DIMOSTRAZIONE

Della riducibilità d' ogni quantità immaginaria algebraica alla forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$, *adattata ad un Trattato elementare della natura delle equazioni.*

Del Sig. SEBASTIANO CANTERZANI Professore di matematica, e Secretario perpetuo dell' Instituto delle Scienze di Bologna.

1. Il Sig. d' *Alembert* viene riconosciuto per il primo, che abbia dimostrato essere ogni immaginario riducibile alla forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$, dove A, B rappresentano due quantità reali di qualsivoglia forma. Egli ha data questa dimostrazione in una sua Memoria pubblicata tra quelle della Reale Accademia di *Berlino*, che appartengono all' anno 1746. Ma una tale dimostrazione non potrebbe aver luogo in un Trattato elementare della natura delle equazioni. Il Sig. Ab. *Bossut* nella sua Algebra al Cap. XVII dà una dimostrazione assai semplice, la qual vale per gl' immaginarj, che riguardati come valori di un' incognita portano ad equazioni algebraiche. Questa dimostrazione però dipendendo parte da principj, che si trovano sparsi nel citato Capitolo, e parte ancora da qualche principio, che non si dimostra che ne' Capitoli seguenti, non pare che renda inutile del tutto il pensiere di riunire in un sol punto di veduta tutte le proposizioni, che sono necessarie a dedurla, e di farla insieme dipendere dal minor numero di principj, e dai più semplici che sia possibile. Egli è ciò che mi studierò di fare in questo breve scritto, prefiggendomi di formarlo in modo, che possa esser riguardato come parte di un Trattato elementare della natura delle equazioni.

2. È primieramente è noto, che ogni equazione, la quale non abbia tra i coefficienti de' suoi termini veruna quantità

tità immaginaria, se sia di grado dispari, ha sicuramente un valore della sua incognita reale; e se sia di grado pari, ed abbia l' ultimo termine negativo, ha sicuramente due valori dell' incognita reali, uno positivo, ed uno negativo. Questa verità è di tanta importanza nel presente argomento, che non sia inutile richiamarne a mente la dimostrazione.

E' chiaro, che ogni quantità reale messa nell' equazione in luogo dell' incognita fa assumere all' equazione un valor reale, il quale non sarà zero se non nel caso, in cui la quantità reale messa in luogo dell' incognita sia appunto uno de' valori, che può avere l' incognita in quell' equazione. E' chiaro ancora, che mettendo successivamente in luogo dell' incognita altre ed altre quantità reali crescenti, o decrescenti per gradi minimi, i successivi valori reali, che andrà ricevendo l' equazione, varieranno anch' essi per gradi minimi; di modo che passando gradatamente il valor, che si dà all' incognita, dall' esser a cagion d' esempio a ad essere b, gradatamente pure passerà il valor dell' equazione dall' essere quello, che corrisponde al primo valore a dell' incognita, il quale denoterò per A, ad essere quello, che corrisponde all' altro valor b dell' incognita, e che denoterò per B. Ora qualunque sia l' ordine, che tengono i valori reali dell' equazione nel passare che fanno dall' A al B, mentre i valori reali dell' incognita passano dall' a al b, egli è certo che facendosi quel passaggio gradatamente, e non per salti, non potranno far a meno di non trovarsi fra essi tutti i valori reali possibili intermedj tra A e B. Donde apparisce, che corrispondendo il valor reale A dell' equazione al valor reale a dell' incognita, e il valor reale B dell' equazione al valor reale b dell' incognita, ogni valore reale dell' equazione intermedia tra A e B dipenderà sicuramente da un valor reale dell' incognita intermedio tra a e b.

Ciò premesso, sia un' equazione di grado dispari x^{2n+1} ecc. $= 0$. E' manifesto che al valor reale $x = \infty$ corrisponde il valor reale dell' equazione ∞^{2n+1}, e che al valor reale $x = -\infty$ corrisponde il valor reale dell' equazione $-\infty^{2n+1}$. Dunque il valor reale zero dell' equazione, il quale è intermedio tra i due reali ∞^{2n+1}, $-\infty^{2n+1}$, dipenderà sicuramente da un valor reale di x intermedio tra i due ∞, e $-\infty$. Dunque l' equazione di grado dispari x^{2n+1} ecc. $=0$ ha sicuramente un valor della sua incognita x reale.

