SOPRA LA PRESSIONE
DE' FLUIDI

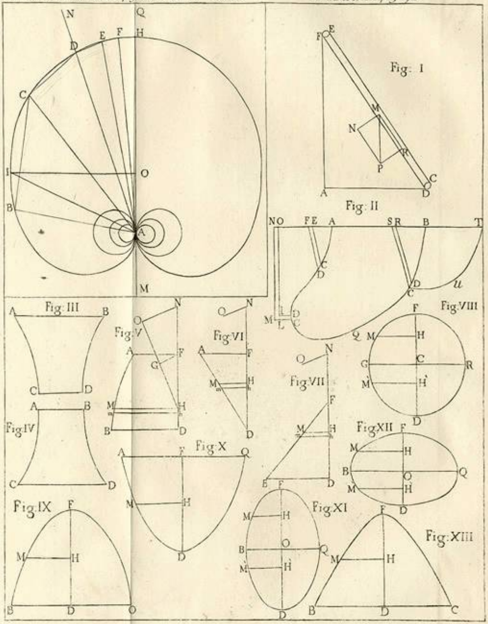
Del P. Gregorio Fontana delle Scuole Pie, Pubblico Professore delle Matematiche Superiori nella Regia Università di Pavia.

Esaminando la pressione de' fluidi contro i corpi immersi, o contro le pareti de' recipienti, mi venne fatto di osservare, che nel Cilindro, e nella Sfera ad esso inscrivibile, se entrambi si sommergono nel fluido fino alla sommità, o se internamente scavandoli si riempie la loro capacità, risulta nelle pressioni esercitate dal fluido contro i detti due corpi quella medesima proporzione sesquialtera, che Archimede scoprì così nelle loro solidità, come nelle superficie. Quindi argomentai, non dover essere inutile o sterile l'idea di ridurre a formole generali la pressione de' fluidi ad effetto di ricavarne secondo la varia forma de' corpi sommersi, o de' vasi riempiti que' risultati più o meno curiosi e rimarchevoli, cui il soggetto sembra promettere. Restringendomi presentemente in questo breve Scritto ai fluidi *omogenei e incompressibili* verrò esponendo succintamente il mio divisamento in questa importante materia senza assumere dall' Idrostatica altro principio fuori di quello altronde noto nelle molecole fluide per esperienza, vale a dire l'uguaglianza di pressione per ogni verso e secondo tutte le direzioni.

Lemma.

Un fluido, che riempie un tubo infinitamente sottile *FE CD* (*Fig.* 1.) o cilindrico o prismatico avente i lati perpendicolari alla base, e tenuto in una positura comunque obliqua all' orizzonte *AD*, preme il fondo o la base *CD* con uno sforzo equivalente al peso d'un prisma dello stesso fluido, che

Mem. della Società Italiana Tom. II pag. 128. FONTANA Parte I FONTANA Tom. II pag. 142



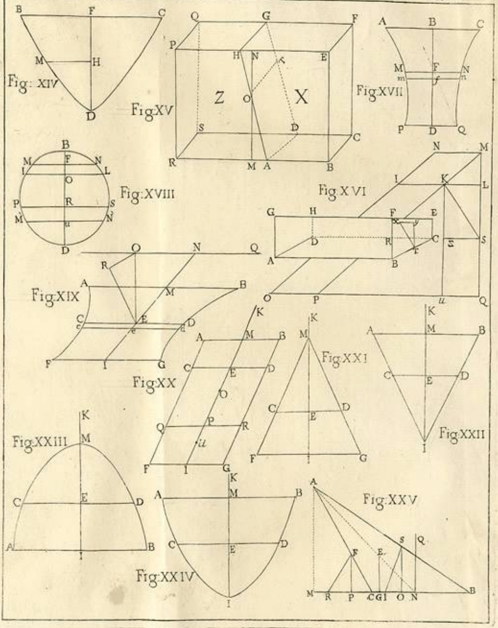


Fig: XIV
Fig:XV
Fig:XVII
Fig:XVIII
Fig:XVI
Fig:XIX
Fig:XX
Fig:XXI
Fig:XXII
Fig:XXIII
Fig:XXIV
Fig:XXV

ha per base la stessa CD, e per altezza la verticale FA terminata dall' orizzontale AD.

Dimostrazione.

Sia M il centro di gravità del filo d' acqua contenuto nel tubo infinitamente sottile $FECD$, e colla verticale MP condotta dal centro di gravità si rappresenti il peso di esso filo, e si risolva lo sforzo MP ne' due laterali MR perpendicolare alla base CD, ed MN perpendicolare al lato FD. Ciò posto è manifesto, che il filo d' acqua non preme il fondo CD se non collo sforzo rappresentato da MR, posciachè l' altro espresso da MN è tutto impiegato a premere le pareti del tubo. Starà dunque il peso del fluido, cioè il prodotto del suo volume nella gravità specifica g, alla pressione p esercitata sul fondo CD, come sta MP ad MR, ovvero per la similitudine de' triangoli PMR, FAD, come FD ad FA, cioè $FD : FA :: DC \times FD \times g : p$; e perciò $p = DC \times FA \times g$. Il che era ecc.

Scolio.

E' di per sè chiaro, che qui si prescinde da quella qualunque aderenza, che le molecole del fluido aver possono colle pareti del tubo, come pure da quella forza, che ne' tubi minimi o *capillari* è già conosciuta, la qual opponendosi alle comuni leggi dell' Idrostatica altera e diversifica la pressione del fluido quando con diminuirne l' energia, quando con sospenderne l' esercizio.

Teorema I.

In un vaso ADQB *di qualunque forma (Fig. 2.) pieno di acqua fino in* BA, *la pressione, che soffre qualunque minima particella, o elemento delle sue pareti, equivale al peso d' un prisma d' acqua avente per base lo stesso elemento, e per altezza la sua profondità sotto il piano di livello* AB.

DIMOSTRAZIONE.

L' elemento *DC* del vaso può avere tre differenti posizioni perchè 1. un tubo prismatico perpendicolarmente applicato al detto elemento può incontrare il piano di livello *BA* senza passare pel vaso, come si vede nel tubo *DCEF*: 2. può essere parallelo al pian di livello, come *CDIL*: 3. può concorrere col piano di livello, passando però attraverso il vaso, siccome accade nel tubo *CDRS*.

Caso 1.° Stando l' acqua così nel tubo *CDFE*, come nel vaso comunicante *AQB* alla medesima altezza, o allo stesso livello *BAFN*, ed essendo tutto equilibrato, ne viene in conseguenza, che il luogo *DC* è tanto premuto esteriormente dall' acqua del tubo *DCFE*, quanto lo è internamente da quella del vaso, e che però anche interiormente è premuto con uno sforzo, che vale il peso d' un prisma d' acqua compreso sotto la base *CD* e sotto un' altezza uguale alla distanza verticale di *CD* dal piano di livello.

Caso 2.° Si pieghi il tubo orizzontale *CI* in un altro verticale *LN* che arrivi al piano di livello. Nel tubo *ONCD*, e nel vaso comunicante *AQB* la superficie superiore dell' acqua stagnante e tranquilla occupa lo stesso piano orizzontale. Laonde *CD* è premuto esteriormente dall' acqua contenuta nel tubo ricurvo *NOCD* colla stessa energia, ond' è premuto internamente dall' acqua del vaso *AQB*. Ma egli è evidente, che *CD* è premuto collo stesso sforzo che *LI*, ovvero il suo uguale *LM*, e che *LM* porta tutto il peso dell' acqua contenuta in *MO*, che lo preme verticalmente, il qual peso appartiene ad un volume d' acqua $= LM \times MN = CD \times MN$. Dunque con questo stesso sforzo è altresì premuto interiormente *CD* dall' acqua del vaso.

Caso 3.° Si adatti al vaso *AQB* un altro vaso *BCUT* di qualunque figura per modo che entrambi si tocchino in *CD*. L' acqua arriverà in ambedue allo stesso livello, e *CD* sarà premuto egualmente così dall' acqua del primo vaso al di dentro, come da quella del nuovo al di fuori, ed a questa seconda pressione equivale pel caso 1°. quella dell' acqua nel tubo *CDRS*, cioè a dire il peso d' un volume prismatico d' acqua,

qua, che ha *CD* per base, e per altezza la distanza del piano di livello. Il che era ecc.

TEOREMA II.

In un vaso di qualunque figura ACDB (*Fig.* 3. *e* 4.) *la pressione dell' acqua sul fondo orizzontale* CD *vale il peso d' un prisma d' acqua avente il fondo stesso per base, e la sua profondità sotto il pian di livello per altezza.*

DIMOSTRAZIONE.

Ciascun elemento del fondo *CD* è premuto col peso d' un volume d' acqua, che si ha moltiplicando l' elemento per la sua profondità sotto il piano di livello *AB*, ovvero per la profondità del fondo stesso sotto quel piano. Dunque tutto il fondo porta una pressione equivalente al peso d' una mole di acqua eguale al prodotto del fondo per la sua distanza dalla superficie superiore dell' acqua. Il che era ecc.

Di qui si comprende come una picciolissima porzione d' acqua possa esercitare una pressione enorme sopra una data superficie.

TEOREMA III.

La pressione, che esercita un fluido omogeneo contro una superficie qualunque, ha per misura il peso d' un volume di fluido uguale al prodotto di questa superficie per la distanza del suo centro di gravità dal pian di livello.

DIMOSTRAZIONE.

