SOPRA LA MISURA DELLE ALTEZZE DEL BAROMETRO

APPENDICE

Alla Memoria inserita nel volume XIII

Del Sig. G. Racagni

Ricevuta li 28 *Febbrajo* 1812.

Se della grandezza e della importanza non solo, ma ancora della amenità di un filosofico argomento giudicare si può dal numero, e dalla eccellenza degli Autori, che presero ad illustrarlo, sicuramente tra i più grandi, ed importanti, ed ameni dovrà annoverarsi quello della misura delle altezze derivata dalle osservazioni barometriche, sopra di cui hanno scritto tanti, e così illustri Fisici, quanti nella Memoria indicata furono citati da me, che pure ne ho tralasciato alcuno, che già conosceva, e altri ne ignorava forse non pochi. E bene doveva parere, che da tanto moltiplicati travagli, e singolarmente da quelli di *Ramond*, e di *La Place* fosse quel soggetto ridotto alla sua perfezione; nè io aveva preso già a trattarne sulla lusinga di migliorarlo, o di accrescerlo, ma soltanto di mettere in chiaro, e debitamente valutare quello, che scritto ne aveva il *Rohde* massimamente criticando quest'ultimo celebre Matematico, che da tutt'altri aveva riscosso l'applauso più deciso. Ma dopo quella mia Memoria quante opere, e di quanto insigni Fisici mi sono sotto gli occhi venute, che per lo scopo loro primario, o per incidenza a quel soggetto appartengono? E molte si troveranno indicate in questa Appendice, poichè da principio io aveva pensato di stenderla solamente per compiere la promessa data (31, e 37)

di ritornare sopra qualche luogo di quella Memoria, che lasciato aveva incompleto per non renderla lunga soverchiamente, o perchè mi mancavano le notizie opportune; ma in seguito mi parve di dovere aggiugnervi altre cose, che ho trovate in quelle opere, o leggendole mi sono sovvenute, e che mi sono sembrate meritare l'attenzione altrui. Dovendo però questa Appendice servire al compimento di quella Memoria io ne seguirò l'ordine dei numeri, e premetterò le denominazioni, e le relazioni principali delle quantità, che in quella si trovano, al fine di schivare la fatica di andare a cercarle.

40. Supposta pertanto la terra sferoidica (4) generata dalla rivoluzione d'una ellisse intorno all'asse minore, e in questa, che ne sarà un meridiano, chiamando

a il semiasse maggiore;

na il minore;

y l'ascissa presa su quell'asse, cominciando dal centro;

x l'altra coordinata ad un punto qualunque;

z il semidiametro, che da questo punto va al centro;

α l'angolo, che questo semidiametro forma con l'asse maggiore;

β l'angolo, che la verticale di quel punto forma con questo semidiametro;

ψ l'angolo, che la verticale stessa prolungata forma con l'asse maggiore, e che misura la latitudine di quel punto;

v (5) una lunghezza presa salendo, o discendendo dall'ellisse sopra quella verticale;

b la retta, che dall'estremità di quella lunghezza sia condotta al centro;

z' un altro semidiametro, che cade sopra questa lunghezza;

γ l'angolo, che resta compreso tra i due semidiametri z, e z';

ω l'angolo, che il semidiametro z' forma con l'asse maggiore;

g, g', g'' (6) le gravità acceleratrici alla estremità del semidiametro z, all'altra estremità di v, e a quella del semidiametro z';

s costante da determinarsi per la legge delle gravità acceleratrici g, g' secondo le distanze dal centro;

p, p' (7) le pressioni dell'aria alla estremità del semidiametro z, e all'altra estremità di v;

δ, δ' le di lei densità alle estremità stesse;

c, c' i di lei gradi di calore a quelle estremità computati sul termometro centigrado partendo dallo zero assoluto, e non dall'arbitrario;

t, t' i gradi stessi computati dallo zero arbitrario;

q (19) grado di calore, che su quel termometro corrisponde allo zero arbitrario;

h, h' (20) le altezze del mercurio nel barometro a quelle due estremità;

V, V' i di lui gradi di calore presi sopra quel termometro dallo zero arbitrario;

H, H' (29) le altezze h, h' corrette dipendentemente dai gradi del calore;

Δ (33) la densità del mercurio al grado di calore c;

i (16) costante da determinarsi con le osservazioni del termometro;

V, V' (8), V'' (30), M (36) lettere ausiliarie;

m (3) altra lettera ausiliaria $= 1 - n$.

41. Posto L il segno del logaritmo tabulare, e il logaritmo iperbolico di 10, le relazioni tra le quantità corrispondenti a quelle lettere si sono trovate

(4) $y^2 = n^2 (a^2 - x^2)$; $z^2 = x^2 + y^2$;

$$\text{tang. } \psi = \frac{y}{n^2 x}; \quad \text{tang. } \alpha = \frac{y}{x}; \quad \beta = \psi - \alpha$$

(5) $$\text{tang. } \gamma = \frac{v \,.\, \text{sen. } \delta}{z + v \,.\, \cos. \delta}; \quad \omega = \alpha + \gamma;$$

$$z' = a (1 - m \,.\, \text{sen.}^2 \omega - 3m^2 \,.\, \text{sen.}^2 \omega \,.\, \cos.^2 \omega);$$

(6) $g = g''$; (7) $\delta' g' \delta v = - \delta p'$;

(11) $\frac{\delta p'}{c'} = \frac{\delta' p}{c}$; (19) $\frac{c \delta g' \delta v}{c' p} = - \frac{\delta p'}{p'}$;

(16) $c' = \sqrt{(c^2 - iv)}$; (19) $e = 2,302585$;

$$c = q \pm t\,;\ c' = q \pm t' \quad (31)\ \frac{H}{H'} = \frac{hf(q+v)}{h'f(q+v')}\,;$$

$$(19)\ v = \frac{epq}{cbg}\left(1 + \frac{t+t'}{a}\right)(Lp - Lp')\,;$$

$$(36)\ M = 18336\left(1 + \frac{m.\cos.2\psi}{a} - \frac{m^2}{4}\left(\tfrac{1}{2} - \cos.2\psi + \tfrac{1}{4}.\cos.4\psi\right)\right);$$

42. Se il calore per tutta la lunghezza v della colonna d'aria, e la gravità g suppongansi costanti, sarà $c = c'$, $g = g'$, l'equazione (11) diverrà $\delta p' = \delta' p$, e la (7) sostituendo il valore di δ', e integrando come al num. 19 darà $v = \frac{ep}{\delta g}(Lp - Lp')$; ed essendo (20, e 33) $p = \Delta hgc$, $p' = \Delta h'gc$, per ragione della gravità, e del calore costanti resterà $v = \frac{e\Delta c}{\delta}(Lh - Lh')$, che è l'espressione con l'analisi infinitesimale derivata della teorica anticamente dimostrata dall'*Hallejo* per mezzo delle proprietà dell'Iperbola tra gli assintoti, di cui già *Newton* (*Princ. L. II, prop. XXII*) avvertì, che valeva soltanto posta costante la gravità, e aggiunger doveva ancora posto costante il calore. E questa è poi la formola, che in queste supposizioni si deve riguardare come fondamentale, poichè dopo l'*Hallejo* pressochè tutti gli altri fisici non hanno fatto altro che introdurre alcuni cambiamenti nel di lei coefficiente $\frac{\Delta ch}{\delta}$, ovvero nel fattore logaritmico $Lh - Lh'$.

43. Se alla lunghezza v aggiungasi un'altra lunghezza v', alla cui estremità siano p'', δ'', h'' le grandezze analoghe alle p, δ, h, per la legge di *Mariotte* (8) essendo $\frac{p}{\delta} = \frac{\Delta hgc}{\delta} = \frac{p''}{\delta''} = \frac{\Delta h''gc}{\delta}$ si avrà $v' = \frac{e\Delta ch''}{\delta''}(Lh' - Lh'')$, e posta $v = v'$ resterà $Lh - Lh' = Lh' - Lh''$, e perciò ancora $Lp - Lp' = Lp' - Lp''$ cioè pigliando le lunghezze uguali v, v', o le distanze dall'ellisse crescenti in progressione aritmetica le pressioni, o le densità dell'aria, o le altezze barometriche corrispon-

denti saranno in progressione geometrica, che è la legge stabilita pure dall'*Hallejo*.

44. Il coefficiente $\frac{\Delta hc}{\vartheta}$ secondo la legge del *Mariotte*, tenendo costanti il calore, e la gravità, è pure costante, e rappresenta l'altezza, che avrebbe l'atmosfera partendo dal luogo, dove si fossero trovate l'altezza barometrica h con la densità ϑ sotto al calore c fino alla sommità, se tutta la colonna dell'aria superiore a quel luogo insieme a questo calore avesse costante ancora quella densità. Quel coefficiente, o questa altezza dell'atmosfera si può chiamare il modulo dei logaritmi atmosferici, perchè in questi si riducono i tabulari moltiplicati per quello; infine quel coefficiente rappresenta la sottangente di una logaritmica, nella quale, le ascisse esprimendo le altezze, le ordinate esprimerebbero le pressioni, o le altezze barometriche.

45. Ora riducendo il calcolo d'*Hallejo* alle misure francesi. Egli sotto all'altezza barometrica h di pollici 28 aveva trovato $\frac{\Delta}{\vartheta} = 10891$, e perciò $\frac{e\Delta h}{\vartheta} = 2,302585 \,.\, 10891 \,.\, 28^{pol.} = 9741^{tes.}$, e posto $c = 1$, $v = 9741\,(Lh - Lh')^{tes.}$. Ma le misure derivate da questa formola erano tanto lontane da quelle prese coi metodi geodetici, che i Fisici non potendo in questi supporre errori tanto gravi avevano generalmente deposta la speranza di potere alcun vantaggio conseguire dalle osservazioni barometriche per la misura delle altezze. In seguito però l'attenzione loro a questo argomento ancora rivolsero *Maraldi* (*Mem. de Paris* 1703), *De la Hire* (*ivi* 1709), *Scheuchzero* (*Trans. Philos. Lond. N.* 405), *Cassini* (*Mem. de Paris* 1705, *e* 1733), *Daniele Bernoulli* (*Hydrod. sect. x*), *Cassini de Thuri* (*Mem. de Paris* 1740), e *Horrebovio* (*Elem. Phys. cap. viii, e Nouv. Bibl. Germ. d'Octob., Nov., e Decemb.* 1750), dei quali mi basta di averli indicati, perchè i lavori loro si possono vedere esposti esattamente, e giudicati da *De Luc* (*Recher. i, Part. Chap. iv*).

46. Ma debbo alcun poco trattenermi intorno a *Bouguer*, che veramente si distinse sopra tutti quelli, che di questo argomento trattarono prima di *De Luc*. Egli (*Mem. Paris* 1753) diede una regola non molto diversa da quella d'*Hallejo*, ma derivata da un grande numero d'esperienze, in cui stabilisce, che se prendasi la differenza dei logaritmi delle due altezze barometriche espresse in linee francesi ritenendone le sole prime quattro cifre dopo la caratteristica, basterà sottrarne la parte trentesima per avere espressa in tese l'altezza della stazione superiore sopra l'inferiore, ossia la distanza verticale delle due stazioni, nelle quali le due altezze barometriche saranno state osservate; laonde usando le tavole logaritmiche a sette decimali la formola Hallejana si convertiva in quest'altra

$$v = 10000(\mathrm{L}h - \mathrm{L}h')\left(1 - \frac{1}{30}\right) = 10000(\mathrm{L}h - \mathrm{L}h').\frac{29}{30} = 9667(\mathrm{L}h - \mathrm{L}h');$$

e questa infatti serve a determinare le altezze di *Pitchincha*, e di *Choussai*, che non discordano più di una tesa dalla misura geodetica, e aggiugne *Bouguer*, che avrebbe potuto giustificarla con più di altri trenta esempi.

47. Egli stesso però avvertì, che quella sua regola non riusciva nella parte inferiore delle Cordilliere, nè sulle montagne della Zona torrida, nè sopra quelle d'Europa, e volendo pure procurare di dare la cagione di quella diversità, che degna era di rimarco, Egli da principio ricorda, che alcuni Fisici sembravano stabilirla nel calore, che si prova presso alla superficie della terra in proporzione maggiore che in alto, parendo loro, che quello dovesse turbare la proporzione geometrica nelle pressioni, o densità dell'aria, o nelle altezze barometriche corrispondenti a diverse elevazioni prese in progressione aritmetica, che è la base del calcolo Hallejano (43), da cui è ancora derivata la formola antecedente; e confessa egli in seguito, che la considerazione del calore è veramente importantissima, e serve qualche volta a risolvere la difficoltà, ma secondo lui il più delle volte non fa

che accrescerla, poichè il calore è più forte abbasso che ad una certa altezza; e nondimeno crede egli, che l'aria abbasso sia sempre quasi più condensata a proporzione, che non lo comporta la regola dei pesi comprimenti detta di *Mariotte* (8), perchè cercando l'altezza delle montagne di 300 a 400 tese, e paragonandole con altre più basse l'errore risultante è sempre in difetto; onde a lui pareva chiaro, che l'aria inferiore occupasse in proporzione meno spazio; o avesse minore elasticità, non ostante che il calore tendesse a renderla maggiore.

48. Così credendo di aver confutata l'altrui spiegazione di quella differenza *Bouguer* per darne una, che gli sembrava migliore, premette quelle stesse idee, che poi con maggiore precisione sciolte hanno dato luogo alla distinzione della elasticità assoluta, o dello sforzo assoluto, che fa un corpo compresso per ritornare allo stato primiero, e della elasticità specifica, o dello sforzo, che il corpo compresso fa, in proporzione della propria densità; laonde in ciascun pezzo d'acciajo l'elasticità assoluta è lo sforzo, che oppone ad una data forza comprimente; e in diversi pezzi d'acciajo l'elasticità specifica è lo sforzo corrispondente al grado diverso di compressione, che soffrono per una medesima forza comprimente, che è l'esempio addotto da *Bouguer*, e io vi aggiugnerò l'altro dei diversi gas, ciascun dei quali ha la propria elasticità assoluta, con cui resiste ad una data forza comprimente, e una diversa elasticità specifica, perchè da una data forza soffre una diversa compressione, o si lascia ridurre ad una diversa densità; laonde nello stato di quiete l'elasticità assoluta è sempre eguale alla forza comprimente, e la specifica è in ragione diretta di questa forza, e reciproca della densità, a cui il corpo per questa si lascia ridurre.

49. Poste pertanto queste nozioni *Bouguer* primamente immaginò, che le parti dell'aria non avessero tutte la stessa elasticità specifica ma diversa in modo, che tutte si lasciassero comprimere secondo la legge di *Mariotte* in propor-

zione dei pesi comprimenti, ma fatta ancora astrazione dal calore non tutte dallo stesso peso si lasciassero comprimere egualmente, ma altre più, e altre meno; e come vedeva i liquori meno gravi portarsi sopra i più gravi, così immaginò in secondo luogo, che ancora nell'atmosfera più in alto dovessero portarsi le parti specificamente più elastiche, o che sotto ad un dato peso si lasciano comprimere di meno, e più abbasso successivamente dovessero restare le parti specificamente meno elastiche, o che sotto ad un dato peso si lasciano comprimere di più, laonde sebbene in ciascuna sorte dovesse valere la legge di *Mariotte*, non potesse però in tutte valere l'altra di *Hallejo* (43), che ad altezze crescenti in progressione aritmetica le densità corrispondenti scemino in progressione geometrica. Nè *Bouguer* fu il solo a sospettare l'aria atmosferica essere un composto di fluidi forniti di proprietà diverse, poichè il *P. de Beze* (10) pensò pure a quel modo, e similmente pensarono quelli, che credendosi di avere osservate le rifrazioni del lume nella zona torrida diverse da quelle delle zone temperate posero l'aria tra i Tropici dotata di una forza refringente maggiore che fuori di essi, come riferisce *Humboldt* (*Essai sur les refrac. astron. Voyag.* 4, *P. V. I*), che li confuta; e in fine il Generale *Roy* sospettò, che le parti dell'atmosfera siano specificamente meno pesanti all'equatore che verso i poli, laonde i venti sud, e sudovest nelle medie latitudini recandovi l'aria meno pesante dall'equatore facciano discendere il barometro, e i venti Nord recandovi l'aria più pesante dai poli lo facciano alzare dentro un'oscillazione, che nei paralelli medii d'Europa giugne fino a due pollici.

50. Ma questo bel discorso di *Bouguer* non serve al fine proposto. *De Luc* (*Recher. Vol. I, pag.* 181) cominciò ad opporgli, che conveniva supporre una differenza di specifica elasticità molto grande, perchè altrimenti la sola resistenza, che oppone l'aria alla disunione delle sue parti, bastava come nella differenza del peso specifico a contenere quelle, che ten-

tendono a discendere, o a salire; e aggiunse poi, che la sola azione dei venti doveva impedire la disposizione delli strati atmosferici secondo i gradi della loro specifica elasticità; e finalmente osservò, che gli esperimenti dei pendoli instituiti da *Bouguer* potevano bene mostrargli, che le densità dell' atmosfera non erano secondo la legge d' *Hallejo*, ma non scoprirgli la cagione della differenza. Lasciate però queste ragioni del *De Luc*; io dirò, che le osservazioni più esatte ci hanno mostrate con la maggiore evidenza le cagioni, che influiscono sulla misura delle altezze col barometro, e che bastano a spiegare, e anche a togliere tutte le anomalie, che vi si sono trovate, senza aver bisogno di alcuna differenza intrinseca, e indipendente dal calore tra le parti dell' aria; e quando bene questa si volesse concedere, non appare però la ragione, per cui le più elastiche si dovessero collocare di sopra, e le meno elastiche di sotto, come accade per la gravità, perchè in questa si vede una cagione atta a produrre quella disposizione, e non così nella elasticità; e inoltre *Dalton* (10) ha dimostrato, che i fluidi gassosi diversi ancora per la specifica gravità si mantengono diffusi insieme nello stesso spazio senza quasi agire uno sull' altro come fanno i liquidi.

51. Dopo queste premesse chi crederebbe di potere difendere *Bouguer*, e sostenere la di lui opinione per la ragione, che l' elasticità dell' aria è diversa almeno secondo la temperatura locale diversa, quando egli stesso ha espressamente esclusa la considerazione di ogni circostanza relativa al calore? Nondimeno l' *Horsley* (*Trans. Phil. Vol.* LXIV) non pretende quello solamente, ma dice, che egli si crederebbe colpevole di empietà verso le ceneri di un uomo, la di cui memoria sarà sempre cara alla scienza, se non pigliasse l' occasione, che aveva di lavarlo da un rimprovero, che gli era stato fatto in termini generalissimi, e con poca amenità sull' oggetto in questione, e che non era fondato che in parte; quasichè quelli, che hanno fatto quel rimprovero a *Bouguer*, non sa-

pessero, che l'elasticità dell'aria è diversa secondo la diversa temperatura; ovvero indicando una svista di questo celebre Autore avessero voluto diminuire la stima, di cui gode meritamente; ovvero in fine la memoria di lui dovesse essere meno cara alla scienza, perchè in qualche pensamento ha pagato il suo tributo all'umanità.

