SOPRA LA COSTRUZIONE DELLA CURVA NELLA QUALE L'ARCO s È DATO IN FUNZIONE DI $\frac{\partial y}{\partial x}$

MEMORIA

DEL SIGNOR GIOVANNI PLANA.

Presentata li 23 Maggio 1812 dal Sig. Cav. Cesaris ed approvata dal Sig. Magistrini.

1. Il chiarissimo Geometra *Legendre* dopo aver esposto nella sua opera intitolata *Exercices de Calcul Integral* una formola generale per le quadrature, prende a trattare il Problema, che forma il soggetto di questa Memoria con un metodo diverso da quello ch'egli ha dato per il caso generale. Non si può certamente ottenere un risultato più semplice e più elegante di quello a cui è arrivato questo insigne analista. Solo, si potrebbe desiderare una soluzione più diretta, ed ho osservato, che questa si può avere colla immediata applicazione della formola generale al caso particolare.

2. Sia θ l'angolo, che la tangente alla curva forma coll' asse delle ascisse; si avrà $\frac{\partial y}{\partial x} = \text{tang}.\theta$, e l'equazione data fra l'arco s e la tangente potrà essere espressa con $s = \text{F}.(\theta)$.

Supposte note le ordinate x e y per il punto in cui $\theta = \alpha$, trattasi di cercare il valore di queste ordinate per il punto corrispondente a $\theta = \alpha + n\omega$, ove n è un numero intero, che indica in quante parti eguali ad ω è stata divisa la differenza $\theta - \alpha$.

Le formole integrali, che danno x e y sono, siccome è noto,

$$x = \int \frac{\partial s}{\partial \theta}.\cos.\theta.\partial\theta; \quad y = \int \frac{\partial s}{\partial \theta}.\text{sen}.\theta.\partial\theta;$$

ossia

$$x = \int F'.(\theta).\cos.\theta.\partial\theta\,;\; y = \int F'.(\theta).\text{sen}.\theta.\partial\theta$$

posto $\frac{\partial s}{\partial\theta} = F'(\theta)$.

Ne' casi i quali non permettono di eseguire le integrazioni indicate si lascia l'idea di una generale espressione in funzione di θ, e si cercano i mezzi atti a dare per ciaschedun valore di θ quello di x e di y con quel grado di approssimazione, che si desidera. Ad un tal fine il Sig. *Legendre* ha stabilito la seguente formola (pag. 311 dell' opera citata)

$$\int Fx.\partial x = \omega\Sigma F(x+\tfrac{1}{2}\omega) + A\omega^2\frac{\partial F}{\partial x} - B\omega^4\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + C\omega^6\frac{\partial^5 F}{\partial x^5} - \text{ec.} \ldots (a)$$

nella quale i coefficienti A, B, C, ec. sono quelli che convengono all' equazione

$$\frac{\frac{1}{2}\omega}{\text{sen}.\frac{1}{2}\omega} = 1 + A\omega^2 + B\omega^4 + C\omega^6 + \text{ec.} \ldots\ldots (I)$$

e la funzione cui sta apposto il segno Σ si calcola mediante l' equazione

$$\Sigma F(x+\tfrac{1}{2}\omega) = F(\alpha+\tfrac{1}{2}\omega) + F(\alpha+\tfrac{3}{2}\omega) + F(\alpha+\tfrac{5}{2}\omega) \ldots\ldots + F(x-\tfrac{1}{2}\omega).$$

3. L' applicazione di questa formola al valore di x dà,

$$x = \omega\Sigma F'(\theta+\tfrac{1}{2}\omega).\cos.(\theta+\tfrac{1}{2}\omega) + H$$
$$+ A\omega^2\frac{\partial.F'.\cos.\theta}{\partial\theta} - B\omega^4\frac{\partial^3.F'.\cos.\theta}{\partial\theta^3} + C\omega^6\frac{\partial^5.F'.\cos.\theta}{\partial\theta^5} - \text{ec.} \ldots (II)$$

ove H tiene il luogo della costante arbitraria, ed F'. sta scritto invece di $F'(\theta)$. Quanto più l' intervallo ω, che divide i valori successivi di θ sarà piccolo, tanto più il valore di x sarà prossimo al vero. E volendo contentarsi del primo valore approssimato di x basta prendere

$$x = \omega.\Sigma F'(\theta+\tfrac{1}{2}\omega).\cos.(\theta+\tfrac{1}{2}\omega).$$