La pressione totale del fluido sopra una superficie qualunque, e comunque situata risulta dalla somma di tutte le pressioni sopra le parti infinitesime, ovvero gli elementi della stessa superficie, che è quanto dire dalla somma de' prodotti di questi elementi, moltiplicati ciascuno per la sua distanza dal pian di livello. Ma per la natura del centro di gravità, la somma de' prodotti di ciascun elemento della superficie per la ſua diſtanza da un piano fiſſo s' agguaglia al prodotto della ſuperficie intera moltiplicata per la diſtanza del ſuo centro di gravità dallo ſteſſo piano. * Dunque la preſſione contro la ſuperficie totale è miſurata dal peſo di una mole di fluido prodotta dal moltiplicare la ſuperficie per la diſtanza del ſuo centro di gravità dalla ſuperficie ſuperiore del fluido. Il che era ecc.

Quanto in appreſſo diremo circa la preſſione interna contro le pareti de' vaſi dall' acqua contenutavi vale ugualmente, com' è manifeſto, per la preſſione eſterna contro le ſteſſe pareti ne' vaſi, o corpi immerſi nell' acqua, ſuppoſta uguale nell' un caſo e nell' altro la riſpettiva diſtanza degli elementi delle pareti dal pian di livello. Dunque

I.

Un vaſo priſmatico pieno d' acqua tenuto colla baſe orizzontale ſoffre nella ſuperficie delle faccie laterali una preſſione uguale al peſo di tant' acqua, quant' è il prodotto della ſuperficie laterale moltiplicata per la metà dell' altezza del priſma. Ciò è evidente dall' eſſere il centro di gravità della ſuperficie del priſma alla metà della ſua altezza.

II.

Quindi ſi ricava, che la ſuperficie laterale d' un vaſo cubico pieno d' acqua prova una preſſione, che vale due volte il peſo dell' acqua; e che aggiuntavi la preſſione contro la baſe, la preſſione totale ha per miſura il triplo del peſo dell' acqua.

---

* Il Teorema della Statica è queſto: ſieno più peſi o maſſe M, M', M'', M''', ecc., e le riſpettive diſtanze dei centri di gravità di eſſe maſſe da un piano fiſſo ſieno D, D', D'', D''', ecc., e finalmente la diſtanza del loro comun centro di gravità dal medeſimo piano ſia Δ; ſarà ſempre la ſomma de' prodotti di ciaſcuna maſſa moltiplicata per la ſua riſpettiva diſtanza dal piano fiſſo uguale al prodotto della ſomma di dette maſſe moltiplicata per la diſtanza del comun centro di gravità dal piano medeſimo, cioè ſarà $MD + M'D' + M''D'' + M'''D''' +$ ecc. $= (M + M' + M'' + M''' +$ ecc.$)\,\Delta$.

III.

In un vaſo piramidale pieno d' acqua, tenuto colla baſe orizzontale all' ingiù, e colla cima rivolta all' insù per modo che il pian di livello ſia il piano orizzontale che paſſa per la cima, la preſſione contro la ſuperficie laterale ha per miſura il peſo di tant' acqua, quanta ſe ne ha con moltiplicare la detta ſuperficie per due terzi dell' altezza della piramide. In fatti il centro di gravità di quella ſuperficie ſta a due terzi dell' altezza della piramide, computando dalla cima.

IV.

Da ciò s' inferiſce, che nella ſteſſa piramide ſta *la preſſione contro la ſuperficie a quella contro la baſe, come ſtanno due terzi della ſuperficie alla baſe*.

V.

Che ſe il vaſo piramidale ſi tiene colla baſe orizzontale all' insù, e colla cima rivolta all' ingiù, allora *la preſſione contro la ſuperficie è miſurata dal peſo di quel volume d' acqua, che riſulta moltiplicando la ſuperficie pel terzo dell' altezza della piramide*.

VI.

Dal che ſi deduce, che *queſta ſeconda preſſione è la metà della prima; e che eſſa ſta alla preſſione fatta contro la baſe nella prima poſizione del vaſo, come ſta un terzo della ſuperficie alla baſe*.

VII.

Un vaſo cilindrico pieno d' acqua ſituato con baſe orizzontale porta nella ſuperficie curva tanta preſſione, quanto è il peſo d' un volume d' acqua riſultante dal moltiplicare quella ſuperficie per la metà dell' altezza del cilindro. Di fatti il centro di gravità della ſuperficie curva del cilindro è nel mezzo della ſua altezza.

VIII.

Da ciò s' inferiſce, che *nel cilindro retto equilatero la preſſione contro la ſuperficie curva è doppia della preſſione contro la baſe; ed aggiunta la preſſione contro la baſe, la preſſione totale contro tutta la ſuperficie vale tre volte il peſo dell' acqua premente*; come appunto nel vaſo cubico; *e finalmente la preſſione totale è ſeſquialtera della preſſione contro la ſuperficie curva.*

IX.

L' acqua, che riempie un vaſo conico poſato ſulla ſua baſe orizzontale, preme la ſuperficie curva con uno sforzo uguale al peſo di tant' acqua, quant' è il prodotto di queſta ſuperficie moltiplicata per due terzi dell' altezza del cono: perchè il centro di gravità della ſuperficie curva del cono trovaſi ai due terzi della ſua altezza, contando dalla punta.

X.

Ma ſe il vaſo conico ſi capovolge, ſicchè la baſe orizzontale ſia ſuperiore, allora la preſſione contro la ſuperficie curva è la metà della precedente.

XI.

Se il vaſo è un cono retto, tenuto nella prima ſituazione, ſta la preſſione contro la ſuperficie curva a quella contro la baſe, come due terzi del lato al ſemidiametro della baſe, e al peſo dell' acqua, che contiene, ſta come il doppio lato allo ſteſſo ſemidiametro.

XII.

Capovolto il cono retto, in queſta ſeconda ſituazione ſta la preſſione contro la ſuperficie curva al peſo dell' acqua, come il lato del cono al ſemidiametro della baſe.

XIII.

Circoscritto il cono retto al cilindro retto, sta la pressione contro la superficie curva del cono nella prima situazione alla pressione contro la superficie curva del cilindro, come due terzi del lato del cono al lato del cilindro; e nella seconda situazione, come un terzo del lato del cono al lato del cilindro.

XIV.

Supposto il cono equilatero, la pressione contro la superficie curva nella prima situazione è d' un terzo più grande che la pressione contro la base, ed uguaglia quattro volte il peso dell' acqua.

XV.

La pressione contro la base nella prima situazione del cono equilatero è sesquialtera della pressione contro la superficie curva nella seconda situazione.

XVI.

L' acqua, che riempie una sfera, ne preme la superficie con uno sforzo, il quale ha per misura il prodotto della superficie moltiplicata pel semidiametro.

XVII.

La pressione contro la superficie sferica fa tre volte il peso dell' acqua premente.

XVIII.

Dal n.° VIII. si raccoglie, che *la pressione contro tutta la premibile superficie del cilindro circoscritto alla sfera è sesquialtera della pressione contro la superficie della sfera*. E per tal modo quella proporzione sesquialtera, che *Archimede* con tanta gloria discoprì fra le superficie e le solidità del cilindro circoscritto e della sfera, viene ora qui estesa da noi anche alle pressioni, che soffrono le superficie di questi due corpi o riempiuti d' acqua o immersi nell'acqua fino alla loro sommità.

Delle Formole Generali delle Pressioni.

Passiamo ora a rintracciare le formole generali della pressione de' fluidi contro un piano qualunque immerso nel fluido in qualsivoglia positura, come pure contro le superficie curve de' corpi, o de' vasi rotondi generati per rotazione. L' applicazione di queste formole a qualche eletto esempio ci guiderà alla cognizione di alcune eleganti proprietà, che chiameremo *idrostatiche*, delle figure geometriche, che ci sono più familiari.

PROBLEMA I.

Determinare la pressione dell' acqua contro un piano qualunque, e comunque situato sotto il fluido premente.

SOLUZIONE.

Sia il piano $ABDF$ (*Fig.* 5.) circoscritto dalla retta orizzontale BD, dalla DF perpendicolare alla BD, dall' altra orizzontale FA, e da una linea o retta, o curva AB. Per ritrovare l' inclinazione del piano all' orizzonte, tirisi da F la retta orizzontale FG perpendicolare alla FA sicchè il piano AFG sia orizzontale. Essendo ora alla comune sezione AF dei due piani $BAFD$, AFG, perpendicolare la FG nel secondo piano, e la FD nel primo, sarà l' angolo GFD l' inclinazione del piano proposto all' orizzonte. Suppongasi, che il livello dell' acqua giunga al punto N della retta prodotta DF, e guidisi NO parallela alla FG: e perchè AF è perpendicolare così alla FD come alla FG, sarà anche il piano AFG perpendicolare al piano DFG, ovvero DNO, e però il piano DNO sarà verticale. Se ora dal punto O preso ad arbitrio nella retta NO casca al basso la verticale OH, si troverà questa nel predetto piano, e taglierà in H la retta DF, in G la FG. Guidate le ordinate infinitamente prossime HM, hm perpendicolari alla FD, e posta l' ascissa $FH = x$, l' ordinata $HM = y$, $BD = a$, $DF = b$, $FN = c$, l' angolo d' inclinazione $GFD = ONH = \phi$, sarà $OH = (c + x)$ sen. ϕ, e l' elemento Hm del piano, moltiplicato per la sua distanza HO dalla superficie superiore dell' acqua, rappresenterà la pressione elementare contro lo stesso piano, ossia la pressione contro l' elemento Hm, la quale in conseguenza si troverà $= (c + x)ydx$ sen. $\phi = (cydx + yxdx)$ sen. ϕ. Cercato quindi l' integrale di questa espressione per modo che esso si annulli insieme colla x, si otterrà la pressione contro il piano indeterminato $AFHM$; e sostituito b in vece di x nel detto integrale, si ha l' intera pressione contro il dato piano $FABD$. Il che era ecc.