52. Io non ho prima d'ora parlato di quella Memoria d'*Horsley*, che conosceva già da molto tempo non solo perchè l'oggetto suo di ridurre alle misure inglesi i risultamenti delle osservazioni espressi da altri in misure francesi era per noi poco interessante, ma molto più perchè mi parve, che egli non avesse bene compreso lo spirito dell'opinione di sopra riportata di *Bouguer*, nè della critica, che a questi fu fatta da molti, nè del metodo di *De Luc* per trovare la misura delle altezze col barometro. E quanto a questo metodo io mi sono compiacciuto trovandomi d'accordo coll'estensore della Biblioteca britannica (*an.* 1810, *N.* 340, 4, 6, *e* 7), che in quattro eccellenti articoli ha raccolto tutto il migliore, che prima di quell'anno era stato sopra quella misura insegnato; ma vedendo che quest'uomo celebre in un'opera tanto sparsa ampiamente, e stimata con ragione riporta con segni di approvazione le riflessioni, e le censure, che prima giacevano nella Memoria ben poco conosciuta di *Horsley*, non ho potuto non risolvermi a tentare di scolparne me, e gli altri, contro ai quali quelle furono dirette. E egli è per lo stesso motivo, che io mi tratterrò ancora qualche poco sopra il primo di quei articoli, in cui mi sembra, che sia attribuito all'*Horsley* quello, che non gli compete, e che siano approvate alcune di lui idee analoghe al presente soggetto, che a giudizio mio sono ben poco felici.

53. La formola [41 (7)] $\partial' g' \partial v = -\partial p'$ si può integrare in molte supposizioni oltre a quella del num. 19, che riguarda il solo metodo di *La Place*; infatti suppongasi ∂' proporzionale a $p'\pi$, e g' proporzionale a $\partial \frac{1}{(r+v)^r}$, quella equa-

zione diverrà $\frac{\delta v}{(r+v)^s} = -\frac{\delta p'}{p'^{\pi}}$, ed integrando si avrà $\frac{(r+v)^{1-s}}{1-s} = -\frac{p'^{1-\pi}}{1-\pi} + c$; e poichè posta $v = 0$ e $p = p'$ sarà $\frac{r^{1+s}}{1-s} = -\frac{p'^{1-\pi}}{1-\pi} + c$, onde si avrà la formola $\frac{(r+v)^{1-s} - r^{1-s}}{1-n} = \frac{p^{1-\pi} - p'^{1-\pi}}{1-\pi}$, la quale si applica a tutte le ipotesi della gravità (6), e delle pressioni, o densità ponendo i corrispondenti valori di s, e π, fuori dei casi della gravità, o della pressione, che decresca nella ragione, in cui crescano le distanze semplici, poichè allora ponendo $s = 1$, o $\pi = 1$, uno, o l'altro, o ambedue i membri della formola divengono $\frac{0}{0}$; ma in questi casi la prima formola s'integra o tutta o in parte coi logaritmi essendo $\int \frac{\delta v}{r+v} = e\mathrm{L}(r+v) + c = e\mathrm{L}\frac{r+v}{r}$; e $\int -\frac{\delta p'}{p'} = -e\mathrm{L}p' + c = e\mathrm{L}\frac{p}{p'}$, onde nel caso di $s = 1 = \pi$ si avrebbe $\frac{r+v}{r} = \frac{p}{p'}$.

54. Analizzando le trovate formole ritengasi $\pi > 0$, e suppongasi $v = \infty$ per avere la pressione alla distanza infinita; e poichè $\frac{1}{\infty}$ sollevato ad una potenza positiva è zero, sarà $\frac{1}{1-s}\left(\frac{1}{\infty^{s-1}} - \frac{1}{r^{s-1}}\right) = \frac{p^{1-\pi} - p'^{1-\pi}}{1-\pi}$; laonde se sia $n > 1$, e perciò $\frac{1}{\infty^{s-1}} = 0$, rimarrà $\frac{1}{(s-1)r^{s-1}} = \frac{p^{1-\pi} - p'^{1-\pi}}{1-\pi}$, e quindi $p' = \left(p^{1-\pi} + \frac{\pi-1}{(s-1)r^{s-1}}\right)^{\frac{1}{1-\pi}}$, cioè a dire la pressione p' alla distanza v infinita dalla terra sarebbe finita; e diverrebbe indeterminata, o infinita nelle altre supposizioni di $n = 1$, ovvero $n < 1$.

55. Suppongasi poi $v = -r$, e $v + r = 0$ per avere la pressione p' alla distanza zero dal centro; la formola (33) di-

verrà $\frac{1}{1-s}\left(\frac{1}{o^{s-1}}-\frac{1}{r^{s-1}}\right)=\frac{p^{1-\pi}-p'^{1-\pi}}{1-\pi}$, e posta $s>1$ essendo $\frac{1}{o^{s-1}}=\infty$ la pressione al centro in questa supposizione diverrà $p'=\infty^{\frac{1}{1-\pi}}$, cioè infinita. Se poi nella formola (53) $\frac{(r+v)^{1-s}}{1-s}=-\frac{p'^{1-\pi}}{1-\pi}$ per determinare la costante c supponga-si, che posta $v=\infty$ divenga $p'=o$, sarà $c=\frac{\infty^{1-s}}{1-s}$, e quindi si avrà $\frac{(r+v)^{1-s}}{1-s}=-\frac{p'^{1-\pi}}{1-\pi}+\frac{\infty^{1-s}}{1-s}$; e posta $v=-r$ sarà $\frac{v^{1-s}}{1-s}=-\frac{p'^{1-\pi}}{1-\pi}+\frac{\infty^{1-s}}{1-s}$, e posta $s>1$ seguirà $p'=\left[\left(\frac{1-s}{\pi-1}\right)\times o^{s-1}\right]^{\frac{1}{\pi-1}}$, ossia la pressione al centro nulla. Nè seguirà altrimenti posta $s=1$, e solamente quella pressione sarà finita nel caso della prima formola posta $s<1$.

56. Questi risultamenti, che si possono trovare variando il valore di m, e che possono sembrare assurdi, e paradossi furono con qualche differenza di metodo, e senzachè uno sapesse dell'altro quasi al tempo stesso dimostrati da *Taylor* (*Meth. increm. Schol. prop.* 26), e dal *Varignon* (*Mem. Paris* 1716); e poichè lo stesso *Horsley* cita *Taylor*, non si può bene comprendere, perchè l'Estensore della Biblioteca britannica a lui gli attribuisca quasi gli avesse egli avvertiti pel primo; e fa poi meraviglia, come l'*Horsley*, e questo Estensore non abbiano prodotta la riflessione, che quei paradossi non seguono generalmente ma solo fatte certe supposizioni del valore di s, ossia della legge, secondo la quale la gravità si cambia in proporzione delle distanze, e risultano poi solamente dalla contradizione, che si mette nelle condizioni, che si stabiliscono per determinare la costante nell'integrazione; poichè infatti la condizione della densità infinita al centro ripugna alle altre due, cioè che essa alla distanza finita r sia

eguale a p finita, e che sempre corrisponda in qualche ragione diretta al peso comprimente, perchè allora seguirebbe, che la pressione finita p insieme con l'altra parimenti finita, che può risultare dal peso finito dell'aria contenuta nella colonna dell'altezza r, facesse una pressione infinita. Quando poi si considera la distanza infinita dal centro, o la densità ivi sia finita, ovvero nulla, chiaro è, che il peso dell'aria contenuta in una colonna infinita deve rendere al centro, e alla distanza r dal centro infinita la densità, prescindendo dalla supposizione particolare, che questa si accostasse alla distanza infinita diminuendosi con qualche legge assintotica.

57. Ma tutte quelle conseguenze provano soltanto, che la legge della densità, che mantenga una proporzione costante coi pesi comprimenti, non può valere come nei casi dell'estrema rarefazione, o condensazione (9), così in quelli della lunghezza infinita, o nulla della colonna dell'aria premente. Nè quelli sono i soli casi, nei quali applicando l'Algebra alle leggi fisiche tratte dalle osservazioni, o dalle esperienze ci incontriamo in paradossi, poichè ne vedremo qualche altro in questa Memoria; ma tutti sembrano provenire da uno stesso principio, che la natura non ammette i casi delle quantità grandi, o piccole infinitamente, che si considerano dai matematici, e che sole conducono ad altri risultamenti di quantità grandi, o piccole infinitamente, che nella fisica ripugnano; quindi pare, che l'Estensore della Biblioteca britannica non dovesse mostrare quasi di approvare il sogno d'*Horsley*, che appoggiato a quelle conseguenze vorrebbe stabilire infinita l'atmosfera della terra, e degli altri corpi mondani, perciocchè le osservazioni mostrano, che l'atmosfera della terra, della luna, e del sole capace di riflettere, o di rifrangere il lume è assai limitata; e secondo la teorica quella non può estendersi oltre al limite di distanza, in cui la forza risultante dalla forza centrifuga nata dalla rivoluzione intorno all'asse combinata con le attrazioni vicendevoli dei corpi mondani, per cui le parti atmosferiche ten-

dono ad allontanarsi dal corpo centrale, riuscirebbe maggiore di quella, con cui tendono ad accostarvisi, come può vedersi presso *Frisio* (*Op. Vol. III, pag.* 116, *e seg.*). Nè con verità afferma *Horsley*, che a lui consenta *Newton* (*Opusc. de Mundi sistem.*), perchè questi calcola la rarità, a cui si ridurrebbe l'aria, supposta la legge di *Mariotte* ad una certa altezza dell'atmosfera solamente per addurre un esempio atto a far comprendere la rarità, che aver possono i vapori, che sortono dalle comete; ma in quel luogo non stabilisce egli cosa alcuna per riguardo all'estensione della nostra atmosfera, che egli per le ragioni già addotte non avrebbe mai supposta infinita.

58. Ma ecco un altro paradosso avvertito dall'*Horsley*, il quale sembra, che molto se ne dilettasse. Sia dall'unità espressa l'elasticità dell'aria per un dato grado di calore, e suppongasi, che cambiandosi questo per gradi eguali ancora quella si cambj per una costante quantità k, come credono di avere osservato alcuni (12), onde al grado n esimo sopra, o sotto quel grado di calore debba essere $1 \pm nk$. Dunque salendo nell'atmosfera dovrebbe esservi un limite, dove essendo $1 - nk = v$ l'elasticità divenisse nulla, e oltre a quello divenendo $1 < nk$ la elasticità diverrebbe negativa; così secondo le osservazioni di *De Luc* per esempio supponendo 1 l'elasticità, o il volume dell'aria a gradi $16\frac{3}{4}$ Reaumuriani, poichè essa cambia il volume per $\frac{1 \cdot mo}{215}$ ad ogni grado, l'elasticità a $16\frac{3}{4} - n$ sarebbe $1 - \frac{n}{215}$, e diverrebbe nulla a gradi $n = 215$, e negativa a gradi $n > 215$. Ma chi può intendere in che consista questa elasticità nulla, o negativa, per cui l'aria dovrebbe tendere non a comprimersi diminuendo il calore, ma a dilatarsi?

59. L'*Horsley* avrebbe potuto accrescere il numero dei paradossi aggiugnendovi quello del mercurio, e di ogni altro corpo, che mostri i cambiamenti di volume eguali in corri-

spondenza ai cambiamenti eguali di calore, perchè se ancora nel mercurio la densità al zero del termometro centigrado sia espressa dall'unità, siccome secondo *La Place* per ogni grado esso si cambia per $\frac{1 \,.mo}{5412}$, così al grado $n \,.mo$ la sua elasticità diverrebbe $1 \pm \frac{n}{5412}$, e il mercurio dovrebbe cessare di ristringersi al freddo di 5412°, e crescendo questo ancora di più per l'elasticità negativa dovrebbe tendere a dilatarsi; il che è impossibile. Ma non è da fare caso alcuno di questi assurdi, o paradossi, che in natura non hanno mai luogo, e servono solo a provare, che niun corpo può cambiare sempre il volume in una proporzione costante col calore; e quelli che tengono questa supposizione, riguardano il cambiamento del volume non già vicino ai gradi estremi del calore, dove l'assurdità si manifesta, mai nei gradi medj, dove l'ineguaglianza della proporzione tra i cambiamenti del calore, e del volume non è così grande, che non possa trascurarsi senza errore sensibile.

60. Ancora la formola [41 (7)] si può integrare con ipotesi diverse da quelle del *La Place* (16); poichè suppongasi $c' = c^{\mu} (c^n \pm iv)^k$, quella diverrà $\frac{c^{1-\mu} \delta g'}{p} (c^n \pm iv)^k \delta v = -\frac{\delta p'}{p'}$; e integrando $\pm \frac{c^{1-\mu} \delta g'}{ip(1-k)} (c^n \pm iv)^{1-k} = -eLp' + c$; e poichè posta $v = 0$ diviene $p' = p$, sarà $\pm c^{1-\mu} \delta g' c^{n-nk} = -eLp + c$; laonde si avrà la formola $\pm \frac{c^{1-\mu} \delta g'}{ip(1-k)} \times [(c^n \pm iv)^{1-k} - c^{n-nk}] = e(Lp - Lp')$, che vale sempre fuori del caso di $k = 1$, nel quale la formola prima diviene $\frac{c^{1-\mu} \delta g'}{p} (c^n \pm iv)^{-1} \delta v = -\frac{\delta p'}{p'}$, e integrando si ha $\pm \frac{c^{1-\mu} \delta g'}{ip} L(c^n \pm iv) = -Lp' + c$, e poichè posta $v = 0$ diviene $p' = p$, sarà la formola finale $\pm \frac{c^{1-\mu} \delta g'}{ip} [L(c^n \pm iv)] - Lc^n = Lp - Lp'$;

e come questa esprimerà l'ipotesi di *Lagrange* del calore (16), che salendo decresce nella ragione aritmetica con le altezze v ponendo $n = k = -i = 1$, e $\mu = 0$, così quella esprimerà l'ipotesi di *La Place* ponendo $n = 2$, $k = \frac{1}{2}$, $\mu = 0$, $i = -1$; d'*Eulero* ponendo $n = 0$, $k = -1$, $\mu = 1$; e di quelli, che tengono il calore costante eguale al medio aritmetico tra i due gradi, c, e c' ponendo $k = 0$, e $c^{\mu} = \frac{c + c'}{2}$.

61. Quale però tra queste ipotesi debbasi sciegliere, è ancora così incerto, come quando io pubblicai la mia Memoria, e forse lo sarà ancora per lungo tempo; perciocchè tra le cagioni, che riscaldano l'atmosfera, le principali sono l'estinzione del lume solare, che l'attraversa, l'estinzione del calorico radiante riflesso dalla terra, e le correnti, che ascendono; lasciando la comunicazione del calore da una molecola all'altra dell'aria, che è stata contradetta da *Rumford*, e i cambiamenti di temperatura, che possono provenire dai cambiamenti di stato, che accadono nelle parti stesse dell'aria, o nei vapori, e in altre sostanze, che vi sono framischiate. Ora pare, che l'estinzione del lume debba essere in ragione diretta della densità dell'aria, e del lume stesso; quindi il massimo di quella del lume riflesso sembra dover essere in molta vicinanza della terra, dove e l'aria, e il lume hanno maggiore la densità; laddove il massimo di quella del lume diretto pare dover essere ad una certa distanza dalla terra, perchè la densità di questo lume è maggiore in alto, dove è minore la densità dell'aria: ma finora non si è scoperto alcun dato per conoscere i luoghi di quei due massimi, o del loro medio, nè la legge, con cui il calore allontanandosi da quei luoghi si cambia; le correnti poi, che ascendono per l'atmosfera, sono assai più lente sopra del mare, o delle campagne coperte di neve, che sopra i deserti, e altri strati nudi, o lisci; e sono assai diverse sulle montagne formate a' piani con una certa gradazione elevati, che sul pendìo delle montagne piramidali; e infine sono interrotte, e

spesso

spesso cambiate per ragione delle correnti di altre direzioni; quindi sono generalmente tanto irregolari, che non è da sperare di conoscerne gli effetti con qualche legge costante.

62. E come poco ci istruisce la Teorica, così accade delle osservazioni. Veramente *Humboldt*, che ha avuto occasione di osservare i gradi del calore dal livello del mare fino alla cima dei più alti monti delle Cordilliere, e gli ha paragonati con le osservazioni di altri paesi (*Voyage... Vol. I, Sur la limite inferieure des neiges perpetuelles. Mem. lue à la prem. Clas. de l'Instit. nation. Nivose an. XIII*, e *Journ. des Min. Vol.* LXXIV) in mezzo alle perturbazioni prodotte da tante cagioni accidentali pare, che giunto sia a determinare 1.° che poichè salendo nell'atmosfera ad una distanza non grande dalla terra si arriva ad una temperatura fredda quasi costante, e questa alla superficie della terra è molto varia secondo le diverse ore del giorno, o stagioni dell'anno, ancora l'altezza, a cui si deve salire, perchè il termometro si abbassi di un grado, deve essere una funzione inversa della temperatura della superficie, cioè maggiore, o minore, secondochè questa è minore, o maggiore; ma la differenza non oltrepassa certi limiti, perchè nel freddo più grande arriva ai 244 metri, e non scema, che di un quinto circa dai 29° fino ai 25°. 2.° Che i risultamenti medj delle misure di quell' altezza prese in diversi tempi dell'anno fino ad una certa distanza dalla terra sono funzioni della temperatura media delle diverse latitudini; ma oltre a quella distanza di metri 470 circa il calore sembra distribuirsi nell'atmosfera con una certa uniformità, onde l'altezza corrispondente al decremento medio di un grado è a un dipresso la medesima dentro, e fuori dei Tropici; e infatti *Matthieu* da due osservazioni di *Swanbergh*, e da una formula di *La Place* ha dedotta quell' altezza di metri 243, 8, e di metri 243, sebbene il calore nella prima fosse — 13°, e nella seconda — 29°; e le osservazioni di *Humboldt* sopra Chimboraço gli hanno data di metri 196, ossia di tese 98 quell'altezza, che le tempe-

rature medie fissano a 100 partendo dal livello del mare; e *Say Lussac*, essendo il termometro inferiore a 27°, 7 lo trovò ad 8°, 5 all'altezza di 3700 metri; e a — 9° all'altezza di 6980 metri, onde nella prima colonna il decremento di un grado era all'altezza di metri 193, e per l'altra, che sta tra le altezze di metri 3704, e 5876 di Teneriffa, e di Chimboraço, era all'altezza di metri 183; e sarebbe di metri 187 all'altezza di tutta la colonna, che era di metri 7000. Siccome però nel tempo dell'ascensione il caldo a Parigi crebbe di tre gradi, supponendo contro ogni probabilità, che quel cambiamento si fosse propagato ancora a quella altezza, a cui era *Say Lussac*, l'altra corrispondente al decremento di un grado sarebbe di soli metri 173, che assai più dei 193 distano dai 191 risultanti dalle osservazioni di *Humboldt*.

