DESCRIZIONE DI UN TEODOLITE SCENOGRAFICO

MEMORIA

Del Sig. Giovanni Battista Magistrini.

Ricevuta li 12 *Novembre* 1811.

Tutta l'arte della Prospettiva lineare si può ridurre alle due equazioni semplicissime $r = \frac{ay_x + cu_x}{c + y_x}$, $t = \frac{cz_x}{c + y_x}$, nelle quali r, t sono le coordinate dei punti projettati, u_x, y_x, z_x le coordinate dei punti objettivi, a, c le coordinate del punto di veduta, prese sopra le tre intersezioni del piano geometrico, della tavola, e del piano verticale tirato pel punto di veduta, e pel raggio principale. Determinate le costanti a, c a norma delle circostanze, cioè, scelta una conveniente situazione del punto di veduta, sostituite le espressioni delle coordinate z_x, y_x, u_x, ossia delle distanze dei punti objettivi dai tre piani mentovati, non restano più che i successivi calcoli, o le costruzioni geometriche dei valori delle coordinate r, t corrispondenti ai successivi valori dell'indice di situazione x, e l'applicazione dei medesimi alla tavola. A ben dichiarare tuttavia l'origine, l'utilità, e le applicazioni di queste formole, che io non ho che accennate nella mia Poligonometria analitica, debbonsi distinguere primieramente due specie di oggetti relativamente alla prospettiva. Altri sono puramente ideali, quale sarebbe una macchina di prima invenzione, di cui non si avesse modello davanti agli occhi: altri sono reali, e visibili. Negli uni e negli altri conviene in oltre considerare tre casi: quello, in cui tutti i punti costituenti gli oggetti sono disposti fra loro con data legge di distanze da tre piani dati o da un dato polo; quali sarebbero i vertici, li spigoli, le faccie di un corpo regolare; cosicchè le posizioni rispettive non dipendono che dal calcolo, date che siano tre qualunque di esse: quello, nel quale i punti objettivi, quantunque non regolati da nota legge unica, e generale, nelle distanze fra loro, e da piani dati, tuttavia sono soggetti nelle dimensioni, e nel rispettivo collocamento a noti limiti, e particolari condizioni, per le quali si può senza bisogno di misure, nè ispezione attuale rilevarne numericamente ciascuna distanza particolare, ed eseguirne la prospettiva; di questo numero sono gli edifizj architettonici, e le varie parti, e membrature loro in ciascuno dei varj sistemi inventati dagli Antichi: il terzo caso finalmente, in cui si tratta di oggetti, per le dimensioni, e distanze dei quali altro dato non ha il disegnatore che l'attuale misura di ciascun punto objettivo o d'appresso, o da lontano. Questa diversità di casi e di circostanze per altro poco interessa la maggior parte dei pratici, i quali nulla curando la scorta sicura dell'analisi e della geometria tutto abbandonano l'esito delle loro operazioni al materiale meccanismo dell'occhio e della mano: somma importanza vi trovano al contrario quei pochi illuminati, i quali non obbedendo all'occhio, se non quando ragione il consiglia, e non stendendo la mano che dove loro addita la geometria, hanno di qualche maggiore lunghezza del loro operare il largo compenso di un grado di sicurezza, e rigore, inarrivabile alla sola cieca pratica della mano e dell'occhio anche il più esercitato. Questa seconda classe di periti, ai quali unicamente è diretto questo scritto, troverà non picciolo vantaggio nei primi due casi precedenti soggettando l'esecuzione de' suoi disegni alle due equazioni superiori, o alle equazioni polari corrispondenti, che formar si ponno colle solite permutazioni. Poichè le coordinate z, y, u, che suppongonsi funzioni dell' indice intiero variabile x, rappresentano appunto ciascuna la legge delle distanze dei punti objettivi da ciascun piano rispettivo, la qual legge è data nei due casi suddetti. Quell'indice x, oltrecchè mette a parte delle combinazioni, e dei vantaggi dell' analisi stessa delle curve i continui discontigui, sotto la qual denominazione son compresi i sistemi di punti objettivi, di cui parliamo, porge altresì il risparmio di molti altri segni di convenzione, dei quali soglionsi ingombrare i disegni per argomentare con prontezza, e senza confusione dagli oggetti apparenti della prospettiva le situazioni, le direzioni, e altre proprietà degli oggetti reali. Ma nel terzo caso, che è il più frequente e comune nelle arti, specialmente in quella del paesista, e nella Geodesia, il disegnatore analista e geometra, limitato alla sola ispezione degli oggetti, non contento al tempo stesso delle semplici congetture nè delle apparenze è costretto a rivolgersi alla ricerca esatta delle distanze col soccorso delli strumenti. La camera oscura è certo in questo caso il migliore strumento fra quanti ne furono immaginati; poichè essa offre immediatamente la prospettiva di un intiero sistema d'infiniti punti senza bisogno di alcuna misura, nè costruzione geometrica di distanze nè di dimensioni. Se non che il vantaggio di tanta facilità e prestezza di disegnare per mezzo della camera oscura diveniva tosto un difetto, allorchè degli oggetti così copiati nasceva bisogno di formare un rilievo, o d'istituire qualunque ricerca geodetica; pei quali usi è indispensabile la cognizione delle distanze, e delle dimensioni reali. A sì grave inconveniente rimediò mirabilmente l'illustre Geologo *Marzari Pencati* montando la camera oscura a guisa di teodolite, praticandovi i due movimenti rotatorj orizzontale, e verticale intorno al centro della lente misurati da due circoli graduati, e quel che più gli meritò il premio, e l'applauso dell'Istituto Reale, projettando sul vetro della camera i circoli massimi verticali, e i circoli orizzontali di una qualunque sfera visuale concentrica colla lente, dalle intersezioni dei quali son misurate le distanze angolari degli oggetti rispetto al centro della lente, projezione ingegnosa e felice, per la quale lo spettro degli oggetti, ai quali è rivolta la camera, viene in certo modo a ritrovare da sè, e ad indicare sul vetro la vera situazione dei punti, che ad esso corrispondono nello spazio. Quando però il numero dei punti da rilevare è piccolo, e massime quando trattasi di oggetti inaccessibili, e insieme posti in grande distanza, che non si possa spezzare con replicate stazioni, il teodolite ha per la sua esattezza per confessione dello stesso Sig. *Marzari* la preferenza sopra tutti gli altri strumenti. Per esso alle due equazioni della prospettiva riferite di sopra subentrano le equivalenti $r = a + \frac{c \text{ tang. } \delta_x}{\text{sen. } \beta_x}$, $t = c \text{ tang. } \beta_x$, essendo ora a, c le distanze del centro di rotazione del cannocchiale del teodolite dal piano geometrico, e dalla tavola del disegno, δ_x, β_x gli angoli segnati sul quadrante verticale, e sull'orizzontale nell'osservazione del punto objettivo marcato coll'indice x. Queste sono le formole più semplici, che alla prospettiva vengono somministrate dal teodolite nella sua attuale struttura. Ma con questa stessa semplicità di equazioni già preceduta dal penoso travaglio in campagna della misura ad uno ad uno di altrettanti valori degli angoli δ, β, quanti sono i punti objettivi, nuova fatica, e nuovo imbarazzo non minore resta a superarsi nell'esecuzione, in cui richiedesi un numero di costruzioni delle equazioni stesse doppio di quello dei punti stessi osservati. Che se nel triangolo sferico rettangolo, di cui son cateti gli angoli δ, β, occorra bisogno di conoscerne altresì gli angoli obbliqui; sorgono nuovi inciampi, e complicazioni, e di più nuovi pericoli d'inesattezze e di errori: poichè questi angoli non si possono dedurre dai già noti δ, β, i soli che vengono misurati dallo strumento, se non che per mezzo di lunghi calcoli d'approssimazione.

