SAGGIO

Di una nuova Teoria del movimento delle acque pei Fiumi, e

NUOVO METODO

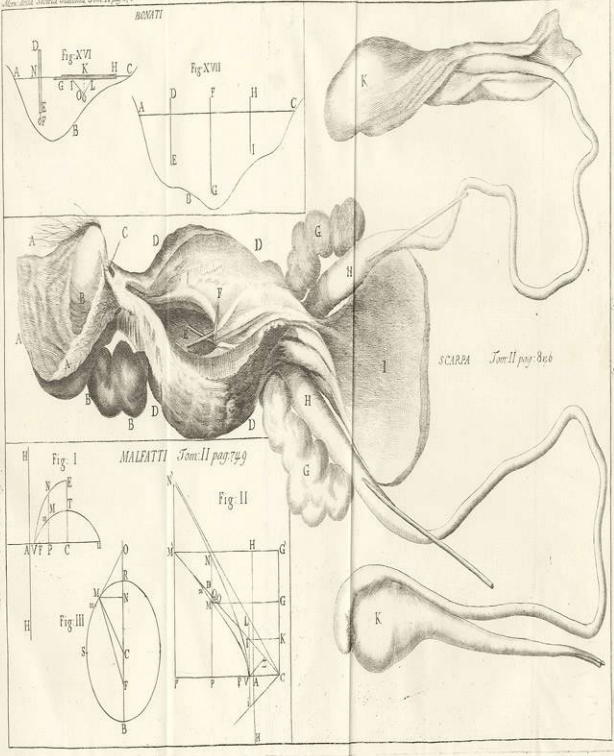
Per trovare colla sperienza la quantità dell' acqua corrente per un fiume.

Del Sig. TEODORO BONATI Matematico di Ferrara.

Saggio di una nuova teoria del movimento delle acque pei fiumi.

1. IL P. *Castelli* Cassinense fu quegli, che nel 1640 gettò il primo fondamento della Scienza de' fiumi con quel suo teorema, che qualora un fiume non cresce, nè cala, e che in conseguenza si trova in uno *stato di permanenza*, per ogni sua sezione passa una egual copia di acqua in un tempo stesso, qualunque siasi l' ineguaglianza di quelle sezioni. Stabilì indi, che le velocità dell' acqua nei fiumi fossero in ragione delle altezze dell' acqua sopra il fondo, ma col solo fondamento di alcune sue sperienze fatte in piccolo con canali artefatti; e si vede che intese di velocità medie, senza cercare se la velocità sia la medesima dalla superficie al fondo, oppure se cresca, o scemi, e con qual legge.

2. Domenico *Guglielmini* fece delle sperienze ora con un vaso parallelepipedo mantenuto sempre pieno di acqua mentre questa usciva per un foro fatto in una sponda del vaso, ed ora con canali artefatti. Le prime davano, che le velocità pel foro fossero in ragione sudduplicata delle altezze dell' acqua sopra il foro. Nelle seconde poi le velocità recedettero non poco sì dalla ragione semplice delle altezze, che dalla ragione sudduplicata delle altezze suddette, come si vede nella Prefazione al trattato *De mensura aquarum fluentium* stampato in Ginevra l' anno 1719. Trattandosi di determinare le velocità dell' acqua pei fiumi, parea veramente che le se-


BONATI
Fig: XVI
Fig: XVII
SCARPA Tom: II pag: 826
MALFATTI Tom: II pag: 749
Fig: I
Fig: II
Fig: III

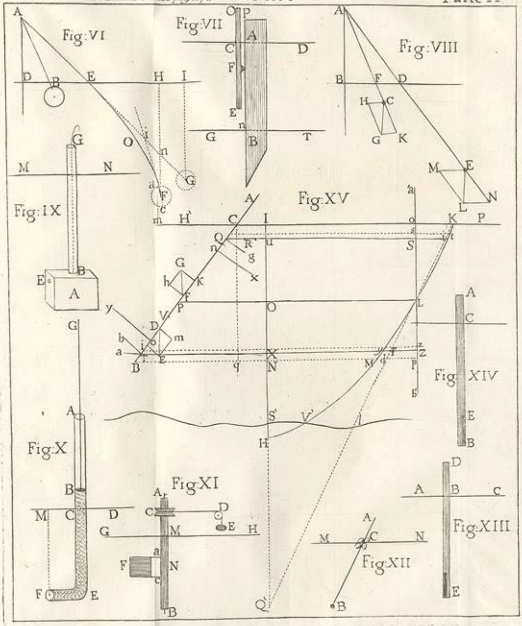


Fig: VI
Fig: VII
Fig: VIII
Fig: IX
Fig: XV
Fig: X
Fig: XI
Fig: XII
Fig: XIII
Fig: XIV

conde, perchè fatte con canali, che sono più analoghi ai fiumi che un vaso parallelepipedo, fossero da preferirsi alle prime: eppure queste non le descrisse nemmeno, e trascurandole affatto si attenne alle prime; ed ecco in compendio il suo sistema.

3. La vasca *QZA* (*fig.* 1.) somministri incessantemente acqua al fiume del fondo inclinato *ODE*. Si prolunghi la linea di questo sino all' incontro della superficie dell' acqua della vasca, cioè fino al punto *A* da denominarsi *origine del fiume*, e tirata l' orizzontale *AB*, e la *BD* normale al fondo, sia *DC* l' altezza dell' acqua della sezione in *D*. L' Autore nel lib. 2. prop. 2., e seguenti stabilisce, che le velocità dell' acqua per quella sezione (prescindendo dalle resistenze) debbano essere le medesime, che avrebbe l' acqua uscendo liberamente per un' apertura eguale alla detta sezione, e fatta nella sponda *BD* di un vaso *BDA* mantenuto pieno di acqua sino in B, le quali velocità nei punti *D*, *G*, *C*, ecc. sarebbero eguali alle velocità di un grave caduto dalle altezze dell' acqua insistente, o sia come le radici quadrate delle altezze *DI*, *GL*, *CM*, e però esprimibili colle semiordinate corrispondenti *DE*, *GH*, *CF* di una parabola conica *BFE*; e ciò perchè egli si persuadeva, che ogni particella di acqua giunta a qualunque punto *G* della sezione *DC* debba avere la velocità di un corpo solido disceso liberamente sopra un piano liscio, ed inclinato dall' origine *A* del fiume fino in *G*, la quale velocità si trova appunto eguale a quella del medesimo corpo allorchè fosse piombato dall' altezza *LG*. Sopra questo fondamento travagliò tutto quel trattato pieno di proposizioni assai belle, e che reggendo il fondamento sarebbero estremamente utili.

4. Se l' acqua in *CD* colle velocità *CF*, *GH*, ecc. perdesse la sua gravità, allora sì che potrei concepire come l' acqua inferiore alla sezione *CD*, o sia l' acqua *CDK*, non fosse per fare veruna remora all' altra, che passar deve successivamente per *CD*, perchè supponendo inoltre l' acqua fluidissima, ed il fondo, e le sponde affatto liscie, vedrei come ogni particella *G*, ed ogni altra componente un filamento *GV* in virtù della propria inerzia potrebbe ritenere la velocità *GH*, ch' ebbe in *G*, e la stessa direzione *GV*, con che non potrebbe opporsi in veruna maniera alle altre particelle,

che ſuccedono in *G* colla medeſima velocità, e direzione. Ma ſubito ch' io conſidero, che l' acqua *CDK* è grave, toſto io vedo che gli ſtrati ſuperiori premono gl' inferiori, e che premendoli tendono a ſchiacciarli, ed inducono in eſſi un conato di ſpanderſi a tutte le bande, ed in conſeguenza anche all' indietro verſo l' origine del fiume, tutto che ſi trovi in moto verſo la foce; il qual conato all' indietro dell' acqua *CDK* dee fare una remora al movimento dell' acqua, che ſuccede in *CD*, onde queſta non potrà altrimenti muoverſi per *CD* con quella ſteſſa libertà, colla quale uſcirebbe dall' apertura libera fatta nella ſponda del vaſo *BDA*, come richiederebbe il ſiſtema dell' Autore.

5. Egli è poi certo, che queſta teoria non ha avuto luogo nemmeno proſſimamente nè nelle accennate ſperienze del *Caſtelli*, le quali furono ripetute da Gio. Domenico *Caſſini* in Roma, e con lo ſteſſo evento; nè lo ha avuto in quelle del *Guglielmini* ſteſſo, tutto che sì quelle, che queſte ſieno ſtate fatte con canali artefatti, cioè retti, e col fondo, e colle ſponde liſcie, e nei quali perciò le reſiſtenze, che poſſono naſcere dalle ſcabrezze, ed ineguaglianze dell' alveo, devono eſſer montate a poco.

6. Meno poi ſi verifica la ſteſſa teoria nei fiumi naturali, perchè queſti atteſe le reſiſtenze, che derivano dalle tortuoſità, ed ineguaglianze degli alvei, ſono ben lontani dall' avere la velocità richieſta dalla teoria del *Guglielmini*, cioè quella che compete alle diſceſe delle loro acque, le quali perchè provenienti da origini ben alte dovrebbero avere delle velocità ſorprendenti e tali, che neſſun fiume ſarebbe navigabile.

7. Nè ſuſſiſte punto l' applicazione, che fa di queſta teoria il P. *Grandi* al caſo delle reſiſtenze. Sia *DF* (*fig.* 2.) la velocità attuale alla ſuperficie *DK* di un fiume *DL* da trovarſi colla ſperienza, e *DE* ſia l' altezza competente alla velocità *DF*, ed *EFH* una parabola conica col vertice in *E*, ed *ACI* ſia un' altra parabola dello ſteſſo parametro, che la prima, e col vertice in un punto *A*, che ſia a livello della vera origine del fiume nel ſenſo del *Guglielmini* (3). Secondo il *Grandi* le velocità dalla ſuperficie *D* ſino al fondo *G* del fiume ſenza le reſiſtenze ſarebbero le ſemiordinate *DC*,

BM, *GI*, come disse il *Guglielmini*; ma attese le resistenze incontrate dall' acque nel loro cammino dall' origine vera sino alla sezione *DG*, saranno *DF*, *BN*, *GH*, come se l' acqua fosse partita da una origine della sola altezza *DE*, che dall' Autore si chiama altezza dell' *origine equivalente*.

8. Ma si osservi, che le resistenze maggiori, ed in conseguenza i maggiori scemamenti di velocità devono trovarsi presso il fondo, laddove giusta il *Grandi* lo scemamento maggiore di velocità caderebbe alla superficie, giacchè $CF > MN > IH$, come facilmente si comprende. E qui giova il notare, che lo stesso P. *Grandi* non fu già intieramente pago di questo suo sistema *essendomi passate* (egli dice nella Prefazione) *per la mente altre idee di nuove ipotesi, le quali mi si rappresentavano in aria di maggiore verosimiglianza*.

9. Dopo tutto ciò siami lecito, ch' io esponga brevemente ciò, che ho pensato più volte intorno al moto delle acque pei fiumi. *CD* sia il fondo inclinato di un tratto regolare di un canale (*fig.* 3.), ed *AB* sia la superficie dell' acqua, la quale sia più inclinata, che il fondo, cioè con esso convergente. S' intenda divisa l' altezza *AC* in tante parti eguali, per esempio *AP*, *PT*, *TC*, ed in altrettante parti eguali *BR*, *RV*, *VD* s' intenda divisa l' altezza *BD*. Supporrò, che le particelle *A*, *P*, *T* camminino per le linee *AB*, *PR*, *TV*, giacchè non vedo ragione, onde in un canale regolare debba accadere diversamente. Si consideri la particella *E* di un filamento *PR* dell' acqua. Se la verticale *ES* esprimerà il peso assoluto di essa, fatto il rettangolo *ZG*, sarà *EG* la forza, colla quale quella particella viene spinta dalla gravità nella direzione del suo movimento verso *R*. Lo stesso si dica di ogni altra eguale particella *P*, o *G* del filamento *PR*, ognuna delle quali vien sollecitata continuamente dalla gravità verso *R* con una forza eguale alla *EG*, ch' è in ragione del seno dell' angolo $ESG = SEZ = PEt$ d' inclinazione del filamento *PR* all' orizzonte.

10. Così ogni altra particella *I* di un filamento inferiore *TV* viene spinta lungo la linea *TV* da una forza *IK* derivata dal proprio peso assoluto *IQ*. Per essere però la linea *TV* meno inclinata all' orizzonte, che la *PR*, l' angolo $IQK < ESG$; onde se le due particelle saranno eguali, ed $IQ = ES$,

farà $IK < EG$. Dunque per questa sola ragione nel qui supposto caso della superficie convergente col fondo la velocità dalla superficie andando verso il fondo dovrebb' essere sempre minore. Che se la superficie fosse parallela al fondo, anche tutti i filamenti PR, TV sarebbero paralleli fra di loro, e le forze EG, IK sarebbero eguali, e per questa sola ragione la velocità dalla superficie sino al fondo in questo secondo caso sarebbe eguale. E se la superficie AB divergesse dal fondo, anche i filamenti PR, TV sarebbero divergenti, e la EG sarebbe minore della IK, e per questa sola ragione in questo terzo caso le velocità dalla superficie sino al fondo sarebbero crescenti.