Esempio I. Il piano $AFBD$ sia un rettangolo, e però $y = a$. La formola $\int (cydx + yxdx)$ sen. ϕ diventa $\int (acdx + axdx)$ sen. $\phi = (acx + \frac{1}{2} ax^2)$ sen. ϕ, dove fatto $x = b$, l' intera pressione contro il rettangolo diventa $(acb + \frac{1}{2} ab^2)$ sen. ϕ.

Se l' acqua non oltrepassa il lato superiore del rettangolo, cioè se $c = 0$, la detta pressione si trasforma in $\frac{1}{2} ab^2$ sen. ϕ, vale a dire nell' area del rettangolo moltiplicata per la metà dell' altezza dell' acqua sopra il lato inferiore del rettangolo.

Esempio II. Sia il piano proposto un triangolo rettangolo AFD (*Fig.* 6) colla punta rivolta in giù, e col lato superiore orizzontale FA. Sarà dunque $a = 0$, e posta $FA = f$, nascerà $y = \frac{f(b-x)}{b}$. Laonde $\int (c + x)ydx$ sen. ϕ

$$= \int \frac{f(b-x)}{b} (c + x) \text{ sen. } \phi = \left(fcx + \frac{1}{2} fx^2 - \frac{fcx^2}{2b}\right.$$

$-\frac{fx^3}{3b}$) fen. ϕ rappresenterà la pressione contro l' area indefinita *AFHM*; e fatta $x=b$, trovasi la pressione contro tutto il triangolo $=(\frac{1}{2}fcb+\frac{1}{6}fb^2)$ fen. ϕ.

Se il triangolo ha la punta rivolta in su, e il lato orizzontale all' ingiù, come nella Fig. 7, allora si ha $y=\frac{ax}{b}$, e

$$\int(c+x)ydx \text{ fen. } \phi=\int(c+x)\frac{ax}{b}dx \text{ fen. } \phi$$

$=(\frac{cax^2}{2b}+\frac{ax^3}{3b})$ fen. $\phi=$ alla pressione contro l'area *FMH*, e quindi posta $x=b$, risulta la pressione contro tutto il triangolo $=(\frac{1}{2}cab+\frac{1}{3}ab^2)$ fen. ϕ.

Nella prima situazione del triangolo, supponendo $c=0$, ovvero che il lato del triangolo arrivi al piano di livello, la pressione ricercata diventa $\frac{1}{6}fb^2$ fen. ϕ, cioè il prodotto del triangolo moltiplicato per un terzo dell' altezza dell' acqua sopra la punta inferiore del triangolo.

Nella seconda situazione, fatto lo stesso supposto di $c=0$, la pressione si muta in $\frac{1}{3}ab^2$ fen. ϕ, cioè nell' area del triangolo moltiplicata per due terzi dell' altezza dell' acqua sopra il lato orizzontale inferiore.

Esempio III. Cerchisi la pressione contro il semicircolo *FMD* (*Fig.* 8), il di cui diametro $FD=b$, $a=0$, $y=\sqrt{(bx-x^2)}$, $xdx=\frac{1}{2}bdx-ydy$. Perciò si ha $\int(cydx+yxdx)$ fen. $\phi=\int(c+\frac{1}{2}b)$ fen. $\phi ydx-\int y^2dy$ fen. ϕ $=(c+\frac{1}{2}b).FHM.$ fen. $\phi-\frac{1}{3}y^3$ fen. ϕ, e la pressione totale

contro

contro il semicircolo risulta $=\left(c+\frac{1}{2}b\right).FMD.\,\text{sen.}\,\phi=$ $\left(c+\frac{1}{2}b\right)\frac{b^2\pi}{8}\,\text{sen.}\,\phi$, posta $1:\pi$ la ragione del diametro alla circonferenza; e il doppio di questo valore somministra la pressione contro tutto il cerchio $FMDR$.

Esempio IV. Sia il piano dato un quadrante GCD, il di cui semidiametro superiore GC sia orizzontale, ed $=b$, CH' $=x$, $HM'=y$, $a=0$. Per la natura del cerchio si ha y^2 $=b^2-x^2$, ed $ydy=-xdx$. Dunque $\int(cydx+yxdx)\,\text{sen.}\,\phi$ $=\int cydx\,\text{sen.}\,\phi-\int y^2dy\,\text{sen.}\,\phi=c\,\text{sen.}\,\phi\,.\,GCHM'-\frac{1}{3}y^3\text{sen.}\,\phi$ $+\text{cost.}=c.GCHM'.\,\text{sen.}\,\phi+\left(\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{3}y^3\right)\text{sen.}\,\phi=$ alla pressione contro l' area indefinita $GCHM'$; e però la pressione contro tutto il quadrante GCD sarà $=c.GCD.\,\text{sen.}\,\phi+$ $\frac{1}{3}b^3\,\text{sen.}\,\phi=\left(\frac{c\pi}{4}+\frac{1}{3}b\right)b^2\,\text{sen.}\,\phi$, e questa raddoppiata dà la pressione contro il semicircolo GRD.

Esempio V. Sia il quadrante GFC, che ha il semidiametro inferiore orizzontale GC; se ne dimanda la pressione. Si ha $CG=CF=b$, $FH=x$, $HM=y$, $y^2=2bx-x^2$, xdx $=bdx-ydy$. Adunque $\int(cydx+yxdx)\,\text{sen.}\,\phi=$ $\int(c+b)ydx\,\text{sen.}\,\phi-\int y^2dy\,\text{sen.}\,\phi=(c+b).FMH.\,\text{sen.}\,\phi$ $-\frac{1}{3}y^3\,\text{sen.}\,\phi=$ alla pressione contro lo spazio indeterminato FMH. Laonde la pressione totale contro il quadrante diventa $\left(\frac{(c+b)\pi}{4}-\frac{1}{3}b\right)b^2.\,\text{sen.}\,\phi$, e il doppio esprime la pressione contro il semicircolo GFR col diametro inferiore orizzontale.

Esempio VI. Sia lo spazio parabolico FBD (*Fig.* 9) compreso dall' ordinata inferiore orizzontale $BD=a$, e dall' ascissa $DF = b$. Supposto p il parametro della parabola si ha $y = \sqrt{px}$. Dunque $\int (cydx + yxdx)$ sen. $\phi = \int cp^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$ sen. ϕ $+ \int p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx$ sen. $\phi = (\frac{2}{3} cx \sqrt{px} + \frac{2}{5} x^2 \sqrt{px})$ sen. $\phi =$ $\frac{2}{3} cxy$ sen. $\phi + \frac{2}{5} x^2 y$ sen. $\phi =$ alla pressione contro lo spazio FMH indefinito; e però la pressione contro tutto lo spazio FBD trovasi $(\frac{2}{3} cba + \frac{2}{5} b^2 a)$ sen. ϕ, e il doppio rappresenta la pressione contro lo spazio parabolico BOF colla doppia ordinata inferiore orizzontale BO.

Esempio VII. Vogliasi la pressione contro lo spazio parabolico ADF (*Fig.* 10) circoscritto superiormente dall' ordinata orizzontale $FA = a$, e dall' ascissa $FD = b$. Essendo $FH = x$, ed $HD = b - x$, l' equazione della parabola trovasi essere $y^2 = p(b - x)$. Adunque $\int (cydx + yxdx)$ sen. $\phi =$ $\int cdx \sqrt{(pb - px)}$ sen. $\phi + \int xdx$ sen. $\phi \sqrt{(pb - px)}$. Pongasi ora $\sqrt{(pb - px)} = u$, ed è $\int cdx$ sen. $\phi \sqrt{(pb - px)} +$ $\int xdx$ sen. $\phi \sqrt{(pb - px)} = \int - \frac{2cu^2 du \text{ sen. } \phi}{p}$

$$+ \int - \frac{2bu^2 du \text{ sen. } \phi}{p} + \int \frac{2u^4 du \text{ sen. } \phi}{p^2} = - \frac{2cu^3 \text{ sen. } \phi}{3p}$$

$$- \frac{2bu^3 \text{ sen. } \phi}{3p} + \frac{2u^5 \text{ sen. } \phi}{5p^2} + \text{cost.} = \frac{2(pb - px)^2 \text{ sen. } \phi \sqrt{(pb - px)}}{5p^2}$$

$$- \frac{2(c + b)(pb - px) \text{ sen. } \phi \sqrt{(pb - px)}}{3p} + \text{cost.}$$

$$= \frac{2}{3} b(c + b) \text{ sen. } \phi \sqrt{pb} - \frac{2}{5} b^2 \text{ sen. } \phi \sqrt{pb}$$

$$+ \frac{2(pb - px)^2 \text{ sen. } \phi \sqrt{(pb - px)}}{5p^2}$$

$-\frac{2(c+b)(pb-px)\,\text{sen.}\,\phi\sqrt{(pb-px)}}{3p}$, perchè svanisce la pressione annullandosi la x. Questo valore esprime la pressione contro lo spazio indefinito $FAMH$, e sostituendo in esso b per x risulta la pressione totale contro lo spazio parabolico $FAD=\frac{(10bc+4b^2)\,\text{sen.}\,\phi\sqrt{pb}}{15}$, e dal doppio di questo valore si ha la pressione contro lo spazio $FADQ$.

Esempio VIII. Cerchisi la pressione contro la semiellisse FBD (*Fig.* 11.) situata coll' asse minore BQ orizzontale. Chiamato a l' asse maggiore FD, b l' asse minore BQ, la proprietà dell' ellisse somministra l' equazione $a^2y^2=b^2(ax-x^2)$, e quindi $xdx=\frac{1}{2}adx-\frac{a^2ydy}{b^2}$. Laonde sarà la pressione contro lo spazio indefinito $FMH=\int(cydx+yxdx)\,\text{sen.}\,\phi=$ $\int(c+\frac{1}{2}a)ydx\,\text{sen.}\,\phi-\int\frac{a^2y^2dy\,\text{sen.}\,\phi}{b^2}=(c+\frac{1}{2}a).FMH.\,\text{sen.}\,\phi$ $-\frac{a^2y^3\,\text{sen.}\,\phi}{3b^2}$, e quindi la pressione totale contro la semiellisse $=(c+\frac{1}{2}a).\,FDB.\,\text{sen.}\,\phi=\frac{1}{8}(c+\frac{1}{2}a)\pi ab\,\text{sen.}\,\phi$, il di cui doppio esprime la pressione contro tutta l' ellisse in questa situazione, cioè coll' asse minore orizzontale.