63. Nelle osservazioni di *Say Lussac* non si sa bene comprendere, come alle altezze di 1333, e di 2000 tese la differenza del calore sopra quello della terra non passasse i gradi tre, e i gradi cinque e mezzo circa, quando fu da altri trovata molto maggiore. Ma forse al termine della di lui salita il termometro fu sempre a — 9°, e sulla terra essendosi cambiato per circa 3°, deve in quella computarsi non il massimo di 27°, ma il medio di 25°, onde quella differenza diverrebbe maggiore. Quello poi, che ragionando non si avrebbe potuto indovinare, anzi di cui forse sarebbesi argomentato il contrario, e che risulta dalle osservazioni di *Humboldt*, e di *Say Lussac*, si è, che il calore decresce più rapidamente nelle regioni superiori fino ad una certa altezza, che nelle inferiori. Li risultamenti delle osservazioni di *Humboldt* si vedono nella tavola seguente da lui stesso disposti.

Altezze sopra il livello del mare	Temperatura in gradi centesimali	Differenze
0	25, 3°	
500	24, 0	1, 3°
1000	22, 6	1, 4
1500	21, 2	1, 4
2000	20, 0	1, 2
2500	18, 7	1, 3
3000	14, 4	4, 3
3500	9, 0	5, 4
4000	6, 4	2, 6
4500	3, 7	2, 7
5000	0, 4	3, 3
5500	— 3, 0	— 3, 6
6000	— 6, 0	— 3, 0
6500	— 10, 0	— 4, 0
7000	— 13, 0	— 3, 0
7500	— 16, 0	— 3, 0

Da cui si vede, che il decremento del calore è più rapido circa nella ragione di 5 : 3 di sopra ai 3500 metri, che dal livello del mare ai 2500; e che lo strato d'aria, dove il raffreddamento è più pronto almeno sotto all'equatore è compreso tra i 2500, e i 3500 metri, ossia tra le altezze del S. Gottardo, e dell'Etna.

64. Se poi riflettasi, che calcolando sopra diverse osservazioni delli stessi *Humboldt*, e *Say Lussac* l'altezza sopra il livello del mare, in cui il calore scema di un grado, riesce diversa, e che *Saussure* la stabilì a metri 160, come pure d' *Aubuisson* (*Suite du Mem. sur la mes.... Jour. de Phys.... Juillet* 1810), si vedrà, che ancora dentro un certo limite quell'altezza non è accertata appunto perchè le diverse temperature dello strato inferiore dell'aria, e massime le diver-

se influenze delle circostanze locali sopra l'estinzione del calore riflesso dalla terra (61) dovevano produrre differenze notabili nelle osservazioni, dalle quali quell'altezza è stata derivata. In generale i risultamenti ottenuti da quelli, che si occuparono di questo soggetto, debbono considerarsi come dipendenti dalle temperature, che si provavano al luogo della terra, sopra cui il decremento è stato osservato; ma non si ha finora un così grande numero d'osservazioni, dalle quali si possa una sicura conseguenza dedurre; poichè le migliori sarebbero quelle, nelle quali le temperature sulla terra fossero molto basse, e in aria avessero potuto replicarsi assai volte; ma quelle sono nel minor numero, perchè in Europa non possono procurarsi che coi viaggi atmosferici, che non sogliono intraprendersi in temperature fredde, e in America, dove sopra le Cordilliere si trovano dei Villaggi di 400 metri più alti della cima di Teneriffe, dove un Fisico potrebbe farvi un soggiorno poco penoso, e interessantissimo non solo per l'oggetto presente, ma per tutta la metereologia, sono rarissimi i viaggiatori.

65. L'incertezza diviene ancora maggiore per riguardo alla legge, con cui il calore salendo decresce, poichè questa dipende da quell'altezza, nella quale questo comincia a scemare di un grado, e la differenza delle circostanze tra le parti inferiori, e le superiori dell'atmosfera è sempre più notabile, quanto la distanza è più grande. E io so bene, che *Offmann* (*Voyage d' Humboldt quatt. partie Astron., et Magnet. Vol.* 1) calcolando con la formola di *La Place* ha trovate sei osservazioni di *Humboldt* conformi alla legge di *Eulero*; ma tra le leggi dei diversi Autori qual è, a cui non si trovino conformi alcune osservazioni, quando tra le molte si faccia la scielta opportuna, imperciochè fino *Bernoulli* ne riporta quattro, dalle quali ricavò la strana sua opinione del calore crescente a misura, che si sale nell'atmosfera. Ma ancora qual è tra quelle leggi, a cui non si possano trovare le osservazioni in grande numero contrarie, quando si prenda-

no in circostanze molto diverse per le temperature sulla terrestre superficie? Ad ogni modo tra quelle incertezze si può ritenere il principio di *La Place* (16) che la legge del decremento del calore salendo per l'atmosfera sia compresa tra i limiti delle due progressioni aritmetica, e geometrica; nè si scosterà molto dalle osservazioni usando quella verso la temperatura di 25° centesimali, e questa sopra, o sotto i 25°.

66. Siccome poi le leggi principali proposte da diversi Autori non differiscono molto da quelle progressioni (17) così non deve farci meraviglia, se quasi tutte convengono a un di presso nel medesimo risultamento. E già si è veduto questo (17) per riguardo a *De Luc*, *Schuckburgh*, *Eulero*, *Lagrange*, e *La Place*, ai quali mi piace aggiugnere in questo luogo il *Venini*, il quale (*Instit. Nazion. Ital. T. I, P. I; e T. II, P. I*) ha già pubblicate tre parti di una Memoria sulle livellazioni barometriche, e ne promette una quarta pel volume terzo. Egli tiene la progressione aritmetica, e arriva ad una formola veramente semplicissima; poichè nella seconda formola (60) pongasi $n = 1 = g$, e $\frac{p}{\delta} = B$, rimarrà $L(c - iv) = Lc - iBL\frac{p}{p'}$: e passando dai logaritmi ai numeri si avrà $c - iv = c\left(\frac{p}{p'}\right)^{-iB} = \frac{cp'^{iB}}{p^{iB}}$, e quindi $v = \frac{c}{i}\left[1 - \left(\frac{p'}{p}\right)^{iB}\right] = \frac{c}{i}\left(\frac{p^{iB} - p'^{iB}}{p^{iB}}\right)$. Ma da tre osservazioni sue, e due del Generale *Roy* per un valore medio egli trova $B . L10 = \frac{p}{\delta L10} = 9240,7$; e $B = \frac{9240,7}{L10} = 4013,2$; ed $i = 0,00005$; e perciò $iB = 0,00066$, e $v = \frac{100000}{5} . c\left[1 - \left(\frac{p'}{p}\right)^{0,00066}\right] = 20000 . c . \left[1 - \left(\frac{p'}{p}\right)^{0,00066}\right]$; e inoltre egli assume, che li 0,00066 dell'esponente si possono senza notabile errore tralasciare, e che i valori di c presi da una tavola delle dilatazioni dell'aria da lui calcolata erano espressi da dieci millesimi; quindi conchiude, che se que-

sti intendansi per intieri resterà il valore di $v = 2c\left(\frac{p^{\frac{1}{s}} - p'^{\frac{1}{s}}}{p^{\frac{1}{s}}}\right)$, che coi logaritmi si calcola facilissimamente.

67. Mentre ammirava la semplicità di questa formola, mi venne un dubbio, se li 0,00066 si possano con ogni sicurezza trascurare essendo nell'esponente, come quando sono il moltiplicatore di un numero; perchè nell'esempio stesso del *Venini*, che è l'altezza del campanile di Domaso, invece delle p,p' sostituendo le h,h' era $h=333,25$; $h'=332,175$; $L\frac{h}{s} = 0,5045540$; $L\frac{h'}{s} = 0,5042734$; $h^{\frac{1}{s}} = 3,19561$; $h^{\frac{1}{s}} = 3,19351$; $\frac{h^{\frac{1}{s}} - h'^{\frac{1}{s}}}{h^{\frac{1}{s}}} = \frac{206}{319561}$; e quindi $v = 13,2872^{tes.}$. Ma se Lh, e Lh' non si avessero a dividere per s, ossia a moltiplicare per 0,20000, ma per 0,20066, si avrebbe $0,20066 \times Lh = 0,5062191$; $0,20066\, Lh' = 0,5059375$; $h^{0,20066} = 3,207887$; $h'^{0,20066} = 3,205808$; $\frac{h^{0,20066} - h'^{0,20066}}{h^{0,20066}} = \frac{2079}{3207887}$; e poichè è $L\frac{2079}{3207887} = 6,8116354$; $L\,10306 = 4,0130901$; $L2 = 0,3010300$, sarebbe $Lv = 1,1257555$, che porterebbe il valore di v a 13,35843 tese, e si avrebbe una differenza di circa un mezzo per cento per le sole quantità trascurate nel calcolo, che veramente pare un po grande almeno per certi casi.

68. Dalle esposte dottrine si può inferire, che per la legge del decremento del calore per l'atmosfera debbono rifiutarsi quelle, che molto si scostano dalle medie tra l'aritmetica, e la geometrica singolarmente quando importassero un calcolo molto lungo, ed imbarazzato. E tale in primo luogo mi pare quella del *Lindenau* (*Tables barometriques pour faciliter le calcul des Nivéllements, et des mesures des hauteurs*

par le barometre. *Gotha* 1809), che per esprimere la correzione dipendente dal calore dell'aria nel coefficiente M (36) invece di uno introduce i due termini $0{,}002\,(t+t') - 0{,}000004\,(t-t')^2$; e invero non havvi alcuna positiva ragione, che richieda questo secondo termine, che allunga, e imbarazza il calcolo senza renderlo notabilmente più esatto, perchè nelle altezze non estremamente grandi non porta una differenza maggiore di quella, che può supporsi nelle osservazioni.

69. Ma molto più in quel caso è l'altra di *Kirwan* (*Bibl. Britan. Vol. XXI, pag.* 322). Egli veramente si propone soltanto di mostrare, come si possano correggere le regole di *Saussure*, che tra le latitudini medie di 45°, e 47°, e nei mesi d'estate il calor medio salendo scemi di un grado Reaumuriano per ogni 100 tese, avendo riguardo alle differenze del calore nelle diverse latitudini; ma la correzione stessa si potrebbe a qualunque altra regola applicare; poichè a quel fine egli osserva, che *Bouguer* (*Mem. Par.* 1744, *e* 1749) aveva stabiliti ad altezze diverse secondo le diverse latitudini nell'atmosfera due punti da lui chiamati uno inferiore, e l'altro superiore della congelazione, dei quali il primo meno alto è quello, dove ancora d'estate gela tutte le notti, e di giorno la temperatura s'alza assai poco sopra la congelazione; e il secondo più alto è quello, sopra cui non s'alza alcun vapore sensibile, laonde egli crede, che in ambedue si possa stabilire la temperatura costante di 32^{oF}, ovvero 0^{oR}. Appresso egli scieglie questo secondo, che sembra il meno mobile, e coi dati presi da *Bouguer*, e da *Saussure* forma una tavola, che è riportata ancora dal *Venini* (*L.* 1. 66, *v.* 11), e che presenta la di lui altezza sopra il livello del mare, la quale si verifica nei mesi di Maggio, Giugno, Luglio, ed Agosto, nei quali i due punti di congelazione sembrano a lui dovere coincidere; e insegna poi a determinare per mezzo della indicata tavola i gradi, che avrà il termometro a diverse altezze, e a diverse latitudini, quando sia dato il grado di lui a qualunque stazione inferiore, col calcolo seguente.

70. Sia λ una latitudine, in cui il grado termometrico t sia stato osservato al livello del mare, il quale dal termine superiore della congelazione abbia la distanza D, che si prenderà dalla tavola indicata di sopra, e la differenza di temperatura, che le corrisponderà, sarà $t - 32^{\circ F}$. Ma si è supposto (60), che dove la differenza della distanza era v, fosse $c' = c^{\mu} (c^{n} \pm iv)^{k}$, e quindi che pel calore $c = t$ fosse $c' = t^{\mu} (t^{n} \pm iv)^{k}$; dunque per conseguenza delle premesse nella distanza D essendo $c' = t - 32^{\circ}$, e $v = D$, sarà $t - 32^{\circ F} = t^{\mu} (t^{n} \pm iD)^{k}$; e dividendo quella per questa equazione si avrà $c' = (t - 32^{\circ F}) \left(\frac{t^{n} \pm iv}{t^{n} \pm iD}\right)^{k}$. Se poi il luogo del calore t sia alla distanza γ sopra il livello del mare, la sua distanza dal termine superiore della congelazione sarebbe $D - \gamma$, a cui corrisponderà la differenza $t - 32^{\circ F}$; laonde ritenendo la supposizione, a cui tutto questo calcolo è appoggiato, che il calore sia sempre una funzione simile della distanza, nella penultima equazione a D sostituendo $D - \gamma$ si avrà $t - 32^{\circ F} = t^{\mu} [t^{n} \pm i(D - \gamma)]^{k}$; onde pare, che alla distanza v il calore debba essere $c' = (t - 32^{\circ F}) \left(\frac{t^{n} \pm iv}{t^{n} \pm i(D-\gamma)}\right)^{k}$, e non $c' = (t - 32^{\circ F}) \left(\frac{t^{n} \pm iv}{t^{n} \pm iD}\right)^{k}$, come sembra supposto da *Kirwan*, il quale prende sempre la distanza del termine superiore della congelazione dal livello del mare, quando pare, che debba pigliarsi dal luogo, dove è stato osservato il calore t. Con questa regola ben si vede, come si possa trovare il calore della regione superiore, quando sia dato l'altro della inferiore; ma a che pro entrare in così grande lavoro di calcolo, quando la regola non serve che per quattro mesi dell'estate più calda, e pei luoghi, dei quali sia nota l'altezza sopra il livello del mare; e quantunque applicata agli esempi alcune volte presenti una bastevole approssimazione, in altre però manca assolutamente?

71. L'effetto del calore sull'aria non è ancora conosciu-

to

to altrimenti che dentro i limiti dell'incertezza, che furono notati nella Memoria (24, 25); ad ogni modo pare, che i Fisici ad imitazione di *La Place* seguano generalmente *Say Lussac*, che ha trovato il cambiamento di un $0,00375^{mo}$ del volume per ogni grado centesimale; e io stesso mi tengo a questa opinione per l'autorità di *Majer*, sulla quale voleva portarlo a 0,00380 (29). Allora io non conosceva il di lui esperimento, ma inseguito ho trovato presso *Gilbert* (*Annalen.* 1807 *Stück*, 4. *pag.* 395), che l'esperimento qui indicato sembra essere non di *Tobia Majer*, ma del di lui figlio pubblicato nella Dissertazione (*Phys. Mathem. Abhandlung über dos avsmenen der wärme ... Frankf.* 1785, §. 75), e instituito ai 25 Gennajo 1780 con un termometro ad aria di *Amontons*, che era stato esattamente calibrato, e nella sfera poteva contenere 3072 grani di mercurio a 0^{oR}, e aveva una massa d'aria, che sotto l'altezza di $3^{pol.}\ 11,1^{lin.\ par.}$, a quella temperatura, e sotto la pressione di $27^{pol.}\ 1^{lin.}$ occupava il volume di 2443,3 grani. Ora quando l'istromento fu posto nell'acqua bollente il volume dell'aria della sfera sotto la pressione di $27^{pol.}\ 1^{lin.} + 14^{pol.}\ 9,6^{lin.}$ di altezza di mercurio occupò il volume di 2512,2 grani di questo metallo; ma lo stesso *Majer* ha accresciute ambedue le altezze di pressione di $3^{lin.}$ per ragione della capillarità; quindi poichè il volume dell'aria sotto eguale pressione è proporzionale al volume osservato, e alla pressione, sotto a cui questo si mantiene, secondo quell'esperimento il volume dell'aria a 0^{oR} al di lei volume sotto il 80^{oR} con la pressione di $27^{pol.}\ 1^{lin.}$ di altezza barometrica sta come $2443,3 : 2512,2 + 376^{pol.}\ 6^{lin.} : 506^{pol.}\ 1^{lin.}$, cioè come 1 : 1,382.

72. Ma pare, che *Majer* abbia non bene calcolate, o trascurate le dilatazioni del mercurio, o del vetro; e della prima è chiaro, che ingrandisce il volume dell'aria contenuta nella sfera, il quale si calcolava soltanto, quando il mercurio era ridotto alla quiete, e perciò dava pure una pressione manifestamente più grande di quella, che corrispondeva

alla colonna del mercurio divenuto meno grave specificamente. Ora *Majer* suppone, che questo metallo da 0^{oR} ad 80^{oR} si dilati per 0,0156 del suo volume, onde calcola il volume dell'aria corretto per la dilatazione del mercurio = 1,370 nel calore dell'acqua bollente. Ma secondo *Lavoisier*, e *La Place* questa dilatazione arriva a 0,0189, e perciò i due ultimi termini dell'antecedente proporzione dovrebbero divenire 2500,8, e 503. La dilatazione poi del vetro accresce la capacità della sfera, e del tubo del termometro d'aria, che a 0° eguagliava il volume di 3170 grani di mercurio, calcolando il tubo fino al segno, in cui vi si trovava il mercurio agli 80^{oR}, e perciò diminuiva la dilatazione dell'aria. Dal *Soldner* (*Gilbert Annal. l. c.* 71) si ricava, che questa nel dato caso valerebbe tanto quanto il volume di 3170.3.0,00083 = 11,7 grani di mercurio; laonde i 2500,8 divengono 2512,5, e perciò il volume dell'aria corretto per la dilatazione del mercurio insieme, e del vetro nel calare dell'acqua bollente diviene $= \frac{2512,5}{2443,3} \cdot \frac{503,0}{376,6} = 1,373$. Ma siccome l'esperimento è stato instituito sotto all'altezza barometrica di $28^{pol.}\ 1^{lin.}$, il calore dell'acqua bollente non poteva giugnere agli 80^{oR}, ma solo ai 79° 34 secondo le formole del citato *Soldner* (*Gilbert Annalen*.... 1804 *Stuck*), così la già calcolata dilatazione apparterrà a questa temperatura, e alli 80^{oR} il volume d'aria 1 diviene $1,373 + 0,373 \cdot \frac{0,66}{80} = 1,376$, che è molto più vicino al risultamento ottenuto da *Say Lussac*, secondo il quale quel volume diviene 1,375. Ma meritano di essere lette le riflessioni sopra questo esperimento, che sono esposte negli Annali citati.

73. Ma questo accrescimento conviene all'aria nello stato di siccità; e egli è noto, che questa nel suo stato ordinario è sempre mischiata con una più o meno grande quantità di vapore acqueo, che a forza elastica eguale essendo meno pesante scema la di lei densità, e quindi la colonna *v*

dovrà essere accresciuta in proporzione al decremento di densità per modo che se questo si esprima per x', si dovrebbe nel valore di v (36) introdurre un altro fattore $1 + x'$; e il *La Place* (*Mech. cel. vol. IV, pag.* 272) seguito da *d'Aubuisson* (*Journ. de Phys. Juil.* 1810) insegna, come dallo stato del termometro, e dell'igrometro si possa trovare il valore di x' col seguente metodo.