11. Codeste forze EG, IK, che così agitano le particelle E, I, derivate dal loro proprio peso, si possono dire forze intrinseche alle medesime particelle. Ma queste stesse particelle vengono inoltre agitate da altre forze ad esse estrinseche, cioè dalle pressioni delle altre particelle di acqua ad esse contigue, che le attorniano, e che le premono per tutti i versi. E siccome per esempio la particella I così premuta si muove nella direzione IV, è forza il dire che in qualunque altra direzione vi sia l' equilibrio fra le pressioni contrarie, che tendono a muovere la stessa particella I. Altrimenti se mancasse un tale equilibrio, per esempio nella direzione IQ, la particella I si muoverebbe in una direzione di mezzo fra la IQ, e la IV, e non nella supposta IV.

12. Basterà pertanto che si esaminino le pressioni di quelle particelle contigue, che possono aver parte nel maggiore, o minor movimento della particella I nella sola direzione IV. Si consideri perciò l' acqua $ATVB$ come divisa in tante colonne verticali insistenti a ognuna delle particelle minime acquee componenti il filamento TV, delle quali alcune sieno L, I, F, le cui colonne insistenti sieno LH, IO, FN. Qualunque sieno le velocità dell' acqua da O fino in I, sarà sempre vero che le dette colonne premeranno continuamente al basso con tutto il loro peso, onde la particella I in virtù della gravitazione dell' acqua OI farà un conato a tutte le bande (come comunemente vien dimostrato), ed in conseguenza anche verso L, proporzionale all' altezza IO. Ma a questo conato verso L si oppone l' acqua HLI, la quale respinge la stessa

stessa particella I verso F con un conato proporzionale all' altezza del punto H sopra il punto I, onde questo prevalerà al conato contrario della I verso L col peso della colonna acquea Hz determinata dalla orizzontale Oz, e sarà questa un' altra forza della I ad essa estrinseca derivata dall' acqua, che le sovrasta, e l' attornia, la qual forza, o peso della colonna Hz la agita verso V unitamente alla forza IK derivata dalla gravità. Lo stesso vale per ogni altra particella del filamento TV, come per la F, che viene agitata verso V da una forza intrinseca derivata dalla gravità, ed inoltre da una forza estrinseca eguale al peso della colonna acquea Oy determinata dalla orizzontale Ny.

13. Si vede, che codeste forze estrinseche proporzionali alle Hz, Oy, ecc. sono in ragione del seno d' inclinazione della superficie AB all' orizzonte, qualunque siasi la profondità della particella I sotto la superficie, e qualunque siasi la direzione IV del moto della I verso V, e perciò anche quando una tal direzione invece di essere declive, come mostra la figura, fosse orizzontale, od anche acclive, come accade presso i fondi inferiori, ed acclivi dei gorghi, che s' incontrano nei fiumi, e presso il fondo di quei fiumi, che verso i loro sbocchi in mare hanno il fondo acclive, come il Po grande, od anche presso il fondo acclive dei fiumi al loro accostarsi al ciglio di una qualche cateratta.

14. Quindi è, che per la sola forza estrinseca ora ritrovata di ogni particella I le velocità di queste dovrebbero essere esattamente eguali tanto alla superficie, che sotto la superficie, e sino al fondo.

15. Queste due forze, una intrinseca, che deriva dal proprio peso di ogni particella, e l' altra estrinseca, che deriva dalla pressione dell' acqua insistente all' acqua, e nessun' altra, sono le forze, che tendono ad accelerare l' acqua lungo il fiume continuamente, cosicchè se la loro azione non venisse disturbata noi vedremmo i fiumi sempre più veloci quanto più ci accostiamo allo sbocco. Ma questo realmente non accade, giacchè allontanandoci dalla origine, ed arrivati per esempio alla pianura, dove il fondo è tuttora declive, benchè meno, osserviamo la velocità scemata di molto, e talvolta la vediamo scemata anche vie più prima di arrivare allo sbocco.

16. Quest' effetto deriva dalle resistenze, che fanno all' acqua prima le tortuosità del fiume, e poi le scabrezze del fondo, e delle sponde, le quali scabrezze non si può negare che ritardino l' acqua sensibilmente anche in distanza dal fondo, e dalle sponde, benchè il ritardo sia sempre minore a misura che ci scostiamo da quello venendo alla superficie, e da queste accostandoci al filone. E siccome le resistenze, che derivano dalle scabrezze, giusta le sperienze fatte, crescono in ragione duplicata delle velocità, facilmente accade che continuando le medesime scabrezze, e crescendo la velocità per la continua azione delle accennate forze motrici, crescono altresì le resistenze, ed in maniera che presto arrivano a pareggiare le forze motrici, con che l' acqua presto giugne ad una velocità *terminale* conveniente alle condizioni particolari di un dato tratto di fiume. Che se andando più oltre nello stesso fiume le scabrezze crescano, la velocità diminuirà, e con essa caleranno anche le resistenze, finchè queste si equilibrino di nuovo con le forze motrici, e si abbia così un' altra velocità terminale conveniente alle circostanze di quell' altro tratto di fiume. Se scemasse, o crescesse la pendenza del fondo, e della superficie, le forze motrici diverranno diverse, e varia a proporzione riuscirà la velocità terminale.

17. L' unico caso da me contemplato, in cui la velocità sotto la superficie potrebbe esser maggiore, che alla superficie, è quando la superficie sia divergente dal fondo (10). Ma questo nei tratti regolari di un fiume non s' incontra, mentre anzi generalmente la superficie piuttosto converge col fondo, benchè di tanto poco, particolarmente a qualche distanza notabile dallo sbocco, che in certo modo si può considerarla come parallela al fondo. Ed in questo caso le forze rispettive *EG*, *IK* riescono eguali, e per le cose dette ai n. 10, 14, se non vi fossero le resistenze, la velocità dalla superficie al fondo sarebbe esattamente la medesima. E perchè nel filone la maggiore resistenza deriva dal fondo, giacchè l' acqua colà è più vicina al fondo, che alle sponde, la velocità nel filone sarà minore presso il fondo, e poi crescerà venendo verso la superficie prima più, e poi meno fino alla superficie, cosicchè la velocità massima sarà alla superficie, e la scala delle velocità sarà una qualche curva, come la *ABC*

(*fig.* 4.) dell' asse *DE*, essendo *DA* alla superficie, ed *EC* al fondo.

18. Colla teoria finqui esposta si comprende come un fiume, il quale abbia la superficie più inclinata che un altro, in parità di circostanze dovrà essere più veloce dell' altro, perchè abbiamo veduto, che una delle forze motrici è in ragione del seno d' inclinazione della superficie (13). Nel mio sperimento XVIII contro *Gennetè* a un canale artefatto del fondo *AH* (*fig.* 5.) con acqua corrente da *A* verso *H* applicai una chiusa *MF*, e l' acqua dispose la superficie come la *IFN*, e la velocità in *B* era maggiore che in *C*, ed in *D*. In *E* poi il moto era notabilmente accresciuto, e più di tutto in *F*. In *G* il moto bene spesso era vorticoso. Dimandai l' anno 1767 qual fosse la forza, che muove l' acqua in *D*, e che fa crescere la velocità in *E*. Ora dirò, che la forza movente l' acqua in *D*, ed in *E* è l' accennata al n. 12, e trovata al n. 13 in ragione del seno d' inclinazione della superficie dell' acqua sopra *D*, e sopra *E*, e che la velocità in *E* è maggiore appunto perchè ivi l' inclinazione della superficie si fa maggiore.

19. Crescendo in un fiume l' altezza dell' acqua, ancorchè non crescesse l' inclinazione della superficie, crescerebbe la velocità, perchè l' acqua componente quell' altezza di più come più lontana dal fondo sentirà meno le resistenze di questo, e potrà ubbidire più alle sue forze motrici, che l' altra, che componeva la sola altezza di prima, e si muoverà più, e metterà anche più in moto l' acqua sottoposta. Maggiormente poi crescerà la velocità se, crescendo l' altezza, cresca ancora l' inclinazione della superficie.

20. Crescendo la larghezza senza che scemi l' altezza e l' inclinazione di superficie, le parti di mezzo del fiume saranno più lontane dalle sponde, le cui scabrezze faranno perciò un minor ritardo al filone, onde questo si muoverà più, e metterà più in moto il rimanente.

21. Egli è questo il saggio di teoria del movimento delle acque pei fiumi, ch' io mi era prefisso di esporre. Ora verrò esaminando quanto questa teoria si concilj colla sperienza. Il metodo più insinuato dagli Autori, ed il più applaudito per iscoprire colla sperienza il moto dell' acqua anche

ſotto la ſuperficie, è ſtato quello di un pendolo, o ſia di una palla *B* (*fig.* 6.) attaccata con un filo a un punto ſiſſo *A* da immergerſi ſotto la ſuperficie *DE* dell'acqua di un fiume corrente da *D* verſo *E*, la quale perciò terrà la palla col filo lungi dalla verticale *AD* più, e meno ſecondo la diverſa velocità dell' acqua, ed il diverſo peſo ſpecifico della palla, pretendendoſi di poter ricavare così la velocità dell' acqua nel ſito della palla colla ſola oſſervazione dell' angolo di deviazione della parte del filo fuori dell' acqua.

22. Di queſta fatta di ſperimenti propoſti dal *Guglielmini*, dal P. *Grandi*, dall' *Ermano*, ed ultimamente dal chiariſſimo P. Ab. *Cametti* nella ſua *Mechanica fluidorum* l' anno 1777 ne vedo fatti non pochi dal *Zendrini*, dai Matematici di una Viſita al Po grande l' anno 1729, dal P. *Lecchi*, e dal Sig. *Michelotti*; i quali generalmente hanno trovato, che alle immerſioni più profonde della palla ha corriſpoſto un maggior angolo di deviazione del filo dalla verticale, e generalmente hanno convenuto, che le velocità dell' acqua nel ſito della palla foſſero in ragion duplicata delle tangenti dei detti angoli, d' onde ne verrebbe, che a maggiori profondità ſotto la ſuperficie corriſpondano velocità ſempre maggiori, affatto contro la mia teoria (17).

23. Due inavvertenze a mio giudicio ſi ſono commeſſe in queſto genere di ſperimenti dai loro Autori. L'una è, che quando la palla è immerſa a qualche profondità, l'angolo di deviazione del pendolo non deriva ſolamente dall'azione dell' acqua contro la palla, come eſſi hanno creduto, ma deriva ancora dall' azione dell' acqua contro quella porzione di filo, che ſi trova immerſa, ed eſpoſta all' acqua. Per la qual coſa quand' anche la velocità dell' acqua ſotto la ſuperficie, e fino al ſito della palla, ſi manteneſſe la medeſima che in ſuperficie, l' angolo di deviazione del filo, che ſi oſſerva fuori dell'acqua, dovrebbe neceſſariamente eſſer maggiore, che quando la palla foſſe appena ſotto la ſuperficie; e profondando la palla di più, il detto angolo creſcerebbe di più, perchè l' acqua agirebbe contro una porzione maggiore di filo.

24. L' altra circoſtanza non avvertita è, che il filo eſſendo pieghevole dee diſporſi ſott' acqua in una curva *EOF*, che vien detta *filare*, e per determinare la quale converrebbe

che fosse nota la scala delle velocità dell' acqua, ch'è appunto quella che si cerca.

25. Da quest' ultima considerazione si fanno palesi altri due inganni de' soprannominati Autori: L'uno è, che hanno giudicato la palla nel punto G della retta AE prolungata, ed in conseguenza alla profondità IG, che è minore della vera profondità HF. L'altro poi più interessante è, che hanno dedotto la velocità dell' acqua nel sito da essi supposto della palla dalla grandezza dell' angolo DAE di deviazione del filo non sommerso, quando veramente non potrebbe desumersi che dall' angolo cam, che fa colla verticale am il diametro ac della palla, che parte dal punto a di sospensione della palla dal filo; il qual angolo ognun vede ch' è sempre minore dell' angolo DAE (per essere $cam = iFn$, e $DAE = EnH > iFn$); e sarà eguale all' angolo DAB nel caso, che la velocità in F sia eguale alla velocità in B; e sarà anzi minore dell' angolo DAB nel caso, che la velocità in F fosse minore che in B.

26. Per tutte queste ragioni i suddetti Autori hanno errato, e l' errore dev' essere stato maggiore secondo che la palla è stata di un peso specifico minore, e secondo che il filo è stato più grosso, e più sott' acqua. La grossezza del filo ci vien taciuta da tutti; ma egli è certo, che quei fili hanno retto al peso della palla, ed all' impressione dell' acqua contro la palla, dal che si può concludere, che la loro grossezza non sia stata indifferente, e trascurabile, come me lo ha poi mostrato lo sperimento, che vengo a descrivere.

27. In un canale largo piedi 15 circa (parlerò a misura di Parigi), e profondo sei piedi, con un galleggiante trovai l' anno 1769, che la velocità dell' acqua in superficie era di piedi 2. 4 per ogni minuto secondo. Nel fondo GT (*fig.* 7) del medesimo canale presso un ponte di legno, che non angustiava punto il corso dell' acqua, conficcai verticalmente una tavola PB di tale lunghezza, che superava la superficie CD dell' acqua, avendo fatto che la faccia AB fosse parallela alle sponde, o sia a seconda del corso dell' acqua diretto da C verso D. Ben fermata la tavola con una mano in O, io immergeva a poco a poco l' asta OE facendo strisciare un risalto F dell' asta lungo la costa Pn della tavola, intor-

no al quale risalto *F* l' asta potea aggirarsi accostandosi alla tavola ora con l' estremità *E*, allorchè l' acqua investiva con maggior forza la parte *FE* che l' altra *FC*, ed ora con l' estremo *O*, se l' acqua spingeva con più di forza la parte *FC* che l' altra *FE*.