Esempio IX. Sia da trovarsi la pressione contro il quadrante ellittico BDO, situato col diametro minore orizzontale, e rivolto all' insù. Chiamisi $\frac{1}{2}b$ il semiasse minore BO, $\frac{1}{2}a$ il maggiore OD, x la OH', y la $H'M'$, e si avrà a^2y^2 $=b^2(\frac{1}{4}a^2-x^2)$, $\frac{a^2ydy}{b^2}=-xdx$. Perciò $\int(cydx+yxdx)\,\text{sen.}\,\phi$ $=c.OBM'H'\,\text{sen.}\,\phi-\frac{a^2y^3\,\text{sen.}\,\phi}{3b^2}+\text{cost.}=c.OBM'H'.\,\text{sen.}\,\phi$ $+\frac{1}{24}a^2b\,\text{sen.}\,\phi-\frac{a^2y^3\,\text{sen.}\,\phi}{3b^2}=$ alla pressione contro l' area indefinita $OBM'H'$. Perlochè la pressione contro tutto il quadrante BDO sarà $= c.BDO.\text{sen}.\phi + \frac{1}{24}a^2b\,\text{sen}.\phi = \frac{1}{16}\pi cab\,\text{sen}.\phi + \frac{1}{24}a^2b\,\text{sen}.\phi$, e il doppio di questo valore darà la pressione contro la semiellisse BDQ avente l' asse minore orizzontale rivolto all' insù.

Esempio X. Se fosse da cercarsi la pressione contro il quadrante ellittico FBO, situato col semiasse minore orizzontale BO rivolto all' ingiù, basterebbe nell' equazione (*Esemp.* VIII.) $\left(c + \frac{1}{2}a\right).FMH\,\text{sen}.\phi - \frac{a^2y^3\,\text{sen}.\phi}{3b^2}$ sostituire $\frac{1}{2}b$ in luogo di y, d' onde nascerebbe $\frac{1}{16}\left(c + \frac{1}{2}a\right)\pi ab\,\text{sen}.\phi - \frac{1}{24}a^2b\,\text{sen}.\phi =$ alla pressione contro il quadrante ellittico FBO, e il doppio di questo valore esprimerebbe la pressione contro la semiellisse FBQ coll' asse minore orizzontale rivolto in giù.

Esempio XI. Dimandasi la pressione contro la semiellisse FBD (*Fig.* 12) situata col semiasse maggiore BO orizzontale, e coll' asse minore FD inclinato all' orizzonte. Ritenute le denominazioni di prima, trovasi per la natura dell' ellisse $\frac{b^2y^2}{a^2} = bx - x^2$, e però $xdx = -\frac{b^2ydy}{a^2} + \frac{1}{2}bdx$. Dunque $\int(cydx + yxdx)\,\text{sen}.\phi = \left(c + \frac{1}{2}b\right).FMH.\,\text{sen}.\phi - \frac{b^2y^3\,\text{sen}.\phi}{3a^2}$ $=$ alla pressione contro lo spazio indefinito FMH, e in conseguenza la pressione totale contro la semiellisse risulta $= \frac{1}{8}\left(c + \frac{1}{2}b\right)\pi ab\,\text{sen}.\phi$, il qual valore duplicato dà la pressione contro tutta l' ellisse $BFQD$ situata coll' asse maggiore orizzontale e col minore inclinato all' orizzonte.

Esempio XII. Se vuolsi la pressione contro il quadrante ellittico BDO col semiasse maggiore orizzontale rivolto all' insù; posta $OH' = x$, $H'M' = y$, si ha l' equazione $\frac{b^2y^2}{a^2} = \frac{1}{4}b^2 - x^2$, e quindi $xdx = -\frac{b^2ydy}{a^2}$, e conseguentemente

$\int (cydx + yxdx)$ sen. $\phi = c . OBM'H'$. sen. $\phi - \frac{b^2y^3 \text{ sen. } \phi}{3a^2} +$ cost. $= c . OBM'H'$. sen. $\phi + \frac{1}{24} b^2 a$ sen. $\phi - \frac{b^2y^3 \text{ sen. } \phi}{3a^2} =$ alla pressione contro lo spazio indefinito $OBM'H'$; e però la pressione totale contro il quadrante BDO sarà $= \frac{1}{16} \pi cab$ sen. ϕ $+ \frac{1}{24} b^2 a$ sen. ϕ, il qual valore duplicato rappresenta la pressione contro la semiellisse BDQ situata coll' asse maggiore orizzontale rivolto all' insù.

Esempio XIII. Se trattasi di trovare la pressione contro il quadrante ellittico FBO situato col semiasse maggiore orizzontale BO rivolto al basso, allora basta nell' equazione (*Esemp.* XI.) $(c + \frac{1}{2} b) . FMH$. sen. $\phi - \frac{b^2y^3 \text{ sen. } \phi}{3a^2}$, la quale rappresenta la pressione contro lo spazio indefinito FMH, sostituire il quadrante FBO in vece di FMH, ed $\frac{1}{2} a$ in luogo di y, ed hassi $(c + \frac{1}{2} b) . FBO$. sen. $\phi - \frac{1}{24} b^2 a$ sen. $\phi =$ $\frac{1}{16} (c + \frac{1}{2} b) \pi ab$ sen. $\phi - \frac{1}{24} ab^2$ sen. $\phi =$ alla pressione contro il quadrante ellittico FBO; e il doppio di questo valore rappresenta la pressione contro la semiellisse FBQ situata coll' asse maggiore orizzontale rivolto all' ingiù.

Esempio XIV. Sia da trovarsi la pressione contro lo spazio Iperbolico FBD (*Fig.* 13) circoscritto dall' ordinata orizzontale inferiormente $BD = b$, e dall' ascissa $FD = k$ inclinata all' orizzonte. Nominando a l' asse principale dell' Iperbola, b il conjugato, si sa, l' equazione di questa curva essere $\frac{a^2y^2}{b^2} = ax + x^2$, e quindi $xdx = \frac{a^2ydy}{b^2} - \frac{1}{2} adx$. Perciò $\int (cydx + yxdx)$ sen. $\phi = (c - \frac{1}{2} a) . FMH$. sen. $\phi + \frac{a^2y^3 \text{ sen. } \phi}{3b^2} =$ alla pressione contro lo spazio indefinito FMH. Laonde la pressione totale contro lo spazio proposto FBD sarà $=$ $\left(c - \frac{1}{2}a\right).FBD.\text{sen}.\phi + \frac{a^2b^3\,\text{sen}.\phi}{3b^2}$, e il doppio rappresenterà la pressione contro il doppio spazio FBC.

Esempio XV. Sia finalmente da determinarsi la pressione contro lo spazio iperbolico inverso FBD (*Fig.* 14) compreso superiormente dall' ordinata orizzontale $FB = h$, e dall' ascissa $FD = k$. Posta pertanto $FH = x$, $HM = y$, la proprietà dell' iperbola somministra l' equazione $\frac{a^2y^2}{b^2} = a(k-x) + (k-x)^2 = ak + k^2 - ax - 2kx + x^2$, dalla quale si ottiene $xdx = \frac{a^2ydy}{b^2} + \left(\frac{1}{2}a + k\right)dx$. Adunque

$$\int (cydx + yxdx)\,\text{sen}.\phi = \left(c + \frac{1}{2}a + k\right).FBMH.\,\text{sen}.\phi + \frac{a^2y^3\,\text{sen}.\phi}{3b^2} + \text{cost.} = \left(c + \frac{1}{2}a + k\right).FBMH.\,\text{sen}.\phi - \frac{a^2b^3\,\text{sen}.\phi}{3b^2} + \frac{a^2y^3\,\text{sen}.\phi}{3b^2}$$

$=$ alla pressione contro lo spazio indefinito $FBMH$. Perlochè la pressione totale contro il dato spazio FBD trovasi $= \left(c + \frac{1}{2}a + k\right).FBD.\,\text{sen}.\phi - \frac{a^2b^3\,\text{sen}.\phi}{3b^2}$, il doppio di cui esprime la pressione contro il doppio spazio BCD situato colla doppia ordinata orizzontale rivolta all' insù.

PROBLEMA II.

Nel vaso DAHGFEBC (Fig. 15), *che ha per base orizzontale il rettangolo* ADCB, *e per uno de' suoi lati ha il rettangolo* DAHG *comunque inclinato all' orizzonte, arriva l' acqua sino ad* HF; *e in un altro vaso* DAHGQPRS *situato sulla predetta base prolungata ed avente lo stesso lato* DAHG *giugne l' acqua sino al punto* O: *cercasi qual sarà la pressione, che soffre quel lato secondo una sola e medesima direzione.*

SOLUZIONE.

Tirisi per O la verticale MON; e sarà (*Esemp. I.*) la pressione esercitata dall' acqua del primo vaso X contro il lato rettangolare $DAHG = DA.AH.\frac{1}{2}MN$, e la pressione esercitata dall' acqua del secondo vaso Z contro il lato rettangolare $OTDA$ sarà $= DA.AO.\frac{1}{2}MO$, ed esercitandosi questa seconda pressione in una direzione opposta alla prima si avrà in conseguenza la pressione contro tutto il lato $DAHG$ verso una sola e medesima direzione $= DA.AH.\frac{1}{2}MN - DA.AO.\frac{1}{2}MO$, ovvero (essendo $NM:MO::HA:AO$) $= \frac{1}{2}MN.DA.AH$ $-\frac{1}{2}\frac{DA.HA.MO^2}{MN} = \frac{DA.AH}{2MN}(MN^2 - MO^2)$. Il che era ecc.