Sia ora un' equazione di grado pari, che abbia l' ultimo termine negativo $x^{2n} \ldots\ldots - s = 0$. Dato all' incognita il valor reale $x = \infty$, assume l' equazione il valor reale ∞^{2n}; dato poi all' incognita il valor reale $x = 0$, assume l' equazione il valor reale $-s$. Ma il valor reale zero dell' equazione è intermedio fra ∞^{2n}, e $-s$; dunque dipenderà esso sicuramente da un valore reale dell' incognita intermedio fra ∞, e 0, il quale per conseguenza sarà positivo. Similmente dato all' incognita il valor reale $x = -\infty$, l' equazione assume il valor reale ∞^{2n}, e dato all' incognita il valor $x = 0$, assume l' equazione il valor reale $-s$; dunque il valor reale zero dell' equazione, il quale è intermedio fra ∞^{2n}, e $-s$, dipenderà sicuramente da un valor reale dell' incognita x intermedio fra $-\infty$, e 0, e per conseguenza negativo. Dunque ogni equazione di grado pari avente l' ultimo termine negativo ha sicuramente due valori dell' incognita reali, uno positivo, e uno negativo.

3. Egli è evidente da tutto ciò, che un' equazione, la quale abbia tutti i valori dell' incognita immaginarj, non può essere se non un' equazione di grado pari, e avente l' ultimo termine positivo. Donde segue, che proposta un' equazione, che abbia i valori dell' incognita parte reali, e parte immaginarj, se si farà la divisione dell' equazione pel prodotto di tutte le radici, che nascono dai valori reali dell' incognita, il quoziente, il quale sarà il prodotto delle radici nate dai valori immaginarj dell' incognita, dovrà essere un' equazione di grado pari avente l' ultimo termine positivo. Ora a dire di questa specie d' equazioni conviene aver ricordate prima alcune cose, che verrò subito indicando.

4. In primo luogo ad ogni equazione, a cui soddisfaccia il valore $x = C + D\sqrt{(-1)}$, dee soddisfar anche il valore $x = C - D\sqrt{(-1)}$, e viceversa. Infatti dopo d' aver posto nell' equazione in luogo di x, e delle sue potestà, il binomio $C + D\sqrt{(-1)}$, e le rispettive di lui potestà, non possono i termini dell' equazione elidersi fra loro, e ridursi a zero, come convien che succeda, se $C + D\sqrt{(-1)}$ è vera-

mente valor di x, ſenza che riducanſi ſeparatamente a zero elidendoſi tra di loro i termini, che contengono $\sqrt{(-1)}$, e riducanſi pure ſeparatamente a zero elidendoſi tra di loro i termini, che non contengono $\sqrt{(-1)}$, poichè è chiaro che gli uni non poſſono per modo alcuno eliderſi con gli altri. Onde denotando per A la ſomma de' termini, che non contengono $\sqrt{(-1)}$, e per $B\sqrt{(-1)}$ la ſomma di quei, che contengono quel radicale, di modo che fatta la ſoſtituzione del binomio $C+D\sqrt{(-1)}$ in luogo di x l' equazione divenga $A+B\sqrt{(-1)}=0$, è evidente che non può verificarſi tale equazione, come ſi ſuppone, ſenza che ſi abbiano verificate le due $A=0$, $B\sqrt{(-1)}=0$. Ma meſſo in luogo di x nell' equazione l' altro binomio $C-D\sqrt{(-1)}$, il valor dell' equazione diventa $A-B\sqrt{(-1)}$, e per ſuppoſizione ſi ha $A=0$, e $B\sqrt{(-1)}=0$, e quindi anche $-B\sqrt{(-1)}=0$. Dunque anche $A-B\sqrt{(-1)}=0$, e però anche il binomio $C-D\sqrt{(-1)}$ adempie la condizione dell' equazione, e così è valore anch' egli dell' incognita. Dunque non può l' equazione aver per valore della ſua incognita uno di que' due binomj ſenza aver anche l' altro.