Per agevolare il calcolo di questa prima parte di x nei casi in cui la funzione data $F(\theta)$ è più semplice che $F'(\theta)$, sarà utile di trasformarla in un' altra la quale si possa calcolare coi valori successivi di $F(\theta)$. Per ciò conseguire osservisi che,

$$\Delta s = F(\theta+\omega) - F(\theta)$$

ossia,

$$\Delta s = \mathrm{F}(\theta+\tfrac{1}{2}\varpi+\tfrac{1}{2}\varpi)-\mathrm{F}(\theta+\tfrac{1}{2}\varpi-\tfrac{1}{2}\varpi),$$

e svolgendo in serie col teorema di *Taylor* si avrà,

$$\Delta s=\varpi\mathrm{F}'(\theta+\tfrac{1}{2}\varpi)+\frac{1}{1.2.3}\,\frac{\varpi^3}{2^2}.\mathrm{F}'''(\theta+\tfrac{1}{2}\varpi)+\frac{1}{1.2.3.4.5}.\frac{\varpi^5}{2^4}.\mathrm{F}'''''(\theta+\tfrac{1}{2}\varpi)+\text{ec.},$$

e per conseguenza

$$\varpi\Sigma\mathrm{F}'(\theta+\tfrac{1}{2}\varpi).\cos.(\theta+\tfrac{1}{2}\varpi)-\Sigma\Delta s.\cos.(\theta+\tfrac{1}{2}\varpi)$$

$$=-\frac{1}{1.2.3}.\frac{\varpi^3}{2^2}\Sigma\mathrm{F}'''(\theta+\tfrac{1}{2}\varpi).\cos.(\theta+\tfrac{1}{2}\varpi)-\frac{1}{1.2.3.4.5}.\frac{\varpi^5}{2^4}\Sigma\mathrm{F}'''''.(\theta+\tfrac{1}{2}\varpi)\times$$

$$\cos.(\theta+\tfrac{1}{2}\varpi)-\text{ec.}$$

Ora per fare svanire il segno Σ dal secondo membro di quest' equazione faremo uso della formola generale (a) la quale dà,

$$\varpi\Sigma\mathrm{F}'''(\theta+\tfrac{1}{2}\varpi).\cos.(\theta+\tfrac{1}{2}\varpi)=\int\mathrm{F}'''.\cos.\theta\partial\theta-\mathrm{A}\varpi^2\frac{\partial.\mathrm{F}'''.\cos.\theta}{\partial\theta}$$

$$+\mathrm{B}\varpi^4\frac{\partial^3.\mathrm{F}'''.\cos.\theta}{\partial\theta^3}-\text{ec.};$$

$$\varpi\Sigma\mathrm{F}'''''(\theta+\tfrac{1}{2}\varpi).\cos.(\theta+\tfrac{1}{2}\varpi)=\int\mathrm{F}'''''.\cos.\theta\partial\theta-\mathrm{A}\varpi^2\frac{\partial.\mathrm{F}'''''.\cos.\theta}{\partial\theta}$$

$$+\mathrm{B}\varpi^4\frac{\partial^3.\mathrm{F}'''''.\cos.\theta}{\partial\theta^3}-\text{ec.};$$

$$\varpi\Sigma\mathrm{F}'''''''(\theta+\tfrac{1}{2}\varpi).\cos.(\theta+\tfrac{1}{2}\varpi)=\int\mathrm{F}'''''''.\cos.\theta\partial\theta-\mathrm{A}\varpi^2\frac{\partial.\mathrm{F}'''''''.\cos.\theta}{\partial\theta}$$

$$+\mathrm{B}\varpi^4\frac{\partial^3.\mathrm{F}'''''''.\cos.\theta}{\partial\theta^3}-\text{ec.};$$

ec.