28. Lo scopo mio era di trovare quella immersione, in cui la forza dell' acqua contro *FE* si equilibrava con l' altra contro *FC*. Arrivato al punto di tale equilibrio io me ne accorgeva facilmente, perchè allora colla mano io sentiva, che l' estremo *O* nè mi veniva spinto dall' acqua verso la tavola, nè mi veniva allontanato dalla medesima.

29. In uno di questi sperimenti la parte *FE* era di un piede, e tentando trovai il detto equilibrio quando *FC* fu di 11 pollici; il che mostra, che quell' acqua fino alla profondità di quasi due piedi sotto la superficie correva con una velocità minore, che in superficie, però di poco. Nel secondo sperimento io avea mutato luogo al risalto *F* dell' asta in maniera, che *FE* era di due piedi, e tentando di nuovo trovai il descritto equilibrio quando *FC* fu di un piede e mezzo: il che mostra, che alla profondità di tre piedi e mezzo, o sia di piedi 2. 6 sopra il fondo, la velocità era sensibilmente minore che in superficie.

30. Nel medesimo sito feci uso di un pendolo. La palla era del diametro di due pollici, ed immersa nell' acqua perdeva la metà del suo peso. Il diametro del filo era due terzi di linea, e lo stesso filo era attaccato a un punto fisso *A* (*fig.* 8) sopra l' acqua *BD* piedi 2. 11. Nella prima immersione il filo *AC* era di piedi 3. 6, e l' angolo *BAC* fu tale, che l' orizzontale *BF* riuscì di pollici 18 prossimamente, cosicchè la palla rimaneva sotto la superficie dell' acqua corrente alquanto meno di due pollici e mezzo.

31. Avendo dato al filo una lunghezza maggiore *AE* di piedi 6. 11, ebbi l' angolo *BAD*, essendo *BD* di pollici 32, e *DE* di piedi 2. 8. 4.

32. Le linee rette eguali *CG*, *EL* verticali esprimano il peso della palla nell' acqua, il qual peso in *C* equivalerà a due forze *CK*, *CH*, ed in *E* a due altre forze *EN*, *EM*. Ma le due forze *CH*, *EM* devono equilibrarsi colle forze contrarie dell' acqua, le quali sono come i quadrati delle ve-

locità in C, ed in E. Dunque secondo i soprannominati Autori i quadrati delle velocità in C, ed in E avrebbero dovuto essere $:: CH : EM :: GK : LN :: BF : BD$, ed in conseguenza la velocità in C alla velocità in $E :: \sqrt{BF} : \sqrt{BD} :: \sqrt{18} : \sqrt{32}$ (vegg. n. 30. 35.) $:: \sqrt{(9 . 2)} : \sqrt{(16 . 2)} :: 3 : 4$, cioè secondo essi la velocità in E dovrebb' essere stata sensibilmente maggiore, che in C; dovechè secondo le sperienze precedenti la velocità in E era sicuramente minore, che in C (29, 30).

33. Dopo tutto ciò parmi di poter concludere, che l' uso di tai pendoli non è punto al caso per iscoprire le vere velocità dell' acqua a qualche profondità notabile sotto la superficie, e che dalle sperienze fatte con essi non si può tirare veruna conseguenza nè favorevole, nè contraria a una qualche teoria.

34. Lo stesso affatto convien dire di altri sperimenti fatti in Po con una certa *Fiasca* riferiti dal P. *Grandi* alla fine del suo primo libro, e da Eustachio *Manfredi* nelle Annotazioni al trattato della natura de' fiumi del *Guglielmini*. La detta Fiasca, che dal P. *Grandi* si dice *Idrometrica*, era stata proposta dal *Nadi* del 1721 in occasione di una Visita al Po. Era questa un vaso A (*fig.* 9) di latta più lungo che largo, con un sottil foro in E aperto verso la sommità della parte più stretta, e con un tubo annesso BG, per cui passava un filo attaccato a una susta, cosicchè tirando il filo in G il foro E restava aperto, e rallentando il filo quel foro restava chiuso. Immersa la Fiasca a varie profondità sotto la superficie MN, e tenuto il foro E aperto per un dato tempo, e rivolto contro la corrente, l'acqua entrava per E mentre l' aria contenuta nella Fiasca poteva uscire pel tubo BG. Le quantità di acqua, che in tempi eguali entrarono per E nella Fiasca tenuta a diverse profondità, furono sempre in ragione sudduplicata delle altezze dell' acqua del fiume sopra il foro E; dal che si volea arguire, che tale fosse la ragione delle velocità dell' acqua del Po a quelle diverse profondità. Ma siccome lo stesso avvenne quando le sperienze furono ripetute in un' acqua stagnante, si dovette concludere che il metodo era inutile.

35. Altre sperienze sono state fatte col *Tubo ricurvo del Pitot*. Adoperò quest' Autore un tubo di vetro AEF ricur-

vo in E (*fig.* 10) assicurato nell' acqua corrente con certa macchinetta da esso descritta nelle Memorie dell' Accademia Reale delle Scienze di Parigi all' anno 1732. Immerse il tubo a diverse profondità CE sotto la superficie CD della Senna, e tenendo la bocca F diretta contro il corso dell' acqua, notò le altezze CB, cui saliva l' acqua dentro il tubo sopra il livello dell' acqua esteriore CD. La velocità, che può acquistare un grave cadendo liberamente dall' altezza BC trovata in ciascuna immersione, era secondo l' Autore la velocità dell' acqua in F. Il *Zendrini* (*Leggi* ecc. *delle acque correnti* pag. 134) sospetta, che l' altezza BC non sia proporzionale alla forza dell' acqua in F, e che parte di questa forza s' impieghi in penetrare attraverso il cilindretto acqueo EC stagnante nel tubo; ed il Sig. Francesco Domenico *Michelotti* (*Sperimenti Idraulici* vol. I. pag. 148) credette, che la forza della corrente in F dovesse misurarsi non dalla sola altezza CB, ma da tutta l' altezza EB, cosicchè le velocità in F sarebbero come le radici quadrate delle altezze EB per essere le forze come i quadrati delle velocità. Io per accertarmi del vero col fatto mi son servito di un tubo AEF di latta, dentro il quale avea inserito una bacchetta sottile, e leggera GB, lunga come AE, che galleggiava sopra l' acqua mediante un pezzo di sughero applicato all' estremo B di modo, che la porzione AG esterna della bacchetta mi dinotava l' altezza del cilindro acqueo EB dentro il tubo; ed in varie immersioni più, e meno profonde la porzione CB fu prossimamente la medesima tuttochè variassero le altezze BE. E siccome questo mi accadde in quel medesimo luogo, dove io mi era accertato colle sperienze del n. 29, che l' acqua correva pressochè colla medesima velocità in superficie, e sotto la superficie fino alla profondità del mio tubo, mi sono con ciò assicurato che non abbia luogo la difficultà del *Zendrini*, e del Sig. *Michelotti*.

36. Di più il Sig. *Michelotti* dopo un qualche carteggio con me replicò le sue sperienze, e nel suo secondo Volume stampato in Torino l' anno 1771 dice di aver immerso un tubo ricurvo di latta simile al mio colla bocca inferiore rivolta secondo la direzione del corso dell' acqua, e di aver osservato, che allora nel tubo l' acqua si componeva al livello della

della esteriore, e che rivolta la stessa bocca contro la corrente l' acqua interna si elevò nel tubo sopra l' esterna; e spiega il fenomeno con dire, che nel primo caso la sola pressione dell' acqua esteriore facea salire l' acqua nel tubo, e che nel secondo caso alla semplice pressione si aggiunse una forza prodotta dal movimento dell' acqua corrente; e perciò conviene, che in tai casi la celerità dell' acqua si possa argomentare dal maggior alzamento dell' acqua dentro il tubo sopra l' acqua al di fuori del tubo alla maniera del *Pitot*.

37. Ma in diverse immersioni fatte dal *Pitot* del suo tubo sotto il ponte reale della Senna, delle quali la massima fu a tre piedi sotto la superficie, l' acqua dentro il tubo si alzò sempre egualmente sopra l' acqua esterna. Dunque colà per le cose dette fino a tre piedi sotto la superficie la velocità fu sensibilmente la medesima.

38. Il chiarissimo Sig. Ab. *Ximenes* negli anni 1778, 1779 adoperò la seguente macchina. *AB* (*fig.* 11) è un albero verticale, che potea muoversi liberamente intorno ai perni *A*, e *B*. Alla rotella *C* era avvolto un filo, che passava sopra una puleggia *D*, e che portava un peso *E*. A qualunque profondità *MN* sotto la superficie *GH* dell' acqua potea fermare all' albero *AB* una ventola *F* con due braccioli *a*, *c*; ed il peso *E* dovea essere tale, che tenesse la ventola pressochè ferma normalmente contro il corso dell' acqua. Dalle misure della ventola, dei suoi braccioli, della rotella, e del peso *E* di ciascuna sperienza deduce l' altezza di quel prisma di acqua, che premeva la ventola, la quale altezza è quella, che conviene a un corpo cadente per acquistare la velocità dell' acqua nel sito della ventola. Da una serie di sperienze dedusse, che dalla superficie fino a un certo punto verso il fondo l' acqua si manteneva egualmente veloce; e che da quel punto fino al fondo la velocità diveniva sensibilmente sempre minore.

39. Finalmente dirò di uno sperimento, che per quanto io sappia è stato il primo ad essere tentato per investigare in qualche maniera nei fiumi il rapporto della velocità dell' acqua sotto la superficie a quella della superficie: ed è quello del P. *Cabeo* Ferrarese con un' asta *AB* (*fig.* 12) di legno con un corpo in *B* di un peso specificamente maggiore di

quello dell' acqua, e con alcune vessiche in C, buttata nell' acqua di un fiume colla superficie MN, e corrente da M verso N. Ecco che ne dice l' Autore nel suo libro primo delle Meteore stampato in Roma l' anno 1686 al testo 60: *Si enim poneres hastam in aqua stagnanti, pars eminens AC esset perpendicularis ad superficiem aquæ; similiter si moveatur tota æquali velocitate, servaret semper eamdem positionem. At videbis partem eminentem hastæ supra superficiem aquæ inclinari ad partem anteriorem, quod est evidens argumentum superiorem partem aquæ velocius fluere.*

40. Fin qui ho parlato degli sperimenti fatti da altri, non avendone inserito dei miei, che per incidenza, e parmi di aver mostrato, come di essi alcuni non sono punto atti a dinotar bene le velocità sotto la superficie, come sono tutti gli sperimenti fatti con Pendoli, e gli sperimenti fatti colla Fiasca Idrometrica del *Nadi*; e che tutti gli altri mostrano chiaramente, che nei siti degli sperimenti le velocità sotto la superficie o sono state eguali alla velocità della superficie, o ne sono state minori, come richiede generalmente la mia teoria. Ora in conferma di questo soggiungerò alcuni altri sperimenti miei.

41. Di due sperimenti fatti da me in Roma l' anno 1763 non farò parola, perchè fatti in piccolo, e perchè si possono vedere in due Raccolte una stampata in Parma, e l' altra in Firenze, e sono i due primi dell' *Aggiunta di Sperimenti* contro *Gennetè*; onde passerò ad altri, de' quali il primo sia il da me replicato più volte trovandomi in qualche barca. Ho fatto, che questa si muova a seconda del corso dell' acqua, e colla velocità dei galleggianti vicini. Esprima AC (*fig.* 13) la superficie di quell' acqua corrente da A verso C. DE era un' asta di legno lunga sei, otto, dieci piedi (talvolta era un remo), ch' io immergeva nell' acqua verticalmente, cosicchè restava fuori dell' acqua con una porzione BD, e per tenerla in tal positura io non impiegava altra forza che quella di premere colla mano in D in giù quanto bastava per impedire, che l' asta, perchè di un minor peso specifico dell' acqua, non venisse spinta all' insù dall' acqua medesima. E quando il corso della barca diveniva per esempio alquanto maggiore di quello dei galleggianti, l' asta si

piegava con forza girando l' estremo E verso A; succedendo il contrario qualora la barca diveniva, anche per poco, più lenta dei galleggianti vicini. Dal che si vede manifestamente, che quando la barca andava del pari coi galleggianti, e che l' estremo E non mi veniva portato nè verso A, nè verso C, si vede, dissi, che l' acqua sotto la superficie non correva sensibilmente più, che in superficie, perchè se avesse corso più sotto la superficie, mi avrebbe portato l' estremo E verso C.

42. Altre volte essendo pure in barca ho immerso nell' acqua dei mattoni appesi ognuno ad uno spago, che venivano tenuti da me, e da altri colla mano sporta fuori della barca. Gli spaghi erano di diverse lunghezze, e quando mi trovava colla barca in siti regolari del fiume, e che la barca andava del pari coi galleggianti vicini, le porzioni di spago fuori dell' acqua erano sensibilmente verticali, a riserva dei più lunghi (i cui mattoni attaccati si accostavano al fondo del fiume), de' quali le porzioni fuori dell' acqua si vedevano sensibilmente inclinate all' avanti, dinotando così, che presso il fondo la velocità diveniva minore.