Considerando io tutte queste difficoltà, e questi varj casi della prospettiva, mi venne in animo d'indagare se il teodolite fosse suscettibile di una modificazione, la quale senza togliere i principali vantaggi di sì prezioso strumento, lo rendesse più utile a quest'arte, e porgesse o tutti o in parte senza bisogno di nuove approssimazioni aritmetiche quelli elementi, per la misura dei quali è stato finora necessario di chiamare in soccorso il calcolo. Lusingandomi di avere ottenuto un qualche intento di tale mia ricerca utile per la pratica, e non indegno della curiosità di chi si diletta anche delle pure speculazioni geometriche, mi avanzo a sottoporlo al giudizio della Società Italiana d'ogni utile perfezionamento delle Arti, e delle Scienze tanto benemerita, alla quale ebbi poc'anzi la sorte e l'onor singolare d'essere ascritto.

1. Se si porta l'intersezione di due linee rette ortogonali sui punti di una sfera obbligando il piano, in cui giacciono, a passare pel centro, e dirigendone una costantemente ad una estremità di un diametro fisso: l'altra retta, c'insegna la Geometria elementare, passerà sempre per l'altra estremità di quel diametro stesso.

2. Adempiansi queste tre condizioni con un regolo, e con una diottra o con un cannocchiale connessi a squadra obbligando il regolo a passare per un punto fisso. È manifesto, che uno spettatore, il quale guardasse per questa diottra gli oggetti, che lo circondano, verrebbe a dirigere tutte le sue visuali ad un altro punto parimenti fisso, la cui distanza dal primo sarebbe un diametro della sfera circoscritta alla squadra, come se qui scelto avesse il punto di veduta, e di qui se ne stesse immobile ad osservare.

3. Tra i modi meccanici d'imprimere un tale sferico movimento all'intersezione dell'asse visuale d'una diottra colla normale linea media di un regolo, che la sostiene, il più semplice, e 'l più vantaggioso m'è parso il seguente.

Un pezzo di lastra d'ottone ilt (fig. 1) è tagliato secondo la curva il, che ha per equazione $r=a(1-\text{sen}.u)$, r, u essendo le coordinate polari, e a il diametro della sfera sulla quale si vorrà eseguire il movimento cercato; e 'l taglio si estende fino ai limiti dati da $u=0$, $u=\frac{p}{2}$, preso p eguale a due angoli retti. Questo pezzo nella sommità i del lembo ricurvo, cioè, nel punto, ove $u = \frac{p}{2}$, è munito d'un picciol manico cilindrico *im*, il cui asse coincide colla tangente della curva nel punto stesso. Da questo stesso punto sporgono sopra ambedue le superficie della lastra due corti e piccioli perni opposti, cilindrici anch'essi. Il manico s'ingrossa alquanto nel mezzo *r* in forma di ruota, indi ripresa per un breve tratto la prima grossezza, termina in un bottone, o cresta *m* a guisa di vite.

Sorge dalla testa S (fig. 7) di un treppiede P Q R S, quale si adopra per sostenere la tavoletta pretoriana, un parallelepipedo *bd* (fig. 2) scavato per un tratto verso la cima nel senso di due faccie opposte. Le altre due pareti per due fessure *ai*, *cr* aperte nella loro sommità sostengono il manico cilindrico precedente loro normale, abbracciando, e stringendone la ruota. Due mollette in oltre *gi*, che partono dal mezzo *g* del pieno del parallelepipedo, e verranno a battere in *i* sulla ruota, ne accresceranno vieppiù la compressione, e l'attrito. La figura 3 rappresenta la sezione della ruota, delle due mollette, e del parallelepipedo fatta per l'asse, e perpendicolarmente alla faccia anteriore. Il parallelepipedo viene innestato sulla testa del treppiede mediante il cilindretto *l*, che lo termina.

Un regolo di ottone *pq* (fig. 4) diviso da una fessura longitudinale in due parti tenute in sesto in una estremità da una diottra normale e nell'altra da una picciola traversa *ki*. Nelle pareti interne del regolo sono praticate due scannellature parallele *bk*, *li* di larghezza, e profondità sufficienti per ricevere esattamente i due perni cilindrici accennati di sopra, che sono fissi nella sommità *i* della curva *li* (fig. 1). Parimente la fessura, che separa le due parti del regolo, è capace della grossezza della lastra, la quale vi può scorrere liberamente senza però oscillare. Unita che sia la diottra sulla testa del regolo, la linea visuale, le due linee medie parallele delle due scannellature interne del regolo, e la linea

nea di confine della traversa, che forma la base del regolo, dovranno essere stabilmente situate in un medesimo piano: in oltre la distanza della base del regolo dalla linea visuale della diottra eguaglierà l'altezza della curva della lastra, cioè la distanza dei punti estremi di essa, ossia il parametro a dell'equazione $r = a\ (1 - \text{sen.}\, u)$. La figura 5 rappresenta la diottra munita di due alette b, d, colle quali verrà fermata sulla cima del regolo.

4. Si uniscano ora, e si adattino questi pezzi coll'ordine, e colle condizioni esposte, e di più in modo, che i due perni alla sommità della curva si trovino inseriti nelle scannellature del regolo, la traversa inferiore di questo batta sulla concavità della curva, e uno stesso piano passi per la linea visuale della diottra, per l'asse del manico della lastra, e per mezzo della grossezza della lastra medesima. Dico, che spingendo (fig. 7), e ritirando il regolo per la base f a piacimento, purchè rada colla traversa il margine curvilineo BGF, e a qualunque grado d'inclinazione di giri mediante la cresta, o il bottone e, la visuale prolungata terminerà sempre in uno stesso punto C dietro allo strumento sull'asse di rotazione alla distanza dai due perni eguale all'altezza GB della curva, ossia l'intersezione della visuale della diottra colla linea media del regolo si troverà costantemente sulla sfera di diametro eguale all'altezza della curva avente asse comune collo strumento, e vertice comune colla curva. A dimostrazione di ciò, servirà l'esposizione, che ora darò dell'origine della curva stessa, e del modo di descriverla meccanicamente.

