SAGGI

DI ALGEBRA TRASCENDENTE E DI MECCANICA

Del Signor Pietro Franchini

Presentata li 20 Gennajo 1812 dal Sig. Giuseppe Venturoli e approvata dal Sig. Cav. Canterzani.

Articolo I

Sulle spinte di una trave inclinata.

§. 1. Probl. Dato che una trave di nota forma e di noto peso colla testa si appoggi ad un muro verticale, e col piede insista su di un piano orizzontale, si vuol sapere qual sia la forza con cui tende ascivolare lungo il piano, quale la sua pressione contro di esso, quale la sua spinta contro il muro.

Se la sicurezza delle nostre case è un oggetto interessante e prezioso quanto la nostra vita, la completa soluzione dell'enunciato Problema, deesi riguardare come uno de' più grandi servigi, che la Matematica abbia mai resi alla società (*). Una breve istoria de' tentativi fatti per risolverlo, farà conoscere ai meno esperti, che quantunque, per una combinazione straordinaria e quasi inesplicabile, le indagini d'insigni geometri, molto abbiano sin qui servito al teoretico disviamento dell'umano ingegno, niente al pratico bisogno delle architettoniche operazioni, meritano ciò non pertanto alcune

(*) La teoria de' tetti che spiovono da una sola parte, quantunque essi facciano una gagliarda spinta contro il muro inferiore, non si riferisce al nostro Problema, ma bensì all'accelerazione lungo i piani inclinati. Tale spinta cresce pertanto a misura che i tetti di cui si parla si discostano dal piano orizzontale.

Fra i tetti spioventi da più parti, quelli che diconsi alla Mansarda, e che sono indicati colla fig. 1, esigono più di tutti gli altri le avvertenze che risultano dalla soluzione del Problema proposto.

tracce da lor segnate, distinta lode e riconoscenza: tanto più, che all'emulo impegno di quei che agitarono la difficil questione, l'origine deesi e l'importanza qualunque sia dell'attuale nostro lavoro.

I primi a cimentare le proprie forze nella soluzione del nostro Problema furono, *Couplet* e *Gio: Bernoulli*: ma le formole dai loro metodi somministrate, altro non fecero che tenere lungamente incerto o diviso il sentimento de' calcolatori e degli architetti. Aspettavasi, non senza impazienza, un valoroso geometra, che meglio analizzando il segreto giuoco delle meccaniche forze, stabilisse la verità su più chiari principj, quando i Professori *Frisi* e *Krafft*, avendo con una particolare risoluzione, ottenuta una formola simile ma non identica con quella di *Bernoulli*, già confermata da *Kaestener*, aggiunsero in vece alle antiche idee, nuove e più incomode oscurità. Siccome peraltro, gli sforzi del genio soglion essere proporzionati agli ostacoli da superarsi, alcuni fra i più illustri Italiani (*), lasciata da parte la costruzione di *Couplet*, non assai per tutti naturale ed evidente, di nuovo si accinsero, e con altri mezzi più semplici ed ingegnosi, alla contrastata soluzione. I risultati del loro profondo studio concordemente si unirono a sanzionare la formola del Francese Geometra; e parea che altro più non restasse, se non che completarne il significato con la considerazione dell'attrito, e metterla a prova con una scelta serie di sperimenti; ma le astruse meditazioni di qualche geometra, che pretese trovar difetto nella citata formola, a motivo ch'ella dà una spinta infinita quando è retto l'angolo della trave col muro, trattennero questa pregevolissima operazione; mentre uno di loro, meno forse tollerante e più coraggioso, nuova e complicata formola produsse, da sostituirsi per di lui avviso alle altre

(*) *Lorgna, Gregorio Fontana* e *Mascheroni*.

tre (*Delanges Soc. Ital. T. X*). In tale e tanto inviluppo di analitici pensamenti, il nostro Problema non ha cessato di essere, quale *Gregorio Fontana* lo ravvisò (*Soc. Ital. T. III*) *pietra d' inciampo per parecchi Geometri di prima sfera;* ed ognun vede, che a vantaggio della Società, e per decoro delle scienze esatte molto tuttavia importa, che si decida pur una volta la memorabile controversia, determinando con la geometria, con l' analisi algebrica e con gli sperimenti, se tra le quattro formole sino ad ora conosciute, ve ne sia pur una legittimamente dedotta, e capace di rappresentare, mediante un' opportuna modificazione, tutti i dati dell'esperienza. Tale appunto è il primario scopo delle attuali nostre ricerche, e noi crediamo di anticiparne una più chiara e compiuta nozione, suddividendole nei quattro seguenti articoli, il primo de' quali ha per oggetto di giungere con una sola figura e con un calcolo diretto e semplice, alle formole sin qui ottenute con tanti e diversi metodi: il 2.° di scuoprire il difetto comune a tutte le formole, e quello che a ciascuna esclusivamente appartiene: il 3.° di presentare una serie di risultati sperimentali, atti a verificare qual delle note formole sia legittima e genuina: il 4.° è destinato a derivare da una delle formole suddette, quella che in ogni caso fedelmente si accordi coll' esperienza.

Cammin facendo ci occuperemo di qualche Problema analogo all' argomento, e non trascureremo di contemplarlo sotto quei rapporti, che meglio possono interessare la pratica utilità della scienza.