43. Nel sito descritto al n. 27, e dove mi era assicurato, che l' acqua alla profondità di due piedi e mezzo circa correva con una velocità minore, ma di poco, che in superficie, buttai una canna DE avente in E un mattone di tal peso, che dopo pochi bilanciamenti restò immersa con una porzione BE lunga non più di tre piedi, essendo trasportata dall' acqua con una positura sensibilmente verticale, a riserva di alcuni pochi tratti, nei quali camminò inclinata all' avanti ma di poco. Altre volte, e non poche, ho ripetuto questo sperimento nel Po grande servendomi colà non di canne, ma di aste di legno ora con mattoni, ed ora con piombo in E di tal peso, che l' asta rimaneva sopra l' acqua con una lunghezza di un piede, o due, essendo il Po ora con acqua mediocre, ed ora in piena, ed essendo la porzione BE talvolta di 10, talvolta di 15, ed una volta di 20 piedi; ed in questi casi vidi tali aste qualche volta sensibilmente verticali, ma per lo più inclinate all' avanti, benchè di poco, a riserva delle volte, ch' io mi sono incontrato dove l' acqua avea dei moti irregolari, nei quali qualche volta l' asta è stata

inclinata all' indietro, ed una volta avendo due aſte una più lunga dell' altra, una di queſte era inclinata a una parte, e l' altra a un' altra nel medeſimo tempo, indizio di un movimento vorticoſo.

44. Ecco pertanto un' altra mano di ſperimenti, dai quali ho appreſo, che nei ſiti regolari dei fiumi le velocità dalla ſuperficie al fondo o ſono ſenſibilmente le medeſime fino a un certo punto poco diſtante dal fondo, come dice di aver oſſervato il Sig. Ab. *Ximenes*, o (il che mi ſembra più naturale) decreſcono, ma da principio aſſai poco, facendoſi poi gradatamente vie maggiore il decreſcimento a miſura che ſi va più verſo il fondo, e con quella legge, che non è per anche nota. Per la qual coſa parmi di dire a ragione, che la teoria da me eſpoſta concorda aſſai bene colla ſperienza; deſiderando io per altro, che altri ancora ſi occupino in eſperimenti di queſta natura; perchè inſtituite con metodo più ſerie di conſimili ſperienze in fiumi diverſi, ed in iſtati diverſi, potrebb' eſſere, che ſi arrivaſſe un dì ad avere una legge delle velocità delle acque correnti pei fiumi ſufficientemente proſſima al vero, colla quale date le miſure, e le condizioni di un fiume ſi poſſa ſenz' altro dire qual ſia la ſua portata, punto molto intereſſante pel regolamento dei fiumi. Ma finchè ci mancano codeſte ſerie di ſperimenti come trovare la portata di un fiume? Sarà queſto il ſoggetto dell' Articolo, che ſegue.

Nuovo metodo per trovare colla ſperienza la quantità dell' acqua corrente per un fiume.

45. Per miſurare l' acqua corrente per un piccolo canale largo per eſempio tre palmi, ed alto uno, ſe il canale era irregolare, il P. *Caſtelli* (prop. 1. l. 2.) applicava ad eſſo un Regolatore, o ſia un letto orizzontale di legno, e due ſponde verticali di legno; ed inferiormente al Regolatore inteſtava il canale, e ad una ſua ripa preſſo il Regolatore applicava tanti ſifoni, che aſſorbiſſero tutta l' acqua ſopravveniente di modo, che il canale per l' applicazione di eſſi non creſceſſe, nè calaſſe. E trovata colla ſperienza quant' acqua ſcaricava in un dato tempo ciaſcun ſifone ſapeva dire la *portata* del

canale; o sia quant' acqua passava per una sezione regolare di esso (qual era quella del Regolatore) anche non essendovi l' intestatura. Trattandosi in secondo luogo di un canale più grosso, per esempio largo 20 palmi, ed alto 5, per averne la portata applicava a questo pure un Regolatore o di legno, o di muro, e superiormente a questo derivava dal canale un canaletto largo tre, o quattro palmi applicandovi un Regolatore. Coi sifoni misurava la portata di questo, e dal rapporto delle altezze, e larghezze dell' acqua corrente pei due Regolatori argomentava (colla sua regola delle portate in ragione delle larghezze, e dei quadrati delle altezze) qual fosse la portata del canale maggiore. Accadendo in terzo luogo di dover trovare la portata di un fiume grosso, proponeva, che si applicasse a questo un Regolatore, e che dal fiume si divertisse un canale misurabile, come il precedente, e che colla regola accennata si trovasse anche la portata del fiume grosso. Non gli facea caso la spesa grave che potrebbe occorrere per fare tai rilievi dicendo, che i concetti grandi, come quello di misurare l' acqua di un fiume grosso, non devono cascare in mente, che a persone grandi, a Principi potenti, e che possono fare una qualche spesa per isfuggire altre spese maggiori, che si farebbero per mancanza della cognizione della quantità ricercata dell' acqua, e per isfuggire anche dei disgusti fra i medesimi Principi.

46. Ma quantunque alla regola delle velocità come le altezze, o sia delle portate come le larghezze, ed i quadrati delle altezze, si conformino più sperienze in piccolo; pure perchè tal regola è tuttora senza dimostrazione, nè è ancora ben verificata da sperienze in grande, non vedo, che questo metodo del *Castelli* per trovare la misura dell' acqua corrente per un fiume sia da abbracciarsi.

47. Il *Guglielmini* pure si vale di uno, o più Regolatori, ma in una maniera diversa. Propone, che al Regolatore si applichi una Cateratta, la quale si cali fino a un piede, o due, sotto la superficie dell' acqua corrente pel Regolatore, con che l' acqua sarà obbligata a gonfiarsi superiormente alla cateratta. E supponendo le velocità dell' acqua corrente per quella sezione così diminuita come le ordinate di una parabola conica col vertice alla superficie dell' acqua sostenuta, tro-

va la quantità dell' acqua del fiume. Se il fiume è così grande, che non vi si possa adattare un Regolatore, suggerisce, che col metodo prescritto si misuri l' acqua dei fiumi minori, che lo compongono, come meglio si può vedere alla fine del lib. 4. della *Misura delle acque correnti* dove alla difficultà della molta spesa risponde col sentimento sopra riferito del P. *Castelli*.

48. Ma ho mostrato, che la velocità delle acque correnti non sono già come qui vuole l' Autore (4, 5, 6,). Dunque nè anche questo metodo del *Guglielmini* è al caso nostro.

49. Altri hanno scielto più perpendicolari di una sezione del fiume, e adottando per sicuro l' uso del pendolo hanno con questo indagato la velocità dell' acqua a diverse profondità di ciascuna perpendicolare, indi trovata una velocità media fra tutte le pretese trovate velocità hanno multiplicato questa nella sezione stessa. Ma ho mostrato quanto sia fallace l' uso del pendolo (21, 22, 23, 24, 25), perciò fallaci saranno stati ancora i risultati di tai rilievi.

50. Potrebbe cader in pensiero a taluno di adoperare il tubo ricurvo del *Pitot* in luogo del pendolo. Ma convien sapere in primo luogo, che l' acqua interna al tubo è soggetta ad oscillazioni sensibili, particolarmente dove il corso dell' acqua è più veloce, onde conviene scieglier un' altezza di mezzo con una estimazione oculare, che non può tenersi per molto precisa. Oltre di che nei fiumi grandi, ed in tempo di piena, come poter fermare il tubo nel filone, ed a profondità considerabili? Anche la ventola del Sig. Ab. *Ximenes* è soggetta alle sue oscillazioni, ed è difficile il praticarla in tempo di acque alte. L' Autore non ne ha fatto uso finora in un' altezza di acqua, che sia maggiore di piedi 9. 9 di Parigi. Promette di tentare con essa delle sperienze nell' Arno in tempo di mezze piene. Ma in tempo di piena dispera affatto, mentre che il maggior bisogno di tali sperienze è nel colmo delle piene.

51. Il metodo, ch' io sono per proporre, è appunto tale, che si può praticare anche in tempo delle piene, e con una spesa discreta, e di gran lunga minore di quella, che contemplavano il *Castelli* ed il *Guglielmini* (45, 47). Non è altro che una modificazione del metodo del P. *Cabeo*, voglio di-

re, che dove il P. *Cabeo* adoperava delle aste *AB* (*fig.* 12) di legno con un peso in *B*, e con delle vessiche in *C*, io propongo delle aste consimili, ma senza vessiche, e con una parte infima *EB* (*fig.* 14) o di metallo, o armata di metallo in modo, che tutta l' asta *AB* sia un cilindro, ed il metallo dev' essere tanto, che l' asta così preparata posta in un' acqua stagnante abbia a mettersi da sè in una positura verticale, e galleggiare con una porzione *AC* di un piede, o due fuori dell' acqua. Della preparazione di queste aste (ch' io chiamo *ritrometriche*) parlerò verso il fine.

52. Intanto volendo la portata attuale di un fiume, si scielga di esso un tratto *CP'* (*fig.* 15) di duecento, o più tese, che sia dei più retti, e dei più regolari. Si butti una delle descritte aste in un punto *H'* quindici, o venti tese superiormente al punto *C*. Questa dopo alcuni bilanciamenti arriverà in *C* portata dall' acqua sensibilmente parallela a se stessa, e con moto regolare, ed equabile, e questa sia la *AB*, che supporrò inclinata all' avanti. Mostrerò come con quest' asta si possa scoprire assai prossimamente le velocità dell' acqua dalla superficie *CP'* fino al fondo *rl* lungo il cammino, che farà l' asta da *C* in *P'*.

53. Convien esaminare tutte le forze, che tendono ad agitare l' asta *AB* essendo *HMLK* la curva dell' asse *IH* (12), alla quale terminano le velocità dell' acqua, che porta l' asta. Una di queste forze è il peso assoluto dell' asta stessa, il quale si può intendere come raccolto nel centro di gravità dell' asta; e codesto centro sia nel punto *D*; e la verticale *DE* esprima il peso suddetto, che (fatto il rettangolo *im*) equivale a due forze *Di*, *Dm*. Un' altra forza è quella, colla quale l' acqua spinge all' insù ogni porzione della parte immersa *CB* dell' asta, la qual forza per essere la parte *CB* cilindrica, si può considerare come raccolta nel punto *F* di mezzo della stessa parte *CB*, e si può esprimere con una verticale *FG*, che (fatto il rettangolo *bk*) equivale alle due forze *Fk*, *Fb*. E codesta forza *FG* si trova eguale al peso di un volume di acqua eguale alla porzione sommersa *CB* dell' asta. Le altre forze, che tendono ad agitare l' asta sono le impressioni dell' acqua, che la urta dove in un modo, e dove in un altro. Imperocchè è manifesto, che l' asta non

potrà muoverſi tutta colla velocità maſſima IK, nè colla ſola velocità minima NM, e che ſi ridurrà ad una velocità di mezzo; e queſta ſia la OL comune all' acqua nei punti O, P: di modo che da P in ſu l' acqua è più veloce dell' aſta, e da P in giù è l' aſta, ch' è più veloce dell' acqua. Quindi nel punto Q la velocità dell' acqua è ut, e quella dell' aſta è $uS = OL$. Dunque in Q l' acqua inveſte l' aſta colla velocità riſpettiva St ſpingendola da Q verſo S. Ma in T la velocità dell' acqua è XY, e quella dell' aſta è $XZ = OL$. Dunque in T l' aſta fende l' acqua colla velocità YZ; e l' acqua reagiſce in T contro l' aſta con quella ſteſſa forza, colla quale inveſtirebbe l' aſta, che foſſe ferma, colla velocità ZY diretta da T verſo a.

54. Eſprimiamo codeſte forze dell' acqua. La lunghezza CB della parte immerſa dell' aſta ſi dica $= b$, ed il ſuo diametro $= i$. Si metta con Archimede, che il quadrato del diametro all' aja del cerchio ſtia come 14 a 11; e ſi troverà $\frac{11\,i^2}{14} =$ baſe del cilindro CB. Dunque $\frac{11\,bi^2}{14}$ ſarà il volume del cilindro CB. Il peſo di un egual volume di acqua ſia P. Onde $FG = P$ (53). Si cerchi l' impreſſione Qg, che fa all' aſta normalmente uno ſtrato ſottiliſſimo QSs dell' acqua colla velocità riſpettiva St. Poichè b è la lunghezza del cilindro CB, ed i il ſuo diametro, ſarà bi la ſua ſezione per l' aſſe. Pertanto ſi concepiſca, che codeſto piano bi ſia ſituato in cb' verticalmente, e che ſia incontrato dall' acqua direttamente in tutta l' altezza cb' colla velocità $St = u$; intendo per u lo ſpazio, che può correre l' acqua uniformemente in un tempo $k = 1''$ colla detta velocità. La caduta libera di un grave nel detto tempo k ſia h. Si ſa, che la velocità alla fine di tale caduta è $2h$. Ma come i quadrati delle velocità di un corpo cadente, così ſono le cadute, o ſia le altezze dalle quali il corpo cadendo liberamente acquiſta quella velocità. Dunque facendo $4h^2 : u^2 :: h$ al quarto termine $\frac{u^2}{4h}$, queſto ſarà la caduta competente alla velocità u.