La suddetta pressione seguita adunque la ragione della differenza dei quadrati di MN e di MO, cioè delle altezze dell' acqua ne' due vasi.

PROBLEMA III.

Sopra il piano inclinato NMPO (Fig. 16.) *giace il vaso prismatico retto pieno d' acqua* GADHFECB, *del quale le due faccie opposte* GADH, BFEC *sono due trapezj paralleli, simili ed uguali, i di cui lati* BF, CE, AG, DH, *in questa giacitura del prisma vengono a riuscire verticali, e co' loro estremi* G, H, F, E, *giungono allo stesso piano orizzontale; cercasi la pressione contro le due faccie rettangole verticali* BAGF, DHEC, *e quindi lo sforzo, col quale il prisma tenderà a discendere pel piano inclinato.*

SOLUZIONE.

La preſſione contro il rettangolo $GABF$ ſi è trovata $(Eſemp. I.) = \frac{1}{2} AB . BF^2$, e quella contro il rettangolo $DCEH$ $= \frac{1}{2} DC . CE^2 = \frac{1}{2} AB . CE^2$; e queſte preſſioni eſercitandoſi in direzioni oppoſte, riſulta la preſſione, colla quale il priſma viene orizzontalmente ſpinto alla diſceſa $= \frac{1}{2} AB (BF^2 - CE^2)$. Il che era ecc.

Pongaſi $AB = a$, $BF = b$, l' angolo d' inclinazione $MP\mathfrak{Q} = \omega$, e tirata l' orizzontale $CR = FE = f$, ſarà l' angolo $BCR = \omega$, $BR = f . \text{tang. } \omega = BF - FR = BF - CE$, cioè $CE = b - f . \text{tang. } \omega$. Sarà dunque il trapezio $BFEC =$ $\frac{1}{2} FE (BF + CE) = \frac{1}{2} f (2b - f . \text{tang. } \omega)$, e quindi il volume del priſma $= \frac{1}{2} af (2b - f . \text{tang. } \omega)$. Dicaſi $\mathfrak{Q}$ il peſo di queſto priſma pieno d' acqua; e poichè abbiamo la preſſione orizzontale, tendente a far diſcendere il priſma $=$ $\frac{1}{2} a \left(b^2 - (b - f . \text{tang. } \omega)^2 \right) = \frac{1}{2} af . \text{tang. } \omega \left(2b - f . \text{tang. } \omega \right)$, ſarà perciò una tal preſſione $= \mathfrak{Q} . \text{tang. } \omega$.

Chiamato q il peſo del vaſo priſmatico vuoto, è noto dalla Statica, che un peſo $\mathfrak{Q} + q$ ſituato ſovra il detto piano inclinato viene tenuto in equilibrio ſul piano ſteſſo da una forza orizzontale $= (\mathfrak{Q} + q) \text{ tang. } \omega$. Ma per tenere in equilibrio il detto priſma pieno d' acqua, non baſta una forza orizzontale, la quale ſoſtenga ſul piano inclinato il peſo $\mathfrak{Q} + q$ di quel priſma, richiedendoſi inoltre un' altra forza per equilibrare la preſſione orizzontale $\mathfrak{Q} . \text{tang. } \omega$. Conſeguentemente il priſma viene ſoſtenuto ſul piano inclinato da una forza orizzontale $= (2 \mathfrak{Q} + q) \text{ tang. } \omega$.

SCOLIO.

SCOLIO.

Avvertasi qui, che non si è voluto tener conto di quella pressione orizzontale, che risulta dalla pressione contro la base *ADCB*, la qual pressione orizzontale riscontrasi eguale e contraria alla già ritrovata, siccome appunto dee succedere, essendo noto, che le pressioni orizzontali si annullano sempre in tutti i vasi, o corpi esposti alla pressione dell' acqua. Rappresenti in fatti il trapezio *BFEC* la sezione verticale fatta con un piano verticale e perpendicolare alle due faccie *GB*, *HC*; e la pressione contro la base *BC* del trapezio espressa dalla normale *TX* si risolva nella verticale *TY*, e nella orizzontale *XY*, e starà $TX:XY::BC:BR$, e però $XY=\frac{TX.BR}{BC}$.

Siccome poi la pressione $TX=BC.\frac{1}{2}(BF+CE)$, sarà $XY=\frac{1}{2}(BF+CE).BR=\frac{1}{2}(BF+CE).(BF-CE)=\frac{1}{2}BF^2-\frac{1}{2}CE^2$, e questa moltiplicata per *AB* dà la pressione orizzontale risultante dalla pressione contro la base *ADCB*, che si trova appunto uguale, e contraria alla precedente. E' un errore di non pochi acclamati Scrittori quello di credere, che l' acqua a motivo delle pressioni, con cui spinge ed incalza secondo tutte le direzioni le pareti de' vasi, che la contengono, possa produrre ne' vasi d' una data forma situati sulle loro basi orizzontali un rovesciamento, o capitombolo, laddove all' opposto la stessa acqua ghiacciata lascia il vaso ritto ed immobile sulla sua base; per modo che sia una differenza essenziale in ordine alla sua stabilità, che il vaso si trovi pieno di acqua fluida, oppure d' acqua ghiacciata. Per togliere un tal pregiudizio, e mostrare, che i due stati opposti dell' acqua, cioè di fluidità, e di solidità non possono cagionare la menoma alterazione o divario nello stato del vaso in riguardo al reggersi sulla sua base, o al rovesciarsi, basterà far vedere che la *risultante* di tutte le pressioni esercitate dall' acqua fluida contro tutte le pareti del vaso perfettamente coincide colla *linea di direzione*, secondo la quale agisce tutto il peso dell' acqua o del ghiaccio. Sia a cagion d' esempio il triangolo verticale BAC (*Fig.* 25) colla base orizzontale BC, e suppongasi la sua aja formata d' uno strato di acqua premente contro i lati del triangolo. Tirisi dalla punta A del triangolo sulla base orizzontale prolungata BC la perpendicolare AM. E' noto, che la base BC soffre una pressione $=BC.AM$, che questa pressione passa pel punto di mezzo N della base, e può rappresentarsi colla retta verticale QN. Parimente il lato AB risente una pressione $= \frac{1}{2} AB.MA$, la quale passa pel *centro di pressione* S, che è ai due terzi di AB contando da A, come si deduce dalla Teoria del centro di pressione che esporremo più sotto, e può rappresentarsi colla retta IS normale ad AB. Risoluta poscia la pressione IS nella orizzontale IO, e nella verticale OS tendente all' insù, trovasi $OS = \frac{BM.IS}{BA} = \frac{1}{2} BM.MA$. Così pure se la pressione contro il lato AC, la quale è $= \frac{1}{2} AC.AM$, si concepisce applicata al centro di pressione in F ai due terzi di AC contando da A, e si esprime colla retta FR perpendicolare ad AC, e si risolve nell' orizzontale RP, e nella verticale FP tendente all' ingiù, se ne deduce tosto $FP = \frac{CM.FR}{AC} = \frac{1}{2} CM.MA$. Abbiamo dunque tre forze verticali, che agiscono contro i lati del triangolo, cioè

$$1.^\circ + QN = BC.MA,$$

$$2.^\circ - OS = -\frac{1}{2} BM.MA,$$

$$3.^\circ + FP = \frac{1}{2} CM.MA.$$

La distanza della prima dal punto M è $= MC + \frac{1}{2} CB$; la distanza della seconda è $= \frac{2}{3} BM = \frac{2}{3} CM + \frac{2}{3} CB$; quella della terza è $= \frac{2}{3} CM$. Dunque per la dottrina Statica de' Momenti la distanza della *risultante* di queste tre forze dallo stesso punto M sarà

$$= \frac{QN(MC + \frac{1}{2} CB) + FP \cdot \frac{2}{3} CM - OS(\frac{2}{3} MC + \frac{1}{3} CB)}{QN + FP - OS}$$

$$= \frac{BC \cdot MA(MC + \frac{1}{2} CB) + \frac{1}{2} CM \cdot MA \cdot \frac{2}{3} CM - \frac{1}{2} BM \cdot MA(\frac{2}{3} MC + \frac{1}{3} CB)}{BC \cdot MA + \frac{1}{2} CM \cdot MA - \frac{1}{2} BM \cdot MA}$$

$$= \frac{BC(MC + \frac{1}{2} CB) + \frac{1}{3} CM^2 - \frac{1}{2}(BC + CM)(\frac{2}{3} CM + \frac{1}{3} CB)}{\frac{1}{2} BC}$$

$= \frac{2}{3} MC + \frac{1}{3} BC$. Ora questa distanza è appunto quella della linea di *direzione* EG dal detto punto M; poichè venendo essa condotta verticalmente dal centro di gravità E del triangolo posto ai due terzi della AN che biparte la base, viene ad essere, a motivo di $AE = \frac{2}{3} AN$, $GM = \frac{2}{3} NM = \frac{2}{3} MC + \frac{2}{3} CN = \frac{2}{3} MC + \frac{1}{3} CB$. Dunque la *risultante* di tutte le pressioni contro il perimetro del triangolo coincide colla *linea di direzione*.

PROBLEMA IV.

Determinare la pressione dell' acqua contro le pareti curve de' vasi rotondi, ossia di rotazione.

SOLUZIONE.