§. 2. Sia G il centro di gravità (*Fig.* 1.ª) e P il peso del travicello BD che si suppone trattenuto nel punto D da un ostacolo situato sul piano orizzontale CH. Espressa la forza P colla GP, questa risolvasi nelle GE, GF normali fra loro, e fatto $CBD = \varphi$, si avrà $GF = P \cos.\varphi$, $GE = P \,\text{sen.}\varphi$. Siccome la GE agisce sugli estremi B, D, in ragione reciproca della loro distanza dal punto G, si sostituiscano a GE le forze BR, DN tali, che sia $BR + DN = GE$, $BR . GB =$

DN . GD; e indicando BD per a, BG per b, sarà

$$BR = \frac{P(a-b)}{a} \text{ sen. } \phi \text{, } DN = \frac{Pb}{a} \text{ sen. } \phi \text{.}$$

Prolungata la BD in K finchè sia DK = GF si compia il parallelogrammo rettangolo NK, e si conduca ML normale a CH. Le forze che agiscono in D, cioè DN, DK, vengono così ridotte alla DM, e quindi alle due DL, ML (= DO). Per trovare l'espressione di queste, si risolva il tetragono birettangolo iscrittibile DNML, nel quale ND (= A) $= \frac{Pb}{a} \times$ sen. ϕ, MN (= D) = P cos. ϕ, DNM = DLM = 100°, LMN (= NDC) = ϕ. La *fig.* 2 presenta il tetragono con le rispettive indicazioni, adottate nel nostro Trattato Analitico di Trigonometria e Poligonometria (Lucca 1805).

Richiamando le formole da noi esposte (Memoria Trigonometrica, Lucca 1807, pag. 24) cioè

$$\{1.A + B\cos.d - C\,\text{sen}.d = 0,\ 1.D - C\cos.d - B\,\text{sen}.d = 0\} \ldots (a)$$

dove d sta in vece di ϕ, si deduce

$$B(=DL) = P\cos.\phi\,\text{sen}.\phi - \frac{Pb}{a}\text{sen}.\phi\cos.\phi = \frac{P(a-b)}{a}\text{sen}.\phi\cos.\phi \ldots (I)$$

$$C(=ML) = P\cos.^2\phi + \frac{Pb}{a}\text{sen}.^2\phi = \frac{P}{a}[a + (b-a)\,\text{sen}.^2\phi].$$

La prima di queste è la formola con cui *Gio. Bernoulli* (*Op. T. IV, p.* 189) e poi *Kaestener* (*Accad. di Erfurt an.* 1778) espressero la spinta orizzontale. Essa è falsa perchè i suoi valori crescono coll'angolo ϕ sino a $\phi = 50°$ per diminuire poi con maggior rapidità da 50 a 100°, mentre l'esperienza dimostra che la spinta orizzontale cresce coll'angolo ϕ da $\phi = 0$ sino a $\phi = 100°$. La ragione teoretica dell'errore deriva, come in seguito vedremo, dall'essersi presa la DK minore del giusto.

§. 3. Risolvendo la BR nelle due BQ, BS, si hanno due nuove forze, una delle quali è distrutta dal muro, l'altra parzialmente agisce nel punto D, ed accresce la spinta DL. Per calcolarne l'effetto si risolva la BS nelle due Bm, Bq;

la Bq nelle Bp, Bs; la Bp nelle Bn, Br; la Br nelle Bi, Bt; ec. Risulta $Bm = BS \cos.\phi$: ma $BRS = \phi$, e (§.2) $BR = \frac{P(a-b)}{a} \text{sen.}\phi$.

Dunque $BS = \frac{P(a-b)}{a} \text{sen.}^2\phi$, e però $Bm = \frac{P(a-b)}{a} \text{sen.}^2\phi \cos.\phi$.

Così $Bq (= BS \text{sen.}\phi) = \frac{P(a-b)}{a} \text{sen.}^3\phi$; $Bp (= Bq \text{sen.}\phi) = \frac{P(a-b)}{a} \text{sen.}^4\phi$; $Bn (= Bp \cos.\phi) = \frac{P(a-b)}{a} \cos.\phi \text{ sen.}^4\phi$, ec. e quindi

$$Bm + Bn + \text{ec. all'infin.} = \frac{P(a-b)}{a} \cos.\phi \text{sen.}^2\phi (1 + \text{sen.}^2\phi + \text{sen.}^4\phi \text{ ec.})$$

e per essere $1 + \text{sen.}^2\phi + \text{sen.}^4\phi \text{ ec.} = \frac{1}{1 - \text{sen.}^2\phi} = \frac{1}{\cos.^2\phi}$, si ritrae $Bm + Bn \text{ ec.} = \frac{P(a-b)}{a} \text{sen.}\phi \tan.\phi$.

Convien dunque prendere la $DK = GF + Bm + Bn + \text{ec.} = P\left(\cos.\phi + \frac{a-b}{a} \text{sen.}\phi \tan.\phi\right)$. Assunto questo valore per $MN (= D)$, e $\frac{Pb}{a} \text{sen.}\phi$ per $ND (= A)$ (§. 2), la risoluzione del tetragono MNDL ci dà mediante le formole

$B = D \text{ sen.} d - A \cos. d$, $C = A \text{ sen.} d + D \cos. d$,

le quali derivano dalle formole (a) del §. cit. i seguenti valori $C = P$, $B = \frac{P(a-b)}{a} \tan.\phi \ldots. (\text{II})$.