74. Sia φ' la forza elastica del vapore di un fluido qualunque a diversa temperatura in uno spazio, che ne sia ripieno; i la temperatura sopra il 0°, sotto alla quale il fluido bolle sotto alla pressione di 0,76 metri; t la temperatura sopra il 0° al tempo dell'osservazione. Con questi dati *La Place* ha rappresentate molto esattamente le esperienze di *Dalton* sopra la forza elastica dei vapori con l'equazione $\varphi' = 0,76^{met.} \times 10^{i \times 0,015454 - i^2 \times 0,00006 2583}$, la quale usando il termometro centigrado, applicata all'acqua, che bollendo a 100° rende $i = t - 100$, dà l'altra $\varphi' = 0,005123 \times 10^{t \times 0,027971 - t^2 \times 0,00006 2583}$, laonde si avrà il logaritmo tabulare della forza elastica φ' del vapore, ossia della pressione, che eserciterebbe, o dell'altezza, a cui si terrebbe il mercurio nel barometro in uno spazio unicamente occupato da quel vapore, se al logaritmo di 0,76 si aggiunga la quantità $i \times 0,015454 - i^2 \times 0,00006 2583$, ovvero al logaritmo di 0,005123 si aggiunga la quantità $t \times 0,027971 - t^2 \times 0,00006 2583$.

75. Esaminando la tavola data da *Saussure* (*Essais sur l'Hygrometrie* §. 176) della quantità del vapore acqueo contenuta in uno spazio limitato a gradi diversi dell'igrometro, ma sotto una stessa temperatura si trova, che quella, se al punto della saturazione si esprima coll'1, diminuisce di 0,015 per grado dell'igrometro dal 100mo, o piuttosto dal 90mo fino al 60mo, e ancora al 50mo, che è il grado, sotto al quale quello stromento discende assai rare volte nelle basse regioni dell'atmosfera. Ma la forza elastica deve seguitare quello stesso rapporto. Se dunque si chiami φ questa forza a t° del

termometro, o $u°$ dell'igrometro si avrà $\phi = \phi'[1 - 0{,}015(98 - u)] = \phi'(0{,}015u - 0{,}47)$. Al di sotto però di 50° s'impiegherà direttamente la tavola di *Saussure*; e ponendo, che il numero di questa, che corrisponde all'u dell'igrometro, sia m, e che la quantità, o la forza al punto di saturazione sia 11,069, si avrà $\phi = \phi' \cdot \frac{m}{11{,}069}$.

76. Ma secondo *Saussure* (§. 288) a forza elastica, e temperatura eguali il peso del vapore acqueo sta a quello dell'aria secca come 10 : 14, e un metro cubo d'aria secca a 0°, e sotto 0,76 metri di pressione pesa grani 1300; e questo peso scema di 0,00375 di grano per grado d'innalzamento del termometro, e inoltre è proporzionale alla pressione, o forza elastica. Dunque a $t°$ di temperatura, e a ϕ di forza il peso di un metro cubo di aria secca sarà $\frac{1300}{1 + 0{,}00375t} \cdot \frac{\phi}{0{,}76}$; e un metro cubo di vapore acqueo nelle circostanze medesime peserà $\frac{1300}{1 + 0{,}00375t} \cdot \frac{\phi}{0{,}76} \cdot \frac{10}{14}$ grani; onde se sia

P il peso del vapore acqueo rinchiuso in uno spazio vòto, o pieno d'aria;

a lo spazio stesso espresso in metri;

t l'indicazione dell'igrometro nello spazio stesso di sopra ai 50°, ovvero 60° dell'igrometro si avrà

$$P = 6{,}259 \text{ grani } \frac{a(0{,}015u - 0{,}47)\,10^{t \times 0{,}027971 - t^2 \times 0{,}00006583}}{1 + 0{,}00375t};$$

e di sotto dai 60°, ovvero 50° dell'igrometro pigliando m dalla sopraindicata tavola di Saussure sarà

$$P = 0{,}5655 \text{ grani } \frac{a \cdot m \cdot 10^{t \times 0{,}027971 - t^2 \times 0{,}00006583}}{1 + 0{,}00375t}.$$

77. Quando l'aria, e il vapore acqueo sono misti insieme, le forze dei due fluidi si uniscono per fare equilibrio alla pressione dell'atmosfera; laonde se questa sia espressa da h, essendo ϕ la forza elastica del vapore, quella dell'aria contenuta nella mischianza sarà espressa da $h - \phi$. Ora sup-

pongasi, che nella unità del volume, per es. nel metro cubo i due fluidi siano separati uno dall'altro, e contenuti in due spazi distinti in maniera, che le loro forze elastiche si facciano equilibrio; lo spazio occupato dall'aria secca a quello occupato dal vapore sarà come $h - \phi : \phi$; e se parimenti il peso del metro cubo dell'aria secca sia 1, quello dell'aria, che secondo la fatta supposizione è rinchiusa nell'unità di volume, sarà $\frac{h-\phi}{h}$, e quello del vapore sarà $\frac{10\phi}{14h}$; e perciò la differenza tra il peso d'un metro cubo d'aria secca, e quello d'un eguale volume della mischianza d'aria, e di vapore, ossia dell'aria umida sarà $1 - \left(\frac{h-\phi}{h} + \frac{10\phi}{14h}\right) = \frac{2\phi}{7h}$. Ma i pesi sotto l'unità di volume danno le densità; dunque questa sarà $\frac{2\phi}{7h}$.

78. È chiaro questo essere il valore di x'. Ma l'esposto metodo, che serve a trovare il decremento di densità cagionata dai vapori in una piccola massa d'aria, non si può con sicurezza applicare ad una lunga colonna atmosferica, nella quale il decremento di densità dovuto alla presenza del vapore succede ancora più irregolarmente dell'altro dovuto alla temperatura; quindi manca ancora un metodo di calcolo semplice, ed esatto, con cui si possa nella ricerca delle altezze col barometro eseguire la correzione igrometrica, e conviene contentarci di una media, che valga almeno nel clima, dove si opera; e per riguardo al nostro, e ai finitimi basterà osservare, che nella regione inferiore dell'aria la diminuzione di densità per ragione dei vapori acquei assai di raro oltrepassa i 0,006, ovvero i 0,007; e discende sotto al 0,002 fuori dei tempi, nei quali il termometro è a 0^{oR}, ovvero al di sotto; epoca, in cui non sogliono ricercarsi le altezze col barometro. Pertanto la diminuzione media sarebbe 0,004, la quale suole trovarsi, quando il termometro è 17°, e l'igrometro ad 80°, che sono li stati medj di questi stro-

menti nella stagione di quelle ricerche, cioè dall'Aprile all' Ottobre. Ma nelle alte regioni la quantità dei vapori è ben minore, e più piccola la diminuzione di densità; la quale secondo le osservazioni di *Saussure*, e d'*Humboldt* nelle nostre latitudini non pare cambiarsi che da 0,002 fino a 0,003 per le altezze di 2000 metri; e quindi per le altre dai 500 fino ai 1500 metri si potrà fissarla ai 0,0035, che sarebbe il valore di x'.

79. Ma questo essendo costante, e tenue assai, non torna conto l'introdurlo nella formula (36) del valore di v; quindi *La Place* (*Mech. cel. Vol. IV*), e ad imitazione di lui *Biot*, e *Arrago* (*Mem. de l'Instit.* 1806, *e Phys. Mech., pag.* 219) avendo osservato, che l'atmosfera contiene più vapori nella calda stagione, hanno creduto, che per calcolare gli effetti dell'umidità dell' aria si potesse fare qualche accrescimento al fattore dipendente dalla temperatura; laonde il *La Place* invece del fattore $1 + \frac{t+t'}{2.213}$, che risultava dalle sue osservazioni ha preso l'altro $1 + \frac{t+t'}{2.200}$ (37), e gli altri due invece del fattore $1 + 0,00375\ \frac{t+t'}{2}$ hanno preso l'altro $1 + 0,004.\ \frac{t+t'}{2} = 1 + 0,002\,.(t+t')$. Ma questo fattore è sembrato troppo grande a *d'Aubuisson* (*l. c.* (73) *Juin* 1810) per la ragione che essendo il termometro a 17° darebbe $x' = 0,006$, quando allora non è a un dipresso che 0,004. Egli pertanto pare che da principio inclinasse a combinare la correzione igrometrica col fattore numerico di M (36), che egli da principio aveva posto 18317 secondo *Biot*, e *Arrago*, e per questa correzione sarebbe divenuto 18381; ma in seguito convenne con questi nella scielta del fattore per la temperatura $1 + 0,002\,(t+t')$ insieme col fattore 18317 numerico di M.

80. Tra questi metodi niuno corregge intieramente gli errori, che possono provenire dalla umidità dell'aria, con

tutta l'esattezza; poichè in tutti si trascura la differenza del peso tra l'aria umida, e la secca, che dipende dalla varietà della temperatura, e della pressione dell'aria. Ma chi può dubitare della prima massime se l'umidità sia molto grande, quando egli è certo, che la densità del vapore cresce con la temperatura, e ancora molto più presto di questa. Gli esperimenti poi, sui quali il peso dell'aria umida, e secca è stato determinato, sono tutti stati fatti sotto la pressione a un dipresso di pollici 28, nè alcuno ha ancora tentato di superare le difficoltà, che si avrebbero per pesare quelle arie sulle montagne per averne il peso sotto pressioni minori, o di ricavarlo dagli esperimenti di *Dalton* per introdurlo in questi calcoli. Finalmente non abbiamo alcun mezzo, col quale si possa distinguere l'umidità propria dell'aria, che influisce sulla colonna barometrica, che serve a determinare le altezze dei luoghi, dalla umidità accidentale proveniente da qualche fiume, o da qualche palude. Nondimeno non è da temere, che da queste omissioni nascano errori gravi, poichè gli effetti prodotti dalla umidità sono sempre assai tenui.

81. Ma intorno al metodo, con cui s'introduce la correzione per la diversa temperatura dell'aria, *Tardy de Brossy* (*Bibl. Britan. an.* 1810 *P. III, pag.* 307) promove una difficoltà, che già era stata indicata da *Chiminello* (*Journ. de Phys. Juin* 1779); poichè, dice egli, ogni azione, che dilata, se venga esercitata nelle parti inferiori di un fluido elastico, deve riguardarsi come una forza d'impulsione, che tende a cambiare di luogo, e ad innalzare ciascuno delli strati superiori fino all'ultima sommità in ragione inversa delle loro densità rispettive. Quindi se il barometro sia al livello del mare, esso soffrirà ancora la pressione medesima, perchè tutta sostiene la colonna d'aria prima, e dopo la dilatazione, e l'allungamento; ma se quello sia ad una certa altezza, e la dilatazione segua al di sotto, egli è chiaro, che la massa d'aria corrispondente all'allungamento della colonna sottoposta al barometro passerà sopra di lui, e aumenterà in

proporzione la pressione, che esso deve sostenere. Nè accaderà altrimenti ancora in un barometro posto ad una stazione superiore, poichè l'azione dilatante della colonna sottoposta al primo si estende ancora all'aria sovrapposta al secondo.

82. Se dunque il barometro inferiore sia al livello del mare, il riscaldamento di una parte della colonna ad esso sovrapposta non produrrà alcuna irregolarità; ma in altre circostanze la massa d'aria corrispondente alla dilatazione della colonna sottoposta ai due barometri passerà ad agire col proprio peso sopra ambidue, e accrescendo di una quantità medesima la pressione, che soffrono, toglierà la proporzione geometrica, che avrebbero senza l'effetto del calore, e che è necessaria, perchè si possa loro applicare il metodo logaritmico dell'*Hallejo* (19). Pare pertanto a *Tardy*, che ottimamente operassero i Fisici da principio, quando per avere le altezze dei luoghi riportavano tutte le osservazioni al livello del mare; e non così *Bouguet*, e tutti quelli venuti dopo di lui, che lo seguitarono pretendendo di potere usare, di quel metodo in generale, e applicarlo ad ogni stazione; poichè nelle stazioni elevate sopra quel livello la proporzione geometrica richiesta per l'uso della regola Hallejana viene alterata per l'azione dilatante dell'aria a quelle sottoposta, e non è restituita con avere riguardo alla differenza della temperatura delle due stazioni, o alla temperatura media della colonna frapposta ad ambedue, come si usa generalmente. E poste queste nozioni prosegue *Tardy* a dimostrare, come per quei luoghi, dei quali si conosce l'altezza sopra il livello del mare, o la media altezza del barometro ricavata da quotidiane osservazioni si possa trovare quella quantità di massa d'aria innalzata, che turba la proporzione geometrica delle altezze barometriche osservate, a fine di toglierla, onde queste alla richiesta proporzione ritornino.

83. A questa obbiezione del *Tardy* ha cercato di soddisfare *F. de La Roche* (*Bibl. Britan. Mars* 1811) il quale primamente osserva, che quella non può valere, se non si suppone

pone, che l'aria tra le due stazioni sia come un fluido incompressibile, onde per l'azione dilatante della colonna sottoposta alla stazione inferiore debba tutta insieme sollevarsi, e portare sopra ambidue i barometri un accrescimento di pressione eguale alla massa d'aria innalzatasi per la dilatazione. Ma egli è chiaro, che altrimenti dovrà accadere essendo l'aria compressibile, perchè deve acquistare una densità maggiore nelli strati frapposti alle due stazioni per ragione della massa, che sarà stata innalzata oltre alla stazione superiore; e per questa ragione cerca egli di mostrare, che il cambiamento di temperatura sulla colonna d'aria sottoposta alle due stazioni non toglierà la proporzione geometrica tra le pressioni, che in queste si esercitano; perchè siano esse A, e B, e la colonna d'aria AB ascendendo dividasi in tanti strati $Aa, ab, b1 \ldots$ piccolissimi, perchè ciascuno possa riguardarsi come di uniforme densità, la quale vada crescendo dall'uno all'altro discendendo. Sia h la pressione in A, e δ quella dello strato Aa, onde in a sia $h-\delta$; segua poi una dilatazione al di sotto di A, che non operi che sopra AB, e portando una massa d'aria sopra di A accresca in A la pressione per la grandezza r, onde divenga $h+r$; per questo aumento di pressione ancora la densità di Aa crescerà in proporzione per modo, che se il suo peso si chiami x, la pressione in a sarà $h+r-x$, e la densità dell'aria essendo proporzionale alla pressione si avrà $\delta : x :: h-\delta : h+r-x$, e quindi $x = \delta \cdot \frac{h+r}{h}$; e se questo valore d'$x$ introducasi nella ragione $\frac{h+r}{h+r-x}$ si avrà $\frac{h+r}{h+r-\delta-\frac{\delta r}{h}} = \frac{h}{h-\delta}$, e perciò la ragione tra le due altezze del barometro in A, e a non sarà turbata in alcun modo dal cambiamento di densità accaduto al di sotto di A per ragione della diversa temperatura; e poichè si proverà all'istesso modo, che quello pure accade per le pressioni in $b, c \ldots$, si potrà concludere, che il rapporto tra

le pressioni in A, e B resterà pure lo stesso, non ostante i cambiamenti di densità, che per la variazione del calore potessero accadere al di sotto di A.

84. Io non entrerò a discutere il valore di queste risposte, ma per riguardo alla obbiezione di *Tardy* confesso, che non ho mai saputo comprendere, perchè la ragione tra le pressioni non debba cambiarsi ancora, quando la stazione inferiore sia al livello del mare, perciocchè cambiandosi la temperatura al di sotto della stazione superiore, la pressione rimane ancora la stessa alla stazione inferiore, e alla superiore si cambia. Ora due quantità non cambiano il rapporto, quando una restando costante, l'altra soffre alterazione? Similmente non mi sembra, che lo scopo dei cambiamenti, che si fanno nelle espressioni delle altezze ricavate secondo la legge Hallejana per le cagioni diverse, che vi influiscono, sia quello di ristabilire il rapporto tra le pressioni, che quelle cagioni hanno turbato. All'opposto per le difficoltà, che hanno i Fisici incontrato nella determinazione della influenza di quelle cagioni, mi pare, che quelle espressioni si debbano considerare come formole empiriche composte di fattori diversi ricavati dal paragone con le osservazioni, che siano atte a fornire quelle altezze in modo, che a queste osservazioni meglio si accostino. E infatti se non fosse così, tutti quelli, che hanno fornita alcuna di quelle formole non avrebbero potuto introdurre tanti cambiamenti nelle quantità numeriche, che vi entrano, i quali non sono derivati dall' indole stessa delle cagioni, alle quali appartengono, o dal modo, con cui operano, che è quasi generalmente sconosciuto, ma solamente dal confronto del risultamento, che esse forniscono, con le misure delle altezze ottenute coi metodi geodetici.

85. Anche le nozioni intorno agli effetti del calore sul mercurio non sono state migliorate dopo la pubblicazione della mia Memoria; poichè finora non è stato con maggiore precisione determinato il cambiamento di volume, che quello

soffre per un cambiamento dato di calore, nè ancora si è potuto bene fissare, se a cambiamenti eguali di calore esso soffra cambiamenti eguali di volume. E veramente pare, che il mercurio a guisa di ogni altro corpo ad eguali accrescimenti di calore debba dilatare il volume in una progressione crescente; ma nel barometro è sottoposto a due cagioni, che producono un effetto contrario, e sono le pressioni di una quantunque piccola massa d'aria rimasta nella di lui sommità, e del vapore, che dal mercurio stesso si alza nel vòto barometrico secondo l'osservazione di *Daniele Bernoulli* confermata da *Smeaton*, e da altri. Ma chi sa ancora fra queste contrarie cagioni quale, e come prevalga? Ad ogni modo l'effetto loro è sempre assai tenue; laonde pare, che i Fisici siano oramai convenuti ad ammettere nel mercurio la variazione del volume stabilita da *La Place* (30) sopra gli esperimenti di *Say Lussac*, e a tenerla costante per ogni costante variazione del calore.

86. Ma dalle osservazioni di *André de Sy* autore di una Memoria assai bella sulle livellazioni barometriche (*Journ. des Mines Termidor an. XIII, N.* 107, *e* 108) risultano due importanti avvertimenti, che non debbono trascurare quelli, che le vogliono replicare; e il primo è, che sempre debbano dare al mercurio del barometro un tempo sufficiente, perchè possa tutto ricevere il cambiamento, che corrisponde alla temperatura; perciocchè quello ha trovato, che questo cambiamento è successivo, e non si compie che in un tempo notabile per modo, che sotto 80°R dopo $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{12}{4}$ d'ora le dilatazioni furono $\frac{46}{12}$, $\frac{57}{12}$, $\frac{60}{12}$, $\frac{65}{12}$, $\frac{73}{12}$ di linea. L'altro avvertimento poi è, che sciegliere devasi un certo tempo per le osservazioni barometriche, poichè in otto giorni continui egli non trovò alcuna regolarità nelle variazioni del volume del mercurio, che succedettero avanti le otto ore antimeridiane, e qualche irregolarità vidde ancora in quelle

sull'una alle quattro pomeridiane senza però averne potuto precisare la ragione. Quindi si può dar ragione dei diversi risultamenti, che ottennero diversi Autori, che forse non tutti all'istesso modo attesero a quelli avvertimenti.