5. Secondariamente dico, che ſe a, e b denoteranno due quantità reali, di qualunque forma elle ſieno, la prima delle quali può anche ſupporſi $=0$, la radice di qualſivoglia indice intero, e poſitivo della quantità $a\pm b\sqrt{(-1)}$, cioè $\sqrt[n]{(a\pm b\sqrt{(-1)})}$ ſarà ſempre una quantità come $p\pm q\sqrt{(-1)}$, cioè della ſteſſa forma che la propoſta. Imperciocchè ſia primieramente $n=2^r$. Sarà

$$\sqrt[2^r]{a\pm b\sqrt{(-1)}}=\sqrt[2^{r-1}]{\pm\sqrt{(a\pm b\sqrt{(-1)})}}.$$ Ma generalmente abbiamo $\sqrt{(M\pm N)}=\sqrt{\frac{(M+\sqrt{(M^2-N^2)})}{2}}$ $\pm\sqrt{\frac{(M-\sqrt{(M^2-N^2)})}{2}}$, e però fatta $M=a$, $N=\pm b\sqrt{(-1)}$, ſi ha $\sqrt{(a\pm b\sqrt{(-1)})}=$ $\sqrt{\frac{(a+\sqrt{(aa+bb)})}{2}}\pm\sqrt{\frac{(a-\sqrt{(aa+bb)})}{2}}$, cioè

$$=\sqrt{\frac{(a+\sqrt{(aa+bb)})}{2}}\pm\sqrt{\frac{(-a+\sqrt{(aa+bb)})}{2}}\sqrt{(-1)};$$

onde denotando per c la quantità reale $\sqrt{\frac{(a+\sqrt{(aa+bb)})}{2}}$; e per d l' altra quantità reale $\sqrt{\frac{(-a+\sqrt{(aa+bb)})}{2}}$, si avrà $\sqrt{(a\pm b\sqrt{(-1)})}=c\pm d\sqrt{(-1)}$. Dunque

$$\sqrt[2^r]{a\pm b\sqrt{(-1)}}=\sqrt[2^{r-1}]{\pm\sqrt{(a\pm b\sqrt{(-1)})}}=$$

$$\sqrt[2^{r-1}]{\pm(c\pm d\sqrt{(-1)})};$$ cioè $$\sqrt[2^r]{a\pm b\sqrt{(-1)}}=$$

$$\sqrt[2^{r-1}]{c\pm d\sqrt{(-1)}},$$ oppure $$\sqrt[2^r]{a\pm b\sqrt{(-1)}}=$$

$$\sqrt[2^{r-1}]{-c\mp d\sqrt{(-1)}}.$$

Qualunque si prenda di questi due valori, è sempre vero, che la radice 2^r *esima* della quantità $a\pm b\sqrt{(-1)}$ si riduce alla radice 2^{r-1} *esima* d' una quantità della stessa forma, composta cioè di due parti, una reale affatto, l' altra formata d' una quantità reale moltiplicata per $\sqrt{(-1)}$. Ora è evidente, che quel che si è dimostrato per la radice 2^r *esima*, vale per la 2^{r-1} *esima*, la quale si ridurrà così alla radice 2^{r-2} *esima* d' una quantità della stessa forma, e così via discorrendo: onde finalmente giungerassi ad aver ridotta la radice 2^r *esima* alla radice 2^{r-r} *esima*, cioè ad una quantità sempre della stessa forma, e non più posta sotto verun segno radicale.

Sia ora n un numero dispari. Suppongasi $\sqrt[n]{(a\pm b\sqrt{(-1)})}=p\pm q\sqrt{(-1)}$: e mutando il segno all' immaginario $\sqrt{(-1)}$, sarà $\sqrt[n]{(a\mp b\sqrt{(-1)})}=p\mp q\sqrt{(-1)}$. Dunque moltiplicando un' equazione per l' altra si avrà $\sqrt[n]{(aa+bb)}=pp+qq$, dove $\sqrt[n]{(aa+bb)}$ è sicuramente quantità reale, com' è evidente. Ma essendo $\sqrt[n]{(a\pm b\sqrt{(-1)})}=p\pm q\sqrt{(-1)}$, sarà anche $a\pm b\sqrt{(-1)}=(p\pm q\sqrt{(-1)})^n$