La seconda di queste è la formola con diversi metodi ottenuta dai geometri: *Couplet* (*Hist. de l'Accad. de France an.* 1731); *Lorgna* (*Saggi di Statica e di Meccan., pag.* 7, 8); *Gregorio Fontana* (*Soc. Ital. T. III*); *Salimbeni* (*Soc. Ital. T. IV*); *Mascheroni* (*Nuove Ricerche sull'equilibrio delle volte*); *Venturoli* (*Elem. di Meccanica* 1.° *ediz., pag.* 48).

La formola onde si tratta sembra falsa perchè il suo valore cresce con eccessiva rapidità, sino a divenire infinito quando $\phi = 100°$; ma noi faremo vedere che tal difficoltà non è di alcun peso.

§. 4. Per avere la spinta orizzontale superiore BT bisogna sommare la serie infinita BQ, Bs, Bt ec. Ora si ha

$$Bs = Bq \cos.\phi = \frac{P(a-b)}{a} \cos.\phi \operatorname{sen.}^3 \phi,$$

$$Bt = Br \cos.\phi = Bp \operatorname{sen.}\phi \cos.\phi = \frac{P(a-b)}{a} \cos.\phi \operatorname{sen.}^5 \phi,$$

ec. ec.

Dunque

$$BQ + Bs + Bt \text{ ec.} = \frac{P(a-b)}{a} \operatorname{sen.}\phi \cos.\phi [1 + \operatorname{sen.}^2\phi + \operatorname{sen.}^4\phi \text{ ec.}]$$

$= \frac{P(a-b)}{a} \tan.\phi$, e però B = BT, cioè le due spinte orizzontali inferiore e superiore sono tra loro eguali.

§. 5. Qualora si prenda DK = alla sola GF ($= P \cos.\phi$), e calata la perpendicolare KL' si determini il semmento DL', se ne trova l'espressione $P \operatorname{sen.}\phi \cos.\phi$ .... (III).

Tale per sentimento del *P. Frisi* (*Istituz. di Meccan.*, *pag.* 64) confermato da *Krafft* (*Novi Comment. Accad. Scient. Petropol. T. IV*, *an.* 1752, 1753), è la formola della spinta orizzontale. Essa ha il difetto della formola (I), ed oltre a ciò, erroneamente suppone che la spinta richiesta sia indipendente dall'azione delle forze DN, BR, e dalla situazione del centro di gravità.

§. 6. L'ultima tra le formole sino al presente immaginate è quella del Sig. *Delanges*, ed è

$$B = \frac{P(a-b)b \operatorname{sen.}\phi \cos.\phi}{b^2 \operatorname{sen.}^2\phi + (a-b)^2 \cos.^2\phi} \text{ .....(IV)}.$$

Di questa formola meno semplice delle altre e più operosamente ottenuta, non ci occuperemo, perchè nell'ipotesi la più semplice e comune in pratica, che sia $b = \frac{a}{2}$, coincide con quella del *P. Frisi*; e perchè dà luogo ad un valore massimo della spinta B, lo che contraddice all'esperienza.

§. 7. Affinchè ognuno possa chiaramente conoscere qual discrepanza vi sia fra le tre prime formole sopra esposte, e resti insieme persuaso delle proposizioni da noi enunciate ne' §§. 2, 3, 5, dove abbiamo accennata l'erroneità vera o apparente delle respettive formole, esponiamo qui per ordine quattro valori, dedotti da ciascuna nell'ipotesi che sia $b=\frac{a}{2}$.

$$\text{Valori della form. I.}\left\{\begin{array}{l} \phi=20°.,\ B=\tfrac{1}{4}P.\tfrac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}=0,146\,P. \\ \phi=33°.\tfrac{1}{3},\ B=\frac{P\sqrt{3}}{8}=\frac{1,732}{8}P=0,216\,P. \\ \phi=50°.,\ B=\tfrac{1}{4}P. \\ \phi=66°.\tfrac{2}{3},\ B=\tfrac{1}{2}P.\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\tfrac{1}{2}=\frac{P\sqrt{3}}{8}=0,216\,P. \\ \phi=80°.,\ B=\tfrac{1}{2}P\times0,951\times0,309=\frac{0,118}{2}P=0,059\,P. \end{array}\right.$$

$$\text{Valori della form. II.}\left\{\begin{array}{l} \phi=33°.\tfrac{1}{3},\ B=\frac{P}{2\sqrt{3}}=\frac{P}{3,464}=0,288\,P. \\ \phi=50°.,\ B=\tfrac{1}{2}P. \\ \phi=66°.\tfrac{2}{3},\ B=\tfrac{1}{2}P\sqrt{3}=\tfrac{1}{2}\times1,732\,P=0,866\,P. \\ \phi=80°.,\ B=\tfrac{1}{2}P\times3,077=1,538\,P. \end{array}\right.$$

$$\text{Valori della form. III.}\left\{\begin{array}{l} \phi=33°.\tfrac{1}{3},\ B=0,432\,P. \\ \phi=50°.,\ B=\tfrac{1}{2}P. \\ \phi=66°.\tfrac{2}{3},\ B=0,432\,P. \\ \phi=80°.,\ B=0,118\,P. \end{array}\right.$$

Oltre i difetti particolari proprj delle formole I, III, IV, sopra indicati, uno ve ne ha comune a tutte, ed è che sono calcolate indipendentemente dall'attrito: per lo che neppure la formola II può esser giammai di alcuna pratica utilità. È vero che dipende dal nostro arbitrio, l'introdurre negli elementi del calcolo da cui essa deriva, la considerazione dell'attrito, e che in conseguenza possiamo liberarla dal divisato comune difetto; ma trattandosi di un problema in teorica astruso, in pratica pericoloso, chi vorrà prestar cieca fede al nuovo simbolo analitico, ottenuto colla indicata modificazione, se col favore di esatti risultati sperimentali non si possa metterlo a prova, e verificarne la sicurezza? Giova dunque, prima d'intraprendere l'anzidetta modificazione della formola II, che ci occupiamo dell'esperienze.