55. Anche ſecondo le ſperienze dei Signori d' *Alembert*, *Condorcet*

Condorcet, e *Boſſut* pubblicate l'anno 1777 l'impreſſione dell' acqua al detto piano bi è eguale al peſo di un priſma di acqua, che abbia per baſe lo ſteſſo piano, e per altezza la trovata altezza $\frac{u^2}{4b}$ (54), con qualche coſa di più. Non computando qui quel di più, ch' è poco, il volume dell' indicato priſma di acqua ſarà $\frac{biu^2}{4b}$. Ma il peſo del volume $\frac{11bi^2}{14}$ di acqua ſi è detto P (54), e come i volumi di acqua così ſono i loro peſi: dunque il peſo dell' acqua del volume $\frac{biu^2}{4b}$ ſarà $\frac{7Pu^2}{22bi}$, ch' è l' impreſſione ricercata dell' acqua contro il piano bi ſituato in cb'.

56. Ora al ſuddetto piano s'intenda ſoſtituito un cilindro CB del diametro i. Dalle ſperienze 35, ed 89 de' ſopranominati Signori, ed anche da altre del Sig. *Borda* fatte nell' aria (*Memorie dell' Accademia* di Parigi 1760) raccolgo, che la detta impreſſione contro il piano bi ſta all' impreſſione contro il cilindro ſoſtituito come 20 a 11. Dunque facendo $20 : 11 :: \frac{7Pu^2}{22bi}$ (55) al quarto termine $\frac{7Pu^2}{40bi}$, queſto ſarà il peſo eguale all' impreſſione fatta dall' acqua al detto cilindro poſto verticalmente in cb'. Sia $Hu = x$, ed $Ss = dx$. Facendo $cb' : Ss :: \frac{7Pu^2}{40bi}$ al quarto termine $\frac{7Pu^2 . Ss}{cb' . 40bi}$ $= \frac{7Pu^2dx}{40bbi}$, queſto ſarà l' impreſſione al cilindro verticale fatta in Ss dallo ſtrato di acqua $\mathfrak{Q}Ss$ colla velocità $u = St$. E perchè l' angolo $H'CB$ d' incidenza dell' acqua ſopra l' aſta io l' ho trovato ſempre maggiore di un ſemiretto, ſecondo le dette ſperienze del 1777, l'impreſſione normale al cilindro collocato in cb' all' impreſſione normale al cilindro CB in $\mathfrak{Q}$ fatta dallo ſteſſo ſtrato di acqua $\mathfrak{Q}Ss$ ſtarà come CB a Cq eſſendo Cq verticale incontrata dalla orizzontale BqN. La

prima trovata $= \frac{7Pu^2dx}{40bbi}$ sia espressa con una linea orizzontale $\mathfrak{Q}R$, e la seconda sia espressa con una $\mathfrak{Q}g$ normale all' asta; e sia $HI = m$, $HN = n$, ed $HO = q$: onde $IN = m - n = Cq$, e si avrà $CB\ (= b) : Cq\ (= m - n) :: \mathfrak{Q}R \left(= \frac{7Pu^2dx}{40bbi}\right) :$ $\mathfrak{Q}g = \frac{7P.(m-n).u^2dx}{40b^2hi}$, essendo $u^2dx = (St)^2.Ss$; onde $\int \mathfrak{Q}g = \frac{7P.(m-n)}{40b^2hi} \int (St)^2.Ss$. Nell' integrazione la costante si determina mettendo l' integrale $= 0$ quando $x = HO = q$. Facendo di poi $x = HI = m$ si avrà la somma delle $\mathfrak{Q}g$ da P fino in C.

57. Sarà $Ou = x - q$; e perchè $Cq : CB :: Ou : P\mathfrak{Q}$, sarà $m - n : b :: x - q : P\mathfrak{Q} = \frac{b.(x-q)}{m-n}$; onde $P\mathfrak{Q}.\mathfrak{Q}g = \frac{7P.(x-q).u^2dx}{40bbi}$, ch' è il momento di ogni $\mathfrak{Q}g$ riferito al punto P. E la somma di questi momenti divisa per la somma delle $\mathfrak{Q}g$, cioè $\frac{\int P\mathfrak{Q}.\mathfrak{Q}g}{\int \mathfrak{Q}g}$ darà la distanza del centro delle forze $\mathfrak{Q}g$ dal punto P, com' è noto.

58. Nella integrazione si operi come si è detto al n. 56. E quando $x = HI = m$, cioè quando $P\mathfrak{Q}$ diviene PC, la detta distanza del centro delle forze $\mathfrak{Q}g$ da P sia Pn; ed nx normale all' asta sia in tal caso $\int \mathfrak{Q}g$ (56), così si avrà $Pn = \frac{\int P\mathfrak{Q}.\mathfrak{Q}g}{nx}$, e tutte le $\mathfrak{Q}g$ distribuite lungo la PC equivaleranno alla sola nx applicata in n.

59. Lo stesso discorso si può applicare al caso di uno strato TZz di acqua preso al di sotto del punto P. In questo caso essendo $x = HY$, sarà $dx = Zz$, ed $u = YZ$, velocità colla quale l' acqua reagisce in T con una forza, che equivale all' impressione dello strato TZz se essendo l' asta ferma l' acqua la incontrasse colla velocità YZ diretta da Z verso

T, e coll' angolo d' incidenza $ZTC = H'CB$ (56). Codesta impressione qui pure considerata normale all' asta sia Tb, e si troverà $Tb = \frac{7P.(m-n).u^2dx}{40b^2bi}$ (57) essendo

$u^2dx = (YZ)^2 . Zz$; onde $\int Tb = \frac{7P.(m-n)}{40bbi} \int (YZ)^2 . Zz$. Integrando la costante si trova mettendo l' integrale $= 0$ allorchè sia $x = HN = n$; facendo di poi $x = HO = q$ si avrà la somma delle Tb da B fino in P.

60. Poichè qui $x = HX$ sarà $OX = q - x$. Ma $Cq : CB :: OX : PT$, dunque $m - n : b :: q - x : PT = \frac{b.(q-x)}{m-n}$; ed il momento delle Tb riferito al punto P sarà $PT.Tb = \frac{7P.(q-x).u^2dx}{40bbi}$. E la somma di questi momenti divisa per la somma delle Tb darà la distanza del centro delle impressioni Tb dal punto P.

61. Nell' integrazione la costante si determini come al n. 59. E quando $x = HO = q$, cioè quando BT diviene BP, la detta distanza sia Po, ed oy normale all' asta sia in tal caso $\int Tb$ (59), e così si avrà $Po = \frac{\int PT.Tb}{oy}$, e tutte le Tb distribuite lungo la BP equivaleranno alla sola oy applicata in o.

62. Ora perchè l' asta arrivata in C è ridotta a un moto regolare (52), nè si alza, nè si abbassa, devono essere eguali le due forze contrarie Fk, Di. E perchè i due triangoli FkG, DiE sono simili, sarà anche $FG = DE$, e $kG = iE$, cioè $Fh = Dm$.

63. E perchè il moto dell' asta è equabile (52), e non accelerato, nè ritardato, le forze $nx + Dm$, che tendono ad accelerare il moto, saranno eguali alle contrarie $oy + Fb$, che tendono a ritardare lo stesso moto; e perchè si è trovato $Fh = Dm$ (62), sarà ancora $nx = oy$; o sia $\int Qg = \int Tb$,

cioè $\frac{7P.(m-n)}{40b^2hi}\int(St)^2.Ss = \frac{7P.(m-n)}{40b^2hi}\int(YZ)^2.Zz$ (56, 59), onde $\int(St)^2.Ss = \int(Yz)^2.Zz$ (*A*) prendendo le St da L fino in c, e le YZ da p fino in L.

64. E finalmente perchè l' asta viaggia parallela a sestessa (52) il centro delle forze nx, Dm dovrà coincidere col centro delle forze contrarie oy, Fb. Il primo dee cadere sopra il punto D, ed il secondo sotto il punto F. Dunque devono coincidere in un qualche punto V fra D, ed F. Quindi si avrà $nx : Dm :: VD : Vn = \frac{VD.Dm}{nx}$; ed insieme $oy : Fb :: VF : Vo = \frac{VF.Fb}{oy}$. Dunque $Vn + Vo = \frac{VD.Dm}{nx} + \frac{VF.Fb}{oy}$. Ma si è trovato $Dm = Fb$ (62), ed $nx = oy$ (63). Dunque $Vn + Vo = \frac{VD.Fb}{nx} + \frac{VF.Fb}{nx} = \frac{(VD+VF).Fb}{nx} = \frac{DF.Fb}{nx}$.

65. Ma $Vn + Vo = Pn + Po = \frac{\int PQ.Qg}{nx}$ (58) $+ \frac{\int PT.Tb}{oy = nx}$ (61, 63). Dunque $\frac{DF.Fb}{nx} = \frac{\int PQ.Qg}{nx} + \frac{\int PT.Tb}{nx}$, cioè $DF.Fb = \int PQ.Qg + \int PT.Tb$ $= \int\frac{7P.(x-q).u^2dx}{40bhi}$ (57) $+ \int\frac{7P.(q-x).u^2dx}{40bhi}$ (60) $= \frac{7P}{40bhi}\left(\int(x-q).u^2dx + \int(q-x).u^2dx\right)$.

66. E perchè $CB : Bq :: FG : Fb$ sarà $Fb = \frac{Bq.FG}{CB}$ $= \frac{Bq.P}{b}$ (54); e fatta $DF = e$, sarà $DF.Fb = \frac{Bq.Pe}{b} =$ (65) $\frac{7P}{40bhi}\times\left(\int(x-q).u^2dx + \int(q-x).u^2dx\right.$, cioè $Bq = \frac{7}{40ehi}\times\left(\int(x-q).u^2dx + \int(q-x).u^2dx\right)$ (*B*).

67. Fatti questi preparativi mi propongo da sciogliere il seguente problema. Date la lunghezza CB della porzione immersa dell' asta, la DF distanza del centro D di gravità dell' asta dal punto F di mezzo della sua porzione immersa, la velocità OL dell' asta, la velocità superficiale IK dell' acqua, e dato l' angolo ACI d' inclinazione dell' asta e in conseguenza il suo complemento BCq, trovare una curva KLH, o una retta $KL\mathfrak{Q}'$, che essendo scala delle velocità della verticale IS' soddisfaccia ai dati suddetti.

68. Primieramente esamino il caso più semplice, cioè se una retta $KL\mathfrak{Q}'$ soddisfaccia ai dati esposti. In questo caso le x invece di partire dal punto H partono dal punto $\mathfrak{Q}'$, e le HI, HO, HN divengono $\mathfrak{Q}'I = m$, $\mathfrak{Q}'O = q$, $\mathfrak{Q}'N = n$, e le St, ZY divengono Si, Zf, onde giusta il *n.* 63 qui si deve avere $\int (Si)^2 . Ss = \int (Zf)^2 . Zz$. E perchè $\mathfrak{Q}'O : OL :: LS : Si$, sarà $q : OL :: x - q : Si = \frac{OL . (x-q)}{q}$, e $\int (Si)^2 . Ss = \int \frac{(OL)^2 . (x-q)^2 . dx}{q^2}$, e (come si è detto al *n.* 56) integrando in modo, che quando $x = \mathfrak{Q}'O = q$ l' integrale sia nullo, si avrà $\frac{(OL)^2 . (x-q)^3}{3q^2}$; e fatta indi $x = \mathfrak{Q}'I = m$ si avrà $\int (Si)^2 . Ss = \frac{(OL)^2 . (m-q)^3}{3q^2}$. Similmente $\mathfrak{Q}'O : OL :: LZ : Zf$, cioè $q : OL :: q - x : Zf = \frac{OL . (q-x)}{q}$, onde $(Zf)^2 . Zz = \frac{(OL)^2 . (q-x)^2 . dx}{q^2}$; ed integrando così, che quando $x = \mathfrak{Q}'N = n$ l' integrale sia nullo (59), indi facendo $x = q$ si avrà $\int (Zf)^2 . Zz = \frac{(OL)^2 . (q-n)^3}{3q^2}$. Dovendo pertanto le due somme essere eguali (63) si trova $m - q = q - n$, cioè $OI = ON$. Il che fa vedere, che qualunque sieno le due velocità date IK, OL, purchè tutte le velocità della verti-

cale IS' terminino ad una retta, quella velocità OL dell' acqua, ch' è comune all'asta, corrisponde a un punto O, che dee essere di mezzo della IN, e che in conseguenza la velocità dell' asta in tal caso è la velocità media di tutte le velocità dell' acqua della verticale IN.