$$=p^n\pm n.\,p^{n-1}q\sqrt{(-1)}-\frac{n(n-1)}{2}p^{n-2}q^2$$

$$\mp \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} p^{n-3} q^3 \sqrt{(-1)} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} p^{n-4} q^4$$

$$\pm \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4.5} p^{n-5} q^5 \sqrt{(-1)}$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2.3.4.5.6} p^{n-6} q^6 \mp \text{ecc.}$$

la qual equazione dovendo esser identica, converrà che sia

$$p^n - \frac{n(n-1)}{2} p^{n-2} q^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} p^{n-4} q^4$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2.3.4.5.6} p^{n-6} q^6 + \text{ecc.} = a.$$

Or quest' equazione non può contenere che potestà pari di q, come si rende manifesto dall' osservare che le dispari non possono non aver annesso il radicale $\sqrt{(-1)}$, il quale in quest' equazione non può comparire. Dunque essendosi trovato $pp + qq = \sqrt[n]{(aa+bb)}$, e quindi $qq = -pp + \sqrt[n]{(aa+bb)}$, che è quantità reale, e però essendo reali anche tutte le potestà $q^4 = p^4 - 2p^2 \sqrt[n]{(aa+bb)} + \sqrt[n]{((aa+bb)^2)}$,

$q^6 = -p^6 + 3p^4 \sqrt[n]{(aa+bb)} - 3p^2 \sqrt[n]{((aa+bb)^2)} + \sqrt[n]{((aa+bb)^3)}$,

$q^8 =$ ecc., fatte queste sostituzioni nell' equazione trovata $p^n - \frac{n(n-1)}{2} p^{n-2} q^2 + \text{ecc.} - a = 0$ si avrà un' equazione in p del grado n *esimo*, cioè di grado dispari, e avente tutti i coefficienti de' suoi termini reali, la quale per conseguenza (*n.* 2.) avrà sicuramente un valor reale di p. Intendendo per tanto posto questo valor reale, qualunque sia la forma di lui, nell' equazione $qq = -pp + \sqrt[n]{(aa+bb)}$, avrassi il valor di q sotto la forma $\sqrt{(-pp + \sqrt[n]{(aa+bb)})}$, il quale sarà reale, perchè tanto $\sqrt[n]{(aa+bb)}$, quanto p è reale, e non può mai essere $pp > \sqrt[n]{(aa+bb)}$, altrimenti si avrebbe q sotto la forma $\sqrt{(pp - \sqrt[n]{(aa+bb)})} \sqrt{(-1)}$, e quindi $q\sqrt{(-1)}$ sarebbe $= -\sqrt{(pp - \sqrt[n]{(aa+bb)})}$, cioè sarebbe reale, e così l' immaginario $\sqrt[n]{(a \pm b\sqrt{(-1)})}$, che si è supposto $= p \pm q\sqrt{(-1)}$ sarebbe eguale a una somma di reali, il che è impossibile. Essendo dunque per l' equazione

$\sqrt[n]{(a \pm b\sqrt{(-1)})} = p \pm q\sqrt{(-1)}$ sempre sicuro un valor reale di p, ed essendo reale anche il valor corrispondente di q espresso per $\sqrt{(-pp + \sqrt[n]{(aa+bb)})}$, resta dimostrato che $\sqrt[n]{(a \pm b\sqrt{(-1)})}$, anche quando n sia un numero dispari, è compreso sotto la forma generale $p \pm q\sqrt{(-1)}$, dove p, q denotano quantità reali.