§. 8. La macchina di cui si è fatto uso, consiste in un travicello parallelepipedo rettangolo a base quadrata, ABCDEF (*Fig.* 4), lungo metri 1, 171, e del peso di kilogr. 4 . 2. Due de' suoi angoli solidi sono tagliati, e sul piano della sezione il di cui profilo vien espresso da EF, è fermato un cilindro di busso, di un diametro $= \frac{2}{3}$ di centim., lungo quasi quanto la faccia del travicello, traversato da un perno di ferro inseritovi a forza, e perfettamente mobile intorno a due occhi di ferro più piccoli del cilindro.

Sulla sezione inferiore indicata dalla DC, si sono stabiliti nella stessa guisa due cilindri eguali fra loro ed alla metà del precedente, situati in linea retta, è distanti l'uno dall' altro di $\frac{1}{2}$ centimetro. In G evvi un occhio di ferro a cui si raccomanda un sottil cordone di seta, che scendendo verticalmente lungo la BC, passa fra i due cilindri, e per una direzione CL parallela alla tavola IH, entra nella carrucola L fermata a vite nella tavola stessa, e serve a sostenere il peso P. La parete MN è verticale e di legno ben levigato: la tavola IH levigata ed orizzontale.

Situato il travicello come la figura lo dimostra, tutto il suo peso si appoggia sui tre cilindri, e però scivola liberamente, qualunque sia la posizione a cui vuolsi adattare, se non sia trattenuto da un opportuno contrappeso P. Gli angoli DEM, eguali a quelli che si sarebbero avuti lasciando intatti gli angoli solidi, gli abbiamo misurati col grafometro, e variando gradatamente il peso P, abbiamo trovato quale in ogni caso era quello che precisamente corrispondeva all'equilibrio. Si è corretta l'incertezza dell'attrito, e quella che poteasi temere nella misura degli angoli, con ripetere ogni esperienza cinque o sei volte, e con prenderne il valor medio.

Con queste ed altre avvertenze che lungo sarebbe il descrivere, ci è riuscito di appagare le scrupolose indagini di abilissimi artefici e di varj professori espressamente consultati, fra' quali il Sig. Consigliere *Puccini* Ingegnere e Direttore de' lavori idraulici del Principato, ed il Sig. *Carlo di Poggio* Censore del Liceo *Felice*.

Tavola de' nuovi risultati sperimentali.

$$
\begin{array}{ll}
 & \textit{kil.} \\
\phi = 33^\circ.\tfrac{1}{3}, & P = 0\,.\,75 \\
\phi = 40^\circ. & P = 1,08 \\
\phi = 50^\circ. & P = 1,39 \\
\phi = 60^\circ. & P = 1,74 \\
\phi = 65^\circ. & P = 2,10 \text{ (metà del peso del travicello)} \\
\phi = 66^\circ.\tfrac{2}{3} & P = 2,39 \\
\phi = 73^\circ.\tfrac{1}{3} & P = 2,90 \\
\phi = 80^\circ. & P = 3,72 \\
\phi = 84^\circ. & P = 4,20 \text{ (tutto il peso del travicello) (*)}
\end{array}
$$

§. 9. Per conoscere quanto cooperi alla spinta orizzontale una forza verticale BS applicata al vertice del travicello abbiamo appeso al suddetto vertice un masso di ferro pesante $0^{kil.}.57$, e si è trovato, che essendo $\phi = 50^\circ$. si richiede un contrappeso di $1^{kil.}.80$. Ciò dimostra che una forza $BS = 0^{kil.}.57$ accresce la spinta orizzontale di una quantità $= 0^{kil.}.41$.

Trasportando il peso addizionale dal vertice al punto di mezzo dov'è il centro di gravità, la spinta orizzontale diventa $= 1,44^{kil.}$, e però diminuisce di $0^{kil.}.36$. Questo prova = *che la spinta orizzontale cresce, a misura che il centro di gravità si accosta all' estremo superiore del travicello* (**).

(*) Si è tralasciata l'esperienza corrispondente a $\phi = 20^\circ$., perchè la spinta orizzontale essendo molto debole, l'attrito sparge notabile incertezza sull'origine del disequilibrio.

(**) Evvi chi cerca il valore di ϕ a cui corrisponde il massimo momento del travicello contro il muro (*Fig.* 2) e moltiplicando la BQ ($=$RS) (§. 2) pel vette BC, cioè $\frac{P(a-b)}{a}$ sen. ϕ cos. ϕ per a cos. ϕ, pone $=0$ il suo differenziale, lo che dà $\cos.^3\phi - 2\cos.\phi\,\text{sen.}^2\phi = 0$, e quindi $\cos.\phi = r\sqrt{\tfrac{2}{3}}$; e per essere $\log.\cos.\phi = \log.r + \tfrac{1}{2}\log.\tfrac{2}{3} = 10 + \tfrac{1}{2} \times (0,3010300 - 0,4771212) = 9,9119544$, somministra $\phi = 35^\circ\,.\,16'$ (sessag.). Questo risultato però è ben lontano dal corrispondere al massimo, perchè la forza premente il muro è $= BQ + Bs + Bt$ ec. $= \frac{P(a-b)}{a}\tan.\phi$, formola che non ha valor massimo.