5. Sulla lastra AD ben piana, e liscia (fig. 8) si descrivano due assi ortogonali ab, GF, e il semicircolo $anmd$ sopra il diametro ad, la cui lunghezza si sceglierà a tenore della grandezza, e dello sviluppo, che si vorrà dare allo strumento. Nel centro C si fermi un picciol gnomone, e sopra questo si adatti uno stilo CN, che abbia la libertà di girarvi d'intorno, forato in n alla distanza dal centro C eguale al raggio. Un regolo ns della lunghezza del diametro ad del se-

micircolo si munisca nelle estremità di due punte rivolte per di sotto, e con una fessura longitudinale praticata tra le due punte stesse investa un altro gnomone fisso nel vertice a del semicircolo in modo, che possa ruotare, e scorrere, ma passando sempre pel vertice a. Una punta del regolo entri nel foro n dello stilo nC, e faccia sì che il regolo siegua ruotando, e progredendo lo stilo, e descriva egli stesso colla punta obbligata nel foro n la semicirconferenza $anmd$. Ora se menando in giro lo stilo Cn si comprime leggermente il regolo, che è forzato a seguirlo; l'altra punta estrema s descriverà sulla lastra la specie di trattoria bsa, la cui equazione, se a è la distanza delle due punte n, s, e insieme il diametro ad, sarà appunto $r = a\,(\,1 - \text{sen.}\,u\,)$, essendo in oltre u la metà del numero dei gradi dell'arco an sotteso di mano in mano dal regolo, ed r la distanza tra 'l vertice a del semicircolo, e la punta inferiore s del regolo. Poichè abbiamo $r = as = ns - na = a - a\,\text{sen.}\,\frac{an}{2} = a\,(\,1 - \text{sen.}\,u\,)$.

Eseguita la stessa operazione sulla faccia opposta della lastra con un semicircolo eguale e similmente posto rispetto al precedente, si tagli la lastra seguendo esattamente la curva così descritta da ambe le parti, e proseguendo il taglio a piacimento se ne levi un pezzo d'una certa larghezza discreta, quale sarebbe la figura ilt (fig. 1), e si metta in opra, e si adatti colle condizioni, e avvertenze poc'anzi prescritte. Sarà facile il rilevare dalla meccanica costruzione della curva, che il regolo AF (fig. 7) obbligato costantemente a passare pel vertice di essa, e a seguirne con una sua estremità l'andamento porterà sempre sullo stesso circolo di diametro eguale all'altezza della curva un punto della sua linea media distante dall'estremità stessa, quanto è alta la curva, il qual punto dovrà essere l'intersezione colla visuale della diottra, o del cannocchiale. Il che sempre succederà a qualunque inclinazione si giri la lastra sopra il parallelepipedo, cui è appesa.

Ecco pertanto un mezzo d'imprimere a una diottra tre movimenti diversi con due soli impulsi, di formarla sopra qualunque oggetto, e di averne le visuali sempre dirette ad un punto unico di veduta. Ora nulla più manca a questo apparecchio per farlo servire alla prospettiva lineare fuorchè la modificazione e l'aggiunta seguente.

6. Si adatti sulla faccia superiore *pd* del parallelepipedo (fig. 2) un quadrante graduato BC (fig. 6) fermandolo con due viti, che stringano le spranghette *f*, *h* sui due fori *m*, *n* (fig. 2) in modo che il quadrante abbia il centro sulla linea tirata per le due fessure *c*, *a*, intorno alla quale roterà lo strumento; in oltre la periferia graduata sia in un piano parallelo alla faccia *pd* del parallelepipedo, e in fine il raggio, che passa per mezzo del quadrante sia nel piano normale *apd*, che bipartisce il parallelepipedo passando per *c*, *a*. Il quadrante si costruisca di tal raggio, che la diottra ruotando non venga ad urtare contro di esso. Applicato in tal modo il quadrante si prepari un triplice stilo, quale si vede nella figura 6 medesima, di cui due raggi *ad*, *ae* siano diametralmente opposti, e gli altri due *a*B, *a*C siano ad angolo retto fra loro, e semiretto coi primi. Si fermi sul manico tra *m*, *r* (fig. 1) lo stilo mediante il suo occhio *a* in tal posizione, che quando la lastra pende dal suo asse non inclinando nè a destra, nè a sinistra del parallelepipedo, lo stilo si trovi co'suoi tre raggi rispetto al quadrante, come appare nella figura 6. Il triplo indice, e'l quadrante non compajono nella projezione dello stromento della figura 7, se non nelle due linee opposte *xy*, *zt*. Questo triplo indice potrà ruotando collo strumento marcare sopra del solo quadrante i gradi di due semirivoluzioni intiere una a destra, l'altra a sinistra, e risparmierà così l'imbarazzo di un intiero semicircolo graduato, che impedirebbe la rotazione traversale della diottra.

7. Nell'atto che si descrive sulla lastra AD (fig. 8) la curva *asb*, s'incidano successivamente presso l'estremità *s* del regolo, e sulla direzione della linea media del medesimo i

numeri suddupli dei gradi, che son descritti sul circolo generatore *anmd* dall' altra estremità *n*. Questi numeri suddupli esprimeranno i complementi degli angoli *na*C, che il regolo formerà coll' asse *ad*. Per evitare l' incomodo dell' espressa graduazione numerizzata del circolo generatore, si descriva concentrico con esso, e sulla stessa base GF un semicircolo GNMF della grandezza di qualcuno, che se n' abbia già graduato, e allungato lo stilo C*n* dell' intervallo *n*N, si osservino i gradi, che sono marcati sul nuovo semicircolo dallo stilo CN o mediante la numerizzazione del semicircolo stesso, ovvero riportando col compasso gli archi GN, GM sul semicircolo, o quadrante d' egual raggio, che si ha in pronto già numerizzato. Lo stesso si eseguisca sull' altra faccia della lastra. Anzi sulle due faccie si ponno impiegare due ordini diversi di graduazione in modo, che le divisioni di una servano di nonio, e di correzione alle divisioni dell' altra. Nella figura si vedono due esempj di questa graduazione del margine della lastra, sulla quale i numeri 30, e 70 sono scritti in fondo al regolo nelle due posizioni, che questo prende, allorchè lo stilo si dirige ai numeri 60, e 140 del semicircolo.

Dal mezzo della base del regolo (fig. 4) sulla direzione delle due linee medie delle scannellature interne sporgono due aghi *s*, *t*, i quali mentre il regolo investirà la lastra *ilt* (fig. 1), dovranno indicare da ambe le parti le divisioni precedenti. Per essi io saprò subito l'angolo d' inclinazione della diottra o della visuale OC (fig. 7) coll' asse dello strumento, poichè il numero che si troverà sotto la punta D, sarà il numero dei gradi dell' angolo OCB.

8. Invece della graduazione del lembo curvilineo della lastra si potrebbe, se si credesse più facile, e comodo, dividere in parti decimali le due faccie laterali del regolo, come rappresentano i punti marcati sopra *vq* (fig. 4), e sopra AF (fig. 7); e adattando una piccola staffa sui due perni del regolo, o prolungando le punte dei perni stessi fino ad escire,

e mostrarsi sulle faccie laterali medesime, rendere visibili le successive distanze della testa del regolo, e della visuale della diottra dal centro dei due perni. Queste distanze sarebbero le corde dei doppj archi, che misurano gli angoli ACB (fig. 7) nel circolo generatore della curva BFG.