Sia per ultimo n un numero pari, ma non della forma 2^r. Sarà egli della forma $2^r(2m+1)$, denotando r, ed m due numeri intieri positivi quali si vogliano. E siccome è

$\sqrt[2^r(2m+1)]{a \pm b\sqrt{(-1)}} = \sqrt[2^r]{\sqrt[2m+1]{a \pm b\sqrt{(-1)}}}$, e si è già or ora veduto, che $\sqrt[2m+1]{a \pm b\sqrt{(-1)}}$ è sempre compreso nella forma generale $p \pm q\sqrt{(-1)}$, così potrassi intender

$\sqrt[2m+1]{a \pm b\sqrt{(-1)}} = p \pm q\sqrt{(-1)}$, con che il radicale proposto $\sqrt[2^r(2m+1)]{a \pm b\sqrt{(-1)}} = \sqrt[2^r]{\sqrt[2m+1]{a \pm b\sqrt{(-1)}}}$ diventerà

$= \sqrt[2^r]{p \pm q\sqrt{(-1)}}$. Ma si vide già essere $\sqrt[2^r]{p \pm q\sqrt{(-1)}}$ riducibile sempre alla solita forma $c \pm d\sqrt{(-1)}$. Dunque

il radical proposto, divenuto già $= \sqrt[2^r]{p \pm q\sqrt{(-1)}}$, potrà sempre intendersi ridotto anch' egli alla medesima forma $c \pm d\sqrt{(-1)}$.

Qualunque pertanto sia l' indice intiero, e positivo del radicale, sotto cui si trova una quantità composta di due parti, una reale affatto, l' altra consistente nel prodotto d' una reale per l' immaginario $\sqrt{(-1)}$, sempre può intendersi il radicale ridotto alla forma stessa della quantità, che sotto di sè contiene. Se l' indice del radicale si volesse suppor rotto, o negativo, la formola potrebbesi sempre trasformar in un' altra, in cui il radicale riuscisse coll' indice intiero, e positivo.

6. Da tutto ciò segue, che una quantità espressa comunque per radicali, sotto de' quali sieno ancora altri radicali, che ab-

bian pur anche sotto di sè altri radicali, e così via discorrendo, quando sotto ognuno, o sotto alcuni di quei radicali siavi una quantità reale moltiplicata o in tutto, o in parte per l' immaginario $\sqrt{(-1)}$, sempre potrà intendersi la proposta quantità ridotta alla forma $a \pm b\sqrt{(-1)}$; perciocchè possono per le cose dette intendersi ridotti a questa forma i radicali ultimi più semplici, ridotti i quali si potran di nuovo intender ridotti alla stessa forma i nuovi radicali ultimi più semplici; e ridotti pure questi potran nuovamente intendersi ridotti quei, che dopo la passata riduzione son divenuti ultimi, e più semplici; e così di mano in mano finchè si giunga ad aver per radicali ultimi quei, che da principio eran primi, e più composti, ridotti i quali avrassi la quantità, che era per essi espressa, condotta alla forma $a \pm b\sqrt{(-1)}$.

7. Resta da premettere anche una riflessione, ed è questa. Niuna quantità messa in luogo dell' incognita potrà mai ridurre i termini dell' equazione a distruggersi ed elidersi facendo che resti zero, quando non sia ella data, o vogliam dire espressa in qualche maniera per li coefficienti de' termini dell' equazion medesima, la qual cosa è per se stessa chiarissima, essendo evidente, che nell' equazione a cagion d' esempio $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ fin tanto che si mettano in luogo di x quantità, che non involvano in niun modo le cognite a, b, c dell' equazione, sarà impossibile ottener la elision de' termini. Donde apparisce, che ogni valore dell' incognita d' un' equazione sarà sempre una quantità, o una formola, qualunque poi siane la forma, espressa in qualche maniera per le quantità cognite, o vogliam dire per li coefficienti de' termini dell' equazione stessa.

8. Premesse tutte queste cose sia ora un' equazione di grado pari avente l' ultimo termine positivo, $x^{2^r(2m+1)} + \dots + s = 0$, dove r ed m stanno in luogo di due numeri interi positivi, de' quali m può anche essere $= 0$. Pongasi $x = y\sqrt[2^r(2m+1)]{-1}$, e avrassi $x^{2^r(2m+1)} = -y^{2^r(2m+1)}$: le altre potestà inferiori della x si troveranno, com' è manifesto, eguali alle corrispondenti potestà della y moltiplicate ciascuna