Colla sostituzione di questi valori si ottiene facilmente,

$$x=\Sigma\Delta s.\cos.(\theta+\tfrac{1}{2}\varpi)+\mathrm{H}$$

$$-\frac{1}{1.2.3}.\frac{\varpi^2}{2^2}\int\mathrm{F}'''.\cos.\theta\partial\theta-\frac{1}{1.2.3.4.5}.\frac{\varpi^4}{2^4}\int\mathrm{F}'''''.\cos.\theta\partial\theta$$

$$-\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}.\frac{\varpi^6}{2^6}\int\mathrm{F}'''''''.\cos.\theta\partial\theta-\text{ec.}$$

$$+\varpi^2\mathrm{A}\frac{\partial.\mathrm{F}'\cos.\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{1.2.3}.\frac{\varpi^4}{2^2}\mathrm{A}\frac{\partial.\mathrm{F}'''.\cos.\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{2.3.4.5}.\frac{\varpi^6}{2^4}\mathrm{A}\frac{\partial.\mathrm{F}'''''.\cos.\theta}{\partial\theta}+\text{ec.}$$

$$-\omega^4 B \frac{\partial^3 . F' \cos.\theta}{\partial\theta^3} - \frac{1}{1.2.3} . \frac{\omega^6}{2^2} B \frac{\partial^3 . F''' . \cos.\theta}{\partial\theta^3} - \text{ec.}$$

$$+\omega^6 C \frac{\partial^5 . F' . \cos.\theta}{\partial\theta^5} + \text{ec.}$$

Ma se si suppone,

$\psi\theta = F'' . \cos.\theta + F' . \sin.\theta$;

$\psi_{,}\theta = F'''' . \cos.\theta + F''' . \sin.\theta - F'' . \cos.\theta - F' . \sin.\theta$;

$\psi_{,,}\theta = F'''''' . \cos.\theta + F''''' . \sin.\theta - F'''' . \cos.\theta - F''' . \sin.\theta + F'' . \cos.\theta + F' . \sin.\theta$;

ec.

egli è chiaro che si ha,

$\int F''' . \cos.\theta \partial\theta = \psi\theta - x$; $\int F''''' . \cos.\theta . \partial\theta = \psi_{,}\theta + x$; $\int F''''''' . \cos.\theta \partial\theta = \psi_{,,}\theta - x$; ec.

dunque l'equazione precedente potrà essere posta sotto questa forma;

$$\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega} . x = \Sigma\Delta s . \cos.(\theta + \tfrac{1}{2}\omega) + H$$

$$-\frac{1}{1.2.3} . \frac{\omega^2}{2^2} \psi\theta - \frac{1}{1.2.3.4.5} . \frac{\omega^4}{2^4} \psi_{,}\theta - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} . \frac{\omega^6}{2^6} \psi_{,,}\theta - \text{ec.}$$

$$+A\omega^2 . \left(\frac{\partial . F' . \cos.\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{1.2.3} . \frac{\omega^2}{2^2} \frac{\partial . F''' . \cos.\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{1.2.3.4.5} \frac{\omega^4}{2^4} \frac{\partial . F''''' . \cos.\theta}{\partial\theta} + \text{ec.}\right)$$

$$-B\omega^4 \left(\frac{\partial^3 . F' . \cos.\theta}{\partial\theta^3} + \frac{1}{1.2.3} . \frac{\omega^2}{2^2} \frac{\partial^3 . F''' . \cos.\theta}{\partial\theta^3} + \text{ec.}\right)$$

$$+C\omega^6 \left(\frac{\partial^5 . F' . \cos.\theta}{\partial\theta^5} + \text{ec.}\right)$$

d'onde si deduce,

$$x = \frac{\frac{1}{2}\omega}{\text{sen.}\frac{1}{2}\omega} \Sigma\Delta s . \cos.(\theta + \tfrac{1}{2}\omega) + \frac{\frac{1}{2}\omega}{\text{sen.}\frac{1}{2}\omega} . H$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\omega}{\text{sen.}\frac{1}{2}\omega} (A'\omega^2 + B'\omega^4 + C'\omega^6 + D'\omega^8 + \text{ec.}) \ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

facendo,

$$A' = A \frac{\partial . F' . \cos.\theta}{\partial\theta} - \frac{1}{1.2.3} . \frac{1}{2^2} \psi\theta;$$

$$B' = -B \frac{\partial^3 . F' . \cos.\theta}{\partial\theta^3} + \frac{1}{1.2.3} . \frac{A}{2^2} \frac{\partial . F''' . \cos.\theta}{\partial\theta} - \frac{1}{1.2.3.4.5} . \frac{1}{2^4} \psi_{,}\theta;$$