§. 10. Per determinare l'effettiva pressione verticale, esercitata da un travicello contro il piano orizzontale su cui si appoggia, ecco il meccanismo che abbiamo immaginato.

Preso un vette AB (*Fig*. 5) di forma parallelepipeda rettangolare, e fissato nel suo mezzo O un asse di ferro, mobile su due occhi, su i quali riposi collo spigolo acutissimo ricavato nell'asse medesimo, ad oggetto di togliere quasi totalmente l'attrito, si è appoggiato ad una parete verticale NN, di tavola ben levigata un travicello AC, di forma parallelepipeda rettangolare, a base quadrata, lungo metri 1,771, munito de' soliti cilindri mobili, e del peso di $4^{kil.}, 14$, in guisa che il suo estremo inferiore venga a posare sul vertice A del vette. Distrutta la spinta orizzontale mediante un cordone fermato all'estremo A del travicello, e sulla lunghezza del vette nel punto D, dopo aver messo il vette in situazione orizzontale, si è sperimentato qual contrappeso era necessario collocare dalla parte opposta, ad una distanza BO dall'asse di rotazione eguale ad OA. Questo meccanismo, che è stato riconosciuto superiore ad ogni eccezione da parecchi abilissimi Artefici ed Ingegneri, ha somministrato i risultati che seguono:

Essendo $\phi = 44^\circ . \frac{4}{9}$ ($= 40^\circ$. sessag.) il contrappeso si è trovato $= 3^{kil.} . 98$. La pressione verticale era dunque minore del peso totale di $0^{kil.} . 16$.

Fatto $\phi = 55^\circ . \frac{5}{9}$ ($= 50^\circ$. sessag.) il contrappeso è risultato di $3^{kil.} . 84$, e però la pressione verticale minore del peso totale di $0^{kil.} . 3$. Crescendo ϕ di $11^\circ . \frac{1}{9}$, la pressione divisata diminuisce dunque di $0^{kil.} . 14$.

La formola di ML trovata (§. 2) ci dà nei due casi precedenti

$$ML = 0^{kil.} . 794 \times 4,14 = 3^{kil.} . 287$$

$$ML = 0^{kil.} . 707 \times 4,14 = 2^{kil.} . 926:$$

valori minori entrambi delle respettive pressioni verticali somministrate dall'esperienza, e che provano essere il calcolo della ML, qual risulta dalla costruzione del §. cit. ben lontano

tano dal vero, poichè modificandolo con la considerazione dell'attrito, condurrebbe a dei risultati sempre più erronei.

Si può stabilire intanto: *che se abbiasi riguardo all' attrito, una trave inclinata non gravita sul piano orizzontale con tutto il suo peso, e che la sua pressione diminuisce coll' angolo* ϕ. Vedremo ben tosto che questa proposizione ottimamente si concilia coll'equazione C (= ML) = P ottenuta nel §. 3.

§. 11. Eccoci alla promessa trasformazione della formola (II), formola che sola fra tutte non ci ha presentato alcun manifesto carattere di falsità.

Riassunte l'equazioni del §. 3, $C = P$, $B = \frac{P(a-b)}{a} \tan. \phi$, $B = BT$, si rimuovano gli appoggi che impediscono lo scivolamento, e si sostituisca in B una forza $Bb\,(=x)$ eguale e contraria alla BT; si sostituiscano in D due forze $Dl\,(=z)$, $Dd\,(=y=B)$, la prima eguale e contraria alla spinta verticale, la seconda alla spinta orizzontale B. È certo che il travicello resterà tuttavia in equilibrio, e perciò, le tre equazioni sopra esposte, che divengono

$$z = P, \; x = \frac{P(a-b)}{a} \tan. \phi, \; x = y$$

sono le condizioni da cui dipende l'equilibrio del travicello. Sieno $B\beta$, $D\delta$ due forze equivalenti all' attrito nei respettivi punti B, D; forze che debbono agire in direzione contraria a quella che risulterebbe dal moto del travicello. Siccome l'attrito è proporzionale alla pressione, preso un coefficiente costante f, si può fare $B\beta = f . Bb$, $D\delta = f . Dl$. In virtù di questi nuovi elementi, le condizioni dell'equilibrio 1.ª e 3.ª divengono $z + fx = P$, $x = y + fz$, dove y esprime l'effettiva spinta orizzontale inferiore. La 2.ª siccome equivale a $P\,(a-b)$ sen. $\phi = ax$ cos. ϕ, cioè a $P . D\tau = Bb . BC$, che è l'equazione destinata ad impedire la rotazione del sistema, si cangia in

$$P . D\tau = Bb . BC + B\beta . DC, \text{ cioè in}$$

$$P(a-b)\,\text{sen.}\,\phi = ax\cos.\,\phi + afx\,\text{sen.}\,\phi\,.$$

Dividendo quest'ultima equazione per sen. ϕ si ha $x = \frac{P(a-b)}{a(f+\cot.\phi)}$. La 1.ª diviene $z = P\left(1 - \frac{f(a-b)}{a(f+\cot.\phi)}\right)$.