87. Parimenti presso d'*Aubuisson* (*l. c.* 64) trovasi un altra correzione da farsi alle osservazioni dipendentemente dalla temperatura per quei barometri, che portano una scala intiera di ottone; questa non è esatta, che ad un certo grado di calore, che nel sistema metrico suole essere il 0^{oR}; laonde l'altezza del mercurio in altri gradi di calore deve essere corretta dall'errore, che vi avrebbe potuto arrecare il cambiamento di lunghezza nella scala. Ora il Gen. *Roy* ha trovato, che l'ottone si dilata di 0,0000185 per grado del termometro, mentre il mercurio si dilata di 0,000185, ossia dieci volte di più (*Suiton Mem. de l'Instit.* 1808); quindi la correzione si farà diminuendo di un decimo o i valori di t, e t', o il moltiplicatore $\frac{1}{3412} = 0,000185$, che diverrà $\frac{1}{6013} = 0,000166$.

88. Non è però dubbio, che sopra questa ineguaglianza non debba influire il legno, a cui suole essere attaccata la scala, e che forma la montatura del barometro. Il *d'Angos* (*Extrait d'une lettre... Journ. de Phys. Aout* 1811) suggerisce di appoggiare il barometro a due verghe metalliche, che sostengano la scala, e non dubita, che questi non dovessero dare osservazioni molto più esatte degli altri, nei quali le montature molto diverse tra loro spesso difendono il tubo dall'aria, ed essendo igrometriche, pieghevoli, e inegualmente affette dal calore comunicano le ineguaglianze, che soffrono, al tubo barometrico, o alla scala, o al termometro, che vi è annesso; quindi *d'Angos* osservava con barometri formati da tubi nudi, che sostenevano essi medesimi la scala; e in questi spesso trovava regolari quelle osservazioni, che in altri mostravansi irregolari; e tra gli altri fenomeni in quelli gli parve di vedere, che le dilatazioni d'estate siano

un po minori delle contrazioni d'inverno. Ma non è tale, e così determinata la differenza, che si possa tenerne conto nelle osservazioni barometriche fatte per dedurne le altezze dei luoghi.

89. Similmente ancora non si è potuto deffinire l'influenza, che in quelle osservazioni aver possono i venti; perciocchè egli è vero, che il barometro prima del vento si abbassa, ma non è ben noto, se questo abbassamento sia prodotto dal vento, o da quella stessa cagione, da cui è risultato il vento. Inoltre alcuna volta i venti sembrano agire sul barometro, ma in realtà i cambiamenti, che in questo succedono, non sono che accidentali; così scrive *d'Angos*, che a Malta i venti scuotono i muri, e sembrano per questo produrre dei movimenti nel barometro. Perfine pare certo, che qualche azione sopra di questo aver debbano i venti ascendenti, e discendenti; ma i venti sembrano per lo più essere orizzontali, e cambiare questa direzione solo per le circostanze particolari; ma in queste non abbiamo alcun mezzo per conoscere la precisa direzione, o forza loro. Quindi non deve recarci meraviglia, se volendo tener conto della influenza dei venti a contrarie conseguenze siano stati condotti *De Luc*, e *Ramond*; e se la maggior parte dei Fisici quantunque non convenga con *De Luc*, che niuna influenza attribuiva ai venti sul barometro, pure acconsenta al *Pictet*, il quale dubita, che mai si possa valutarla, non ostante le ricerche bene diligenti, che ne ha fatte *Ramond*.

90. Ma questi molto più felicemente ha potuto determinare ancora nelle zone temperate una ineguaglianza, a cui è sottoposto il barometro, e che *Humboldt* (*Tableau Physique des regions equinoxiales, pag.* 94) aveva già riconosciuta tra i Tropici. Sebbene per la ricerca delle altezze dei luoghi non sia necessario di paragonare ciascuna altezza barometrica osservata con quella del livello del mare (84), questo però si richiede sempre, quando si vuole far uso delle osservazioni isolate. Ora questa altezza media non è veramente

determinata con ogni precisione, poichè *La Place* a 0^{oR} la pone di $0,76^{m}$, e *Lindenau* a 10^{oR} scrive d'averla da molte osservazioni singolarmente di *Chiminello*, *Toaldo*, *Fleurian de Bellevue*, *Schuckburgh*, e *Thulis* dedotta di $28^{p}\ 2^{l},2$, e *d'Angos* a $16^{oR},58$ nell'aria, e a 17^{oR} nel barometro inseguito a 468 osservazioni fatte a Malta, e altre 100 fatte in parte a Siracusa, e in parte al Capo Pachino l'ha ridotta a $28^{p}\ 2^{l},08$. Ma qui non si tratta della grandezza di quella altezza, ma bene importa di sapere, che *Humboldt* osservando tra i Tropici ha potuto confermare il fenomeno scoperto già a Surinam fino dal 1722 dai Fisici olandesi, e da *Goudin* a Quito di una piccola variazione diurna, o piuttosto oraria simile alla marea, per cui quell'altezza cresce, e cala in due periodi ogni ventiquattr'ore prossimamente come nella tavola seguente

dalle 9 ore di mattina alle 4 di sera cresce di $0,90^{l}$
dalle 4 ore di sera alle 11 di sera cala di $0,51$
dalle 11 ore di sera alle 4 di mattina cresce di $0,31$
dalle 4 ore di mattina alle 9 di mattina cala di $0,70$;

e si può vedere tra le sue opere (*Nivellement barometrique pag.* 289) una tavola, che presenta la quantità di quel movimento, che corrisponde a ciascun'ora.

91. Fuori dei Tropici, dove l'altezza media del barometro al livello del mare è sottoposta a variazioni molto maggiori prodotte da altre cause straniere, la determinazione di quella oscillazione era molto più difficile, nè vi voleva meno della sagacità, e pazienza di *Ramond* per classificare 3281 osservazioni barometriche fatte nel corso di due anni in modo, che potesse riconoscerla; e trovò infatti, che quella variazione diurna segue in generale la marcia stessa nei nostri climi come nella zona torrida con la differenza, che l'abbassamento del giorno è la metà solamente di quello, che si osserva all'equatore, e che presso di noi la salita della sera è a un dipresso eguale all'abbassamento della mattina, laddove tra i tropici queste quantità stanno come uno a due. Fi-

nalmente egli trovò, che l'estensione delle oscillazioni, e l'istante del loro ritorno variano nelle nostre latitudini con le stagioni dell'anno essendo in Europa più forti nella primavera; e forse questa differenza scompare nella zona torrida, dove non vi sono stagioni.

92. Ma l'*Humboldt* (*Tableau ec. pag.* 89) ha pure messa fuori di dubbio l'altra variazione, per cui l'altezza media del barometro al livello di mare va continuamente scemando dai poli all'equatore. E già quando io scrissi la mia Memoria mi erano note in gran parte le osservazioni citate da *Humboldt*, di *Fleurian de Bellevue*, *Schukburgh*, *de Luc* nelle zone temperate, e di *Bouguer*, *Condamine*, e *George Ivan* dentro i Tropici, che trovarono quell'altezza di metri 0, 76434; 0, 76300; 0, 76250; 0, 76022; 0, 75683; 0, 75796; ma non mi parve allora di potere alcuna cosa stabilire con certezza, e forse una teoria già concepita mi fece illusione, poichè questa mi fece credere (33, e 34), che l'altezza barometrica al livello del mare dovesse crescere accostandosi all'equatore, e non mi lasciò credere vera la conseguenza contraria, che seguiva da quelle osservazioni. Ma l'autorità, e le osservazioni di *Humboldt* non lasciano dubitare, che la media pressione dell'atmosfera, e perciò la media altezza barometrica realmente scema andando dai poli all'equatore per modo, che se nelle nostre zone temperate si ponga di $28^p\,2^l$, 2 essendo il termometro a $+10^{oR}$, nella zona torrida secondo *Humboldt* è solamente di $28^p\,1^l$, 02, cioè minore di 1^l, 18.

93. E osserva lo stesso *Humboldt*, che questa differenza, che è quasi di due millimetri, non si può spiegare per la differenza della temperatura d'Europa, e dei paesi equatoriali, e ciò tanto meno, perchè nella parte bassa del Perù per tutti i quattro, e cinque mesi, nei quali il sole sta nascosto sotto di una bruma spessa, il termometro si tiene a 15, o 16 gradi centesimali; quindi nel citato luogo *Humboldt* mette quella differenza tra i fenomeni difficili da spiegarsi;

ma altrove (*Essais sur les refract. astron.*) sembra attribuirlo alla sorgente costante del calore, e della umidità, che si trova all'equatore, per cui l'aria dilatata s'innalza, e nelle colonne più elevate rifluisce continuamente sopra le colonne vicine, onde in quelle pesa meno pel moto di ascensione, e invece aumenta la pressione di queste. Io aggiugnerò, che finchè si considera l'atmosfera come una massa fluida, che girando insieme con la terra sia ridotta all'equilibrio, lo strato dell'aria al livello del mare deve essere uno di quelli, che diconsi pure a livello, onde la di lei densità, e perciò ancora la pressione dovrà essere dapertutto costante, come mostra ancora *La Place* (*Mech. cel. Vol. I, pag.* 106). Se dunque nella zona torrida, e in qualunque delle due temperate siano p, e p' le pressioni, g, e g'' le gravità acceleratrici, h, e h' le altezze barometriche, e Δ la densità del mercurio, sarà $p = \Delta g h$, $p' = \Delta g'' h'$; ed essendo Δ costante, e $p = p'$, dovrà essere $gh = g''h'$, e quindi $h : h' :: g'' : g$, cioè le altezze barometriche dovranno essere reciprocamente come le gravità acceleratrici g', e g, e poichè queste scemano andando dai poli all'equatore, quelle invece dovranno crescere per modo, che se h' sia l'altezza barometrica a 45°, in ogni altra latitudine l dovrà essere $h = h' (1 + 0,00284 \cos. 2l)$, e sotto all'equatore, dove è $l = 0$, e $\cos. 2l = 1$, dovrebbe essere $h = h' (1 + 0,00284)$, e se pongasi $h' = 28^p\, 2^l, 2$, all'equatore dovrebbe essere $h = 28^p\, 2^l, 2 (1 + 0,00284) = 28^p\, 3^l\, 16$. Ma *Humboldt* l'ha ritrovata di $28^p\, 1^l, 02$. Se dunque la differenza trovata da questo osservatore si volesse attribuire a circostanze accidentali, e contare questo caso tra i rarissimi, nei quali queste circostanze impediscono, che le vere leggi della natura si scoprano, anzi le mostrano come in senso contrario, converrà a queste attribuire un effetto medio non minore di $2^l, 14$; che sicuramente è molto da considerarsi.

94. E qui io non voglio lasciare di dire, che *d'Aubuisson* fa dipendere la variabilità del coefficiente $\frac{p}{\delta g}$ (19) da quella

di δ, poichè, dice egli, diminuendosi la gravità sulla superficie della terra andando dai poli all'equatore, ancora l'aria deve essere, poste le altre circostanze eguali, meno compressa a misura che si accosta all'equatore; e infatti per riguardo all'analisi è lo stesso nel coefficiente $\frac{p}{\delta g}$, che si faccia variare δ, ovvero g. Ma secondo la natura delle cose poichè sappiamo, che g realmente si varia, perchè vorremo tenere questa per costante, e invece attribuire la variazione a δ? Inoltre la dimostrazione citata di *La Place* fa manifestamente vedere, che la densità al livello del mare deve essere costante, non ostante che la gravità vada cambiandosi secondo la nota legge. Ma io dichiaro, che espongo queste idee non senza timore d'ingannarmi; perchè mi par chiaro secondo la teoria, che dovesse l'altezza media del barometro al livello del mare crescere andando dai poli all'equatore, e non vedo come conciliarla con le osservazioni del tutto contrarie.

95. Finalmente *La Place* (*Supplem. au dixieme livre du Traité de Mac. Celes. pag.* 64) ha dimostrato, che l'altezza della colonna del barometro, prescindendo da quelli, che sono formati d'un tubo di due braccia assolutamente eguali, ancora contata dalla sommità è minore di quella, che corrisponde a tutta la pressione dell'aria, perchè l'azione della capillarità del tubo tende ad abbassarla; quindi dall'effetto di questa capillarità dovranno correggersi aumentandole in proporzione non solo le altezze barometriche, come si misuravano da alcuni fino al contorno, dove il mercurio tocca il tubo, ma quelle ancora, che si misurano fino alla sommità. Ora come si debba eseguire questa correzione si può ricavare interpolando le belle esperienze di *Carlo Cavendish* (*Trans. Philos. an.* 1776) riportate ancora da *La Place* (*Supplem. à la Theor. de l'action capillaire, pag.* 66), siccome ha fatto il *Lindenau* (*Tables Barom., pag.* 114).

96. Ma oltre alla determinazione degli effetti delle di-

verse cagioni, che influiscono sopra la misura delle altezze barometriche, altri lavori sono stati intrapresi dopo la pubblicazione di quella mia Memoria. E il primo riguarda il coefficiente numerico della espressione dell'altezza cercata (36), che *La Place* seguendo le osservazioni fatte da *Ramond* sopra i Pirenei aveva per una prima approssimazione stabilito 17971, e che inseguito portò a 18336. Ora questo è pure stato direttamente determinato da *Biot*, e *Arrago* (*Sur les affinités des corps pour la lumière etc. Mém. de l'Instit.* 1808), i quali con la bilancia cercarono la proporzione tra le densità del mercurio, e dell'aria, e da quella avendo ottenuto il valore della frazione $\frac{p}{\delta}$ hanno ricavato per quel coefficiente al termine della congelazione, e sotto la pressione barometrica di $0,76^m$ il numero 18317, ossia sotto la pressione barometrica di pollici 28 il numero 18395,5, che è ben poco diverso da quello di *Ramond*.

97. Questi ha potuto sostenere il suo coefficiente contro le obiezioni di *Prony*, il quale da alcune osservazioni fatte sul Moncènis aveva ricavato, che quel coefficiente fosse troppo grande per la misura delle piccole altezze; imperciocchè *Ramond* osservando a Clermont trovò, che il coefficiente stesso gli serviva per le altezze di quattro a seicento metri, come gli aveva servito a Tarbes per altezze molto maggiori. Similmente egli potrà sostenerlo contro *Lindenau*, il quale riflettendo, che questo coefficiente avendo manifestamente qualche analogia con le rifrazioni astronomiche, e pensando, che queste diminuiscano andando dai poli all'equatore, avrebbe voluto fare a quello ancora subire la stessa modificazione; è chiaro è al contrario, che questa non si può introdurre, poichè *Humboldt* (*Essai sur les Refract. astron. voyage etc. Vol. I*) sembra avere dimostrato, che nelle diverse latitudini le rifrazioni astronomiche non sono diverse.

98. Ma *Lindenau* per ritrovare il coefficiente da sostituire a quello di *Ramond* si è servito del metodo delle equa-

zioni di condizione, poichè egli calcolando con le tese, e col termometro Reaumuriano, perviene ad una equazione, che adoperando le nostre denominazioni sarebbe $v = M\left(1 + \frac{t-t'}{400} - \frac{1(t-t')^2}{4(200)^2}\right) L\frac{H}{H'}$ analoga alla equazione da noi trovata (36), quando in questa si trascurino gli effetti dovuti alle ineguaglianze della gravità, e l'effetto del calore dell'aria si esprima con due termini (68), e il coefficiente M si riguardi come indeterminato. Ora se pongasi $M' = \left[1 + \frac{t-t'}{400} - \frac{1}{4}\left(\frac{t-t'}{200}\right)^2\right] L\frac{H}{H'}$; e V un'altezza misurata coi metodi trigonometrici, che ritengasi per esatta; e i un fattore di condizione, si avrà l'equazione $(1+i)MM' - V = 0$, con la quale sostituendo il valore di V si potrà determinare i. Così avendo molte altezze V misurate esattamente, si ricaveranno altrettanti valori di i, dal paragone dei quali si avranno altrettanti meno uno valori di M', tra i quali si sceglierà il medio per farne uso. E infatti *Lindenau* dalle osservazioni di *De Luc*, *Saussure*, *Schuckburgh*, *Ramond*, *Roy*, e *La Caille* ha dedotto pel valore più probabile $M' = 9441$, che è ben poco diverso da 9437, che si otterrebbe, se si riducesse in tese il coefficiente 18393 di *Ramond* col rapporto di 0,51307 : 2 per quello del metro alla tesa sotto allo stesso calore.

99. Questo metodo per determinare i coefficienti delle formole con le equazioni di condizione, ossia pigliando i medj tra quelli, che sono forniti dalle osservazioni, che è stato illustrato già da *Lambert* (*Mém. serv. à l'usage des Mathem., et de leurs applic. etc.*) e ultimamente da *Prony* (*Eaux Cour, etc. Recherches Phys. etc.*), quantunque sia indiretto, e sembri più empirico, che scientifico, è però in mancanza dei metodi diretti il solo, che generalmente valga nelle cose fisiche per dare dei risultamenti, che più si accostino all'esattezza e quindi è pure quello, a cui seguendo l'esempio di *De Luc* si sono tenuti pressochè tutti i Fisici, che

scrissero sopra questo argomento. E primamente *Schukburgh* sul risultamento medio di tredici osservazioni raccolse, che la regola di *De Luc*, verso la temperatura media di $+3,1^{oR}$ dava le altezze troppo piccole di circa un cinquantesimo; laonde la temperatura normale, in cui la semplice differenza dei logaritmi delle altezze barometriche darebbe senza correzione le altezze dei luoghi espresse da tese inglesi, dovrebbe essere di $3,4^{oR}$; ma inseguito essendo stato dalle sue osservazioni condotto a cambiare l'espressione dell'effetto del calore sull'aria trovò, che quella temperatura normale a un dipresso riducevasi al 0^{oR}; e questa risultò pure al Generale *Roy*, che seguendo il metodo stesso prese a paragonare ottantatre osservazioni barometriche fatte sopra diverse altezze dai trecento fino ai tremille, e cinquecento piedi misurate trigonometricamente in Inghilterra; e dal paragone di sei tra queste fatte agli estremi della temperatura più distanti confermò da principio il coefficiente, che aveva già stabilito per la dilatazione dell'aria; se non che confrontando le osservazioni del Capitano *Phipps* ora *Lord Mulgrave* con quelle di *Bouguer* verso l'equatore credette di potere sospettare, che non si dasse alcuna temperatura normale comune a tutte le latitudini; che il zero della scala dei coefficienti potesse cambiarsi secondo la densità particolare dell'aria nella latitudine, dove le osservazioni sono state fatte; e che in fine questa secondo l'opinione di *Bouguer* già confutata (48) fosse composta di parti specificamente meno pesanti all'equatore che ai poli.