$$C' = C \frac{\partial^5 . F' . \cos.\theta}{\partial\theta^5} - \frac{1}{1.2.3} . \frac{B}{2^2} \frac{\partial^3 . F''' . \cos.\theta}{\partial\theta^3} + \frac{1}{1.2.3.4.5} \frac{A}{2^4} \frac{\partial . F''''' . \cos.\theta}{\partial\theta}$$

$$-\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{1}{2^6}\psi_{,,}\theta;$$

$$D'=-D\frac{\partial^7.F'.\cos.\theta}{\partial\theta^7}+\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{C}{2^2}\frac{\partial^5.F'''.\cos.\theta}{\partial\theta^5}-\frac{1}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{B}{2^4}\frac{\partial^3.F'''''.\cos.\theta}{\partial\theta^3}$$

$$+\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{A}{2^6}\frac{\partial.F'''''''.\cos.\theta}{\partial\theta}-\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}\cdot\frac{1}{2^8}\psi_{,,,}\theta;$$

ec.

La legge colla quale si formano questi coefficienti è evidente.

4. Ora conviene eseguire le differenziazioni, che sono indicate nei valori di A', B', C', ec. Al cui fine vuolsi osservare, che per ottenere in un modo breve il differenziale dell' ordine n di un prodotto yz basta scrivere l'equazione,

$$(\partial z+\partial y)^n=\partial z^n.\partial y^0+n\partial z^{n-1}.\partial y+\frac{n.(n-1)}{1.2}\partial z^{n-2}.\partial y^2$$

$$+\frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}\partial z^{n-3}\partial y^3+\text{ec.}$$

e trasportando in seguito alla caratteristica ∂ gli esponenti delle potenze ne risulta immediatamente,

$$\partial^n.yz=y\partial^n z+n.\partial^{n-1}z.\partial y+\frac{n.(n-1)}{1.2}\partial^{n-2}z.\partial^2 y$$

$$+\frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}\partial^{n-3}z\,\partial^3 y+\text{ec.}$$

Col soccorso di questo principio si trova:

$$A'=F''.\cos.\theta.\left(A-\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^2}\right)-F'\text{sen}.\theta\left(A+\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^2}\right);$$

$$B'=F''''.\cos.\theta\left(-B+\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{A}{2^2}-\frac{1}{1.2.3.4.5.2^4}\right)$$

$$-F'''.\text{sen}.\theta\left(-3B+\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{A}{2^2}+\frac{1}{1.2.3.4.5.2^4}\right)$$

$$-F''.\cos.\theta\left(-\frac{3.2}{2}.B-\frac{1}{1.2.3.4.5.2^4}\right)$$

$$+F'.\text{sen}.\theta\left(-\frac{3.2.1}{2.3}B+\frac{1}{1.2.3.4.5.2^4}\right);$$

$$C'=F''''''.\cos.\theta\left(C-\frac{1}{2.3}\cdot\frac{B}{2^2}+\frac{1}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{A}{2^4}-\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{1}{2^6}\right)$$

$$-F'''''.\text{sen}.\theta\left(5C-\frac{1}{2.3}3.\frac{B}{2^2}+\frac{1}{1.2.3.4.5}.\frac{A}{2^4}+\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}.\frac{1}{2^6}\right)$$

$$-F''''.\cos.\theta\left(\frac{5.4}{2}C-\frac{1}{2.3}.\frac{3.2}{2}.\frac{B}{2^2}-\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}.\frac{1}{2^6}\right)$$

$$+F'''\,\text{sen}.\theta\left(\frac{5.4.3}{2.3}C-\frac{1}{2.3}\frac{3.2.1}{2.3}.\frac{B}{2^2}+\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}.\frac{1}{2^6}\right)$$

$$+F''.\cos.\theta\left(\frac{5.4.3.2}{2.3.4}C-\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}.\frac{1}{2^6}\right)$$

$$-F'\,\text{sen}.\theta\left(\frac{5.4.3.2.1}{2.3.4.5}C+\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}.\frac{1}{2^6}\right);$$

$$D'=F''''''''.\cos.\theta\left(-D+\frac{1}{1.2.3}\frac{C}{2^2}-\frac{1}{2.3.4.5}\frac{B}{2^4}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7}.\frac{A}{2^6}-\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}.\frac{1}{2^8}\right)$$