La 3.ª si riduce ad $y = P\left[(1+f^2)\frac{(a-b)}{a(f+\cot.\phi)} - f\right]$....(V)

ed è la trasformata richiesta. Essa darebbe una infallibile riprova della formola (II), qualora si potesse trovare un valore di f, che la rendesse concorde con tutti i risultati sperimentali. Noi però, invece di cercare *a priori* il valore onde si tratta, il che sarebbe oltremodo difficile, cercheremo qual sia il valore di f, che in ciascuno de' nove casi contemplati nel §. 8, accorda la formola (V) coll'esperienza: ed è chiaro, che se il valore di f esiste, nell'ipotesi che tutti gli sperimenti sieno di un'assoluta esattezza, dee trovarsi costantemente eguale ad uno stesso numero. Una leggiera aberrazione dovrà riferirsi alle minime inesattezze, inseparabili dai fisici sperimenti, e molto più dai nostri, ne' quali sempre doveasi vincere la doppia difficoltà, di misurare esattamente l'angolo ϕ, e di misurarlo quasi a volo, cioè nel punto preciso in cui l'equilibrio cessa.

I risultati dell'indagine sopra indicata sono i seguenti:

Valori di ϕ	$33^\circ\frac{1}{3}$,	40°,	50°,	60°,	65°,	$66^\circ\frac{2}{3}$,	$73^\circ\frac{1}{3}$,	80°,	84°.
Valori della Dd	kil. 0,75;	kil. 1,08;	kil. 1,39;	kil. 1,74;	kil. 2,1;	kil. 2,39;	kil. 2,9;	kil. 3,72;	kil. 4,2.
Valori di f	0,10;	0,09;	0,12;	0,16;	0,16;	0,14;	0,16;	0,16;	0,18.

È da osservarsi che i valori corrispondenti all'esperienze 1.ª, 2.ª e 9.ª, sono quelli che più aberrano dal cercato valore medio; e che tal difetto nasce appunto dalla maggiore difficoltà che s'incontra nell'effettuarle. Infatti nelle prime la spinta essendo debole, una piccola differenza nell'attrito influisce sull'origine del disequilibrio; nè si può prescindere da tale differenza, per non essere noi sicuri che i cilindri sieno dotati di una mobilità esattamente uguale, qualunque elemento longitudinale serva loro di appoggio. Nell' ultima esperienza la spinta è troppo forte, e forte è in proporzione l' attrito. Le variazioni di questo divengono quindi sensibili, per una ragione opposta a quella, che avea luogo nelle prime esperienze.

Preso il medio aritmetico 0, 14 fra i valori di f, i valori teorici della Dd sufficientemente si avvicinano a quelli trovati coll' esperimento. Quello della Dd relativo alla 1.ª esperienza del §. 9 si trova $= 1,79^{kil.}$: quello della Dd relativo alla 2.ª esperienza dello stesso §. risulta $= 1,46^{kil.}$. Calcolando il valore della $z\,(=\mathrm{D}l)$ spettante alle due esperienze del §. 10, si ottiene $z = 3,92^{kil.}$, $z = 3,84^{kil.}$; valori de' quali il 2.° coincide col valore sperimentale.

In pratica non mai succederà che l' attrito sia tanto leggiero, quanto quello che ha luogo nella nostra macchina; ma siccome l' aumento di f favorisce la sicurezza dell' edifizio, l' uso della formola (V) non soggiace per tal motivo ad alcuna eccezione. Noi però facciam osservare, che il valore di f cade sempre fra dei limiti molto angusti, perchè se giungesse a $0,5^{kil.}$, posto $\phi = 50°$ si avrebbe per y un valore negativo, lo che contraddice.

Quindi ne segue, *che l' attrito del piè di una trave inclinata, contro il piano orizzontale su cui scivola, abbia generalmente un valore intermedio, fra quello dell' attrito di 1.ª e di 2.ª specie; giacchè il coefficiente del primo attrito, le superficie confricanti essendo ambedue di legno, giunge, com' è noto*, sino a 0, 50; e quello del secondo, in virtù di una mediocre pressione, diviene come si è veduto, $=0,14$.

§. 12. Facendo per semplicità $b = \frac{1}{2} a$, le formole de' due attriti superiore ed inferiore sono

$$\mathrm{B}\beta = \frac{\mathrm{P}f}{2(f+\cot.\phi)},\ \mathrm{D}\delta = \mathrm{P}f\left(1 - \frac{f}{2(f+\cot.\phi)}\right) = \mathrm{P}f\frac{(f+2\cot.\phi)}{2(f+\cot.\phi)}.$$

Pongasi successivamente $\phi = 0°. = 33°.\frac{1}{3} = 50°. = 66°.\frac{2}{3} = 100°$ e si avrà

$$\varphi = 0\ ,\ B\beta = 0,\quad D\delta = 0,14\,P,$$
$$\varphi = 33^\circ.\tfrac{1}{3},\ B\beta = 0,037\,P,\ D\delta = 0,135\,P,$$
$$\varphi = 50^\circ.\ ,\ B\beta = 0,061\,P,\ D\delta = 0,131\,P,$$
$$\varphi = 66^\circ.\tfrac{2}{3},\ B\beta = 0,097\,P,\ D\delta = 0,126\,P,$$
$$\varphi = 100^\circ.,\ B\beta = 0,\ 50\,P,\ D\delta = 0,070\,P.$$

La somma degli attriti, generalmente espressa dalla formola $Pf\frac{(1+f+2\cot.\varphi)}{2(f+\cot.\varphi)}$, nei respettivi casi di cui sopra, proviene $=0,14\,P, =0,172\,P, =0,192\,P, =0,223\,P, =0,57\,P$. I risultati precedenti dimostrano 1.° che l'attrito superiore $B\beta$ cresce da $\varphi = 0^\circ$. sino a $\varphi = 100^\circ$., ma più rapidamente dell'attrito inferiore $D\delta$: quindi apparisce perchè la spinta verticale Dl si trovi minore (§. 10) a misura che si aumenta l'angolo φ.