100. Parimenti *Trembley* ginevrino Membro dell'Accademia di Berlino, che aveva assistito *Schuckburgh* nelle misure trigonometriche prese a Salevo, e sul Molo, da quindici osservazioni dedusse la temperatura normale di 12^{oR} invece dell'altra di $16\frac{3}{4}$ data da *De Luc*, in cui fosse nulla la correzione per avere in tese di Francia le altezze con la sola differenza dei logaritmi delle altezze barometriche; ma poichè quelle essendo tutte a temperature troppo vicine a quella

normale non potevano servire per la determinazione del coefficiente, che corrisponde al cambiamento, che soffre l'aria per ogni grado di cambiamento del calore, così a questo fine si valse delle ottantatre osservazioni di *Roy*, alle quali ne aggiunse due fatte da *Lacaille* al Capo di Bona Speranza; e avendole disposte in una tavola, tolte alcune poche anomalie nelle temperature le più elevate, trovò quella temperatura normale essere di $11,5^{oR}$, che è vicinissima ai 12^{oR}; e partendo da questo termine sempre pigliando il medio tra i risultamenti, che corrispondono alle temperature, che ne erano più lontane, determinò la dilatazione dell'aria di $\frac{1}{192}$ invece di $\frac{1}{215}$ stabilito da *de Luc*.

101. Ma un esempio ancora più esteso, e luminoso di quel metodo indiretto spettante a questo stesso argomento aveva già dato presso *Zach* (*Monütliche correspondens Elfter Band Junius* 1805, *pag.* 515), lo stesso *Lindenau* senza nominarsi, dove seguendo per lo più le supposizioni, e i calcoli di *Euler*, e *Oriani*, e solo riducendoli al 10^{oR} molto più comodi dell'altro usato da questo, col metodo delle equazioni di condizione paragonò più di centoventi altezze misurate trigonometricamente per determinare prima la temperatura normale, in cui la differenza dei logaritmi delle altezze barometriche dasse l'elevazione dei luoghi, e poi la correzione, che per ottenere questa elevazione dovevasi praticare a quella differenza per ogni grado, per cui il calore si allontanasse in più, o in meno da quella temperatura.

102. Questo stesso metodo, il quale sciegliendo tra le osservazioni soltanto le migliori sarà sempre utilissimo alla fisica, era pur quello, che io mi era proposto di adoperare per determinare il coefficiente M (37). Ma a che fine intraprendere un lavoro lungo, e ancora non piacevole, in cui con tanta estensione era già stato prevenuto da *Lindenau*. E poichè tanto questi col metodo indiretto, quanto *Biot*, e

Arrago (96) col metodo diretto hanno trovato i coefficienti ben poco diversi da quello di *Ramond*, il quale se non è il medio, almeno sta in mezzo tra quelli, io domanderò pure, perchè non vorranno i Fisici convenire insieme nell'addottarlo? Perciocchè è manifesta la necessità di convenire in uno stesso coefficiente a fine d'intendersi, e partire dalli stessi dati nella ricerca delle altezze, e difficilmente si troverà un altro coefficiente, che sia stato derivato da osservazioni migliori, o che abbia per sè maggiori autorità.

103. E ritenendo il primo coefficiente numerico della formola di *La Place*, converrà pure ritenere i coefficienti degli altrui fattori, i quali sono stati stabiliti in seguito a quel primo appunto perchè quella fornisse le altezze cercate, che più si accostassero alle osservate. Così io, che (37) proposto mi era di fare qualche cambiamento nella formola di *La Place*, dopo l'esame più attento mi sono ridotto a conoscere, che conveniva ritenerla come la migliore. Nè è già, che mi fosse riuscito difficile l'introdurvi qualche cambiamento, perchè bastava per questo pigliare il medio tra i coefficienti di *La Place*, di *Lindenau*, e di *Biot*, e *Arrago*; ma la differenza non sarebbe risultata mai tanto grande, che importasse tenerne conto; poichè d'uopo è sempre ricordarsi, che questo metodo di ricavare le altezze dei luoghi per mezzo del barometro non è che un metodo di approssimazione, la di cui esattezza non può oltrepassare un certo limite, poichè primamente con quello si argomenta da un dato piccolo, che è l'altezza barometrica, ad una cosa grande cercata, che è l'altezza dei luoghi, e questo si fa per mezzo del barometro, che è una bilancia, sopra un di cui braccio pesa il mercurio, e sopra l'altro pesa l'aria, ma è una bilancia molto inesatta, ed infedele, perchè il mercurio oltre all'adesione, che ha col vetro, vi soffre un notabile sfregamento, onde si vede dopo poche oscillazioni arrestarsi; e perchè il barometro non può mostrare all'osservatore i cambiamenti locali, che accadono nello strato d'aria, che si pesa. E questo io

dico solamente per istabilire il giusto valore del metodo di livellare col barometro, e non già per deprimerlo ancora di sotto ai metodi trigonometrici, poichè ancora con questi per ragione degli errori degli stromenti, e della incertezza delle rifrazioni non si può aspettare una esattezza maggiore che con quello.

104. La formola adunque per ottenere il valore di v (32) sarà $v = 18336^{met.}\,(1 + 0,0028371\,.\cos.\,2\psi)\left(1+2\,.\,\frac{t+t'}{1000}\right)\times$ $\left[\left(1+\frac{v}{a}\right)\mathrm{L}\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}'}+\frac{v}{a}\,.\,0,868589\right]$, nel quale è $\mathrm{H}=h$, $\mathrm{H}'=h'+h'\,.\,\frac{v-v'}{5412}$; $a = 6366198^{met.}$; la gravità è riportata non all'equatore, ma al paralello medio di 45°; e nel secondo membro si dovrà a v sostituire il suo valore, che risulta supponendo $v = 0$ nello stesso secondo membro. E prescindendo dai coefficienti relativi alle ineguaglianze della gravità tre cose in quel valore meritano particolare attenzione, e sono il coefficiente metrico, la temperatura normale, in cui l'altezza cercata dei luoghi risulta senz'altro dal prodotto di quel coefficiente nella differenza dei logaritmi delle altezze barometriche osservate al piede, e alla cima dell'altezza cercata; e finalmente i coefficienti, che esprimono le variazioni, che subir debbono i volumi dell'aria, e del mercurio per ogni grado di cambiamento, che segua sopra, o sotto alla temperatura normale. Dai num. 99, e 100 è manifesto, che prima di *Ramond*, e *La Place* lo studio dei Fisici era rivolto a determinare tanto la temperatura normale, quanto questi coefficienti, poichè per quel coefficiente primo volevasi ad esempio di *Bouguer* ritenere un numero della serie decupla, affinchè fosse ancora un coefficiente virgolare, la di cui moltiplicazione nella differenza dei logaritmi delle altezze barometriche si potesse sempre eseguire col solo trasporto della virgola, che in questa differenza distingue i decimali, onde nel calcolare nasce grande facilità.

105. Ma questa non fu molto valutata da *Ramond*, e *La Place*, ai quali parve migliore vantaggio il fissare per temperatura normale il 0^{oR}, laonde rivolgere dovettero lo studio loro a modificare convenientemente tanto quel primo coefficiente metrico, quanto gli altri due coefficienti di correzione. E si avverta, che la ragione di questo fu quella precisamente di tenere il 0^{oR} per temperatura normale, e non già quella di far uso delle misure del nuovo sistema metrico, come sembra indicare l'Estensore tante volte citato degli articoli della Biblioteca britannica; poichè ancora a *Lindenau* quel coefficiente non risultò virgolare, sebbene siasi servito delle antiche misure francesi di piedi, e tese, perchè egli pure ha fissato la temperatura normale ad arbitrio a 0^{oR}.

106. Per diminuire la difficoltà, che si aveva nel ridurre a numero l'espressione analitica di v (104), che tolto il coefficiente virgolare era divenuta ancora maggiore, un primo ripiego preso fu quello di perdere una parte dell'esattezza, e tralasciando alcuni termini dei più piccoli cambiare quella espressione in una di approssimazione; così *Prony* (*Bibliot. britan. scienc. et arts, vol.* 43, e *Voyage d'Humboldt quatr. part., Vol. I*) avendo posto $k = 18336$; $\psi' = 0,002845 \times \cos. 2\psi$; $\delta = 2 . \frac{t+t'}{1000}$; $L \frac{H}{H'} = \lambda$; $P' = \frac{\lambda + 0,868589}{6366198}$; $vP' = P$; trascurando i termini troppo piccoli per dare un considerabile errore, che sono $k(\delta\lambda\psi' + \psi' P + \delta P + \delta\psi' P)$ ha trovato $v = k\lambda(1 + \delta + \psi' + kP)$, che per mezzo dei logaritmi si calcola facilmente, e ha il vantaggio di presentare lo svolgimento di ciascun termine di correzione separatamente.

107. Similmente *Ramond* (*Jour. de Physique* 1810) riduce il calcolo della formola esprimente le altezze alle tre seguenti

$$Lh - [Lh' + L(5412 + v - v') - L\,5412] = a;$$

$$La + L\frac{1000 + 2(t+t')}{1000} + L\varphi = Lv,$$ che è il logaritmo della differenza cercata di due altezze.

$L\varphi$

$L\varphi = L\ 18393 \pm L\ \frac{362,4}{351,4 - 2.\text{sen.}^2 \text{ della altezza del polo}}$, dove il segno +, o — serve per le latitudini minori, o maggiori di 45°; ma *Oltmanns* (*Voy. d' Humboldt quatr. part., vol.* 1, e *Ephem. de Berlin* 1809) ha cercato di ridurre queste formole a maggiore semplicità pei casi, dove una osservazione barometrica sia fatta al livello del mare, o non molto sopra; poichè egli avverte, che si può supporre

$a = Lh - Lh' - L\left(1 + \frac{v - v'}{5412}\right)$, o piuttosto

$a = Lh - L\left(1 + \frac{v - v'}{5412}\right) - Lh'$; e poichè posta s la sottangente del sistema è $L\left(1 + \frac{v - v'}{5412}\right) = \frac{v - v'}{5412} . s$, si avrà

$a = Lh - \left(\frac{v - v'}{5412}\right) s - Lh'$. Ma se sia h l'altezza presa verso il livello del mare si potrà tenerla per costante, e perciò ancora cercare la variazione del numero invece di quella del logaritmo; dunque si avrà

$Lh - \left(\frac{v - v'}{5412}\right) s - Lh' = L\left[h - \left(\frac{v - v'}{5412}\right)\right] las - Lh' =$

$L\left[h - \frac{h}{5412} . (v - v')\right] - Lh' = a$; poichè $l . as$, che è il logaritmo della base a moltiplicata per la sottangente del sistema è $= 1$; ma presa $h = 337^{li},8$ si ha prossimamente $\frac{h}{5412} = \frac{1}{16} = 0,0642$; dunque pel caso enunciato la formola di *Ramond* sarà $L\left[h - \left(\frac{v - v'}{16}\right)\right] - Lh' = a$;

e $La + L\varphi + L\left(\frac{1000 + 2(t + t')}{1000}\right) = Lv$.

108. Un altro ripiego usato per diminuire la difficoltà del conteggio è stato quello di preparare delle tavole, nelle quali alcuni conti si trovassero già fatti; poichè come in altre parti delle matematiche alcuni calcolatori tolleranti della

fatica hanno con una modestia, e una perseveranza egualmente degna di elogio consecrata una parte della loro vita a lavori oscuri, che avevano l'unico oggetto di procurare ai loro contemporanei, e alle future generazioni l'avvantaggio di scorrere di un passo più rapido, e sicuro la strada delle scoperte, così è ancora accaduto per riguardo alle livellazioni, che si fanno col barometro, a rendere meno lungo, e incomodo il calcolo delle quali primamente pubblicarono alcune tavole *Horsley* (*l. c.* 51), e *Schuckburgh*, le quali non furono mai molto adoperate. In seguito lo stesso fecero *Wünschl* (*Nachtrag zu barometer messungen*), e *Biot* prima nella sua Astronomia fisica (Vol. II), e poi in un opuscolo separato (*Tables barometriques portatives*) e *Pictet* (*Bibl. britan. Vol.* 45). Ma sopra tutti in questo lavoro si distinsero *Oltmanns* (*l. c.* 107 *Voyage etc.* e ancora separatamente sotto il titolo di *Tables hypsometriques etc.*) e *Lindenau* (*l. c.* 101), e separatamente sotto il titolo di *Tables barometriques etc.*) i quali spettano ambedue a quella Nazione illustre per tanti riguardi che ha dato *Keplero*, *Speidellie*, *Ursinio* rinomati tra i primi Editori delle grandi tavole dei logaritmi, e ancora a nostri giorni *Mayer*, e *Bürg* celebri per la estensione, e miglioramento, che hanno arrecato alle tavole lunari.

109. Lasciando stare le tavole di *Biot*, che sono state costruite soltanto per calcolare le elevazioni medie, e per queste ancora si trovano in qualche caso mancanti, pare, che *Oltmanns* siasi determinato a comporre le sue tavole hypsometriche, perchè non gli parvero al bisogno sufficienti le tre, che *Lindenau* senza porvi il suo nome aveva pubblicate nel Giornale di *Zach*, le quali sebbene corrispondano alla formola, per cui furono costruite, pure nell'applicazione richiedono delle interpolazioni molto lunghe, e poi non sono che un ristretto di altre tavole più considerabili, che l'Autore stesso ha ivi enunciate, ma non pubblicate fino al 1809, cioè quattro anni dopo, quando *Oltmanns* aveva già compite, e pubblicate le sue. Si può dunque credere, che questi sareb-

besi risparmiata così grande fatica, se avesse vedute le tavole di *Lindenau*; e veramente queste non lasciano cosa veruna a desiderare per l'uso, a cui sono destinate; poichè sebbene suppongono esse le antiche misure francesi, che in Germania erano più conosciute, e il termometro ottantigrado, pure vi ha aggiunte alcune tavole ausiliari per ridurre quelle prime al sistema metrico, e al termometro centigrado, e ancora alle misure inglesi, e al termometro di *Fahrenheith*; e in fine ha posta ancora una tavola di fattori, con cui le grandezze trovate con le di lui tavole, e con la sua formola si possono ridurre a quelli, che si troverebbero, se si usassero le formole di *La Place*, *Ramond*, *Trembley*, *De Luc*, *Roy*, e *Schuckburg*.

110. Ma senza volere togliere in qualunque piccola parte il merito di *Oltmanns*, e massime di *Lindenau* siami permesso di aggiugnere, che ambedue nella introduzione premessa alle loro tavole fanno l'ingenua confessione di averle composte per supplire alle tavole logaritmiche, onde potessero senza di queste eseguire le livellazioni barometriche quegli osservatori, che non le hanno, o che non credono di doversene caricare massime nei lunghi viaggi. Ma in verità chi è, che si occupi della ricerca delle altezze col barometro, che, non possegga le tavole logaritmiche, o non sappia al bisogno servirsene. E paragonando per es. le tavole logaritmiche stereotipe con le opere d'*Oltmanns*, e di *Lindenau* chi potrebbe non trovare per la spesa, e ancora pel trasporto più comode quelle, che queste massimamente se si aggiunga, che queste servir possono al solo calcolo delle altezze, e quelle giovano ad ogni altro uso di conteggio. Quindi io dubito, che le tavole d'*Oltmanns*, e di *Lindenau* possano mai rendersi comuni, e servire all'uso dei Fisici, i quali sicuramente debbono essere più obbligati a *d'Aubuisson*, a cui spetta una tavola pubblicata da *La Metherie* (*Journ. de Physique etc. Fevrier* 1811), e dall'Estensore della Biblioteca britannica (*Scienc., et arts, Vol.* 46), che per errore l'attribuisce ad *Oltmanns*, la quale è tanto breve, che ciascun osservatore

potrebbe portarla attaccata al suo barometro, e serve alle livellazioni barometriche con una meravigliosa facilità. Questa è la seguente

Barom.	Altezza	Differ.
Cent.	*Metr.*	*Metr.*
77	0	103
76	104	104
75	210	106
74	317	107
73	425	108
72	535	110
71	647	112
70	760	113
69	875	115
68	992	117
67	1110	118
66	1230	120
65	1352	122
64	1476	124
63	1601	125
62	1728	127
61	1858	130
60	1990	132
59	2124	134
58	2261	137
57	2400	139
56	2541	141
55	2685	144
54	2831	146
53	2980	149
52	3132	152
51	3287	155
50	3445	158
49	3607	162
48	3772	165
47	3940	168
46	4112	172
45	4287	176
44	4466	179
43	4650	184
42	4838	188
41	5031	193
40	5228	197
39	5430	202
38	5638	208
37	5851	213
36	6070	219

111. Per mostrare l'uso di questa formola io l'applicherò all'esempio recato dagli Autori citati, in cui suppongo $h = 75,28$ centimetri, $h' = 59,10$; $t = 20°,4$ del termometro centigrado, $t' = 6°,2$; $v = 19°,6$; $v' = 5°,2$; e $\psi = 41°$; nella colonna di mezzo delle altezze si prenda il numero corrispondente a 75 parte intiera della altezza h del barometro inferiore che è 210, e da questo sottraggasi il prodotto della frazione 0,28 di h' per la differenza 106, che nella colonna delle differenze corrisponde alla parte intiera, cioè da 210 sottraggasi 30, e si avrà 180. Similmente per l'altra altezza h' del barometro superiore si prenderà l'altezza 2124, che corrisponde a 59 centimetri parte di lei intiera, e sottrarrassi da questa il prodotto della sua frazione 0,10 per la differenza corrispondente 134, che è 13, e si avrà 2111. La differenza dei due numeri 2111, e 180 trovati, cioè 1931 sarebbe l'altezza v cercata, se la temperatura fosse dapertutto al gelo, che è il 0 del termometro centigrado (se però fosse $h = 77 + x$ centimetri al numero trovato per h' si dovrà aggiugnere 103, x per avere v nell'esposto stato della temperatura).

112. La correzione pel diverso calore del mercurio nel barometro si avrà per mezzo della formola $v \mp \frac{3}{2}(v - v')$ pigliando il segno —, o + secondo che v' sara $<$, o $>$ di v; onde nell'esposto caso l'altezza cercata sarebbe $1931 - 14,4 - 7,2 = 1931 - 21,6 = 1909,4$.

113. E se l'altezza così corretta pel calore del mercurio si chiami v', si avrà l'altezza medesima corretta pel diverso calore dell'aria per mezzo della formola $v'\left(1 + 2 \cdot \frac{t \pm t'}{1000}\right)$ pigliando il segno +, o — secondo che ambedue i gradi t, e t' saranno di sopra, o uno sarà di sotto al zero; onde nell'esposto esempio l'altezza cercata sarebbe $1909,4\left(1 + 2 \cdot \frac{26,6}{1000}\right)$ $= 1909,4(1 + 0,0532) = 1909,4 + 101,580 = 2010,980$. Ma nei casi ordinarj nella espressione di $\frac{t+t'}{1000}$ si potranno

pigliare le cifre decimali ancora in numero minore di quattro.

114. Se questa altezza così corretta si chiami v'', essendo la premessa tavola costruita per la latitudine di 45°, si avrà la correzione dipendente dalla diversa latitudine per mezzo della formola $v''(1 \pm 45 \mp \psi)$ pigliando i segni superiori, o gli inferiori, secondo che è $45 > o < \psi$; laonde nell' esposto caso l'altezza cercata sarebbe $2010,980\left(1+\frac{4}{10000}\right)$ $= 2010,980 . 1,0004 = 2011,784$. Nella zona torrida si accresceranno le altezze di 2 ½ millesimi, e si diminuiranno d'altrettanto nelle glaciali.