69. Essendosi detta al n. 54 $St=u$, in questo caso sarà $u=Si=\frac{OL.(x-q)}{q}$ (68), e $\int(x-q).u^2dx=\frac{(OL)^2}{q^2}\times$ $\int(x-q)^3.dx$. Fatto l' integrale nullo allorchè sia $x=QO$ $=q$, indi fatta $x=QI=m$, si avrà $\int(x-q).u^2dx$ $=\frac{(OL)^2}{q^2}.\frac{(m-q)^4}{4}$. Essendosi pur detta $ZY=u$, in questo caso sarà $u=Zf=\frac{OL.(q-x)}{q}$ (68); e $\int(q-x).u^2dx$ $=\frac{(OL)^2}{q^2}\int(q-x)^3dx=\frac{(OL)^2}{q^2}.\frac{(q-n)^4}{4}$ (fatto l' integrale nullo quando $x=QN$, e fatta indi $x=QO=q$). Dunque $\int(x-q).u^2dx+\int(q-x).u^2dx=\frac{(OL)^2}{q^2}\times(\frac{(m-q)^4}{4}$ $+\frac{(q-n)^4}{4})=\frac{(OL)^2}{q^2}.\frac{(m-q)^4}{2}$ (essendosi trovato al n. 68 $m-q=q-n$). Dunque secondo il n. 66 sarà $Bq=$ $\frac{7}{40ehi}\times\frac{(OL)^2}{q^2}.\frac{(m-q)^4}{2}=\frac{7.(OL)^2.(m-q)^4}{80ehiq^2}$. Se si dirà $IN=c$, $IK=f$, $OL=g$, poichè $OI=ON$ (68), sarà $OI=\frac{1}{2}c=m-q$. E perchè $QI. IK::QO: OL$, sarà $m:f::q:$ g, e $q=\frac{gm}{f}$; ed $m-q=\frac{1}{2}c=m-\frac{gm}{f}$; onde $m=$

$\frac{cf}{2.(f-g)}$, e $q = \frac{gm}{f} = \frac{cg}{2.(f-g)}$. Sostituendo si avrà $Bq = \frac{7c^2.(f-g)^2}{320hie}$.

70. Venendo a un caso particolare, in cui sia per esempio la velocità superficiale IK di 10 piedi per ogni minuto secondo, l'altra OL dell'asta di piedi 8, la $DF = e$ (53, 66) $=$ pi. 3; la caduta h di un grave in 1'' $=$ piedi 15, il diametro i dell'asta di due pollici, o sia $= \frac{1}{6}$ di piede, la IN da dedursi dalla lunghezza CB note, e dall' angolo BCq dato, di piedi 12, e la IS' di piedi 14 sarà $c = 12$, $f = 10$, $g = 8$, $e = 3$, $h = 15$, $i = \frac{1}{6}$, e Bq (69) $= 1, 68$, cioè l'angolo BCq di gr. $7, 58'$.

71. Se pertanto l' angolo già dato sarà di gr. $7, 58'$, la vena KLQ' quadrerà esattamente a tutti i dati del Problema, e si potrà dire, che la KLd sia (almeno prossimamente) la scala della velocità della verticale IN; e quando IN formi una buona parte della IS' si potrà ragionevolmente concludere, che tutte le velocità della verticale IS' terminino alla retta KLl. Per la qual cosa essendosi detta IS' di piedi 14, l' aja $IS'lK$ sarà di piedi quadrati 107, 33, cioè in ogni minuto secondo per la verticale IS' passerà un velo di acqua di piedi 107, 33 quadrati; i quali divisi per tutta l'altezza IS' di piedi 14 danno una velocità media di piedi $7\frac{2}{3}$.

72. Ma se in vece di gr. $7, 58'$ fosse stato dato un angolo maggiore oltre gli altri dati del n. 70, si dovrà concludere, che le velocità della verticale IS' non terminano a una retta, ma bensì a una curva KLH. Per rinvenire una curva, che soddisfaccia ai dati io ricorro alla famiglia delle Parabole, giacchè ognuna di queste applicata come la HLK importa, che dalla superficie al fondo il decrescimento di velocità si faccia sempre maggiore, come richiede la mia teoria, che non discorda dalle sperienze.

73. Si esamini pertanto in secondo luogo se la HLK fosse una parabola cubica di secondo genere della equazione px^2

$= y^3$. Poichè $y = \sqrt[3]{px^2}$ quando $x = Hu$ farà $dx = Ss$, ed $y = ut = \sqrt[3]{(px)^2}$; e quando $x = HO = q$ farà $y = \sqrt[3]{pq^2}$. Dunque $St = ut - OL = \sqrt[3]{px^2} - \sqrt[3]{pq^2}$, e $\int (St)^2 . Ss$

$\int (\sqrt[3]{px^2} - \sqrt[3]{pq^2}) . dx$. Integrando per modo, che quando $x = HO = q$ l' integrale sia nullo; indi facendo $x = HI = m$ si avrà $\int (St)^2 . Ss = \sqrt[3]{p^2} \left(\frac{3m^2 \sqrt[3]{m}}{7} - \frac{6m \sqrt[3]{q^2 m^2}}{5} + qm \sqrt[3]{q} - \frac{8 q^2 \sqrt[3]{q}}{35} \right)$. Quando poi sia $x = HX$ si avrà $dx = Zz$, ed $y = XY = \sqrt[3]{px^2}$, onde $YZ = OL - XY = \sqrt[3]{px^2} - \sqrt[3]{pq^2}$, $\int (YZ)^2 . Zz = \int (\sqrt[3]{pq^2} - \sqrt[3]{px^2}) . dx$; ed integrando così, che quando $x = HN = n$ si abbia zero, indi facendo $x = HO = q$ si troverà $\int (YZ)^2 . Zz = \sqrt[3]{p^2} \times \left(\frac{8q^2 \sqrt[3]{q}}{35} - \frac{3}{7} n^2 \sqrt[3]{n} + \frac{6n \sqrt[3]{q^2 n^2}}{5} - qn \sqrt[3]{q} \right)$.

74. E perchè le due somme ritrovate devono esser eguali (63) si troverà $\frac{16q^2 \sqrt[3]{q}}{35} - \frac{3}{7} . (m^2 \sqrt[3]{m} + n^2 \sqrt[3]{n}) + \frac{6}{5} \sqrt[3]{q^2} . (m \sqrt[3]{m^2} + n \sqrt[3]{n^2}) - q \sqrt[3]{q} . (m + n) = 0$.

75. Poichè $St = u \, (54) = \sqrt[3]{px^2} - \sqrt[3]{pq^2} \, (73)$, farà $\int (x - q) . u^2 dx = \int (x - q) . (\sqrt[3]{px^2} - \sqrt[3]{pq^2}) . dx =$ (riducendo l' integrale al zero allorchè $x = q$, indi facendo $x = m$) $\sqrt[3]{p^2} \times \left(\frac{3m^3 \sqrt[3]{m}}{10} - \frac{3m^2 \sqrt[3]{q^2 m^2}}{4} + \frac{qm^2 \sqrt[3]{q}}{2} - \frac{3qm^2 \sqrt[3]{m}}{7} + \frac{6qm \sqrt[3]{q^2 m^2}}{5} - q^2 m \sqrt[3]{q} + \frac{5q^3 \sqrt[3]{q}}{28} \right.$. Così perchè quando $x = HX$ si è detta $YZ = u \, (59) = \sqrt[3]{pq^2} - \sqrt[3]{px^2} \, (73)$, farà $\int (q - x) . u^2 dx = \int (q - x) . (\sqrt[3]{pq^2} - \sqrt[3]{px^2})^2 . dx =$ (mettendo l' integrale $= 0$ quando $x = n$, indi facendo $x = q$)

$\sqrt[3]{p^2}$

$$\sqrt[3]{p^2} \times \left(\frac{5q^3\sqrt[3]{q}}{28} + \frac{3n^3\sqrt[3]{n}}{10} - \frac{3n^2\sqrt[3]{q^2n^2}}{4} + \frac{qn^2\sqrt[3]{q}}{2} - \frac{3qn^2\sqrt[3]{n}}{7} \right.$$
$$\left. + \frac{6qn\sqrt[3]{q^2n^2}}{5} - q^2n\sqrt[3]{q} \right).$$

76. Dunque $Bq\,(66) =$

$$\frac{7}{40ebi} \times \int \left((x-q) \, . \, u^2 dx + \int (q-x) \, . \, u^2 dx \right) =$$
$$\frac{7\sqrt[3]{p^2}}{40ebi} \times \left(\frac{3}{10} . (m^3\sqrt[3]{m} + n^3\sqrt[3]{n}) - \frac{3}{4}\sqrt[3]{q^2} . (m^2\sqrt[3]{m^2} + n^2\sqrt[3]{n^2}) \right.$$
$$+ \frac{1}{2} q\sqrt[3]{q} . (m^2 + n^2) - \frac{3}{7} q . (m^2\sqrt[3]{m} + n^2\sqrt[3]{n})$$
$$\left. + \frac{6}{5} q\sqrt[3]{q^2} . (m\sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{n^2}) - q^2\sqrt[3]{q} . (m+n) + \frac{5q^3\sqrt[3]{q}}{14} \right).$$

77. Colla equazione del n. 74 convien trovare nei casi particolari quale sia fra le infinite parabole della equazione $px^2 = y^3$ quella, che si potrebbe confare coi dati del Problema a riserva dell' angolo d' inclinazione dell' asta; per passare indi a vedere colla equazione del n. 76 se quella parabola così trovata si confaccia ancora coll' angolo dell' asta già dato. Perciò ritorno all' esempio del n. 70, dove si è fatta $IK = 10$, $OL = 8$, $DF = e = 3$, $b = 15$, $i = \frac{1}{6}$, ed $IN = m - n = 12$. Quindi sarà $n = m - 12$; e per la natura della parabola cubica di secondo genere sarà $(IK)^3 : (OL)^3 :: (IH)^2 : (OH)^2$, cioè $1000 : 512 :: m^2 : q^2$; onde $q = m\sqrt{\frac{512}{1000}} = m - OI$. Dunque $m = \frac{OI\sqrt{1000}}{\sqrt{1000} - \sqrt{512}}$. Poichè la somma dei quadrati delle St da L fino in c dev' essere eguale alla somma dei quadrati delle YZ da L fino in p (63), accade, che il punto O si trova sempre poco sotto il punto di mezzo della IN, onde se nella formola trovata $\frac{OI\sqrt{1000}}{\sqrt{1000} - \sqrt{512}}$ si metta $OI = \frac{IN}{2}$, si avrà un valore, che di poco mancherà dal giusto valore della m. Quindi perchè IN

ſi è fatta $=12$, mettendo nella detta formola $OI=6$ ſi avrà $21\frac{7}{9}$, ch' è un limite della m, o ſia un valore minore, ma di poco, della m.

78. Infatti ſi metta $m=21\frac{7}{9}$. Così ſarà $n=HI-IN$ $=21\frac{7}{9}-12=9\frac{7}{9}$, e q (trovata qui ſopra $=m\sqrt{\frac{512}{1000}}$) $=15,58$. Fatta la ſoſtituzione di queſti valori delle m, n, q nella equazione del n. 74, i termini, che la compongono, danno 0, 002 (ſi veda il calcolo nel fine), il che moſtra che ſi può prendere $21\frac{7}{9}$ pel vero valore della m. E perchè $p=\frac{y^3}{x^2}$, ſarà $p=\frac{(IK)^3}{(HI)^2}=\frac{1000}{m^2}=2,109$. Soſtituiti queſti valori delle m, n, q, p nella equazione ultima del n. 76 ſi avrà $Bq=1,78$, che dà l' angolo BCq di gr. 8, 26'.

79. Quindi ſe l' angolo già dato (67) ſarà ſtato per l' appunto di gr. 8, 26' la parabola cubica così trovata HLK quadrerà eſattamente con tutti i dati del Problema, e ſi potrà dire, che la ſcala delle velocità della verticale IN ſia aſſai proſſimamente l' arco MLK della parabola ſuddetta, e qualora la NS' ſia piccola porzione della IS', ſarà ragionevole il concludere, che le velocità di tutta la verticale IS' termino alla ſteſſa parabola HLK. Quindi fatta la IS' di piedi 14, l'aja $IS'V'K$, ch'è $\frac{3}{5}HI.IK-\frac{3}{5}.HS'.S'V'$, ſarà di piedi quadrati 107, 17; che eſprimeranno la portata della verticale IS', o ſia il velo d' acqua, che in 1'' paſſa per la verticale ſteſſa. E dividendo per $IS'=14$ il detto velo ſi avrà piedi 7, 65, velocità media delle velocità da I fino in S'.

80. Che ſe l' angolo già dato (67) foſſe maggiore del trovato qui ſopra, ſi paſſi ad eſaminare in terzo luogo ſe la curva ricercata foſſe una parabola conica della equazione $px=y^2$.

81. Operando come ſi è fatto rapporto alla parabola cubica di ſecondo genere in luogo della equazione del n. 74 dedotta dal n. 63 ſi avrà $8\sqrt{q}(m\sqrt{m}+n\sqrt{n})+2q^2-6q\times(m+n)-3m^2-3n^2=0$.

82. Ed in luogo della equazione del n. 76 dedotta dal

n. 66 qui si avrà $Bq(66) = \frac{7p}{40ehi} \times (\frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{3}n^3$ $- \frac{4}{5}\sqrt{q}\,(m^2\sqrt{m} + n^2\sqrt{n}) + \frac{4}{3}q\sqrt{q}\,(m\sqrt{m} + n\sqrt{n}) - q^2\,(m+n$ $+ \frac{4}{5}q^2))$.