9. Ora suppongasi un sistema di punti H, M, L, K, N (fig. 9) traguardati collo strumento fin qui descritto, il cui asse cada sulla linea CQ, e la cui diottra porti tutte le successive visuali nel punto C. S'immagini la piramide visuale così risultante tagliata da un piano DE normale a CQ. Il sistema dei punti h, m, q, l, k, n d'intersezione del piano colle visuali sarà la prospettiva sopra il piano stesso dei punti H, M, Q, L, K, N. Il punto q sarà il così detto punto principale della prospettiva, e qC, o Qc il raggio, che chiamasi principale. Se da q si tirano nel piano DE a tutti i punti d'intersezione h, m, l, k, n le rette qh, qm, ql, qk, qn normali necessariamente al raggio principale Cq, risulteranno altrettanti triangoli rettangoli, i cui angoli obbliqui opposti a queste normali saranno quelli, che di sopra chiamavamo u nella equazione della curva dello strumento (num. 5). Se dunque si chiama s la normale ql, cioè l'ordinata polare della prospettiva l di un punto qualunque L, nel traguardar il quale siasi trovato sulla divisione della lastra dello strumento il numero u segnato dal regolo; avremo $s = c$ tang. u, dove c è la distanza qC della tavola dal punto di veduta. Ovvero chiamando b la parte del regolo prolungato fino alla visuale della diottra, che sottendeva l'arco di gradi $2u$ nel circolo generatore di diametro a, per essere $b = a$ sen. u, quindi sen. $u = \frac{b}{a}$, e cos. $u = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$, e tang. $u = \frac{b}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}$, sarà $s = \frac{bc}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}$, dove b verrà dato successivamente dalla divisione del regolo, quando di questa invece della graduazione della curva vogliasi far uso.

Sebbene non sia tanto complicata nè l'una nè l'altra di queste due formole, perchè difficile, e lungo riescir ne possa il calcolo aritmetico, massime se si hanno buone tavole trigonometriche: sarà tuttavia più spedita ed esatta la misura geometrica, che ne offre la figura 10. Si adatti a due assi ortogonali AQ, QB un quadrante graduato AB, e si tirino i raggi QD, QE, QF, QG, che formino coll'asse QA successivamente gli angoli u. Si prenda sopra QA partendo dal centro la distanza $Qc = c$, e si tiri la normale indefinita cz: i segmenti di questa retta cd, ce, cf, cq saranno i valori delle ordinate polari rappresentate dall'equazione $s = c$ tang. u; come è chiaro dai triangoli rettangoli cQd, cQe, ec. Che se invece degli angoli u son date dallo strumento le corde b, e si deve far uso della formola $s = \frac{bc}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}$; si prenda sopra il medesimo asse $Qa = a$, e sopra di esso si descriva il semicircolo ahkQ; indi si applichino in a le successive corde osservate ah, ak, al, ai, e per le estremità h, k, l, i, ec. si tirino le corde supplementarie Qh, Qk, Ql, Qi, ec. Queste taglieranno sulla retta precedente cZ i segmenti cd, ce, cf, cg, ec., che saranno i valori cercati di s della seconda formola: il che si vedrà osservando che i triangoli Qah, Qak, ec. rettangoli sono simili ai triangoli rettangoli Qcd, Qce, ec.

L'elemento c però non può prendersi a capriccio nei casi particolari, come noi abbiam fatto in questa costruzione generale delle due formole. Dipende esso dall'estensione, che in ciascun caso si vorrà dare alla prospettiva, potendo questa variare all'infinito per un medesimo sistema di oggetti, attese le infinite posizioni del piano secante della piramide ottica rispetto al punto di veduta. Sia s' la massima dimensione stabilita, che dovrà avere il disegno intorno al punto principale, cioè sia s' l'ordinata polare della prospettiva del punto più lontano dal raggio principale fra tutti i punti objettivi, che debbon essere disegnati e compresi nella tavola; e sia u' l'angolo corrispondente fatto dalla visuale col raggio principale, allorchè si traguarda questo punto estremo: ovvero sia b' il pezzo del regolo, che rimane iscritto nel circolo genitore della curva dello strumento, allorchè parimente si traguarda un tal punto. Avremo le due formole $c = \frac{s'}{\text{tang.}\, u'}$, $c = \frac{s'\sqrt{(a^2 - b'^2)}}{b'}$. Si prolunghi QB in S (fig. 10), e sia $QS = s'$, e AQ sia di gradi u'. Tirato il raggio QG, e a questo da S la parallela SC, il segmento QC sarà $= \frac{s'}{\text{tang.}\, u'}$. Per la formola poi $c = \frac{s'\sqrt{(a^2 - b'^2)}}{b'}$ si prenda nel semicircolo ahlQ di diametro a la corda $ai = b'$, e si tiri Qi, che sarà $= \sqrt{(a^2 - b'^2)}$. Si porti sopra QB la corda ai in QB', e la Qi in Qo, e sia $QS = s'$. Tirata la B'o, e la retta SC parallele, questa determinerà nel segmento QC il valor di c rappresentato dalla seconda formola, come risulta dal confronto dei lati omologhi dei due triangoli simili B'Qo, SQC.

Resta ora a determinarsi la giusta situazione di ciascuna ordinata s della prospettiva di ciascun punto objettivo sulla tavola. S' immagini un piano indefinito (fig. 9) tirato pel raggio principale, e normale al piano DE, che rappresenta la tavola. Questo piano è quello stesso, che si tirerebbe per l' asse dello strumento, e pel mezzo del quadrante applicato al medesimo. L' intersezione col piano DE sarà la retta RS, che passerà pel punto principale q, che si prende per origine o polo delle ordinate s, delle quali abbiamo poc' anzi espresse analiticamente, e costruite geometricamente le grandezze. È chiaro, che l' angolo Rqn fatto con questa linea d' intersezione RS dall' ordinata polare per esempio qn del punto n prospettiva del punto objettivo N sarà lo stesso che l' angolo, che si troverà marcato sul quadrante dello strumento, allorchè si mira con esso il punto N. Chiamo la linea RS asse principale della prospettiva, e gli angoli, che con essa formano le ordinate polari, gli esprimo con $\pm v$, $+$ gli angoli a destra, e $-$ gli angoli a sinistra, come Rql. Ora prendendo dal quadrante dello strumento questi angoli, e dalla curva direttrice del regolo graduata gli angoli u, mentre ho coi secondi, e colla costruzione precedente le ordinate polari della prospettiva, avrò nei primi le ascisse angolari sceglien-do nella tavola il polo nel punto principale, e l'asse sulla linea, che chiamo asse principale della prospettiva.