115. Se il barometro avesse la scala di ottone, per correggere l'effetto della sua dilatazione converrebbe diminuire di un decimo i gradi di calore v, e v' dei termometri fisici; quindi nel proposto esempio i loro valori sarebbero 17,6, e 4,7, onde l'altezza risulterebbe 2014,1 invece di 2011,784.

116. La premessa tavola è calcolata sulle formole di *d'Aubuisson*, le quali sono $v' = 18365(1 + 0,00284 . \cos. 2\psi) \times [1 + 0,002(t + t')]\left[Lh - Lh'\left(1 - 1\left(\frac{v-v'}{5412}\right)\right)\right]$; e $v = v'\left(1 + 2\frac{a+v'}{r}\right)$; nelle quali a è l'altezza della stazione inferiore sopra il livello del mare, e r il raggio terrestre. E se l'altezza dell'esempio arrecato si ricercasse con queste formole, si troverebbe 2011,9 metri ben poco diversa da quella, che si è ritrovata di sopra. Similmente per la più alta delle montagne, che è il Chimboraço, pigliando le osservazioni di *Humboldt*, che danno $h = 0,76200$; $h' = 0,37717$; $v = 25°,3$; $v' = 10°,0$; $t = 25°,3$; $t' = -1°,6$; $\psi = 1°45'$ si avrebbero 5857 metri tanto per la formola, quanto per la tavola; e facendo ancora la correzione dipendente dalla latitudine la prima darebbe metri 5873, e l'altra 5872.

117. Veramente le premesse formole, per le quali è fatta la tavola di *d'Aubuisson* differiscono da quella di *La Place* (36).

Ma non è difficile dal valore ritrovato per quelle ricavare l'altro, che da questa può risultare, poichè se questo si chiami v, e quello V si avrà lasciando i fattori comuni alle due formole $v : V :: 18336 : 18365$ a un dipresso, poichè i fattori diversi sono troppo piccoli, perchè possano produrre una differenza notabile. Quando adunque sia ritrovata V, si potrà senza temere alcun sensibile errore porre $v = V \cdot 1,00005$.

118. Ma noi non siamo forse lontani da un grande cambiamento in queste ricerche. Egli è ben noto, che *Mariotte* dopo di avere scoperta la legge, secondo cui l'aria si condensa in proporzione dei pesi comprimenti, volendo applicarla al ritrovamento delle altezze dei luoghi, e di quella singolarmente di tutta l'atmosfera, immaginò questa divisa in 4032 strati quanti sono i dodicesimi di linea in pollici 28, ciascuno dei quali a base eguale pesasse tanto quanto un dodicesimo di linea in altezza di mercurio, e avesse costante la densità, la quale però salendo andasse scemando nella ragione, in cui scemava il peso sovraincombente. Ora conoscendo la proporzione tra i pesi specifici dell'aria, e del mercurio sotto all'altezza barometrica di pollici 28 era ben facile di derivarne l'altezza del primo strato, che per riguardo ad un dodicesimo di linea doveva essere come il peso del mercurio a quello dell'aria; e ricavata avendo l'altezza di questo strato conobbe *Mariotte*, che per mezzo dei logaritmi si poteva senza grande difficoltà calcolare l'altezza degli altri strati separatamente, la somma dei quali data avrebbe l'altezza dei luoghi, quando fosse data la differenza dell'altezza barometrica ridotta a dodicesimi di linea, che corrispondeva a questi luoghi. Ma volendo pure risparmiare ancora la difficoltà di questo calcolo logaritmico, si prese egli stesso la fatica di comporre una tavola, in cui già si trovano calcolate le altezze degli strati atmosferici, che corrispondono al peso dei dodicesimi di linea in altezza di mercurio, e così diede egli il primo esempio di tavole preparate per comodo degli osservatori, che vogliono dalle altezze del barometro argomentare le altezze dei luoghi.

119. Questo, che si può chiamare metodo a strati, cadde prestamente in discredito, perchè messo alle prove dava le altezze di alcuni monti troppo diverse dalle misure trigonometriche, e fu poi del tutto abbandonato dai Fisici, i quali assai prestamente rimasero invaghiti del metodo Hallejano. E infatti geometricamente parlando sono in questo metodo maravigliose l'eleganza, e l'evidenza. Ma d'altra parte la facilità quanto è maggiore in quel primo, il quale non richiede calcolo sublime in verun modo, nè conduce ad alcuna formola un poco complicata? E lo stesso metodo Hallejano non è poi esattissimo, perchè si potrebbe ottenerne dei risultamenti ancora più precisi, se si adoperassero i logaritmi per es. a dieci decimali invece di quelli a sette. Finalmente gli errori risultanti dal metodo di *Mariotte* non erano tanto prodotti da questo, quanto dall'uso, che egli ne fece, poichè in primo luogo si servì di una proporzione tra i pesi specifici del mercurio, e dell'aria, che non era esatta bastantemente; appresso avendo trovato con *Picard*, e *Cassini*, che all'osservatorio di Parigi conveniva alzarsi per 63 piedi, perchè il barometro, che era a pollici 28 si abbassasse di una linea, per comodo del calcolo argomentò, che al livello del mare per vedere questo abbassamento avesse dovuto convenire alzarsi per piedi 60. Finalmente ancora per scemare la difficoltà, e lunghezza delle operazioni egli calcolò le altezze di quei strati come se fossero tanti termini di una serie aritmetica del second'ordine, quando in realtà quelle spettano ad una serie di un ordine superiore, o piuttosto ad una serie armonica.

120. Ora *Benzenberg* ha procurato di rimettere in onore quel metodo a strati, poichè primamente in un opuscolo (*Beschreibung eines einfachen Reisebarometer. Nebst einer Anleitung zur leichtern Berechnung der Berghöhen etc.*) dopo di averlo esposto con molto dettaglio ha fatto stampare una tavola che presenta le altezze delli strati corrispondenti ciascuno a base eguale al peso di una colonna di mercurio al-

ta

ta $\frac{1^{mo}}{100}$ di un pollice dalla pressione barometrica di pollici 29 fino ai 23 partendo dalla supposizione, che il mercurio sotto ai pollici 29 pesi 10494 volte più dell'aria, onde il primo strato riesce alto 8,746 di piede. Appresso egli ne fece l'applicazione a diverse montagne, e mostrò, che l'errore non arrivava che a pochi piedi, e singolarmente nel *Montblanc* la differenza tra la misura trovata con questo metodo, e l'altra derivata dalle operazioni geodetiche non oltrepassava i piedi 52, laddove giugneva fino ai piedi 155 con la stessa formola di *Trembley*, che la dava minore di tutte le altre. Una gran parte di queste cose egli ha replicate nel Giornale di *Gilbert* (*Annalen der Physik Jahrgang* 1810. *Zehntes stück*), dove egli avverte, che basterebbe duplicare il numero degli strati, nei quali s'intende divisa l'atmosfera, riducendoli per esempio al peso di $\frac{1}{200}$ di pollice di mercurio, perchè l'errore si ridurrebbe anch'esso alla metà, e il metodo si accosterebbe ancora di più all'esattezza. Nè è da temere, che la formazione, o l'uso di una somigliante tavola debba importare lunga fatica; poichè quella di *Benzenberg* non gli costò che il travaglio di due giorni, e riempie soli due foglj, e se ne compie l'uso con una sottrazione, e una moltiplicazione soltanto. Ma per ora basti il cenno dato del metodo degli strati; poichè forse in altra occasione io farò parte all' Italia del lavoro, che *Benzenberg* ha dato alla Germania, non senza qualche accrescimento.

121. Niuno deve meravigliarsi di vedere l'impegno di tanti illustri Fisici de' nostri giorni non solo per rendere facili i calcoli richiesti alla derivazione delle altezze dalle osservazioni barometriche, ma ancora per ridurre il metodo stesso quasi alla portata del popolo. Una volta si cercavano con questo le sole altezze delle montagne, che pareva un oggetto di mera curiosità; ora si vorrebbero livellare tutte le ineguaglianze della terrestre superficie per fissarne la posizio-

ne per riguardo al livello del mare. E veramente egli è noto, che per conoscere la posizione di un qualunque luogo abbisognano tre coordinate, delle quali due sono date dalla geografia astronomica, che ne mostra la latitudine, e la longitudine, ossia la posizione sulla superficie della terra, per cui si può pigliare quella del mare; ma a compimento della geografia fisica manca ancora una terza coordinata, che deve essere a quelle due perpendicolare, e che perciò segnar deve per ciascun luogo l'elevazione, o la depressione per riguardo a quella superficie. E chi non vede, che la cognizione di questa coordinata non meno che quella delle altre due è necessaria, e deve contribuire alla cognizione della economia tutta della vegetazione, e della vita animale, e della stessa costituzione morale dell'uomo? Ma noi siamo ancora ben lontani dall'avere le osservazioni, che farebbono di bisogno alla determinazione di quella coordinata, se non per tutte, almeno per le principali ineguaglianze terrestri; poichè dopo i lavori di *Condamine*, *Bouguer*, *Humboldt*, *Boupland*, e *Caldus* non abbiamo in tutta l'America che cinquecento punti circa, dei quali si conosca la posizione per riguardo a quel livello; e sicuramente un numero maggiore per l'Europa ne fissarono *De Luc*, *Saussure*, *Pictet*, *Schuckburgh*, *Roy*, *Weiss*, e *Tralles* nella Svizzera, lo stesso *Schuckburgh*, *Venini*, *Pini*, e *Oriani* nell'Italia, *Gersdorf*, e *David* nella catena dei monti tra la Boemia, e la Sassonia, *Vidal*, *Reboul*, *Mechain*, e *Ramond* ne' Pirenei, *Vierthaller*, *Schultess*, *Moll*, e gli Arciduchi d'Austria *Giovanni*, e *Ranieri* in molte parti della Monarchia Austriaca, e massime del Tirolo, e *Villefosse* nell'Harz; e finalmente *Humboldt* (*Voyage etc. quattr. part. etc. Astronomie etc.*) pensa, che ancora in Asia siano conosciuti circa cinquanta punti. Ma nell'Europa stessa non abbiamo ancora la livellazione di alcuno dei grandi fiumi, o di alcuna delle grandi strade, prescindendo da quella, che pel Brenner conduce da Monaco a Trento, e che *Buch* ha percorsa sempre col barometro alla mano.

122. Ora le osservazioni richieste per la determinazione di quella terza coordinata non si possono aspettare che dall' uso del barometro, perciocchè quello degli stromenti geodetici è molto difficile, e costoso, e forse pei difetti, che questi portano seco dalla prima costruzione, o contraggono nei trasporti, e massime per la incertezza delle rifrazioni non dà risultamenti migliori; laonde le misure trigonometriche del Montblanc prese da *Pictet*, e *Schuckburgh* differiscono tra loro fino a 114 piedi, che sono $\frac{1}{119}$ del totale, e all' opposto *Benzenberg* (119) col suo metodo vi trovò la differenza sola di piedi 52, che non sono che $\frac{1}{250}$ del totale. È adunque chiara la ragione dell' impegno, per cui si vorrebbe moltiplicare, quanto si può, le osservazioni barometriche, e rendere popolare il metodo di servirsene per le livellazioni liberandolo non solo dalla necessità del calcolo sublime, ma ancora da ogni formola algebraica. Ad ottenere però l' intendimento proposto forse gioveranno le seguenti riflessioni.

123. E primamente come nelle due coordinate della latitudine, e della longitudine, così nella terza, che si potrebbe chiamare di livello, alcuni piedi di errore non si debbono curare, perchè in realtà non si potrà mai assicurare, che vi siano; e quando bene ciò si potesse, quell' errore non potrà mai influire notabilmente sulle conseguenze, che da quella si vogliono derivare; quindi debbono sembrare inutili gli sforzi, che ancora fare si potessero per indurre qualche cambiamento nelle formole, poichè la diligenza dei Fisici le ha oramai ridotte al segno, che col cambiarle si otterrebbe soltanto la differenza di pochi piedi. Al contrario fa d' uopo, che i Fisici convengano insieme, affinchè i valori di quella terza coordinata ancora spettanti a diversi luoghi si possano tra loro paragonare; il che richiede pure l' accordo di tutti tanto nel metodo di osservare, quanto nella formola per calcolare; poichè pare, che con ragione *Benzenberg* abbia escluse le li-

vellazioni dell'Harz date da *Villefosse* (*Gilbert. Annalen etc. Jahrgang* 1810 *eilftes stück*) appunto per la correzione particolare, che ha introdotta nelle sue osservazioni, e nella formola di *de Luc* dipendente dalla costituzione stessa del suo barometro.

124. Ora per quanto spetta alla formola da usarsi, io sono sempre nella opinione di pigliare quella di *La Place*, e alle ragioni addotte altrove aggiungo pure gli esempj d'*Humboldt*, e *Oltmanns*, che con quella hanno calcolata l'altezza di poco meno di cinquecento punti nell'America. Per riguardo poi al metodo di osservare converrebbe, che tutti si valessero di barometri costruiti all'istesso modo, e che stati fossero insieme paragonati, perciocchè sebbene non sia da concedere a *Villefosse* (*Annales de Physique etc.* 1808), che ogni barometro sia individuo, e presenti differenze notabili da qualunque altro, che possono influire sulle conseguenze, che si vogliono dedurre dalle sue osservazioni, è però vero, che questo succede in alcuni, e che per escludere ogni pericolo d'inganno converrebbe, che gli Artisti avessero almeno un campione, con cui potessero paragonare i barometri, che mettono in commercio. Pareva, che a conseguire questa corrispondenza di osservazioni mirasse l'Accademia di Manheim, quando insieme ad altri stromenti meteorologici mandò in diversi luoghi ancora il barometro; e se questa liberalità avesse potuto durare più lungamente, e quelli, che ricevettero gli stromenti, ne avessero tutti fatto il conveniente uso, e pubblicate le loro osservazioni, sicuramente molto ne avrebbe approfittato la meteorologia, e massime il metodo di livellare col barometro. Ma senza cercare una condizione, che non si può ottenere, io penso, che poichè l'arte di costruire i barometri è ridotta ad un grado, che non vi si possono temere sostanziali differenze, il desiderio di avere una quasi generale livellazione della superficie più colta della terra si potrà soddisfare in gran parte, se più, che si potrà, ancora con le liberalità dei Governi si moltipliche-

ranno i barometri, e i termometri, e ciascuno sarà sollecito di pubblicare le sue osservazioni, onde si possa da molte ricavare la media, che debba poi servire all'uso.

125. E veramente *Ramond* in una Memoria letta all'Istituto di Parigi riportata per estratto nella Biblioteca Britannica (*Scien., et Arts T.* 44) ha mostrato, che le migliori osservazioni barometriche per le livellazioni sono le simultanee vicine, nelle quali al tempo stesso osservansi due barometri a poca distanza uno dall'altro nel senso orizzontale, poichè la differenza tra i risultamenti, che si ricavano da queste, e dalle livellazioni geodetiche più esatte, sono come insensibili, e si trovano indifferentemente in più, e in meno. Ma non sono di molto inferiori le osservazioni simultanee quantunque lontane, che si fanno al tempo stesso sopra due barometri distanti orizzontalmente uno dall'altro dalle sei fino ancora alle ottanta leghe, purchè quelle non siano isolate, ma le medie tra molte fatte alla medesima ora, e massime al mezzodì in circostanze di stagioni, di temperature, di venti, di umidità ec. molto diverse; poichè sebbene le variazioni atmosferiche non seguano al tempo stesso nelle due stazioni, come adoperando quelle osservazioni si suppone, ad ogni modo, quando queste si replicano, quelle si compensano, e si riducono ad un equilibrio medio, a cui si riporta l'osservazione media, la quale dà delle conseguenze tanto vicine all'esattezza geometrica, quanto le osservazioni simultanee vicine. Nè però le simultanee lontane quantunque isolate si dovranno trascurare, perchè le variazioni atmosferiche negli intervalli di circa sei leghe non interrotti da montagne seguono al tempo stesso, e nelle distanze ancora maggiori, come tra Parigi, Londra, e Marsiglia, si propagano con una celerità meravigliosa, che non si può colla celerità dei venti spiegare.

126. Finalmente ancora di grande profitto potranno essere le osservazioni isolate paragonandole con quella, che si avrebbe al livello del mare, ovvero con altre pure isolate

fatte successivamente. E nel primo caso converrà tener conto delle variazioni, alle quali l'altezza barometrica al livello del mare è soggetta (90), e della differenza del calore, che si avrà tra questa stazione, e l'altra dell'osservazione dando nell'estate un grado Reaumuriano meno di calore per ogni cento tese circa d'innalzamento (62...); e così in questo, come nell'altro caso converrà sciegliere quelle osservazioni, sulle quali ossia per la piccola differenza del tempo, ossia per la qualità del clima, o della stagione si potrà argomentare, che le variazioni dell'atmosfera abbiano avuta la minima influenza; quindi al proposto fine sogliono le osservazioni pigliarsi ogni due ore al più, e nei giorni più costantemente sereni d'estate; e con questo metodo non solo *Humboldt* per lo più nella zona torrida, dove le variazioni atmosferiche sono quasi nulle, ha potuto livellare quattrocento cinquantatre punti in America sopra una estensione di ottocento venticinque leghe dal Nord al Sud, e settecento dall' Est all'Ovest, e compiere il progetto gigantesco di presentare il taglio verticale del Messico dal mare Atlantico al Pacifico, ma ancora in Europa *De Luc, Saussure, Schukburgh, Pictet, Buch, Pini, Oriani, Venini,* ed altri han potuto determinare le altezze di qualche migliajo di punti molto importanti, che serviranno a formare un fondo ben ampio per la Geografia fisica.

127. Le ricerche delle altezze dei luoghi sono divenute più interessanti, dacchè *Humboldt* richiamando un problema già esposto da *Varennio* (*Geogr. gener. cap. IV, e IX*) ha pensato di valersi delle altezze dei monti come di basi per determinare le distanze orizzontali, che hanno tra sè, o con altri luoghi; e mostrandone l'uso, e il vantaggio coll'unire la Capitale del Messico colla Veracrux sopra una distanza di 160000 tese ha indicato un facile metodo per la costruzione delle carte geografiche. Della soluzione di questo problema oltre ad *Humboldt*, e *Oltmanns* nelle opere già citate, e *De Lambre* nella Memoria sopra la misura dell'arco del me-

ridiano si è occupato *Lindenau* (*Tabl. barom., pag. XLVIII*), il quale cita la corrispondenza di *Zach* (*Vol. XIV*), e procede in questi termini. Sia k la distanza orizzontale di due monti, o di un monte da un certo luogo della superficie terrestre da cui si possa vedere la di lui sommità; sia poi δ la distanza apparente di uno dal zenit dell'altro; e sia C l'angolo, che comprendono al centro della terra i raggi corrispondenti ai due monti, o ad un monte, e al luogo sovraindicato; pongasi poi n la ragione della rifrazione a C, onde la distanza vera della sommità di uno dal zenit dell'altro sia $\delta + n\mathrm{C}$; e finalmente sia N l'altezza relativa dei due monti, o di un monte sopra il luogo, da cui è stato riguardato; si avrà, dice *Lindenau*, l'equazione $\mathrm{N} \cdot \cos.\frac{\mathrm{C}}{2} = k \cdot \cot.\left(\delta - \frac{\mathrm{C}}{2} + n\mathrm{C}\right)$, e poichè C si può sempre pigliare tanto piccolo, che sia $\cos.\frac{\mathrm{C}}{2} = 1$, si avrà $\mathrm{N} = k \cdot \cot.\left(\delta - \frac{\mathrm{C}}{2} + n\mathrm{C}\right)$.