$$-F'''''''.\text{sen}.\theta\left(-7D+\frac{1}{1.2.3}\frac{5C}{2^2}-\frac{1}{2.3.4.5}3.\frac{B}{2^4}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7}.\frac{A}{2^6}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}.\frac{1}{2^8}\right)$$

$$-F''''''.\cos.\theta\left(-\frac{7.6}{2}.D+\frac{1}{1.2.3}\frac{5.4}{2}.\frac{C}{2^2}-\frac{1}{2.3.4.5}.\frac{3.2}{2}.\frac{B}{2^4}-\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}.\frac{1}{2^8}\right)$$

$$+F'''''.\text{sen}.\theta\left(-\frac{7.6.5}{2.3}.D+\frac{1}{1.2.3}\frac{5.4.3}{2.3}.\frac{C}{2^2}-\frac{1}{2.3.4.5}\frac{3.2.1}{2.3}.\frac{B}{2^4}+\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}.\frac{1}{2^8}\right)$$

$$+F''''.\cos.\theta\left(-\frac{7.6.5.4}{2.3.4}.D+\frac{1}{1.2.3}\frac{5.4.3.2}{2.3.4}\frac{C}{2^2}-\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}.\frac{1}{2^8}\right)$$

$$-F'''.\text{sen}.\theta\left(-\frac{7.6.5.4.3}{2.3.4.5}D+\frac{1}{1.2.3}\frac{5.4.3.2.1}{2.3.4.5}\frac{C}{2^2}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}.\frac{1}{2^8}\right)$$

$$-F''.\cos.\theta\left(-\frac{7.6.5.4.3.2}{2.3.4.5.6}D-\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}.\frac{1}{2^8}\right)$$

$$+F'.\text{sen}.\theta\left(-\frac{7.6.5.4.3.2.1}{2.3.4.5.6.7}D+\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}.\frac{1}{2^8}\right)$$

ec.

I rapporti, che esistono fra i coefficienti A, B, C, D, ec. danno luogo ad alcune riduzioni in questi risultati. Se si fa uso del metodo ordinario per determinare i coefficienti dell' equazione,

$$\frac{\frac{1}{2}\omega}{\text{sen}.\frac{1}{2}\omega}=1+A\omega^2+B\omega^4+C\omega^6+D\omega^8+\text{ec.}$$

si trova,

$$\left.\begin{aligned}
A&=\frac{1}{2.3}\cdot\frac{1}{2^2};\\
B&=\frac{1}{2.3}\cdot\frac{A}{2^2}-\frac{1}{2.3.4.5}\cdot\frac{1}{2^4};\\
C&=\frac{1}{2.3}\cdot\frac{B}{2^2}-\frac{1}{2.3.4.5}\cdot\frac{A}{2^4}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{1}{2^6};\\
D&=\frac{1}{2.3}\cdot\frac{C}{2^2}-\frac{1}{2.3.4.5}\cdot\frac{B}{2^4}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{A}{2^6}-\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}\cdot\frac{1}{2^8}
\end{aligned}\right\}\ldots(b)$$

In vigore di queste equazioni ciascheduno dei primi termini, che entrano nei valori di A', B', C', ec. diventa eguale a zero: i secondi termini ricevono una piccola riduzione mediante l'eliminazione della lettera A, ed i seguenti restano nello stato in cui sono.

Si avrà adunque

$$A'=-\frac{2}{2.3.2^2}.F'.\text{sen}.\theta;$$

$$B'=-F'''.\text{sen}.\theta.\left(-2B+\frac{2}{2.3.4.5.2^4}\right)-F''.\cos.\theta\left(-\frac{3.2}{2}B-\frac{1}{2.3.4.5.2^4}\right)$$
$$+F'.\text{sen}.\theta\left(-\frac{3.2.1}{2.3}B+\frac{1}{2.3.4.5.2^4}\right);$$