Dato dunque un sistema di punti osservati col nostro strumento, stabilisco prima di tutto la grandezza della tavola, su cui voglio rappresentarlo in prospettiva; e secondo che l'asse dello strumento nell'osservare era rivolto verso il mezzo del sistema, o da un lato, o verso la cima, o verso il fondo, fisso sulla tavola similmente il punto principale o verso il mezzo, o da un lato, o in cima, o in fondo. In questo punto colloco il centro di un semicircolo graduato DAE (fig. 11) munito di una riga HK, che si può girare intorno al centro C, e un lembo della quale giace sempre sulla direzione d'un diametro; e adatto la base DE del semicircolo in modo, che il vertice cada in A, per dove passerebbe l'asse principale, cioè la linea d'intersezione della tavola col piano prolungato dello strumento nella sua primitiva situazione, ossia la linea RS della figura 9. Indi giro la riga HK a destra o a sinistra del vertice A di tanti gradi, quanti per ciascun punto objettivo osservato ne trovo notati a destra o a sinistra sul quadrante dello strumento: in fine prendo le aperture di compasso *cd*, *ce*, *ef*, ec. nella figura 10, e le trasporto sulla riga HK (fig. 11) partendo dal centro verso le divisioni, sulle quali la trattengo di mano in mano. Per esempio sulla graduazione della curva dello strumento, oppure sopra quella del regolo avendo per un certo punto objettivo osservato il numero 40, oppure la corda *ak* (fig. 10), e sul quadrante dello strumento il numero 15 a sinistra; applico nel quadrante di costruzione (fig. 10) il raggio QE alla divisione 40, e formo il segmento *ce* sulla linea delle ordinate polari: giro sul semicircolo DAE (fig. 11) la riga alla divisione 15 a sinistra del vertice A; coll'apertura di compasso

ce

ce precedente segno sulla tavola PQ la distanza C*e* dal centro lungo la linea CH. Il punto *e* è la prospettiva del punto osservato.

10. Il medesimo strumento senza bisogno di nissun'aggiunta o modificazione serve egualmente alla misura delle distanze sì dirette, che orizzontali, e verticali dei punti inaccessibili. Solamente per le distanze orizzontali, e verticali richiedesi di più, qualcuno dei noti mezzi per collocare l'asse dello strumento in direzione orizzontale. A tal fine si potrebbe munire il parallelepipedo nell'estremità di un disco normale all'asse, cioè, parallelo all'asse dello strumento, e i tre appoggi del treppiede di tre viti quali s'adoprano pel teodolite usato. Collocando sopra il disco due livelli a bolla d'aria, e regolandoli col movimento dolce di tutta la macchina medianti le tre viti si verrebbe facilmente ad orizzontarne il raggio principale. Premessa questa operazione si diriga la diottra successivamente ai varj punti proposti, e di più ad uno scopo I (fig. 9), che si collocherà sulla direzione CQ del raggio principale alla maggiore distanza CI dalla stazione principale, che si possa misurar sul terreno. Osservati, e registrati gli angoli u formati dalle visuali della diottra col raggio principale, che chiameremo angoli di deviazione longitudinale, e gli angoli v che chiameremo di deviazione trasversale, dati i primi dalla graduazione della lastra ricurva, i secondi dalla graduazione del quadrante, si trasporti lo strumento nel sito dello scopo I rivolgendolo o nella stessa direzione, o in direzion contraria, coll'asse o raggio principale però orizzontato come prima, e situato sulla stessa linea CI, sulla quale trovavasi prima. Si traguardino di nuovo i punti stessi già osservati dal punto C, e si notino gli angoli delle nuove visuali IN, IL, IM, ec. fatti coll'asse dello strumento, e indicati sulla curva direttrice della diottra. Gli angoli poi di deviazione traversale dello strumento in questa seconda stazione saranno li stessi, che venivano indicati nella prima per li stessi punti rispettivamente.

Avremo così i triangoli CNI, CLI, CKI, CHI, nei quali il lato CI, per ipotesi misurato sul terreno, è comune a tutti, e in oltre son dati in ciascuno gli angoli contigui al lato comune CI, cioè l'angolo in C, che chiamiamo u, e l'angolo in I, o il suo supplemento, che chiameremo u'. Dunque chiamando in oltre d la distanza diretta CL di un punto L qualunque, ed l la distanza CI delle due stazioni, avremo $l : d :: \text{sen.}(u'-u) : \text{sen.}u'$, quindi $d = \frac{l \,\text{sen.}\, u'}{\text{sen.}(u'-u)}$.

Nel foglio, e nella figura stessa di costruzione, che ha servito per la prospettiva (fig. 10), suppongasi l'arco AD del quadrante di un numero di gradi eguale al numero u notato sulla lastra, allorchè si traguardava il punto L (fig. 9), e che sia AQ (fig. 10) l'arco u' dato pel punto stesso nella seconda stazione, cioè l'angolo LIQ. Sul prolungamento del raggio estremo QA preso $QE' = l$, e per E' tirata la E'D' parallela all'altro raggio estremo QE fino all'incontro del raggio medio QD, sarà QD' la distanza d cercata; essendo l'angolo $E'QD' = u$, e $QD'E' = u' - u$.

11. Trovate le distanze di rette CL, CN, CK, ec. dal punto C (fig. 9) collo strumento orizzontato in ambedue le stazioni, e ritenuto il registro così delle deviazioni orizzontali u, come pure delle trasversali chiamate di sopra v, si ha tutto ciò, che occorre per determinare le differenze di livello dei punti osservati rispetto alla stazione principale, e le distanze orizzontali. Di fatti consideriamo un punto L, e imaginiamo un piano orizzontale tirato pel raggio principale CQ, un piano verticale tirato per la visuale CL, la cui intersezione col primo piano sia Cx, e un terzo piano, che passi pel raggio principale CQ, e per la visuale CL; e in questi tre piani con centro C, e con raggio $= 1 = Cz$ descrivasi il triangolo sferico zty, che sarà rettangolo in z. È manifesto, ritenute le denominazioni superiori, e chiamate Δ le differenze di livello, δ le distanze orizzontali dei punti proposti, che sarà il lato $ty = u$, e l'angolo $tyz = \frac{p}{2} - v$, e

in fine per le note formole trigonometriche $Lx = d.\ \text{sen.}\ ty \times$ $\text{sen.}\ tyz = d.\text{sen.}\ u\ \text{sen.}\left(\frac{p}{2} - v\right) = d.\ \text{sen.}\ u\ \cos.\ v = \Delta$, $Cx = d.\ \cos.\ u\ \cos.\ v = \delta$.

Sia AG il numero dei gradi v (fig. 10). Si tiri il raggio QG, e si prolunghi in p. Dal punto D' estremità della distanza QD' già costruita di sopra per l'angolo $AD = u$, si tiri D'm parallela a QG sul raggio iniziale AQ prolungato, e la normale D'n, e da n la np normale sopra GQ, e sopra la parallela D'm sarà $rn = \Delta$, $Qp = \delta$. Come si vedrà facilmente osservando, che $D'mn = pQn = AQG = v$, $D'Q = \delta$, $D'Qn = AQD = u$.