Rotisi la linea AMP (*Fig.* 17.) intorno all' asse verticale BD, e descriva un vaso rotondo, il quale riempiasi d' acqua. Si cerca la pressione sopra la superficie curva del vaso. Condotte le ordinate ortogonali infinitamente vicine MN, mn, e fatta $PD = a$, $AB = b$, $BD = c$, $BF = x$, MF

$=y$, $AM=s$, ed $1:\pi=$ al rapporto del diametro alla circonferenza del cerchio, sarà $2\pi y=$ alla circonferenza del cerchio, che ha MF per raggio; e però l'elemento della superficie curva del vaso sarà $=2\pi y \,.\, Mm = 2\pi y ds$, e la pressione contro questo elemento sarà $=2\pi yx ds = 2\pi yx \sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Quindi integrata questa pressione elementare per modo che l' integrale si annulli colla x, si ottiene la pressione contro la superficie indefinita $AMNC$; e posto poi c per x nell' integrale si ha la pressione contro tutta la superficie curva. Il che era ecc.

Esempio I. Vuolsi conoscere la pressione contro la superficie curva del cono retto troncato. In tal supposto egli è visibile, che la linea AMP è $=\sqrt{(c^2+(b-a)^2)}$, cui diremo h. E altresì manifesto, che si ha $s:h::x:c$, e perciò $s=\frac{hx}{c}$, e $ds=\frac{hdx}{c}$. Inoltre egli è visibile, che sta $b-y:x::b-a:c$; laonde $y=b-\frac{(b-a)x}{c}$. Dunque

$$\int 2\pi yxds = \int \left(2bx - \frac{2(b-a)x^2}{c}\right)\frac{\pi hdx}{c} =$$

$\frac{\pi h}{c}\left(bx^2 - \frac{2(b-a)x^3}{3c}\right) =$ alla pressione contro la superficie curva indefinita $AMNC$. Posto c in luogo di x si ricava $2\pi hc\left(\frac{1}{6}b+\frac{1}{3}a\right) =$ alla pressione contro la superficie curva intera del cono troncato.

Il valore di questa pressione assegnato da alcuni celebri Idrostatici è palesemente erroneo, e l'errore è nato per aver essi supposto, che due lati del cono troncato infinitamente vicini rinchiudessero fra di sè sulla superficie del cono un rettangolo, laddove essi comprendono un trapezio di basi parallele.

Esempio II. Si cerca la pressione contro la superficie curva $BMILN$ (*Fig.* 18) del segmento sferico generato dalla rotazione dell' arco circolare BMI intorno al diametro verticale BD. Essendo $BF=x$, $MF=y$, e il raggio del circolo $=r$, si ha $y=\sqrt{(2rx-x^2)}$, e $dy=\frac{(r-x)dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$; e quindi $dx^2+dy^2=ds^2=\frac{r^2dx^2}{y^2}$, ovvero $ds=\frac{rdx}{y}$; e quest' ultimo valore surrogato nella formola $\int 2\pi yxds$, ella si trasforma in $\int 2\pi rxdx=\pi rx^2=$ alla pressione contro la superficie indefinita *BMN*. Siccome poi è $\pi rx^2=2\pi rx.\frac{1}{2}x$, cioè $=$ alla superficie del segmento moltiplicata per la metà della saetta, o dell' altezza dell' acqua sopra *MN*, perciò un tal prodotto rappresenta la pressione suddetta.

Esempio III. Se la superficie del segmento sferico fosse *PDS* colla base orizzontale rivolta all' insù; allora posta $RU=x$, $UM'=y$, $RD=b$, e però $DU=b-x$, l' equazione del circolo dà $y=\sqrt{(2r(b-x)-(b-x)^2)}$, e quindi $dy=\frac{-rdx+(b-x)dx}{\sqrt{(2r(b-x)-(b-x)^2)}}$, $dy^2+dx^2=\frac{r^2dx^2}{y^2}$, $\sqrt{(dy^2+dx^2)}=ds=\frac{rdx}{y}$. Dunque $\int 2\pi yxds=\int 2\pi rxdx$ $=\pi rx^2$, vale a dire la pressione contro la superficie indefinita *PM'N'S* equivale al prodotto della superficie istessa moltiplicata per la metà della sua saetta, o ascissa *RU*, ovvero per la metà dell' altezza dell' acqua sopra *M'N*.

Laonde la superficie curva d' un segmento sferico pieno d' acqua, o sia esso a foggia di cupola, o sia rinchiuso fra due cerchj paralleli soffre una pressione, che ha per misura la stessa superficie moltiplicata per la metà della saetta. Osservisi qui, che sempre nel mezzo della saetta trovasi il centro di gravità della superficie curva del segmento.

La formola $\int 2\pi yxds$ dà la pressione contro la superficie curva del vaso soltanto nell' ipotesi, che l' acqua non oltrepassi l' orlo superiore del vaso, ed abbia x per altezza sopra l' elemento della superficie: che se l' acqua giugnesse più su della superficie del vaso per modo che l'altezza di quella sopra l' orlo di questo fosse $=h$, è chiaro, che in tal caso la formola della pressione diverrebbe $\int 2\pi y(h+x)ds$, la quale si tratta con ugual facilità che la prima.

PROBLEMA V.

Nell' argine, o riparo rettangolare OPMN *d' un fiume* (Fig. 16.) *giugne l' acqua da* OP *fino ad* IK; *cercasi lo sforzo, con cui l' argine sarà spinto dall' acqua orizzontalmente, e quello, con cui sarà spinto dalla medesima all' ingiù verticalmente.*

SOLUZIONE.

Chiamato ω l' angolo d' inclinazione MPQ dell' argine, $PK=a$, $KI=PO=b$, e la verticale $KU=h$, risulta la pressione contro l' argine (*Probl. I. Esemp. I*) $=\frac{1}{2}abh=\frac{bh^2}{2\,\text{sen.}\,\omega}$. Ma questa pressione si esercita in una direzione KS perpendicolare al piano dell' argine; perciò se ne faccia la risoluzione nelle due pressioni laterali KL, KZ, quella orizzontale, questa verticale. Ora è noto dalla Statica, che sta $KS:KL:LS$ $::1:\text{sen}\,\omega:\text{cos.}\,\omega::$ Press. perpend.: Press. orizz.: Press. vertic. Dunque Press. orizz. $=\frac{bh^2}{2\,\text{sen.}\,\omega}\,\text{sen.}\,\omega=\frac{1}{2}bh^2$; Press. vertic. $=\frac{bh^2}{2\,\text{sen.}\,\omega}\,\text{cos.}\,\omega=\frac{1}{2}bh^2\,\text{cot.}\,\omega$. Il che era ecc.

PROBLEMA VI.

Una cataratta, ossia una tavola rettangolare verticale chiude in un canale, o cisterna all' acqua l' uscita: cercasi quanta forza sia d' uopo per alzarla, e dar l' esito all' acqua.

SOLUZIONE.

Detta b la base della cataratta, a l' altezza, c la distanza del suo lato superiore dal pian di livello, che si suppone più alto, si sa per le cose già dimostrate, che la pressione contro la cataratta è $= ab\left(\frac{1}{2}a + c\right)$. Con siffatta pressione è dunque direttamente spinta la cataratta contro gl' incastri. Laonde supposto l' attrito una parte $n.^{esima}$ della pressione, risulterà l' attrito della cataratta cogl' incastri $= \frac{1}{2n}\, ab\,(a + 2c)$, ed aggiunto a questo il peso p della cataratta, ci vorrà una forza $= \frac{ab(a+2c) + 2np}{2n}$ per far equilibrio colla resistenza della cataratta, e un pò maggiore per sollevarla. Il che era ecc.

Reca meraviglia il vedere presso alcuni celebri moderni Scrittori di Meccanica, che per calcolare la forza necessaria a sollevare la cataratta non solamente si mette in conto la resistenza dello sfregamento contro gl' incastri, ed il peso della cataratta, ma ben anche la pressione totale esercitata dall' acqua contro il piano della cataratta, e si stabilisce in conseguenza, dover essere la detta forza un pò maggiore della somma di queste tre. Ma essendo la pressione dell' acqua contro la cataratta perpendicolare alla medesima, ed anche alla direzione della forza, che tende a sollevarla, è cosa innegabile, che l' una non può nè punto nè poco impedire l' effetto dell' altra e non può quindi la pressione entrare nel calcolo se non per quella parte che costituisce lo sfregamento.

Se il lato superiore della cataratta giugne al pian di livello, ovvero è $c = o$, egli è evidente, che a misura che la cataratta si va inalzando una minor parte di essa resta esposta alla pressione dell' acqua. Suppongasi inalzata di tanto, che la distanza del suo lato inferiore dal pian di livello sia $= x$, e però la pressione in tal caso diventi $= \frac{1}{2}bx^2$, e l' attrito $= \frac{bx^2}{2n}$. La forza motrice, colla quale la cataratta tende a diſcendere, qualora venga abbandonata, trovaſi $= p - \frac{bx^2}{2n}$, e l' acceleratrice $= 1 - \frac{bx^2}{2np}$. Perciò chiamato t il tempo, in cui la cataratta diſcende per l' altezza x, v la ſua velocità nel termine del tempo t, ſi avrà $(1 - \frac{bx^2}{2np})dt = dv$, cioè, eſſendo $dt = \frac{dx}{v}$, ſi otterrà $(1 - \frac{bx^2}{2np})dx = vdv$, ed integrando $x - \frac{bx^3}{6np} = \frac{1}{2}v^2$, $v = \sqrt{(2x - \frac{bx^3}{3np})}$, e quindi $dt = \frac{dx}{\sqrt{(2x - \frac{bx^3}{3np})}}$, $t = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x - \frac{bx^3}{3np})}}$. Ma ſe $p < \frac{bx^2}{2n}$, allora la cataratta non diſcende, e fa d' uopo d' una forza capace di vincer l' attrito per farla diſcendere. Sia queſta forza il peſo q, ed avremo $q + p - \frac{bx^2}{2n} =$ alla forza motrice della diſceſa, e però $1 - \frac{bx^2}{2n(p+q)} =$ alla acceleratrice. Laonde $(1 - \frac{bx^2}{2n(p+q)})dx = vdv$, $x - \frac{bx^3}{6n(p+q)} = \frac{1}{2}v^2$, $v = \sqrt{(2x - \frac{bx^3}{3n(p+q)})}$, $t = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x - \frac{bx^3}{3n(p+q)})}}$.