$$C'=-F'''''.\text{sen}.\theta\left(4C-\frac{2}{2.3}\cdot\frac{B}{2^2}+\frac{2}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{1}{2^6}\right)$$
$$-F''''.\cos.\theta\left(\frac{5.4}{2}C-\frac{1}{2.3}\cdot\frac{3.2}{2}\cdot\frac{B}{2^2}-\frac{1}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{1}{2^6}\right)$$
$$+F'''.\text{sen}.\theta\left(\frac{5.4.3}{2.3}C-\frac{1}{2.3}\frac{3.2.1}{2.3}\frac{B}{2^2}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{1}{2^6}\right)$$
$$+F''.\cos.\theta\left(\frac{5.4.3.2}{2.3.4}C-\frac{1}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{1}{2^6}\right)$$
$$-F'.\text{sen}.\theta\left(\frac{5.4.3.2.1}{2.3.4.5}C+\frac{1}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{1}{2^6}\right);$$

$$D'=-F'''''''.\text{sen}.\theta\left(-6D+\frac{4}{2.3}\cdot\frac{C}{2^2}-\frac{2}{2.3.4.5}\cdot\frac{B}{2^4}+\frac{2}{2.3.4.5.6.7.8.9}\cdot\frac{1}{2^8}\right)$$
$$-F''''''.\cos.\theta\left(-\frac{7.6}{2}D+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{5.4}{2}\frac{C}{2^2}-\frac{1}{2.3.4.5}\cdot\frac{3.2}{2}\cdot\frac{B}{2^4}-\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}\cdot\frac{1}{2^8}\right)$$

$$+F'''''.\text{sen}.\theta\left(-\frac{7.6.5}{2.3}D+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{5.4.3}{2.3}\cdot\frac{C}{2^2}-\frac{1}{2.3.4.5}\,\frac{3.2.1}{2.3}\cdot\frac{B}{2^4}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}\cdot\frac{1}{2^8}\right)$$
$$+F''''.\cos.\theta\left(-\frac{7.6.5.4}{2.3.4}\cdot D+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{5.4.3.2}{2.3.4}\,\frac{C}{2^2}-\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}\cdot\frac{1}{2^8}\right)$$
$$-F'''.\text{sen}.\theta\left(-\frac{7.6.5.4.3}{2.3.4.5}D+\frac{1}{2.3}\,\frac{5.4.3.2.1}{2.3.4.5}\cdot\frac{C}{2^2}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}\,\frac{1}{2^8}\right)$$
$$-F''.\cos.\theta\left(-\frac{7.6.5.4.3.2}{2.3.4.5.6}\cdot D-\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}\cdot\frac{1}{2^8}\right)$$
$$+F'.\text{sen}.\theta\left(-\frac{7.6.5.4.3.2.1}{2.3.4.5.6.7}D+\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}\cdot\frac{1}{2^8}\right);$$
ec.

5. La legge di formazione di questi coefficienti è evidente. Per verità queste espressioni sono ancora troppo complicate; e per arrivare a qualche cosa di più semplice la prima idea, che s'offre allo spirito pare quella di sostituire in luogo di B, C, D, ec. i loro valori numerici, e di esaminare in seguito, se i risultati che ne derivano possono essere posti sotto una forma regolare: ma presto si riconosce, che questo mezzo conduce a dei coefficienti i quali non ammettono quel grado di semplicità che si desidera. Resta adunque a vedere se, sostituendo nel prodotto,

$$\frac{\frac{1}{2}\omega}{\text{sen}.\frac{1}{2}\omega}\cdot\left(A'\omega^2+B'\omega^4+C'\omega^6+D'\omega^8+\text{ec.}\right)$$

in luogo di $\frac{\frac{1}{2}\omega}{\text{sen}.\frac{1}{2}\omega}$ il suo valore in serie

$$1+A\omega^2+B\omega^4+C\omega^6+\text{ec.}$$

diventa possibile di avere dei coefficienti, che siéno concisi e nello stesso tempo soggetti ad una legge. In questo modo si avrà per x il valore seguente;

$$x=\frac{\frac{1}{2}\omega}{\text{sen}.\frac{1}{2}\omega}\,\Sigma\Delta s.\cos.(\theta+\tfrac{1}{2}\omega)+\frac{\frac{1}{2}\omega}{\text{sen}.\frac{1}{2}\omega}H+A''\omega^2+B''\omega^4+C''\omega^6+\text{ec.}$$