12. Vogliasi l'espressione della distanza tra loro di due punti qualunque, e la differenza di livello parimente fra loro. S'intendano numerizzati i punti objettivi, e gli angoli, che le visuali rispettive formano col raggio principale, siano indicati con u_1, u_2, u_3, u_4 .... u_x, così con v_1, v_2, v_3 .... v_x gli angoli d'inclinazione dello strumento, similmente con δ_1, δ_2, δ_3 .... δ_x le distanze dal punto di veduta; e siano i due punti $(x, x+n)$esimi quelli, dei quali cercasi la distanza, e la differenza di livello, per esempio L, N. Si tirino tre piani, uno per le due visuali corrispondenti ai due punti, due pel raggio principale, e per le due visuali stesse. Sopra questi piani, e dal punto di veduta come centro, e con raggio per esempio CL si descriva il triangolo sferico obliquangolo QLN'. Avremo i due lati QL, QN' espressi appunto da u_x, u_{x+n}, e l'angolo compreso $LQN' = v_{x+n} - v_x$. Pel terzo lato incognito, che misura l'angolo delle due visuali, chiamandolo t, si avrà dalla trigonometria $\cos. t = \cos. u_x \times \cos.\ u_{x+n} - \text{sen.}\ u_x\ \text{sen.}\ u_{x+n} \cos.(v_{x+n} - v_x)$, e per la distanza LN dei due punti, che chiameremo d', si troverà $d' = \sqrt{\left\{d^2_{x+n} - 2d_x d_{x+n} \cos. t + d_x^2\right\}}$, nota formola di *Moivre*, trattandosi d'un triangolo rettilineo LCN, in cui oltre ai lati $CL = d_x$, $CN = d_{x+n}$ è ora noto anche l'angolo da essi compreso $= t$.

Si descriva (fig. 12) con raggio $= CD = d_x$ il semicircolo DNA, e col diametro $AB = 1$ il semicircolo BVL'N'A tangente al primo in A. Si tirino le corde AV, AL', AN', che taglino nel secondo gli archi $BV = u_x$, $BN' = u_{x+n}$, $BL' = v_{x+n} - v_x$, sarà $AV = \cos. u_x$, $AN' = \cos. u_{x+n}$, $AL' = \cos.(v_{x+n} - v_x)$, e le distanze BV, BN', BL' saranno rispettivamente $= \text{sen}. u_x$, $\text{sen}. u_{x+n}$, $\text{sen}.(v_{x+n} - v_x)$. Si tiri per A FG normale a DA prolungato, si prenda $AF = AG = 1$. Indi presa $Ae = AV = \cos. u_x$, $Ar = AN' = \cos. u_{x+n}$ e tirate Gr, es parallele, sarà $As = \cos. u_x \cos. u_{x+n}$. Similmente fatto $Af = \text{sen}. u_{x+n}$, $Ah = \text{sen}. u_x$, le due parallele Fh, fi ci daranno $Ai = \text{sen}. u_x \ \text{sen}. u_{x+n}$. Presa in fine $Ad = AL' = \cos.(v_{x+n} - v_x)$, e tirate le due parallele Gi, dk, si troverà $Ak = Ai \cos.(v_{x+n} - v_x) = \text{sen}. u_x \ \text{sen}. u_{x+n} \cos.(v_{x+n} - v_x)$. Dunque $\cos. t = As - Ak = Ks$. Ora da k sotto un angolo qualunque tiro una retta, e su di essa prendo $Ky = AC = d_x$, e fatto $KT = AB = 1$, tiro Ty, e da s la parallela sx: questa mi dà $kx = d_x \cos. t$. Porto kx da C in P sul raggio CA, alzo la normale PN, ed ho l'arco $AN = t$; prendo $CL = d_{x+n}$, e da L ad N tiro la retta LN. Sarà $LN = \sqrt{(LP^2 + PN^2)} = \sqrt{\{Cd_{x+n} - (P)^2 + d_x^2 \text{sen}. t^2\}} = \sqrt{\{d^2_{x+n} - 2 d_{x+n} d_x \cos. t + d_x^2\}} = d'$ distanza cercata. Tutte queste costruzioni non hanno bisogno di dimostrazione, e sono le più semplici, e facili della geometria elementare.

Chiamando finalmente y la differenza di livello dei due punti stessi $(x, x+n)$ esimi, e rammentando la prima delle due formole del numero 11, si troverà $y = d_{x+n} \text{sen}. u_{x+n} \cos. v_{x+n} - d_x \text{sen}. u_x \cos. v_x$, espressione anche questa determinabile esattamente coi mezzi stessi di costruzione precedenti.

13. Colla proposta modificazione pertanto nulla si toglie al teodolite dei già noti vantaggi nella ricerca delle distanze reali degli oggetti, e nelle altre applicazioni della Geodesia. Mentre prima i dati del teodolite erano i cateti di un triangolo visuale sferico rettangolo, ora se ne hanno invece l'ipo-

tenusa, e un angolo obbliquo. Con questi nuovi elementi le due costruzioni, che ogni punto objettivo richiedeva per essere disegnato in prospettiva, sono ridotte ad una sola; poichè delle due equazioni, che sempre esister debbono per un sistema di punti, quella sola, che determina le coordinate polari, dipende ora dal calcolo, tenendo luogo dell'altra lo strumento medesimo, che ce ne misura immediatamente le ascisse angolari. Il nuovo grado di facilità, che di qui risulta nell'esecuzione della prospettiva essendo stato il mio primo scopo nell'intraprendere questo qualunque perfezionamento del teodolite, m'indusse a distinguere il nuovo strumento risultante colla denominazione di teodolite scenografico, quantunque a tutti gli altri usi del teodolite ordinario possa egualmente servire. La descrizione però, che ne ho delineata, riguardare non si dee che come un semplice schizzo della struttura fondamentale. Obbligato io alla sola geometria teorica come fui sempre finora, e privo di occasioni, e di mezzi d'esperienza, e di pratica di strumenti, invano tenterei un'adequata determinazione delle dimensioni più convenienti, della figura più elegante, e della migliore connessione delle parti del mio strumento, e col modo migliore di combinarne il peso, e la stabilità col volume del minimo imbarazzo, e colla sicurezza e facilità del maneggio, e delle applicazioni. A tutte queste mancanze saprebbero provvedere in gran parte li stessi artefici, quando ne fosse riconosciuta l'utilità, e ordinata l'esecuzione. Aggiungerò solamente un qualche cenno del metodo di farne uso, che mi sembra il più compendioso e spedito.

14. Collocato lo strumento sul luogo delle osservazioni, e diretto l'asse rispetto all'orizzonte, e al meridiano, come richiede il punto di vista, sotto cui vuolsi rappresentare la veduta, si miri successivamente colla diottra, o col cannocchiale a tutti i punti, che si ha bisogno di osservare, e alle osservazioni secondo l'ordine, con cui si succedono, si assegnino rispettivamente gli indici 1, 2, 3, 4, ec., e questi

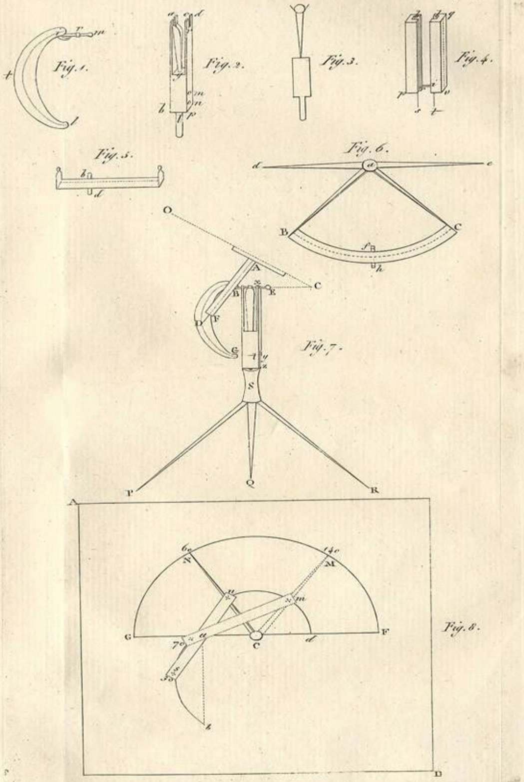


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.