Qualora vogliaſi ſollevare la cataratta, dicaſi f la forza impiegata per ſollevarla, e ſia $a - x$ la di lei ſalita nel tempo t colla velocità v. La forza motrice della ſalita ſarà dunque $f - p - \frac{bx^2}{2n}$, e però $\frac{2nf - 2np - bx^2}{2n(f+p)}$ ſarà la forza acceleratrice. Conſeguentemente ſi ottiene $\frac{(2nf - 2np - bx^2)dx}{2nf + 2np} = vdv$, e quindi

(2nf—

$\frac{(2nf-2np)x-\frac{1}{3}bx^3}{2nf+2np}=\frac{1}{2}v^2+$ cost., ed essendo $v=0$ quando $x=a$, si ha $v^2=\frac{(2nf-2np)(x-a)+\frac{1}{3}b(a^3-x^3)}{n(f+p)}$, cioè $v=\sqrt{\frac{(2nf-2np)(x-a)+\frac{1}{3}b(a^3-x^3)}{n(f+p)}}$; e finalmente

$$t=\int\frac{dx\sqrt{(n(f+p))}}{\sqrt{((2nf-2np)(x-a)+\frac{1}{3}b(a^3-x^3))}}.$$

Del Centro di Pressione.

Una cosa degna di considerazione nella Dottrina della pressione dei Fluidi è quella, che riguarda il *Centro di Pressione*. Dicesi pertanto Centro di pressione quel punto della superficie premuta, nel quale si concepisce concentrata e raccolta l'intera pressione, che è distribuita e dispersa per tutti i punti della superficie; ovvero quel punto, al quale applicata una forza uguale e contraria all'intera pressione bilancia e distrugge tutto l'effetto di questa, per modo che se la pressione tende ad imprimere alla superficie un moto qualunque, la forza uguale e contraria applicata al centro della pressione impedisce e distrugge un tal moto.

PROBLEMA VII.

Ritrovare il Centro di pressione di qualunque superficie piana BAFG (Fig. 19) *divisa in due parti uguali e simili dalla linea delle ascisse* MI, *ed immersa dentro un fluido omogeneo a qualunque profondità, e sotto qualunque inclinazione al pian di livello, purchè le ordinate* AM, CE, ecc. *siano parallele al detto piano.*

SOLUZIONE.

La comune sezione del pian di livello, e del piano proposto *GFAB* prodotto sia la retta *OQ*, e condotte le due doppie ordinate infinitamente prossime CD, cd, lo spazietto $CDdc$ sarà l'elemento dell'area indefinita $ACDB$. Ora questo elemento soffre dal fluido, che vi gravita sopra, una pressione equivalente al peso d'un volume di fluido che nasce dal moltiplicare l'elemento per la sua distanza dal pian di livello, la qual distanza è per ipotesi la stessa per tutti i punti di detto elemento. Si conduca EO normale ad OQ, e dal punto O si guidi nel pian di livello la OR normale all'istessa OQ, e finalmente alla OR s'inalzi dal punto E la perpendicolare ER: egli è manifesto, che ER sarà la mentovata distanza, ed EOR l'angolo d'inclinazione del dato piano all'orizzonte; e conseguentemente l'elemento $CDdc$ moltiplicato per ER rappresenta la pressione elementare contro il piano indefinito $CABD$. Considerata pertanto questa pressione elementare a guisa d'un peso, il quale si riferisce alla retta OQ come all'*asse de' momenti*, risulta per le dottrine della Statica il momento della pressione elementare con moltiplicare questa per la distanza EO dall'asse de' momenti. Presa dunque sulla linea delle ascisse la $ME = x$, l'ordinata $EC = y$, $MN = a$, l'angolo delle coordinate ovvero $ENO = \phi$, l'inclinazione del piano all'orizzonte, ossia l'angolo $EOR = \omega$, si ottiene $EO = (a+x)\,\text{sen.}\,\phi$, $ER = (a+x)\,\text{sen.}\,\phi\,\text{sen.}\,\omega$, $CDdc = 2ydx.\,\text{sen.}\,\phi$. Laonde il momento della pressione elementare trovasi $= 2ydx\,(a+x)^2\,\text{sen.}\,\omega\,\text{sen.}^2\,\phi$; e quindi la somma de' momenti delle pressioni nell'area indefinita $ABDC$ sarà $=$

$\int 2ydx\,(a+x)^2\,\text{sen.}\,\omega\,\text{sen.}^3\,\phi$. Una tal somma per le dottrine della Statica debb'essere uguale al momento, che ha tutta la pressione esercitata contro l'area medesima $ABCD$, qualora essa pressione si concepisca concentrata e raccolta nel centro di pressione, e riferita all'istesso asse OQ. Perciò essendo tutta la pressione contra l'area indefinita $=$

$\int 2ydx\,(a+x)\,\text{sen.}\,\omega\,\text{sen.}^2\,\phi$, se si chiama Δ la distanza del centro di pressione dall'asse de' momenti si avrà l'ugualtà

$$\int 2ydx\,(a+x)\,\text{sen.}\,\omega\,\text{sen.}^3\,\phi = \Delta \int 2ydx\,(a+x)\,\text{sen.}\,\omega\,\text{sen.}^2\,\phi,$$

e conseguentemente $\Delta = \frac{\int y dx (a + x)^2 \text{ sen. } \phi}{\int y dx (a + x)}$. Ritrovata per tal modo la distanza del centro di pressione dall'asse de' momenti, ed essendo altronde evidente, che non può il detto centro uscire dalla linea delle ascisse MI, la quale divide per ipotesi il dato piano in due parti simili, ed uguali, resterà in conseguenza determinata la posizione del centro di pressione. Il che era ecc.

Supposte le ordinate ortogonali, cioè $\phi = 90^\circ$, ed oltracciò $a = 0$, il valore di Δ si trasforma in quest'altro più semplice $\frac{\int yx^2 dx}{\int yx dx}$.

Esempio I. Cercasi il centro di pressione nel parallelogrammo $ABGF$ (*Fig.* 20.) nell'ipotesi, che il suo lato superiore AB sia nel pian di livello. Dicasi $ME = x$, $CE = AM = y = b$, $MI = c$. Si avrà per l'area indefinita $ACDB$ il valore di $\Delta = \frac{\int bx^2 dx \text{ sen. } \phi}{\int bx dx} = \frac{\frac{1}{3} bx^3 \text{ sen. } \phi}{\frac{1}{2} bx^2} = \frac{2}{3} x \text{ sen. } \phi$, e per tutto il parallelogrammo $FABG$ si avrà $\Delta = \frac{2}{3} c \text{ sen. } \phi$, cioè il centro P di pressione si trova a due terzi di MI contando da M, posciachè MP è $= \frac{2}{3} MI$.

Nel parallelogrammo $QABR$, la di cui base passa per P centro di pressione del dato, trovasi del pari il centro di pressione in O a due terzi di MP, cioè a quattro noni di MI, essendo $MO = \frac{2}{3} MP = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} MI = \frac{4}{9} MI$. La distanza OP de' due centri di pressione O, P è $= \frac{2}{9} MI$.

Volendosi poi il centro di pressione nel parallelogrammo $FQRG$, il di cui lato superiore QR passa pel centro di pressione del dato $FABG$, convien ricorrere alla formola $\frac{\int y (a + x)^2 dx \text{ sen. } \phi}{\int y (a + x) dx}$, e porre $a = MP = \frac{2}{3} c$, donde si raccoglie $\Delta = \frac{\int b (\frac{2}{3} c + x)^2 dx \text{ sen. } \phi}{\int b (\frac{2}{3} c + x) dx} = \frac{(\frac{4}{9} c^2 x + \frac{2}{3} cx^2 + \frac{1}{3} x^3) \text{ sen. } \phi}{\frac{2}{3} cx + \frac{1}{2} x^2}$

$= \frac{\frac{2}{3}(4c^2 + 6cx + 3x^2)\,\text{fen.}\,\phi}{4c + 3x}$. E perciò pofto $x = PI = \frac{1}{3}c$, rifulta $\Delta = \frac{\frac{2}{3}\,\text{fen.}\,\phi\,(4c^2 + 2c^2 + \frac{1}{3}c^2)}{4c + c} = \frac{2}{3} \cdot \frac{19c\,\text{fen.}\,\phi}{15} =$ $\frac{38}{45}c\,\text{fen.}\,\phi$; e in confeguenza il centro U di preffione del parallelogrammo QG è fituato ai $\frac{38}{45}$ della retta MI, contando da M. Di qui fi deduce, che PU è $= \frac{8}{15}PI$.

Stando fempre a queft' efempio, egli è manifefto, che effendo nel parallelogrammo AG il centro di preffione in P, e però uguali i momenti intorno a P, rimarrà fiffo ed immobile il parallelogrammo qualora fia puntellato in P.