83. Qui pure ripiglio, come al n. 77, le determinazioni fatte per l' esempio del n. 70, cosicchè essendo $IN = 12 = m - n$, sarà $n = m - 12$; e per la natura della parabola conica sarà $\overline{IK}^2 : \overline{OL}^2 :: IH : OH$, cioè $100 : 64 :: m : q = \frac{64m}{100}$. Ma $q = HO = HI - OI = m - OI$. Dunque $\frac{64m}{100} = m - OI$, ed $m = \frac{100OI}{36}$. Un limite della m si troverà sempre colla regola del n. 77, cioè facendo l' ipotesi di $OI = \frac{ON}{2} =$ (in quest' esempio) 6, onde qui risulta $m = 16\frac{2}{3}$. Si metta dunque prima $m = 16\frac{2}{3}$. E sarà $n = m - 12 = 4\frac{2}{3}$: e $q = \frac{64m}{100}$ $= 10\frac{2}{3}$. Sostituendo questi valori delle m, n, q nell' equazione del n. 81, si ottiene 4, 73. Mettendo in appresso $m = 17$, sarà $n = m - 12 = 5$, e $q = 10, 88$. Sostituiti questi nuovi valori delle m, n, q nella stessa equazione del n. 81, i termini che la compongono danno $-115, 61$; il che mostra, che il giusto valore della m sta fra il $16\frac{2}{3}$ ed il 17; e col metodo noto si trova $m = 16, 68$: onde $n = m$ $- 12 = 4, 68$, e $q = \frac{64m}{100} = 10, 67$; e $p = \frac{(IK)^2}{IH} = \frac{100}{m}$ $= 5, 99$. Sostituiti questi valori delle m, n, q, p nel va-

lore della Bq trovato al n. 82 si ha $Bq = 2, 11$, che dà l' angolo BCq di gr. 9. 58'.

84. Dunque se l' angolo già dato (67) fosse appunto di gr. 9, 58' la parabola conica trovata sarà in quest' esempio la curva ricercata, perchè soddisfa a tuti i dati del Problema; e fatta IS' di piedi 14 l' aja $ISVK$ sarà di piedi quadrati 101, 46 portata della verticale IS', che divisi per 14 danno la velocità media di piedi 7, 53.

85. Ma se l' angolo dato fosse fra i gr. 8, 26' trovati al n. 78, ed i gr. 10, 12' trovati al n. 83, si passi ad esaminare una qualche parabola intermedia. Mi spiego. Si metta l' equazione $px^{29} = y^{30}$, e si vada scemando l' esponente della x di una unità per volta accrescendo ogni volta pure di una unità l' esponente della p, e si avrà la serie di equazioni

$px^{29} = y^{30}$

$p^2x^{28} = y^{30}$

$p^3x^{27} = y^{30}$

ecc.

così si arriverà alle seguenti

$p^{10}x^{20} = y^{30}$ . . . . cioè $px^2 = y^3$

$p^{11}x^{19} = y^{30}$

$p^{12}x^{18} = y^{30}$ . . . . $p^2x^3 = y^5$

$p^{13}x^{17} = y^{30}$

$p^{14}x^{16} = y^{30}$ . . . . $p^7x^8 = y^{15}$

$p^{15}x^{15} = y^{30}$ . . . . $px = y^2$

$p^{16}x^{14} = y^{30}$ . . . . $p^8x^7 = y^{15}$

$p^{17}x^{13} = y^{30}$

$p^{18}x^{12} = y^{30}$ . . . . $p^3x^2 = y^5$

ecc. ecc.

Le dette equazioni cominciando dalla prima $px^{29} = y^{30}$, poste all' esame simile al già fatto delle due $px^2 = y^3$, $px = y^2$, danno un angolo sempre maggiore, cosicchè se l' angolo dato sarà fra i due ritrovati colle dette due equazioni converrà tentare altri esami di alcune delle qui esposte quattro equazioni intermedie fra le dette due $px^2 = y^3$, $px = y^2$, finchè si arrivi a quella, che soddisfaccia intieramente, o sufficientemente al Problema. E quando mai nè anche fra le dette quattro equazioni intermedie si trovasse quella, che quadri quanto si desiderasse, si potrà sempre instituire un' altra serie di equazioni, che parta da una cogli esponenti più alti, come sarebbe se si partisse dall' equazione $px^{99} = y^{100}$, e per tal maniera c' incontreremo finalmente in una parabola, che soddisfaccia con quella precisione, che un volesse, al Problema.

86. Lo stesso discorso si applichi opportunamente al caso, in cui l' angolo dato fosse fra i gr. 7, 58′ trovati al n. 70, ed i gr. 8, 26′ trovati al n. 78; come pure si applichi al caso, in cui l' angolo dato fosse maggiore dell' angolo di gr. 9, 58′ trovati al n. 83; con che parmi di avere sciolto il Problema propostomi al n. 67, che tende a trovare non tanto la portata della verticale IS', quanto la legge dei decrescimenti della velocità della superficie fino al fondo.

87. Vedo benissimo, che quantunque si trovi una tal parabola, che quadri intieramente alle condizioni del Problema, non per questo è dimostrato, che la vera scala delle velocità sia quella stessa parabola, potendo essere, che nel tempo stesso la vera scala delle velocità fosse per esempio una ellisse. Ma ognun vede ancora che perchè una ellisse soddisfaccia a tutte le medesime condizioni del Problema, cui soddisfa una parabola, convien che quella ellisse si adatti così all' arco MLK della parabola trovata, che le conseguenze dedotte dalla Parabola debbano essere prossimamente quelle, che si dedurrebbero dalla ellisse.

88. Per agevolare il metodo esposto darò qui la formola generale del limite della m da trovarsi colla regola accennata al n. 77. Sia pertanto $p^t x^r = y^{t+r}$ l' equazione generale delle parabole. Poichè quando $x = HI$ è $y = IK$, onde $p^t (HI)^r = (IK)^{t+r}$, e quando $x = HO$ è $y = OL$, onde $p^t (HO)^r = (OL)^{t+r}$, sarà $p^t = \frac{(IK)^{t+r}}{(HI)^r} = \frac{(OL)^{t+r}}{(HO)^r} = \frac{(OL)^{t+r}}{(HI - OI)^r}$, dal che si

trova $HI = m = \frac{OI\sqrt[r]{(IK)^{c+r}}}{\sqrt[r]{(IK)^{c+r}} - \sqrt[r]{(OL)^{c+r}}}$, ed $\frac{\frac{IN}{2}\sqrt[r]{(IK)^{c+r}}}{\sqrt[r]{(IK)^{c+r}} - \sqrt[r]{(OL)^{c+r}}}$, limite proſſimamente minore della m (77).

89. Quindi ſe ſi doveſſe prendere in eſame l'equazione $p^3x^2 = y^5$ ſarebbe $c = 3$, $r = 2$, onde il limite ſarebbe

$$\frac{\frac{IN}{2}\sqrt[2]{(IK)^5}}{\sqrt[2]{(IK)^5} - \sqrt[2]{(OL)^5}} = \text{(giuſta il n. 70)}\ \frac{6\sqrt{10^5}}{\sqrt{10^5} - \sqrt{8^5}} = 14$$

proſſimamente, limite della $m = HI$. Con queſto ſolamente ſi conoſce ſubito, che la equazione $p^3x^2 = y^5$ non può eſſere al caſo contemplato finora di $IS' =$ piedi 14, perchè eſſendo $m =$ piedi 14, o poco più (77), il vertice H caderebbe quaſi ſul fondo del fiume, onde ſopra quel fondo l' acqua non avrebbe quaſi moto, il che non è vero.

90. Il Sig. Ab. *Ximenes* dice di aver trovato colle ſue ſperienze, che la velocità preſſo il fondo era di un quinto minore della velocità alla ſuperficie. Ma quelle ſperienze ſono ſtate fatte in piccoli corſi di acque, e creſcendo la velocità creſce ancora la reſiſtenza del medeſimo fondo; per la qual coſa è da aſpettarſi, che in tempo di piena la velocità dalla ſuperficie al fondo cali ſenſibilmente più di un quinto. Inclino bensì a credere, che non arrivi a calare la metà. In queſta ipoteſi, che dee poterſi verificare ſe non altro colle mie aſte ritrometriche, pare che nell'eſempio del n. 70. contemplato fin qui non poſſa aver luogo nè anche la parabola conica, giacchè queſta nel detto eſempio importerebbe un decreſcimento di velocità dalla ſuperficie al fondo più della metà, perchè per eſſere $HI = 16, 68$ (83), $IK = 10$, ed $HS' = 2, 68$, ſi trova l'ordinata SV al fondo di pi. 4,008. Meno poi per una ſimil ragione poſſono appartenere al detto eſempio le altre equazioni della ſerie del n. 85. dalla equazione $px = y^2$ in giù. Ma le portate della verticale IS', che riſultano colle equazioni della detta ſerie fino alla $px = y^2$ ſtanno fra i piedi quadrati 107, 17 (79), e 104, 14 (84),

che si discostano di poco dalla portata di pi. q. 107, 33 trovata al n. 71. nella ipotesi, che le velocità terminino ad una retta. Dunque quando non si cerchi la scala delle velocità, ma soltanto la portata della verticale *IS'*, e che non si curi di aver questa con tutto il rigore (il quale in molti casi è superfluo) si potrà ottenere l' intento a sufficienza (ed al certo cento volte meglio, che con qualunque degli altri metodi finora proposti) stando all' ipotesi, che le velocità terminino ad una retta, come al n. 71. Ed in questo caso si declina dal fastidio di quei calcoli prolissi, che occorrono nelle ipotesi, che la scala delle velocità sia una qualche curva, e l' angolo d' inclinazione dell' asta (ch' è il più difficile da rilevarsi) in questo caso basterà che si abbia affatto all' ingrosso, per poter dedurre da esso la *Cq*, la quale con tre, o quattro gradi di più, o di meno riesce sensibilmente la medesima.

91. Mi si potrebbe fare la seguente obbiezione. Non è così facile il trovare in ogni fiume un tratto di 200 tese, che sia così regolare, onde l' acqua vi corra con quella equabilità di moto, che richiederebbe lo sperimento; perchè anche nei tratti meno irregolari si danno delle ineguaglianze sensibili, e frequenti, per le quali la velocità dell' acqua varia non una, ma più volte ora crescendo, dove la sezione diviene alquanto minore, ed ora calando, dove la sezione si fa alquanto maggiore. Quindi è, che dove il fiume affretta il suo moto, l' asta a cagione della sua inerzia tarderà a concepire la velocità sua terminale conveniente a quel nuovo maggior corso dell' acqua, e rimarrà troppo indietro; e dove l' acqua rallenterà il suo moto, l' asta riterrà per la sua inerzia per qualche tempo una velocità maggiore del dovere, e scorrerà troppo avanti, il che può fare, che la velocità dell' asta discordi da quelle velocità, ch' io mi son figurato nella ipotesi di un corso equabile dell' acqua, e che perciò non sieno per valere le deduzioni da me esposte.

92. Ma qui rispondo, che le mie aste sono molto ubbidienti ai moti dell' acqua, cosicchè in un passaggio da una velocità ad altra l' errore indicato non può essere, che tenue, come spiegherò in appresso. E nel caso di parecchj di tai passaggi da una velocità minore ad una maggiore, e poi da una maggiore ad una minore, ecc. dico, che siccome l' errore al crescere

della velocità del fiume è in difetto, e nel calare della velocità del fiume è in eccesso, dandosi parecchj di tali errori nel tratto dello sperimento perchè all'uno in difetto dee succederne un altro in eccesso, dovrà accadere che l'uno compensi l'altro di mano in mano, cosicchè alla fine dello sperimento l'errore totale sia tuttavia tenue, e trascurabile.

93. Per fare poi comprendere, come ho promesso, che le mie aste ritrometriche devono essere molto ubbidienti ai moti dell'acqua, prima darò di questo una congettura forte dedotta dalla teoria, e poi verrò alla sperienza, e particolarmente ad uno sperimento immediato, e ch'io giudico decisivo, fatto colle aste medesime. Pertanto si metta, che una delle accennate aste galleggi verticale, e quieta in un'acqua stagnante, e che il suo centro di gravità cada appunto nel mezzo della parte sommersa. Allora l'acqua concepisca a un tratto una velocità orizzontale, ed eguale in superficie, e sotto la superficie. In tal caso si potrà considerare l'azione dell'acqua corrente contro l'asta come raccolta nel punto di mezzo della detta parte sommersa. E perchè nel medesimo punto cade anche il centro di gravità dell'asta, ne viene, com'è noto, che l'asta si muoverà sempre parallela a sestessa, e perciò verticale. La velocità dell'acqua si dica $=c$, e la velocità dell'asta, che sarà crescente, dopo un qualche tempo t si dica V, e la velocità rispettiva dell'acqua contro l'asta, cioè $c-V$, si dica u. Giusta il n. 56. sarà $\frac{7Pu^2}{40bi}$. l'impressione dell'acqua sopra l'asta, essendo P il peso dell'asta, b la caduta di un grave in un tempo $k=1''$, ed il diametro dell'asta cilindrica sia $=i$. Secondo le note formole si avrà $2b.\frac{7Pu^2}{40bi}.dt=kPdV$. E perchè si è detto $c-V=u$ si troverà $\frac{7dt}{20ki}=\frac{dV}{(c-V)^2}$. Ed integrando così, che quando $t=0$ sia $V=0$, si troverà $t=\frac{20ki}{7^0}.\frac{V}{c-V}$.

94. Poichè gli aumenti, e decrementi di velocità, che possono accadere in un tratto del fiume scielto pel più regolare

lare non dovrebb' essere maggiore di un piede per ogni minuto secondo, si metta, che la velocità c, che si suppone al n. 93. concepita a un tratto dall' acqua prima stagnante, sia di un piede per ogni minuto secondo, onde sia $c = 1$; ed il diametro i dell' asta si metta di due pollici, o sia di $\frac{1}{6}$ di piede, e $k = 1''$, e si cerchi in quanto tempo l' asta avrà concepita la metà della velocità dell' acqua, e poi in quanto tempo avrà concepito $\frac{9}{10}$ della velocità stessa dell' acqua, per la qual cosa si dovrà mettere pel primo caso $V = \frac{1}{2}$, e pel secondo $V = \frac{9}{10}$; e si troverà, che l' asta avrà guadagnato la metà della velocità dell' acqua in meno di un mezzo minuto secondo, e che l' avrà guadagnata quasi tutta, cioè $\frac{9}{10}$ in poco più di $4''$.