Fig. 9.

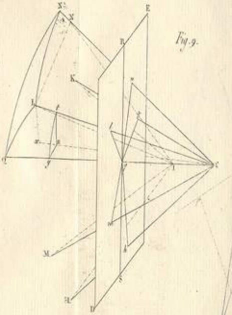
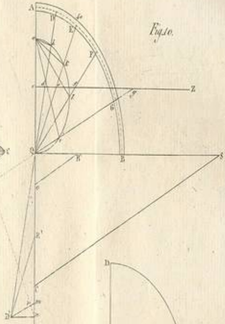


Fig. 10.



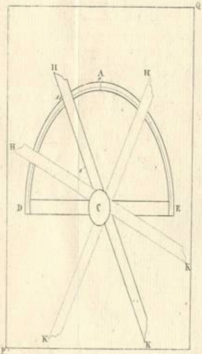


Fig. 11.

Fig. 12.

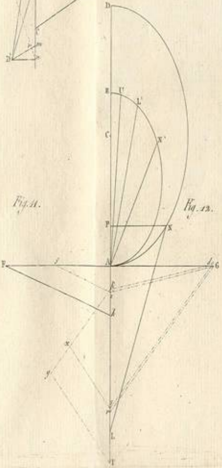


Fig. 13.

Punti ottenuti	Stazione principale: Deviazioni Longitudinali	Stazione principale: Deviazioni Trasversali	Stazione Ausiliaria: Deviazioni Longitudinali	Denominazioni e segni convenzionali
	a	$\pm t$	a'	
1	0	0	0	
2	.	.	.	
3	.	.	.	
.	.	.	.	
.	.	.	.	
.	.	.	.	
.	.	.	.	
8	10	+19	.	a
.	.	.	.	
10	20	−15	.	b
.	.	.	.	
.	.	.	.	
.	.	.	.	
14	65	+104	.	c
.	.	.	.	
.	.	.	.	
.	.	.	.	
.	.	.	.	
.	.	.	.	

si notino nella prima delle quattro colonne di un foglio di carta preparato, come si vede nella figura 13. In ciascuna osservazione si copii dalla lastra ricurva dello strumento l'angolo u, che ho chiamato angolo di deviazione longitudinale, e se ne scriva il valore nella seconda colonna del foglio dirimpetto al numero della prima colonna corrispondente all' osservazione: similmente si registri nella terza colonna l'angolo v di deviazione trasversale, che trovasi segnato sul quadrante. Dovendosi trasportare in una seconda stazione ausiliaria lo strumento, se si avrà cura di dare al medesimo la posizione, e direzione simile alla precedente, e di osservare i punti stessi col medesimo ordine; in questa seconda stazione basterà il registro delle sole nuove deviazioni longitudinali u' nella quarta colonna contro agli indici corrispondenti delle osservazioni. Allorchè nella veduta si troveranno angoli, e margini, o contorni rettilinei; osservatine i soli punti estremi, si uniranno con parentesi esteriori nel foglio di registro le caselle rispettive; con che si avrà indizio delle rette, che avransi a descrivere nel disegno, e come i punti della prospettiva dovranno essere gli uni legati cogli altri. Nella figura 13 si hanno di tutte queste cose quattro esempi per gli indici 1, 8, 10, e 14. Sulla linea dell' indice 1 si ha $u = v = u' = 0$, con che si rileva, che il punto segnato con questo numero trovavasi sulla direzione dell'asse dello strumento, o sul raggio principale. Il punto dell'osservazione 8.ª si vede, che era dall'asse dello strumento alla distanza angolare 10, e dal piano verticale tirato per l'asse era alla distanza angolare 19 a destra. Il punto segnato 10 era dall'asse distante 20, e dal pian per l'asse distante a sinistra 15. Il punto 14 era alla distanza 65 dall'asse, e 109 a destra del pian verticale. Le parentesi *ab*, *bc*, *ac* mostrano, che una retta congiunge il punto 8 col 10, un'altra il punto 10 col 14, e una terza il punto 8 collo stesso punto 14. Praticate simili annotazioni per tutti i punti, potrà l'operatore abbandonare la veduta, di cui possiede già in siffatto registro una

SCOLIO

Alla Memoria Magistrini

Da inserirsi tra le pag. 70, 71 *del Tomo XVI*, *Parte I.*

Nelle applicazioni geodetiche precedenti abbiamo supposto 1.° che il punto di veduta ausiliario sia allo stesso livello col punto principale; 2.° che questi due punti siano nello stesso piano verticale, in cui trovasi l'asse principale dello strumento, cioè, l'asse del cono visuale della stazione principale; 3.° che non debbansi osservare altri oggetti fuorchè quelli, che sono compresi nel massimo cono visuale, che lo strumento può descrivere intorno ad un solo asse principale CQ (*Fig.* 9). Queste tre condizioni saranno bene spesso impraticabili, le prime due specialmente, essendo assai raro, che il luogo delle operazioni offra sul terreno una base orizzontale in quella direzione, e di quella grandezza conveniente che si richiederebbe. È dunque necessario di provvedere a questi casi, che non abbiamo di sopra contemplati, additando le opportune modificazioni sì dello strumento, come delle formole esposte.

I. La testa S del treppiede (*Fig.* 7) presenti all'albero zB una base fissa circolare graduata, e forata nel centro; il cui asse coincida coll'asse dell'albero, allorchè questo viene ad essa innestato e sovrapposto: inoltre l'albero possa rotare sopra la base intorno all'asse comune, senza oscillazioni ne' scuotimenti, e rotando misuri con uno stile sul lembo della base il proprio movimento. Questa base o disco normale all'albero dello strumento quando sia di una sufficiente ampiezza, servirà primieramente a sostenere due livelli a bolla d'aria, mediante i quali e col mezzo di due viti applicate al treppiede, atte ad inclinarlo lentamente per ogni verso, si potrà orizzontare lo strumento ossia renderne verticale l'asse dell'albero.

II. Sia ora l'osservatore in tali circostanze, che non possa scegliere una stazione ausiliaria allo stesso livello della principale, e sia costretto a prendere un nuovo punto di veduta o più elevato, o più depresso del principale, con questo vantaggio però che il nuovo punto sia nel piano verticale scelto nella prima stazione. Collo strumento collocato e orizzontato in una delle due stazioni traguardi l'altra: misuri l'angolo d'elevazione, o depressione dell'una rispetto all'altra, e la distanza diretta delle due stazioni medesime. In seguito medianti i movimenti subalterni longitudinale, e trasversale della diottra o cannocchiale venga traguardando gli oggetti già osservati nella prima stazione; avvertendo in questa nuova serie di osservazioni ausiliarie di registrare nello schizzo non solamente le nuove deviazioni longitudinali u' della diottra, ma ancora le trasversali in una quinta colonna, le quali non saranno in questo caso eguali a quelle della stazione principale, come lo erano allorchè le due stazioni trovavansi sullo stesso asse orizzontale.