per una quantità data per $\sqrt{(-1)}$ in modo da poterſi ſempre intender ridotta (*n.* 5.) alla forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$ denotando A, B quantità reali, delle quali potrà anche per alcuna di quelle poteſtà eſſere la $B = 0$. Fatte pertanto le ſoſtituzioni in luogo di x, e delle ſue poteſtà, riſulterà un' equazione in y dello ſteſſo grado che la propoſta, la qual equazione avrà il primo termine negativo, cioè $-y^{2^r(2m+1)}$, l' ultimo poſitivo, cioè $+s$, e tutti gli altri moltiplicati o per una quantità reale, o per una immaginaria bensì, ma però tale da poter eſſer inteſa ſempre ridotta alla forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$. A rendere poſitivo il primo ſi muteranno i ſegni di tutti i termini di queſt' equazione, con che riuſcirà negativo l' ultimo termine, il quale diventerà $-s$; a togliere poi l' aſpetto d' immaginarietà ſi ſoſtituirà in ciaſcun de' termini, che ne ſono affetti, in luogo del coefficiente una ſpecie, come α nel ſecondo termine, β nel terzo, γ nel quarto, ecc. L' equazione in y così ridotta, eſſendo di grado pari, ed avendo negativo l' ultimo termine, avrà ſicuramente (*n.* 2.) due valori dell' incognita y reali, e queſti (*n.* 7.) dati per le quantità cognite reali nell' equazione medeſima, tra le quali ſarà la quantità s, e per le ſpecie α, β, γ, ecc. Reſtituendo in queſti due valori di y in luogo delle ſpecie α, β, γ, ecc. le quantità, alle quali erano eſſe ſtate ſoſtituite, le quali quantità ſono tutte della forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$, diverrà ognun di loro una quantità data per s, e per li coefficienti dell' equazion propoſta, involuti alcuni di queſti in formole della forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$. Ognun dunque di quei due valori di y potrà intenderſi ridotto (*n.* 6.) anch' egli alla forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$. Ora moltiplicando ciaſcun di loro per $\sqrt[2^r(2m+1)]{-1}$ diverrà egli valore di $y\sqrt[2^r(2m+1)]{-1}$, cioè di x. Avrà pertanto l' equazione propoſta ſicuramente due valori di x, ciaſcuno della forma $(A \pm B\sqrt{(-1)})\sqrt[2^r(2m+1)]{-1}$. Ma $\sqrt[2^r(2m+1)]{-1}$ ſi riduce ſempre (*n.* 5.)

(*n*.5.) alla forma $a \pm b\sqrt{(-1)}$. Dunque l' equazione di grado pari avente l' ultimo termine positivo avrà sicuramente due valori dell' incognita tali, che ciascun di loro sarà compreso sotto la forma $(A \pm B\sqrt{(-1)})(a \pm b\sqrt{(-1)})$, cioè $Aa - bB \pm (Ab + aB)\sqrt{(-1)}$, oppure $Aa + bB \mp (Aa - aB)\sqrt{(-1)}$, cioè (facendo $Aa \mp bB = M$, e $Aa \pm aB = N$) sotto la forma $M \pm N\sqrt{(-1)}$, nella quale potrebbe la quantità denotata per N riuscire $= 0$, e in tal caso il valore sarebbe reale.

9. Raccogliendo insieme le cose fin qui dette si può conchiudere 1°. che data un' equazione reale, cioè tale, che tutti i coefficienti de' termini sieno quantità reali, di qualunque grado ella siasi, e divisala pel prodotto di tutte le radici, che nascono dai valori reali dell' incognita per ottenere così nel quoziente il prodotto di tutte le radici, che nascono dai valori dell' incognita immaginarj, si giungerà ad un' equazione reale di grado pari avente l' ultimo termine positivo (*n*.3.); 2°. che quest' equazione, la quale già per supposizione non ha verun valore dell' incognita reale, ne avrà sicuramente (*n*.8.) due immaginarj, ciascun de' quali sarà contenuto sotto la forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$; 3°. che non potendo (*n*.4.) convenire all' incognita d' un' equazione il valore $a + b\sqrt{(-1)}$ senza che le convenga insieme il valore $a - b\sqrt{(-1)}$, e viceversa, ed essendo il prodotto di $x - a - b\sqrt{(-1)}$ in $x - a + b\sqrt{(-1)}$, che sono le due radici nate da que' due valori, una quantità reale, cioè $xx - 2ax + aa + bb$, divisa l' equazione per questo prodotto si otterrà una nuova equazione reale di grado pari avente l' ultimo termine positivo; 4°. che ripetendo per quest' equazione il discorso fatto per la precedente, e così di mano in mano, resta evidente che non vi può essere valor alcuno immaginario dell' incognita, che non sia compreso sotto la solita forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$.

