots(m+3)+\text{ecc.}$$

e questa, con la sostituzione $v'=\frac{v''}{x^{m+1}}$, nell' equazione (A'''')

$$(A'''')\ldots 0 = x^{m+1}(a'''+b'''X)v''dx^n + x^{m+2}(c'''+e'''X)dv''dx^{n-1}$$
$$+ x^{m+3}(f'''+g'''X)ddv''dx^{n-2} + \text{ecc.}$$

facendo

$$a''' = a''-(m+1)c''+(m+1)(m+2)f''-(m+1)\ldots(m+3)h''+\text{ecc.}$$
$$b''' = b''-(m+1)e''+(m+1)(m+2)g''-(m+1)\ldots(m+3)K''+\text{ecc.}$$

ecc. e così all' infinito.

Se dunque l' equazione (A) s' integra generalmente per l' Articolo preced. ognora che abbia luogo il sistema di relazioni tra' coefficienti (C), (C'), ... $(C^{\lambda-2})$, per la stessa ragione potrà generalmente integrarsi l' equazione (A''), sempre che si verifichi il seguente sistema di relazioni

$$(CC)\ldots a'-(m+1)c'+(m+1)(m+2)f'$$
$$-(m+1)\ldots(m+3)h'+\text{ecc.}=0$$

(CC)

$$(CC)\ldots b'-(m+1)e'+(m+1)(m+2)g'$$
$$-(m+1)\ldots(m+3)K'+\text{ecc.}=0$$

$$(C'C')\ldots c'-2f'(m+1)+3b'(m+1)(m+2)$$
$$-4l(m+1)\ldots(m+3)+\text{ecc.}=0$$

$$(C'C')\ldots e'-2g'(m+1)+3K(m+1)(m+2)$$
$$\ldots(m+1)\ldots(m+2)+\text{ecc.}=0$$

ecc.

Nello ſteſſo modo ſi può conchiudere, che l'equazione (A'') potrà integrarſi qualvolta abbia luogo il ſeguente ſiſtema di relazioni

$$(CCC)\ldots\ldots a''-(m+1)c''+(m+1)(m+2)f''$$
$$-(m+1)\ldots(m+3)b''+\text{ecc.}=0$$

$$(CCC)\ldots\ldots b''-(m+1)e''+(m+1)(m+2)g''$$
$$-(m+1)\ldots(m+3)K''+\text{ecc.}=0$$

$$(C'C'C')\ldots\ldots c''-2f''(m+1)+3b''(m+1)(m+2)-\text{ecc.}=0$$
$$(C'C'C')\ldots\ldots e''-2g''(m+1)+3K''(m+1)(m+2)-\text{ecc.}=0$$

ecc.

E così ſucceſſivamente per tutte le altre trasformate (A'''), (A'''') ecc. all' infinito.

Dunque in tutti queſti infiniti ſiſtemi di relazione tra' coefficienti ſarà ſempre integrabile l' equazione generale

$$Mdx^n=x^{m+1}(a+bX)ydx^n+x^{m+2}(c+eX)dydx^{n-1}$$
$$+x^{m+3}(f+gX)ddydx^{n-2}+\text{ecc.}$$

in ſuppoſizione di $M=0$. Ma eſſendolo in queſta ſuppoſizione, lo ſarà pure in quella di M funzione di x qualunque (§. *VIII.*). Il che ecc.