2.° Che la somma degli attriti $B\beta + D\delta$ cresce da $\varphi = 0$ fino a $\varphi = 100^\circ$. Questo aumento serve a ristringere dentro i dovuti limiti quello della spinta orizzontale dato dalla formola (II).

Siccome quando $\varphi = 0^\circ$, $B\beta$ è $< D\delta$, e quando $\varphi = 100^\circ$. è $B\beta > D\delta$, vi dev'essere un valore di φ a cui corrisponda $B\beta = D\delta$. Per trovarlo si supponga

$$\frac{f}{2(f+\cot.\varphi)} = f\left(1 - \frac{f}{2(f+\cot.\varphi)}\right)$$

e poichè ne deriva $1 = f + 2\cot.\varphi$, con fare $f = 0,14$ si ottiene $\cot.\varphi = 0,430$, cioè $\varphi = 74^\circ$. presso a poco.

Il valore $= \infty$ dato dalla formola (II), unicamente significa, che non esiste alcuna forza Bb, capace di tenere equilibrato il travicello in una posizione orizzontale. Infatti la forza Bb, e la gravità che sollecita il travicello, essendo ad angolo retto fra loro, non possono giammai distruggersi.

§. 13. Posto che la sommità C di un travicello obbliquo AC (*Fig.* 6) sia stabilmente fermata sul vertice di un secondo travicello verticale CD, essendo gli estremi A, D, nello stesso piano di livello, si dimanda come si distribuisca il peso di ciascun travicello, che si suppone cognito, sugli appoggi A, D.

Si posi ciascuno degli estremi A, D sul piatto di una stadera, e si determini il respettivo peso. Essendo $AC = 0,64^{kil.}$, $CD = 0,59^{kil.}$, abbiamo trovato che facendo successivamente $ACD = 33°.\frac{1}{3}$, $= 50°$, $= 66°.\frac{2}{3}$, il peso di AC risulta sempre $= 0,34^{kil.}$; e quello di $CD = 0,89^{kil.}$. Dunque il peso perduto dal travicello obbliquo sta al suo peso primitivo come $1 : 2 + \frac{2}{15}$. Conoscendo il peso di due travi AC, BC ed il loro carico, può dunque determinarsi la quantità del peso, che cessando la reciproca loro connessione in C, dalla quale giova prescindere, si trasmette mediante il *colonnetto* CD sul punto D dell'*asta* o *chiave* AB, lo che serve a dare una proporzionata solidità alla chiave stessa e ad assicurare la stabilità del tetto.

§. 14. Probl. Dato che due travi AC, BC, la di cui spinta orizzontale inferiore si suppone distrutta da un ostacolo insormontabile in A, B, si sostengano vicendevolmente, appoggiandosi nel vertice C, si dimandano le condizioni da cui dipende il loro equilibrio.

Soluzione. Sia p il peso di AC, p' quello di BC; ϕ, ϕ' i respettivi angoli ch'essi fanno colla verticale. Siccome l'effetto dell'ostacolo in A, equivale a quello di due forze a detto punto applicate, le quali sieno respettivamente uguali e contrarie alle forze che in esso agiscono, la forza che produce la spinta orizzontale superiore nel vertice della trave AC, può assumersi effettivamente $= \frac{P(a-b)}{a} \tan.\phi$. Lo stesso dicasi per rapporto alla seconda trave BC, e si concluderà, che qualora prescindasi dall'attrito, ed il centro di gravità cada nel punto di mezzo, le condizioni dell'equilibrio si riducono a $p \tan.\phi = p' \tan.\phi'$. Basta dunque *che i pesi stiano in ragione inversa delle tangenti degli angoli colla verticale*.

ARTICOLO II

Si vuol dimostrare = *Che ogni equazione algebrica determinata, ha una risolvente reale o immaginaria*.

§. 1. Tutti i Geometri hanno ravvisato il teorema onde si tratta, come il principio fondamentale della teoria dell'equazioni algebriche. Alcuni, come il Dottor *Tommasini* (*Introductio in Alg. T.* 2, §. 407) l'hanno ammesso come conseguenza dell'ipotesi da cui l'equazione stessa deriva, come se qualunque ipotesi anche contradittoria, dovesse di sua natura verificarsi: altri si è contentato di supporlo tacitamente: vi è stato in fine chi ha fatto ogni sforzo, per non lasciarlo senza una qualunque siasi dimostrazione, ma con successo, per quanto a noi sembra, del tutto infelice. Egli è un fenomeno analitico, per lunga esperienza riconosciuto, che le verità semplici e fondamentali, sieno per ordinario le più astruse e recondite; e che l'umano ingegno non soglia giungere a dimostrarle, se non dopo avere stabilite sulla loro esistenza ipotetica o induttiva, le principali verità che ne dipendono.