128. Da queste espressioni di *Lindenau* mi parve, che si potesse argomentare quella prima equazione essere generale, ed esatta, e la seconda particolare, e limitata al caso di $\cos.\frac{\mathrm{C}}{2} = 1$. Se così è, confesso, che a me non è mai riuscito di dimostrare la prima; anzi condotta avendo la corda dell'arco corrispondente alla distanza k, mi parve, che gli angoli formati dalla visuale con questa corda, e con l'altezza del monte dovessero essere espressi da $90° - \delta - n\mathrm{C} + \frac{\mathrm{C}}{2}$, e da $\delta + n\mathrm{C} - \mathrm{C}$; e gli angoli formati da quell'altezza con la corda stessa, e con la tangente, che eguaglia la distanza orizzontale, dovessero essere espressi da $90° + \frac{\mathrm{C}}{2}$, e da $90° - \mathrm{C}$; laonde dal triangolo formato dalle prime tre rette si ricaverebbe, che quella corda sta ad N come $\text{sen.}\,\delta + n\mathrm{C} - \mathrm{C} : \text{sen.}\,90° - \delta - n\mathrm{C} + \frac{\mathrm{C}}{2}$, come $\text{sen.}\,\delta + n\mathrm{C} - \mathrm{C} : \cos.\delta + n\mathrm{C} - \frac{\mathrm{C}}{2}$;

e del triangolo formato con queste altre tre rette seguirebbe, che quella corda sta alla distanza orizzontale k come sen. $90° + \frac{C}{2}$: sen. $90° - C$, come cos. C : cos. $\frac{C}{2}$; e perciò l'equazione generale, ed esatta sarebbe

$$N \,.\, \text{sen.}(\delta + nC - C) \,.\, \text{cos.}\frac{C}{2} = k \,.\, \text{cos.}\left(\delta + nC - \frac{C}{2}\right) \text{cos. C};$$

ossia

$$N \,.\, \text{cos.}\frac{C}{2}\left[\text{sen.}\left(\delta + nC - \frac{C}{2}\right)\right] \,.\, \text{cos.}\frac{C}{2} - \text{cos.}\left(\delta + nC - \frac{C}{2}\right) \times \text{sen.}\frac{C}{2} = k \,.\, \text{cos.}\left(\delta + nC - \frac{C}{2}\right)\left(\text{cos.}^2\frac{C}{2} - \text{sen.}^2\frac{C}{2}\right),$$

da cui pel caso di $\frac{C}{2}$ piccolissimo ponendo cos. $\frac{C}{2} = 1$, e sen. $\frac{C}{2} = 0$ si ricava $N \,.\, \text{sen.}\left(\delta + nC - \frac{C}{2}\right) = k \,.\, \text{cos.}\left(\delta + nC - \frac{C}{2}\right)$, ossia $N = K \,.\, \text{cotang.}\left(\delta + nC - \frac{C}{2}\right)$, che è la seconda equazione di *Lindenau*.

129. Ma C è sempre una funzione di k data per l'equazione $C = \frac{k}{\text{rag.}\,\delta \,.\, \text{sen.}\,1''}\left(1 - \frac{e^2}{2} \,.\, \text{sen.}^2 L\right)$, in cui e, ed L esprimono l'eccentricità della terra, e la latitudine geografica; quindi si potrà eliminare C dall'equazione trovata per lasciarvi la sola incognita k. Nel caso però in cui sia $\frac{C}{2}$ assai piccolo, molto più sarà tale $\frac{C}{2} - nC$, onde si potrà porre cos. $\left(\frac{C}{2} - nC\right) = 1$, e sen. $\left(\frac{C}{2} - nC\right) = C - nC$; ed eseguite queste sostituzioni nell'equazione $N = k \,.\, \text{cot.}\left(\delta + nC - \frac{C}{2}\right)$, ossia $N \,.\, \text{sen.}\left(\delta + nC - \frac{C}{2}\right) = k \,.\, \text{cos.}\left(\delta + nC - \frac{C}{2}\right)$, ossia

$$N\left[\text{sen.}\,\delta \,.\, \text{cos.}\left(nC - \frac{C}{2}\right) + \text{cos.}\,\delta \,.\, \text{sen.}\left(nC - \frac{C}{2}\right)\right] =$$

$k \cdot \left[\text{cos.}\,\delta \,.\, \text{cos.}\left(n\text{C} - \frac{\text{C}}{2} \right) - \text{sen.}\,\delta \,.\, \text{sen.}\left(n\text{C} - \frac{\text{C}}{2} \right) \right]$, si avrà

$k \,.\, \text{cos.}\,\delta + k\left(\frac{\text{C}}{2} - n\text{C} \right) .\, \text{sen.}\,\delta = \text{N} \,.\, \text{sen.}\,\delta - \text{N}\left(\frac{\text{C}}{2} - n\text{C} \right) .\, \text{cos.}\,\delta$;

e se per brevità pongasi $\frac{1}{\text{rag.}\,\overline{1}}\left(1 - \frac{e^2}{2} \,.\, \text{sen.}^2\,\text{L} \right) = a$ resterà k^2

$+ \frac{1 + (\frac{1}{2} - n)\,a\text{N}}{(\frac{1}{2} - n)\,a \,.\, \text{tang.}\,\delta} \,.\, k - \frac{\text{N}}{(\frac{1}{2} - n)\,a} = 0$, e perciò $k = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1 + (\frac{1}{2} - n)\,a\text{N}}{(\frac{1}{2} - n)\,a \,.\, \text{tang.}\,\delta}$

$\pm \sqrt{\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1 + (\frac{1}{2} - n)\,a\text{N}}{(\frac{1}{2} - n)\,a \,.\, \text{tang.}\,\delta} \right)^2 + \frac{\text{N}}{(\frac{1}{2} - n)\,a} \right]}$.

130. Quantunque il valore trovato di k non sia rigoroso, non si può tuttavia temere, che i termini trascurati lo rendano sensibilmente mancante se non dove si tratti di distanze grandissime. Ma per quelle, che oltrepassano le 1000 tese il calcolo numerico di quel valore riesce un po faticoso, poichè esso allora diviene assai grande. Per diminuire questa difficoltà *Lindenau* introduce le formole trigonometriche, perciocchè se facciasi $p = \frac{1 + (\frac{1}{2} - n)\,a\text{N}}{2(\frac{1}{2} - n)\,a \,\text{tang.}\,\delta}$; $q = \frac{\text{N}}{(\frac{1}{2} - n)\,a}$; tang. A $= \sqrt{\frac{q}{p}}$, sostituendo nell'equazione $k^2 + \frac{1 + (\frac{1}{2} - n)\,a\text{N}}{(\frac{1}{2} - n)\,a \,.\, \text{tang.}\,\delta}\, k - \frac{\text{N}}{(\frac{1}{2} - n)\,a} = 0$, e analizzando si troverà $k = \text{tang.}\,\frac{\text{A}}{2} \cdot \sqrt{q}$.

131. Per ridurre in pratica questo metodo è d'uopo determinare la rifrazione terrestre. Si sa, che il coefficiente n, da cui questa dipende, è diverso secondo il vario stato dell'atmosfera; e *De Lambre* per la Francia stabilisce $n = 0,075$ d'estate, 0,08 alla primavera, e all'autunno, e da 0,09, a 0,010 d'inverno; *La Place* prende $n = 0,084$; ma *Lindenau* prende il valore di $n = 0,077$, che egli dice di avere ricavato da molte osservazioni sue, e di *Roy*, *Bouguer*, *Boskovich*, *De Lambre*, e d'altri essendo il barometro a 28^p; e con questo valore ha costruita una tavola, che presenta la distanza orizzontale per approssimazione; per correggere però gli errori, che nei valori forniti da questa tavola risultano per la

incostanza della rifrazione, egli osserva, che questa è funzione della elevazione media delle due stazioni, e scema in proporzione dell'altezza; e nominando Δk, e ΔR le variazioni della distanza orizzontale, e della rifrazione ricava l'equazione $\frac{\Delta k}{\Delta R} = \frac{N - 0,423\,\alpha \,.\, k^2}{(0,846\,\alpha \,.\, k \,.\, \text{tang.}\,\delta + 0,423\,\alpha N + 1)\cos.^2\delta}$; o quest'altra di una maggiore approssimazione $\Delta k = \Delta R \left(\frac{k^2 \,.\, \text{sen.}\,1''}{15,861 \,.\, \cos.(\delta + C)}\right)$; laonde moltiplicando questo fattore $\frac{k \,.\, \text{sen.}\,1''}{15,861 \,.\, \cos.(\delta + C)}$ per ΔR ottiene Δk, ossia la correzione della distanza orizzontale, che era stata determinata per approssimazione; e questa correzione è negativa sempre, e solamente nei casi soli, quando la rifrazione terrestre sia minore di 0,77, come è stata supposta. Finalmente egli da molte osservazioni fatte in diversi paesi, e a diverse elevazioni ha ricavata una tavola, che presenta le quantità da sottrarsi da 0,077 per ottenere ΔR; e quelli, che vorranno occuparsi di queste ricerche, potranno consultarla.

132. Ma il partito migliore sarà sempre quello di osservare le distanze dal zenit reciprocamente da ambedue le stazioni, poichè da queste, quando non siano molto diverse tra loro, si potrà dedurre immediatamente la rifrazione. Imperciocchè se le distanze apparenti di ciascuna stazione dal zenit dell'altra siano δ, e δ', e le rifrazioni corrispondenti siano R, e R', le distanze vere dal zenit saranno $\delta + R$, e $\delta' + R'$, esclusi quei casi rarissimi, dove per la rifrazione quelle distanze debbono essere diminuite; quindi la somma di ambedue sarà $\delta + \delta' + R + R'$; ma questa somma è ancora eguale a $180° + C$, perchè eguaglia tutti gli angoli del triangolo formato dalle tre rette, che uniscono le due stazioni tra loro, e col centro della terra con di più l'angolo C; dunque si avrà $\delta + \delta' + R + R' = 180° + C$. Ma quando R, e R' non differiscano molto tra loro, si può prossimamente porre $R = R'$, e si ha $2R = 180° + C - \delta - \delta'$, dunque allora si

avrà $\frac{R}{C} = 90° + \frac{C-\delta-\delta'}{\frac{2}{C}} = n$. Solo potrà farsi qualche eccezione a questi risultamenti, quando la rifrazione per la dispersione irregolare dei vapori abbassasse gli oggetti invece di alzarli, o inclinasse ancora in qualunque modo i raggi orizzontali; ma l'osservatore attento potrà con ogni facilità accorgersi di questi accidenti, che di raro avvengono per le circostanze locali.

133. Finalmente siccome la ricerca della rifrazione è il lavoro più difficile per lo scioglimento del proposto problema, così io non voglio lasciare di aggiugnere, che seguendo gli insegnamenti del celebre Autore della Meccanica Celeste, dove alla pag. 277, e seg. del Vol. IV tratta delle rifrazioni terrestri, si può cercare quello scioglimento senza avere riguardo alla rifrazione, e poi ritrovarla per mezzo di una formola, che sarebbe la seguente

$$R = \left[\frac{0,000293876 \cdot \frac{h}{0^m \cdot 76}}{1 + 0,00375\,V} - \frac{3,08333}{N}\left(\frac{\frac{h}{1 \pm \frac{V}{5412}}}{} - \frac{\frac{h'}{1 \pm \frac{V'}{5412}}}{}\right)\right] \text{tang. } \delta;$$

dove si suppone C assai piccolo. Ma io non mi fermerò a svolgere, e a dimostrare questa formola, che ciascuno potrà facilmente ricavare dal luogo citato.

134. Ora resterebbe a trattare dell'altro uso, che si può fare delle osservazioni barometriche per determinare la profondità delle caverne di ogni sorte, e massimamente delle miniere. La formola generale si adatta facilmente a questo caso ponendo (6, e 36) v negativa, e $s = -1$ per ragione, che la gravità decresce come le distanze dal centro; e nel rimanente seguendo il calcolo come per la determinazione delle altezze. Questo metodo è riuscito ad *Humboldt* nella miniera di Valensiana (*Voyage*... 1 *Vol.*, *pag.* 313) la più profonda dell'America con una precisione così grande, che ha data la sola differenza di tre metri sopra cinquecento quattordici; di che possiamo bene meravigliarci, perchè si tratta

di una altezza così poco notabile in circostanze, nelle quali molte anomalie devono risultare dalle correnti verticali dell' aria, dalla ineguale distribuzione del calore, e massime dall' umidità, la quale in grande copia si trova nelle profonde caverne, e non si sa bene, quanto, e come modifichi le leggi della pressione dell' aria, da cui dipende il metodo barometrico per misurarle. Forse per queste cagioni, o come sospettò *Humboldt*, per qualche vizio contratto dal barometro, di cui si serviva, il metodo stesso non è riuscito all' *Ulloa*, il quale aveva trovata la sovraindicata miniera di 838 metri, cioè a dire quasi maggiore del doppio. Ma questa ricerca non è tanto per noi importante, che convenga occuparcene più lungamente. Quelli, che ne hanno l' occasione opportuna, usando di questo metodo per determinare le profondità delle miniere potrebbero arrivare a sciogliere il problema assai importante, in cui si cerca come, e quanto l' umidità influisca sulle leggi della pressione dell' aria.

135. Io pensava di chiudere in questo luogo l' appendice, che mi sembrava necessaria a compimento della Memoria già pubblicata, quando mi venne in pensiere di cercare il volume XIV della corrispondenza di *Zach* citato da *Lindenau* per vedere, se ritrovava qualche rischiarimento intorno alla prima equazione da questo arrecata, di cui ho parlato ai num. 127, e 128. In verità vi rinvenni alcune ottime riflessioni sul merito di questo metodo di dedurre dalla relativa altezza dei luoghi la loro distanza orizzontale; ma del resto vi trovai quella equazione tal quale l' aveva veduta presso di *Lindenau* come se questi l' avesse ricopiata da quell' opera, o piuttosto come se fosse di lui stesso la nota, in cui di quel metodo si parla. Ma scorrendo i varj articoli contenuti in quel volume mi cadde sott' occhio il quinto del mese di Luglio alla pag. 52, in cui si dà conto di un' altra Memoria di *Rohde* (*Sur la nouvelle correction des hauteurs mesurées par le barometre relative a la latitude geografique dans le IV tome de la Mecanique Celeste* . . .) il quale con nuovi argomenti diversi da

quelli, che egli aveva esposti nell'altra Memoria (2), e che io credo di avere confutati, cerca di escludere la correzione stabilita da *La Place* per la differenza della gravità dipendente dalla diversa latitudine. Se dall'estratto riportato in quella corrispondenza io ho bene compresa la di lui mente, quegli argomenti si riducono a questo.

136. Il metodo differenziale usato da me ad imitazione del *La Place* dipende dalle due equazioni (7) $\delta' g' \delta v = -\delta p'$; e (19) $\delta' = \frac{c \delta p'}{c' p}$, dalle quali si deduce la terza $\frac{c \delta g' \delta v}{c' p} = -\frac{\delta p'}{p'}$; e in queste ultime si potrà tralasciare la frazione $\frac{c}{c'}$, quando la temperatura si supponga costante per tutta l'atmosfera. Ora *Rohde* niente oppone alla prima equazione, ma da questa prende argomento per dimostrare mancante la seconda; poichè come in quella si trova il coefficiente g' esprimente la gravità, perchè un coefficiente relativo a questa forza non dovrà ancora trovarsi nella seconda? E infatti non è sicuro, che dalla gravità dipende la pressione dell'aria? Pare adunque a *Rohde*, che, posta g la gravità alla superficie della terra, la seconda equazione dovesse essere $\delta' = \frac{c \delta g p'}{c' p}$, da cui per la terza seguirebbe $\frac{c \delta g' \delta v}{c' g p} = -\frac{\delta p'}{p'}$, la quale può bene contenere un coefficiente che risulta dalla differenza delle gravità g', g per ragione della diversa distanza dal centro, ma non può contenere alcun coefficiente risultante dalla differenza della gravità nelle latitudini diverse, perchè questo, essendo tutta la colonna d'aria premente alla stessa latitudine, spetterebbe egualmente alle due gravità g', e g, e svanirebbe nella frazione $\frac{g'}{g}$, che moltiplica il valore di $-\frac{\delta p'}{p'}$.

137. Confesso di non aver bene intesa la risposta, che a questa opposizione fa l'estensore dell'articolo citato, il quale pare concedere, che nella seconda delle due equazioni fondamentali del metodo differenziale esposto da *La Place* man-

chi il coefficiente g relativo alla gravità, come afferma *Rohde*, e sostenere nondimeno, che nella equazione finale debba trovarsi il coefficiente relativo alla differenza della gravità dipendente dalla diversa latitudine, come insegna *La Place*; ma ancora non mi sono data gran pena per intenderla, e mi riservo a ritornare sopra quell'articolo se mai accadrà, che io possa avere la dissertazione di *Rohde*, e in quella trovi alcuna cosa, che meriti di essere conosciuta ancora tra di noi. Intanto osservo, che quella equazione controversa si riduce a questa $\frac{\delta}{\delta'} = \frac{c'p}{cp'}$, la quale vuol dire, che le densità dell'aria δ, δ', posti costanti i gradi di calore c, c' sono come le pressioni p, p' direttamente secondo la legge di *Mariotte*; e poste costanti le pressioni p, p' sono reciprocamente come i gradi di calore c, c'; e in generale sono direttamente come le pressioni, e reciprocamente come i gradi di calore secondo la legge d'*Eulero* (11). Ora quantunque queste leggi siano sottoposte a quelle difficoltà, che sono state già nel corso della Memoria esaminate, niente però è più chiaro di questo, che non sussiste la nuova proposta da *Rohde*, e che in quella equazione, che le esprime non può entrare alcun coefficiente relativo alla gravità, poichè l'effetto di questa non è altro che la pressione, e tenendo conto di questa si tiene ancora conto di quello; laonde poichè in quella equazione si trova il coefficiente p relativo alla pressione, questo basta pure per quello della gravità, perciocchè lo contiene. E in vero qualunque sia la pressione p, può sempre esprimersi pel prodotto di una certa massa nella gravità g; quindi se dovesse adoperarsi la correzione di *Rohde*, questo coefficiente g si troverebbe nel numeratore insieme, e nel denominatore della frazione esprimente il valore di $\frac{\delta}{\delta'}$, e svanirebbe, cosicchè con quella correzione si toglierebbe il giusto riguardo, che aver si deve alla gravità nel determinare la pressione, che modifica la densità. Ora questa risposta mi pare tanto evidente, che non abbisogni altro discorso.