Se fi coftruirà una cataratta parallelogramma AG avente i lati AB, FG orizzontali, e quefta mobile intorno a due affi piantati in Q ed in R, eftremità della orizzontale QR, la quale paffa per P ai due terzi MI, la cataratta rimarrà chiufa tutte le volte, che l'acqua afcenderà fino al lato fuperiore AB; il che è manifefto dalle cofe precedenti: per lo contrario ella fi aprirà rotandofi intorno agli affi Q ed R tanto fe l'acqua non arriverà fino in AB, quanto fe oltrepafferà AB. Imperciocchè fe l'acqua refta al di fotto di AB, per efempio in CD, il centro di preffione del parallelogrammo CG trovafi ai due terzi di EI, come P è ai due terzi di MI; e però il predetto centro di preffione cafca al di fotto di P: onde avviene, che la cataratta per la fpinta dell'acqua è coftretta a rotarfi intorno ai due affi, la parte inferiore QG volgendofi dal di dentro al di fuori, e la fuperiore QB dal di fuori al di dentro per riguardo al luogo occupato dall'acqua. Che fe l'acqua oltrepaffa AB, e giugne fino in K, allora ricorrendo alla formola $\frac{\int y(a+x)^2\,dx\,\text{fen.}\,\phi}{\int y(a+x)\,dx}$, e pofto $KM = a$, $y = b$, fi ottiene $\Delta = \frac{\int (a+x)^2\,dx\,\text{fen.}\,\phi}{\int (a+x)\,dx} = \frac{(a^2 + ax + \frac{1}{3}x^2)\,\text{fen.}\,\phi}{a + \frac{1}{2}x}$, e fatto $x = c$, fi ha $\Delta = \frac{(a^2 + ac + \frac{1}{3}c^2)\,\text{fen.}\,\phi}{a + \frac{1}{2}c}$. Laonde fe

O è il centro di pressione della cataratta AG in questa ipotesi, sarà $KO = \frac{a^2 + ac + \frac{1}{3}c^2}{a + \frac{1}{2}c}$, valore manifestamente minore di $a + \frac{2}{3}c$, vale a dire di KP. Dunque il centro di pressione della cataratta in questo caso casca al di sopra di P, e conseguentemente l' urto dell' acqua obbliga la cataratta ad aprirsi, e a volgersi intorno agli assi, movendosi in fuori la parte superiore $\mathfrak{Q}B$, e in dentro l'inferiore $\mathfrak{Q}G$.

Esempio II. Si vuol sapere il centro di pressione nel piano triangolare FMG (*Fig.* 21) situato colla base orizzontale all' ingiù. Essendo in questo caso $CE = y = \frac{bx}{c}$, si sostituisce questo valore nella formola $\frac{\int y(a+x)^2 dx \text{ sen. } \phi}{\int y(a+x)dx}$, e si ottiene $\Delta = \frac{\int (a+x)^2 x dx \text{ sen. } \phi}{\int (a+x) x dx} = \frac{(\frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{3}ax + \frac{1}{4}x^2) \text{ sen. } \phi}{\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}x}$ $= \frac{(6a^2 + 8ax + 3x^2) \text{ sen. } \phi}{6a + 4x}$, e fatto $x = c = MI$, si ha per tutto il piano triangolare FMG, $\Delta = \frac{(6a^2 + 8ac + 3c^2) \text{ sen. } \phi}{6a + 4c}$.

Se il pian di livello passa pel vertice M del triangolo sicchè sia $MK = a = 0$, risulta $\Delta = \frac{3}{4} c \text{ sen. } \phi$, il che indica, che in questo supposto il centro di pressione trovasi a tre quarti di MI contando d' alto in basso.

Situato il triangolo colla base orizzontale rivolta all' insù (*Fig.* 22.), e fatta $KM = a$, $MA = b$, $MI = c$, $ME = x$, $EC = y = \frac{b}{c}(c - x)$, la formola $\frac{\int y(a+x)^2 dx \text{ sen. } \phi}{\int y(a+x) dx}$ diventa

$$\frac{\int (c-x)(a+x)^2 dx \text{ sen. } \phi}{\int (c-x)(a+x) dx} =$$

$$\frac{\int (a^2 c + 2acx - a^2 x + cx^2 - 2ax^2 - x^3) dx \text{ sen. } \phi}{\int (ca + cx - ax - x^2) dx} =$$

$\dfrac{(a^2c + acx - \frac{1}{2}a^2x + \frac{1}{3}cx^2 - \frac{2}{3}ax^2 - \frac{1}{4}x^3)\,\text{sen.}\,\phi}{ca + \frac{1}{2}cx - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{3}x^2} = \Delta$ per l' area indefinita $ACDB$. Quindi fatto $x = c$, si ha per tutto il triangolo AIB, $\Delta = \dfrac{(6a^2 + 4ac + c^2)\,\text{sen.}\,\phi}{6a + 2c}$; e se vuolsi, che l' acqua non ascenda oltre il lato superiore AB, sicchè sia $a = 0$, nasce allora $\Delta = \frac{1}{2}c\,\text{sen.}\,\phi$, che è quanto dire, che il centro di pressione trovasi in tal caso nel mezzo della retta MI.

Esempio III. Cercasi il centro di pressione nella parabola Apolloniana CMD (*Fig.* 23) situata dentro il fluido colle ordinate all' asse orizzontali, e col vertice rivolto in alto. Chiamato p il parametro, y la CE, x la ME, si ha $y = \sqrt{px}$, $\phi = 90°$, $MK = a$. Laonde la formola $\dfrac{\int y(a+x)^2 dx\,\text{sen.}\,\phi}{\int y(a+x)dx}$ diventa $\dfrac{\int(a^2\sqrt{px} + 2ax\sqrt{px} + x^2\sqrt{px})dx}{\int(a\sqrt{px} + x\sqrt{px})dx}$

$= \dfrac{\frac{2}{3}a^2x\sqrt{px} + \frac{4}{5}ax^2\sqrt{px} + \frac{2}{7}x^3\sqrt{px}}{\frac{2}{3}ax\sqrt{px} + \frac{2}{5}x^2\sqrt{px}} = \dfrac{\frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{5}ax + \frac{1}{7}x^2}{\frac{1}{3}a + \frac{1}{5}x}$

$= \dfrac{35a^2 + 42ax + 15x^2}{35a + 21x} = \Delta$. Nel caso che l' acqua non oltrepassi il vertice della parabola, ovvero che sia $a = 0$ nasce $\Delta = \frac{30}{42}x = \frac{5}{7}x$; vale a dire il centro di pressione trovasi a cinque settimi dell' ascissa ME contando dal vertice.

Ma se il piano parabolico si capovolge, e rimanendo colle ordinate orizzontali si riduce col vertice in giù (*Fig.* 24), allora posta $MI = c$, $ME = x$, $CE = y$, l' equazione della parabola somministra $y = \sqrt{(pc - px)}$; ond' è, che surrogato questo valore nella formola nota, si deduce $\Delta =$ $\dfrac{\int dx(a+x)^2\sqrt{(pc-px)}}{\int dx(a+x)\sqrt{(pc-px)}}$. Per poter eseguire le integrazioni richieste, facciasi $\sqrt{pc - px} = z$, e si avrà $x = c - \dfrac{z^2}{p}$,

$dx = -\frac{2zdz}{p}$, $a + x = a + c - \frac{z^2}{p}$. Perciò si ricava $\Delta =$

$$\frac{\int -z^2dz\left(a+c-\frac{z^2}{p}\right)^2}{\int -z^2dz\left(a+c-\frac{z^2}{p}\right)} = \frac{\frac{2}{5p}(a+c)z^5 - \frac{1}{3}(a+c)^2z^3 - \frac{1}{7p^2}z^7 + \text{cost.}}{\frac{1}{5p}z^5 - \frac{1}{3}(a+c)z^3 + \text{cost.}}.$$

Laonde sostituendo in quest' espressione il valore di z, si ottiene $\Delta =$

$$\frac{\frac{2}{5p}(a+c)(pc-px)^2\sqrt{(pc-px)} - \frac{1}{3}(a+c)^2(pc-px)\sqrt{(pc-px)} - \frac{1}{7p^2}(pc-px)^3\sqrt{(pc-px)} + \text{cost.}}{\frac{1}{5p}(pc-px)^2\sqrt{(pc-px)} - \frac{1}{3}(a+c)(pc-px)\sqrt{(pc-px)} + \text{cost.}}.$$

Per determinare le costanti, avvertasi, che quando è $x = 0$ svanisce così l' integrale del numeratore, cioè la somma de' momenti, come l' integrale del denominatore, cioè la somma delle pressioni. Conseguentemente la cost. del numeratore sarà $= \frac{1}{7}pc^3\sqrt{pc} + \frac{1}{3}(a+c)^2pc\sqrt{pc} - \frac{2}{5}(a+c)pc^2\sqrt{pc}$. e la cost. del denominatore sarà parimente $= \frac{1}{3}(a+c)pc\sqrt{pc} - \frac{1}{5}pc^2\sqrt{pc}$. Dunque $\Delta =$

$$\frac{\frac{2}{5p}(a+c)(pc-px)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(a+c)^2(pc-px)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{7p^2}(pc-px)^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{7}pc^3\sqrt{pc} + \frac{1}{3}(a+c)^2pc\sqrt{pc} - \frac{2}{5}(a+c)pc^2\sqrt{pc}}{\frac{1}{5p}(pc-px)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(a+c)(pc-px)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}(a+c)pc\sqrt{pc} - \frac{1}{5}pc^2\sqrt{pc}},$$

che dà il centro di pressione per lo spazio indefinito $ACDB$. Se pertanto in questa espressione si assume $x = c$ per avere il centro di pressione di tutto lo spazio definito AIB, si trova dopo le debite trasformazioni $\Delta = \frac{8c^2 + 35a^2 + 28ac}{35a + 14c}$.

Da ciò s' inferisce, che qualora l' acqua non salga oltre l' ordinata AM, e però si abbia $a = 0$, il centro di pressione è situato a quattro settimi dell' ascissa definita *MI* contando dall' alto. Conseguentemente stando in questo supposto di $a=0$, il centro di pressione nella parabola diritta è d'un quarto più distante dal pian di livello, che nella parabola rivoltata.

INDAGINI