nel quale,

$$A''=A';\ B''=B'+AA';\ C''=C'+AB'+BA';\ \text{ec.}$$

Svolgendo in serie la nota equazione

$$\frac{\frac{1}{2}\omega}{\text{sen.}\frac{1}{2}\omega}=1+\frac{2\omega^2}{4\pi^2-\omega^2}-\frac{2\omega^2}{16\pi^2-\omega^2}+\frac{2\omega^2}{36.\pi^2-\omega^2}-\text{ec.}$$

si ottiene,

$$A=\frac{1}{2\pi^2}.\left(1-\frac{1}{2}\right)s_2;$$

$$B=\frac{1}{2^3.\pi^4}\left(1-\frac{1}{2^3}\right)s_4;$$

$$C=\frac{1}{2^5\pi^6}\left(1-\frac{1}{2^5}\right)s_6;$$

ec.

ove

$$s_2=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{ec.};$$

$$s_4=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\text{ec.};$$

$$s_6=1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\text{ec.};$$

e colla sostituzione dei rispettivi valori di queste somme, i quali si trovano nell'Introduzione all'analisi di Eulero, si avrà;

$$A=2^1-1.\frac{1}{1.2.3.2^2};\ B=2^3-1.\frac{1}{1.2.3.4.5.2^4}.\tfrac{1}{3};\ C=2^5-1.\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.2^6}.\tfrac{1}{3};\ \text{ec.}\ldots(c)$$

Ciò posto, incominciamo a cercare il valore di B''. Noi abbiamo

$$B''=F'''.\text{sen.}\theta\left(2B-\frac{2}{1.2.3.4.5.2^4}\right)+3F''.\cos.\theta\left(B+\frac{1}{1.2.3.4.5.2^4}.\tfrac{1}{3}\right)$$
$$-F'.\text{sen.}\theta\left(B+\frac{2}{2.3.4}A-\frac{1}{1.2.3.4.5.2^4}\right),$$

e eliminando A colla seconda delle equazioni (b) (N.° 4), si ha,

$$B''=F'''.\text{sen.}\theta\left(2B-\frac{2}{1.2.3.4.5.2^4}\right)+3F''.\cos.\theta\left(B+\frac{1}{1.2.3.4.5.2^4}\right)$$
$$-3F'.\text{sen.}\theta\left(B+\frac{1}{1.2.3.4.5.2^4}.\tfrac{1}{3}\right);$$

ma le equazioni (c) danno,

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.2^4}=\frac{B}{2^3-1}$$

dunque si avrà,

$$B''=\frac{2^3.B}{2^3-1}\left(F'''.\text{sen}.\theta+3F''.\cos.\theta-3F'.\text{sen}.\theta\right).$$

Ora è facile di scorgere, che secondo il teorema di cui abbiamo parlato nel N.° 4 si ha l'equazione,

$$\frac{\delta^3.F.\text{sen}.\theta}{\delta\theta^3}=F'''\,\text{sen}.\theta+3F''.\cos.\theta-3F'\,\text{sen}.\theta-F.\cos.\theta,$$

dunque

$$B''=\frac{2^3.B}{2^3-1}\left\{\frac{\delta^3.s.\text{sen}.\theta}{\delta\theta^3}+s.\cos.\theta\right\}.$$

Nello stesso modo si troverà il valore di C''. In fatti noi abbiamo

$$\begin{aligned}C''=&-F''''.\text{sen}.\theta\left(4C-\frac{1}{2.3.4}\,2B+\frac{2}{1.2.3.4.5.6.7.2^6}\right)\\&-F'''.\cos.\theta\left(10.C-\frac{1}{2.3.4}.3B-\frac{1}{2.3.4.5.6.7.2^6}\right)\\&+F''.\text{sen}.\theta\left(10.C+\frac{1}{2.3.4}B-\frac{1}{2.3.4.5.2^4}.2A+\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.2^6}\right)\\&+F'.\cos.\theta\left(5C+\frac{1}{2.3.4}3B+\frac{1}{2.3.4.5.2^4}A-\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.2^6}\right)\\&-F'.\text{sen}.\theta\left(C+\frac{1}{2.3.4}3B-\frac{1}{1.2.3.4.5.2^4}A+\frac{1}{2.3.4.5.6.7.2^6}\right),\end{aligned}$$