95. E se l' asta invece di essere verticale si trovasse inclinata con un angolo per esempio di 30 gradi, l' impressione $\frac{7Pu^2}{40hi}$ del caso precedente starebbe all' impressione di questo caso come il raggio al coseno di gr. 30 (56), cosicchè questa sarebbe prossimamente $\frac{3Pu^2}{20hi}$; e replicando il calcolo dei n. 93, 94 si trova $t = \frac{10ki}{3G} \cdot \frac{V}{c - V}$, e che l' asta avrà guadagnato la metà della velocità dell' acqua in $33'''$, e che l' avrà guadagnata quasi tutta, cioè $\frac{9}{10}$ in $5''$.

96. Se avessi attribuito all' acqua quella qualunque viscosità, che sembra non potersi negare all' acqua dei fiumi torbidi, il che avrei potuto fare nell' ultimo caso mettendo l' impressione dell' acqua $= \frac{3Pu^2}{20hi} + \frac{P}{V}$, intendendo per r un nu-

mero comunque grande (purchè finito), avrei trovato una puntualità anche maggiore dell' asta in concepire i $\frac{9}{10}$ della velocità dell' acqua; anzi avrei trovato, che in breve avrebbe concepito tutta intiera la velocità dell' acqua. Ella è questa la da me indicata congettura forte dedotta dalla teoria per dire, che le mie aste siano per essere molto ubbidienti ai movimenti diversi dell' acqua, giacchè il caso qui supposto non è gran cosa diverso da quello delle aste, che impiego per la misura delle velocità de' fiumi.

97. Per altro la sperienza in questa materia vale anche più della teoria. Una sperienza molto ovvia sarebbe quella di gettare un qualunque galleggiante con una qualunque velocità, e direzione orizzontale in un' acqua stagnante. Si vedrà, che questo ben presto si riduce alla quiete. Argomento certo, che mettendo quello stesso galleggiante in un' acqua, che corra con qualunque velocità, quello pure con prestezza concepirà la velocità dell' acqua, come si può sperimentare in qualunque fiume. Ma eccomi all' accennato sperimento fatto colle aste medesime. Nel Po grande presso Ferrara entrato in una piccola nave ho abbandonato all' acqua due aste cilindriche di legno lunghe ognuna piedi $12\frac{1}{2}$ armate a un estremo di tanto piombo, che sono rimaste fuori dell' acqua con una porzione di un piede e mezzo circa, e dopo alcuni bilanciamenti l' una precedeva all' altra con una distanza di circa dieci piedi, ed ambe viaggiavano con moto equabile, e parallele a se stesse mentre io le seguitava in nave. Dopo qualche tempo con un legno biforcato applicato colle due branche verso il punto di mezzo della parte immersa dell' asta d' avanti la ho spinta con forza accelerandone la sua velocità proccurando di non alterare la sua positura, con che io la ho discostata di più dall' altra. Cessando indi di spingerla sono stato attento per vedere se in appresso continuava a discostarsi di più dall' altra a cagione dell' impeto da me impressole, il quale è certo, che non dovett' essere smorzato dall' acqua meno veloce in un istante. Ma per quanto io, ed altri, ch' erano con me, ci impiegassimo di attenzione, non potemmo accorgerci di un maggior allontanamento, che fosse discerni-

bile all' occhio. Indizio manifesto, che l' asta da me posta in un moto sensibilmente maggiore di quello, che avea prima, ritornò alla velocità di prima quasi subito, o sia in un tempo molto breve. Lo stesso tentai coll' altr' asta più indietro spingendola contro il corso dell' acqua col mio legno biforcato. Anche questa dopo che da me fu abbandonata, ricuperò la velocità dell' altra così presto, che la sua distanza dall' altra cessata la mia pressione non si fece maggiore, come avrebbe dovuto succedere se nel ricuperare la velocità primiera, e dell' altr' asta, avesse impiegato un tempo notabile. Desidero, che altri tentino lo stesso sperimento, ch' io giudico attissimo per far concludere, che le aste da me proposte devono essere di tutta quella puntualità in secondare i moti dell' acqua, che richiedesi per l' uso di esse da me proposto.

96. Dirò ora qualche cosa intorno al modo di preparare le aste. Se l' asta di legno destinata per lo sperimento sarà di poca lunghezza, per trovare quanto metallo vi si debba unire, acciocchè messa nell' acqua sporga sopra la superficie un piede o due, ciò si potrà ottenere facilmente mettendo l' asta nell' acqua di un qualche pozzo, ed attaccandovi all' estremo inferiore ora più, ed ora meno di metallo, finchè si veda, che l' asta abbandonata all' acqua si metta in una positura verticale rimanendo fuori dell' acqua quel piede o due, che si vorrà. Egli è però d' avvertire, che quell' asta di legno deve prima essere stata tenuta per qualche tempo sott' acqua acciocchè il legno s' imbeva di quella quantità di acqua, che può assorbire, particolarmente se il legno sarà secco, e poroso. Altrimenti si potrebbe dare, che nel principio dello sperimento l' asta sporgesse fuori dell' acqua per esempio un piede, e che nel fine non ne sporgesse fuori che un mezzo piede per essersi imbevuta alquanto di acqua nell' atto dello sperimento, e divenuta così alquanto più pesante.

97. Ma se l' asta sarà così lunga, onde non si abbia un pozzo con tant' acqua, che sia sufficiente pel sopra descritto esame, si potrà fare uso di un' acqua qualunque stagnante di qualche vasca, o buca *ABC* (*fig.* 16.) nella seguente maniera. L' asta sia da comporsi di due pezzi, cioè di uno *DE* di quattro in cinque piedi da unirsi all' altro *GH* con viti, o in altra maniera. Al pezzo *DE* si unisca tanto metallo in

F, onde posto nell'acqua o di un pozzo, o della buca stessa *ABC*, resti fuori dell' acqua con quella lunghezza *DN*, che si vorrà. Si trovi il centro di gravità dell' altro pezzo *GH*, o sia quel punto *K*, dal quale sospeso rimanga in equilibrio. Vi si attacchi uno spago *IOL*, e si metta sull' acqua *AC*, ed al punto *O* dello spago nella verticale *KO* si attacchi tanto metallo, che appena basti per fare, che il pezzo *GH* si sommerga tutto. Il metallo in *O* con l'altro in *F* sarà la quantità di metallo da unirsi all' asta composta dei due pezzi *GH*, *DE*, onde questa così messa nell' acqua possa galleggiare con una porzione *DN* fuori dell' acqua, com'è manifesto. Non mancheranno altri metodi per trovare lo stesso, e forse più comodi secondo le circostanze. A me basta di averne indicato uno.

98. Trovata la quantità del metallo da unirsi all' asta saremo in libertà di attaccare lo stesso metallo a un estremo dell' asta dopo di averlo conformato in un cilindro del diametro dell' asta, o pure di unirlo all' asta incastrandovelo distribuito come si crederà più opportuno, purchè col legno venga a formare un cilindro solo. E qui avvertirò, che giusta l'equazione *B* del n. *66*. la *Bq* (*fig.* 15.) è in ragione inversa della *e*, o sia della distanza del centro di gravità *D* dell' asta dal punto *F* di mezzo della parte sommersa *CB*. E perchè si può sempre unire il detto metallo all' asta distribuito in modo, che il centro di gravità *D* resti più o meno lontano da *F*, si vede che sarà in nostra mano il fare, che l'angolo *BCq* d'inclinazione dell' asta sia per riuscire maggiore o minore, giacchè quanto più *D* sarà vicino ad *F* il detto angolo sarà maggiore.

99. Allorchè si avrà scielto quel tratto di fiume per lo sperimento, che sia il più regolare, e lungo circa 200 tese, o più, secondo che si crederà meglio, per sapere la lunghezza da darsi alle aste, che si vorranno impiegare, converrà fare almeno tre sezioni di quel tratto, una nel mezzo, ed una per ogni estremo. Una di queste sia *ABG* (*fig.* 17.), colla quale si conoscerà la lunghezza *FG* da darsi a un di presso all' asta, che dovrà viaggiare nel filone, e le lunghezze *HI*, *DE* da darsi alle laterali: e lo stesso si dica pel caso, in cui se ne voglia impiegare più di tre; giacchè quante più se ne

impiegheranno, il rilievo sarà più preciso; e nel Po grande, assai largo, tre sarebbero sicuramente poche. Poi sarà bene il fare degli scandagli frequenti lungo il viaggio da farsi da ciascuna asta per rilevare se per avventura la lunghezza delle aste scielta colla sola ispezione delle tre sezioni fosse per qualcuna di troppo a motivo di un qualche dosso, che s' incontrasse in quel cammino.

100. Nel Po grande si può seguitare ogni asta con una nave, con che si potrà osservare con qualche precisione l' angolo d' inclinazione dell' asta per sapere prossimamente la scala delle velocità. E lo stesso si dica di tutti i fiumi navigabili almeno a seconda del loro corso anche in tempo di piena. E così si potranno ricuperare le aste per un altro sperimento. Il tempo, che ogni asta impiegherà nel correre la lunghezza stabilita, dovrà misurarsi o con un orologio a secondi, o con un pendolo a secondi. Nei torrenti converrà contentarsi di osservare l' angolo di ogni asta all' ingrosso (90) stando sulla ripa, al più con l' occhio armato. Ed in questi per ricuperare le aste converrà accorrere alle curvature del fiume inferiormente al sito dello sperimento, dove il filone si accosta alla ripa, e si sa, che i galleggianti finalmente vanno al filone. Nel resto mi rimetto all' avvedutezza, industria, e sagacità di quelli, che si accignessero ad esperimenti di questa fatta, che sono dell' ultima importanza per promuovere una scienza, dalla quale può dipendere la felicità, o l' esterminio di paesi intieri, e che perciò merita d' essere protetta con impegno da più Sovrani.

Calcolo accennato al n. 78.

$$
\begin{array}{ll}
l.m = l.\,21\tfrac{7}{9} \;\ldots & = 1.3380136 \\
l.\sqrt{512} \;\ldots\ldots & = 1.3546350 \\
\hline
 & = 2.6926486 \\
l.\sqrt{1000} \;\ldots\ldots & = 1.5000000 \\
\hline
l.q. = l.m\sqrt{\dfrac{512}{1000}} \;. & = 1.1926486 \\
\hline
l.n = l.\,9\tfrac{7}{9} \;\ldots & = 0.9902402 \\
\hline
l.16 \;\ldots\ldots\ldots & = 1.2041200
\end{array}
$$

$l. q^2$	$= 2.3852972$	
$l. \sqrt[3]{q}$	$= 0.3975495$	
$l. 35$	$= 1.5440680$	
$l. \frac{16 q^2 \sqrt[3]{q}}{35}$	$= 2.4428987$	n. 277,267
$l. 3$	$= 0.4771212$	
$l. m^2$	$= 2.6760272$	
$l. \sqrt[3]{m}$	$= 0.4460045$	
	3.5991529	
$l. 7$	$= 0.8450980$	
$l. \frac{3}{7} . m^2 \sqrt[3]{m}$	$= 2.7540549$	n. 567,616
$l. 3$	$= 0.4771212$	
$l. n^2$	$= 1.9804804$	
$l. \sqrt[3]{n}$	$= 0.3300801$	
$l. \frac{3}{7} n^2 \sqrt[3]{n}$	$= 1.9425837$	n. 87,616
$l. 6$	$= 0.7781512$	
$l. \sqrt[3]{q^2}$	$= 0.7950991$	
	1.5732503	
$l. 5$	$= 0.6989700$	
$l. \frac{6}{5} \sqrt[3]{q^2}$	$= 0.8742803$	
$l. m$	$= 1.3380136$	
$l. \sqrt[3]{m^2}$	$= 0.8920091$	
$l. \frac{6}{5} \sqrt[3]{q^2} . m \sqrt[3]{m^2}$ . .	$= 3.1043030$	n. 1271,461
$l. \frac{6}{5} \sqrt[3]{q^2}$	$= 0.8742803$	
$l. n$	$= 0.9902402$	
$l. \sqrt[3]{n^2}$	$= 0.6601601$	
$l. \frac{6}{5} \sqrt[3]{q^2} . n \sqrt[3]{n^2}$ . .	$= 2.5246806$	n. 334,719
$l. q$	$= 1.1926486$	
$l. \sqrt[3]{q}$	$= 0.3975493$	
$l. (m+n) = l. (21 \frac{7}{9} + 9 \frac{7}{9})$	$= 1.4990758$	
$l. q \sqrt[3]{q} . (m+n)$ . .	$= 3.0892739$	n. 1228,213
	somm.	1883,447 1883,445
		1883,445
		0,002

Onde $\frac{16q^2\sqrt[3]{q}}{35} - \frac{3}{7}(m^2\sqrt[3]{m} + n^2\sqrt[3]{n}) + \frac{6}{5}\sqrt[3]{q^2}(m\sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{n^2})$
$-q\sqrt[3]{q}(m+n) = 0.002.$