10. Siccome ogni quantità algebraica immaginaria, sia pur ella in qualsivoglia modo composta, messa $= x$ colle ordinarie operazioni dell' algoritmo, e principalmente coll' inalzamento dell' una e dell' altra parte dell' eguaglianza a congrue potestà, arriva finalmente a somministrare un' equazione reale, la quale avrà sempre tutti i valori immaginarj della x compresi (*n*.9.) sotto la forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$; e siccome

è evidente doverſi tra i valori immaginarj della x di queſt' equazione trovare la quantità algebraica immaginaria da principio propoſta; così reſta dimoſtrato, che ogni quantità algebraica immaginaria viene ſempre compreſa ſotto quella forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$, dove A, e B rappreſentano due quantità reali.

11. L' eſpoſta dimoſtrazione ha il vantaggio di far vedere, che per ogni equazione ſono ſempre poſſibili tra reali, e immaginarie tante formole date per li coefficienti dell' equazione medeſima, quant' è il ſuo grado, ognuna delle quali poſta in luogo dell' incognita verifichi la condizione facendo che i termini dell' equazione ſi elidano tra di loro, e riducaſi la loro ſomma a zero. Queſta verità ſi ſuole ordinariamente aſſumere dagli Autori: pure per un' equazione di grado pari avente l' ultimo termine poſitivo chi ne aſſicura che debba pur eſſervi una formola, ſe non reale, almeno immaginaria data per le cognite dell' equazione, che poſta in luogo dell' incognita faccia ſvanir i termini? Il Sig. *Eulero* in una ſua Memoria pubblicata nel 1749 tra quelle della Real Accademia di *Berlino* ha data, è vero, una dimoſtrazione di queſta verità; ma oltrechè non ſarebbe eſſa molto adattata ad un trattato elementare della natura delle equazioni, è poi anche ſoggetta ad alcune difficoltà rilevate dal Sig. Cav. *Daviet* de Foncenex in una Memoria inſerita nel primo Tomo de' Miſcellanei della Società di Torino. Dall' altra parte la dimoſtrazione ſoſtituita da queſto Autore a quella del Sig. *Eulero*, quanto è ingegnoſa, ci ſembra altrettanto ſuperiore ancor eſſa alla portata di un trattato elementare.

12. Non mi eſtendo a dimoſtrar la riducibilità anche delle quantità traſcendenti immaginarie alla forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$, per non uſcir dal confine, che in queſto ſcritto mi ſon prefiſſo, tanto più che ella è queſta una parte, che ſi trova già con molta ſemplicità ed eleganza trattata e dal Sig. Cav. *Daviet* de Foncenex nella citata Memoria, e dal celebre noſtro P. Gregorio *Fontana* in una dotta diſſertazione inſerita nel Tomo primo delle Memorie della Società Italiana. Del reſto quando uno dimoſtri, come queſti Autori fanno, indipendentemente dal calcolo infiniteſimale che $(a \pm b\sqrt{(-1)})^{p \pm q\sqrt{(-1)}}$ ſi comprende nella forma

$A \pm B\sqrt{(-1)}$, viene insieme a dimostrare la proposizione, che qui si è esposta al n. 5, giacchè $\sqrt[n]{(a \pm b\sqrt{(-1)})}$ inchiudesi in $(a \pm b\sqrt{(-1)})^{p \pm q\sqrt{(-1)}}$ supponendo $q = 0$. Ma si è creduto di dover trattare a parte la formola $\sqrt[n]{(a \pm b\sqrt{(-1)})}$ a fine di non aver per necessità da ricorrere al calcolo delle quantità circolari, e logaritmiche, da cui nel caso qui contemplato si poteva prescindere.