III. Non possa in secondo luogo l'osservatore trasportare lo strumento in una stazione ausiliaria nè situata allo stesso livello colla principale nè situata nel piano verticale fondamentale prescelto in quella, ma sia costretto di prendere il secondo punto di veduta in un nuovo piano verticale parallelo al primo, e di orizzontare in questo il suo strumento. Nel movimento dell'albero aggiunto poc'anzi avrà, con che verificare il parallelismo di questo nuovo piano verticale con quello della prima stazione. Oltre a questa operazione misurerà l'osservatore la distanza delle due stazioni, e traguardando una collo strumento collocato nell'altra, noterà la particolare deviazione trasversale e longitudinale corrispondente. Dopo questa preparazione fermerà, come si conviene l'albero sulla sua base, in modo cioè, che l'asse ne resti verticale, e'l nuovo asse ottico orizzontale riesca parallelo al principale; indi procederà alla successiva osservazione ausiliaria degli oggetti, registrando i nuovi elementi rispettivi di situazione sullo schizzo a canto dei primi già segnati nella stazione primaria.

Sia l la distanza trovata dei due punti di veduta; siano U, V le deviazioni longitudinale, e trasversale della diottra diretta dall' uno all' altro punto di veduta; u, v come sopra le deviazioni per un dato oggetto qualunque mirato dalla stazion principale; u', v' le deviazioni dell' oggetto stesso mirato dalla stazione sussidiaria. La più semplice formola delle distanze d dal primario punto di veduta che convenga d' impiegare, è $d = \pm \frac{l \,\text{sen.}\, U \,\text{sen.}\, (v' - V)}{\text{sen.}\, u \,\text{sen.}\, (v - v')}$. Questa si troverà facilmente nei triangoli che risultano immaginando tirata la linea d, e dall' oggetto calate le normali ai due assi orizzontali delle due stazioni, e unite con una linea retta le estremità delle normali stesse. Tale sarà l' espressione generale delle distanze che si dovrà sostituire alla superiore, la quale non serve che nel caso di un asse unico orizzontale per entrambe le stazioni. Se $V = 0$ la formola diviene $d = \pm \frac{l \,\text{sen.}\, U \,\text{sen.}\, v'}{\text{sen.}\, u \,\text{sen.}\, (v - v')}$, e appartiene al caso del numero II precedente. Se $V = \frac{p}{2}$, cioè retto, saranno i due assi delle due stazioni non solamente orizzontali, e paralleli, ma altresì allo stesso livello; e la formola per questo caso sarà $d = \pm \frac{l \,\text{sen.}\, U \cos.\, v'}{\text{sen.}\, u \,\text{sen.}\, (v - v')}$. Per dedurre similmente una formola pel caso considerato a principio, cioè, dei due punti situati sullo stesso asse orizzontale, si dovrebbe porre $U = 0$; ma siccome sarebbe inoltre $v = v'$, la formola riescirebbe indeterminata, e bisognerebbe scambiarla in un' altra. Ma a questo caso essendo già stato provveduto di sopra, si può tralasciare siffatta permutazione. Dei due segni della formola poi si riterrà quello, che renderà ciascun valor particolare della distanza d positivo.

IV. Terminate le osservazioni di tutti gli oggetti compresi nella prima ampiezza visuale, di cui è suscettibile la doppia deviazione della diottra intorno a un dato asse fondamentale vogliansi riconoscere, e determinare anche gli altri oggetti d' intorno alla stazione primaria. Ritenendo in questa orizzontato e collocato lo strumento come qui innanzi; se ne giri poi l'albero sulla propria base d'un angolo a verso i nuovi oggetti. Verrà così il punto di veduta a descrivere un arco orizzontale di gradi a intorno all'asse dell'albero; e lo strumento prenderà un nuovo asse visuale inclinato col primitivo dell'angolo stesso a. Fermato l'albero si traguardino i nuovi oggetti e in un nuovo schizzo si registrino i nuovi elementi u, v, u', v'. Quindi si passi a tutte ripetere similmente le stesse operazioni nella stazione ausiliaria. Chiamando i la distanza del punto di veduta dello strumento dall'asse dell'albero, e D la distanza degli oggetti venuti in tal modo a portata dello strumento dal punto primitivo di veduta, quello, cioè, cui già si riferirono gli oggetti del primo cono visuale, si avrà D medianti le due formole

$$d = \pm \frac{l \operatorname{sen.} U \operatorname{sen.} (v' - V)}{\operatorname{sen.} u \operatorname{sen.} (v - v')},$$

$$D = \sqrt{\left\{ 4i^2 \operatorname{sen.} \frac{a^2}{2} + d^2 - 4id \operatorname{sen.} \frac{a}{2} \left(\operatorname{sen.} u \operatorname{sen.} v \cos. \frac{a}{2} + \cos. u \operatorname{sen.} \frac{a}{2} \right) \right.}$$

V. Ha pertanto l'osservatore, che voglia far uso dello strumento proposto, il vantaggio di poter mettere in opra gli elementi geodetici, e determinare gli oggetti tutti, che son visibili d'intorno ad una stazione principale in una formola unica, e semplicissima $d = \pm \frac{l \operatorname{sen.} U \operatorname{sen.} (v' - V)}{\operatorname{sen.} u \operatorname{sen.} (v - v')}$, qualunque sia la situazione rispettiva delle due stazioni principale, ed ausiliaria, purchè in entrambe fermi, e adatti lo strumento in due piani verticali e paralleli. La formola riesce inefficace, allorquando l'oggetto trovasi nel piano, che congiunge i due assi visuali orizzontali delle due stazioni, poichè in questo caso si ha $v' = V$, $v' = v$. Ma si osservi che colla formola precedente ha luogo del pari quest'altra

$$d = l \sqrt{\left\{ \frac{1 - [\operatorname{sen.} u' \operatorname{sen.} U \cos. (v' - V) + \cos. u' \cos. U]^2}{1 - [\operatorname{sen.} u \operatorname{sen.} u' \cos. (v - v') + \cos. u \cos. u']^2} \right\}},$$ la quale diviene nel caso presente $d = \frac{\pm l \operatorname{sen.} (u' - U)}{\operatorname{sen.} (u' - u)}$; e compie l'assunto di queste aggiunte.

specie di prospettiva simbolica da potersi realizzare, quando, e dovunque gli piacerà, nel modo descritto di sopra al numero 9. Nè dovrà egli ritornare sul luogo per la livellazione, e per la misura delle distanze degli oggetti osservati: ha del pari nel registro stesso, e nelle regole esposte al numero 10, e 11 quanto gli bisogna per tale intento: dovrà egli solamente modificare i trovati elementi a norma delle rettificazioni dello strumento, e delle correzioni della refrazione della luce, e della sfericità della terra, se le circostanze lo esigeranno.