e facendo l'eliminazione di A mediante la terza delle equazioni (b) si avrà

$$\begin{aligned}C''=&-F''''.\text{sen}.\theta\left(4C-\frac{1}{2.3.4}.2B+\frac{2}{2.3.4.5.6.7.2^6}\right)\\&-F'''.\cos.\theta\left(10C-\frac{1}{2.3.4}3B-\frac{1}{2.3.4.5.6.7.2^6}\right)\\&+F''\,\text{sen}.\theta\left(12C-\frac{1}{2.3.4}B-\frac{1}{2.3.4.5.6.7.2^6}\right)\\&+F''.\cos.\theta\left(4C+\frac{1}{2.3.4}.4B\right)-F'.\text{sen}.\theta\left(2C+\frac{1}{2.3.4}.2B\right)\end{aligned}$$

Le equazioni (c) danno

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.2^6}=\frac{3C}{2^5-1};$$

$$\frac{B}{2.3.4}=\frac{(2^3-1)7.}{1.2.3.4.5.6.7.2^6}.\tfrac{1}{3}=\frac{(2^3-1)7C}{2^5-1};$$

per conseguenza si avrà

$$4\,C-\frac{1}{2.3.4}.2B+\frac{2}{1.2.3.4.5.6.7.2^6}=\frac{2^5C}{2^5-1};$$

$$10.C-\frac{1}{2.3.4}.3B-\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.2^6}=\frac{5.2^5.C}{2^5-1};$$

$$12.C-\frac{1}{2.3.4}.B-\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.2^6}=\frac{10.2^5C}{2^5-1};$$

$$4\,C+\frac{1}{2.3.4}.4B=\frac{10.2^5C}{2^5-1};$$

$$2\,C+\frac{1}{2.3.4}\,2B=\frac{5.2^5C}{2^5-1};$$

$$C''=-\frac{2^5.C}{2^5-1}\left(F'''''.\text{sen}.\theta+5F''''.\cos.\theta-10.F'''.\text{sen}.\theta-10.F''.\cos.\theta+.5F'.\text{sen}.\theta\right).$$

Ma qui ancora si riconosce agevolmente che

$$\frac{\partial^5.F\,\text{sen}.\theta}{\partial\theta^5}-F.\cos.\theta=F'''''.\text{sen}.\theta+.5F''''.\cos.\theta-10.F'''.\text{sen}.\theta-10.F''.\cos.\theta+5.F'.\text{sen}.\theta$$

dunque,

$$C''=-\frac{2^5.C}{2^5-1}\left(\frac{\partial^5.s.\text{sen}.\theta}{\partial\theta^5}-s.\cos.\theta\right).$$

Seguendo lo stesso metodo si arriverebbe a

$$D''=\frac{2^7.D}{2^7-1}\left(\frac{\partial^7.s.\text{sen}.\theta}{\partial\theta^7}+s.\cos.\theta\right),$$

e colla stessa legge si potrà formare un qualsivoglia numero di coefficienti della serie, che dà il valore di x. Ma per togliere i dubbj, che il principio di induzione potrebbe far nascere a questo proposito, basterà verificare la serie col dare un valore particolare ad s, siccome ciò vien fatto in un modo ingegnoso dal Sig. *Legendre* (pag. 327, N.° 14).

In ultima analisi si avrà adunque

$$x=\frac{\frac{1}{2}\omega}{\text{sen}.\frac{1}{2}\omega}\Sigma\Delta s.\cos.(\theta+\tfrac{1}{2}\omega)+X_{(\theta)}-X_{(\alpha)},$$

ove

$$X_{(\theta)} = -\frac{2A}{2-1}\left(\frac{\partial.s.\mathrm{sen}.\theta}{\partial\theta} - s.\cos.\theta\right)$$
$$+\frac{2^3B}{2^3-1}\left(\frac{\partial^3.s.\mathrm{sen}.\theta}{\partial\theta^3} + s.\cos.\theta\right)$$
$$-\frac{2^5.C}{2^5-1}\left(\frac{\partial^5.s.\mathrm{sen}.\theta}{\partial\theta^5} - s.\cos.\theta\right)$$
$$+\text{ ec.}$$

e $X_{(\alpha)}$ rappresenta il valore di $X_{(\theta)}$ quando vi si fa $\theta = \alpha$. Egli è poi evidente, che il valore di y si ottiene cambiando θ in $90^\circ - \theta$, e ω in $-\omega$ nel valore precedente di x.