Il Sig. *Lacroix* nel suo Complemento dell'Algebra (p. 116) comincia dal confessare, che *si l'on n'a pas encore de démonstration complète de la proposition dont il s'agit, on peut du moins donner des raisons assez fortes, pour qu'elle ne soit plus douteuse;* ed il suo discorso è sì specioso, che il Signor *Francoeur* (*Cours complet de Mathém. T.* 2, §. 449) non ha esitato a prevalersene come di una vera dimostrazione. Compendiandolo com'è suo stile, egli si esprime presso a poco in questi termini.

L'equazioni di grado pari, aventi l'ultimo termine positivo, sono le sole per cui sia incerta l'esistenza di una risolvente reale, perchè non si sanno trovare generalmente due valori d' x, i quali diano una variazione di segno nella somma de'termini. Chiamando p, q, r ec. i coefficienti della proposta, u l'ultimo suo termine, con mutare il segno di u si ha un'equazione con due risolventi reali, che debbon esser funzioni di p, q, r ec. u, perchè il loro valore varia con quello de'coefficienti. Dunque si può supporre $x = f(p, q, r \ldots u)$. Ma lo spirito del calcolo algebrico, il quale è indipendente dai valori particolari che possono darsi alle quantità, prova che mutando il segno di u, la formola $x = f(p, q, r \ldots -u)$ dee soddisfare alla proposta, ancorchè per la mutazione del segno di u sia sotto una forma immaginaria, e per conseguenza una semplice espressione analitica o un simbolo, atto unicamente ad annullare la somma de'termini. Dunque ogni equazione algebrica determinata ha per lo meno una risolvente reale o immaginaria.

Siccome tutta la dimostrazione si fonda sull'esistenza della formola $x = f(p, q, r \ldots u)$, e questa non può supporsi se prima non si prova possibile la generale soluzione dell'equazioni algebriche di qualunque grado, i soli dubbj proposti dal Sig. *Lacroix* (*Complem. cit.*, §. 56) basterebbero per distruggerla, qualora il Sig. Cav. *Ruffini* non avesse rigorosamente provata l' impossibilità della soluzione onde si tratta (*Soc. Ital.*, *T. X*). Tolta di mezzo la dimostrazione del Sig. *Francoeur*, si fa luogo a quella che passiamo ad esporre, e per cui ci giova premettere le seguenti nozioni.

I. Se in una funzione delle variabili y, z, espressa per $F(y, z)$ si fa variare successivamente y e z, con mettervi $y + k$ per y, $z + h$ per z, si ottiene la stessa funzione variata $F'(y, z)$, la quale nasce dalla sostituzione simultanea di $y + k$ per y, e di $z + h$ per z. Infatti, siccome le variabili y, z sono per ipotesi fra loro indipendenti, la variazione di una non può influire nella variazione dell'altra.

II. Sostituendo $z + h$ per z in sen.z e cos.z, si ottiene
$\text{sen.}(z+h) = \text{sen.}z \cos.h + \text{sen.}h \cos.z$, $\cos.(z+h) = \cos.z \cos.h - \text{sen.}z\,\text{sen.}h$;
ma $\text{sen.}h = h - \frac{h^3}{2.3}$ ec., $\cos.h = 1 - \frac{h^2}{1.2}$ ec.

Dunque se h sia una quantità infinitamente piccola, onde possano trascurarsi le sue potenze superiori alla prima, si ha

$$\text{sen.}(z+h)=\text{sen.}\,z+h\cos.\,z,\ \cos.(z+h)=\cos.\,z-h\,\text{sen.}\,z:$$

e se in vece di z abbiasi mz, e pongasi $z+h$ per z, risulta

$$\text{sen.}(mz+mh)=\text{sen.}\,mz+mh\cos.\,mz,\ \cos.(mz+mh)=\cos.\,mz-mh\,\text{sen.}\,mz.$$

III. Avendosi due quantità finite A, B, si possono trovare due quantità infinitesime k, h, tali, che stia $A:B::k:h$. Infatti $A:B::\frac{A}{\infty}:\frac{B}{\infty}$.

Ciò posto sia $x^{2m}+px^{2m-1}+qx^{2m-2}\ldots+\pi x+\zeta=0$ e s'indichi per δ una quantità prossimamente minore della minima differenza fra le sue risolventi. Avendo riconosciuto coi noti metodi che la proposta non abbia nè risolventi eguali, nè risolventi razionali, si ponga δ, 2δ, 3δ ec. per x, fino ai limiti delle massime risolventi, positiva e negativa. Se si trova una variazione di segno ne' risultati, fra i numeri sostituiti per x vi è una risolvente reale. Suppongasi dunque di non incontrare alcuna variazione di segno, e siccome qualunque risolvente della proposta, se esiste, dev' essere immaginaria, pongasi $x=\lambda(\cos.\,\phi+\text{sen.}\,\phi\sqrt{-1})$. La trasformata è $P+Q\sqrt{-1}=0$, dove

$$P=\lambda^{2m}\cos.\,2m\phi+p\lambda^{2m-1}\cos.(2m-1)\phi+q\lambda^{2m-2}\cos.(2m-2)\phi\ldots+\pi\lambda\cos.\,z+\zeta$$
$$Q=\lambda^{2m}\,\text{sen.}\,2m\phi+p\lambda^{2m-1}\,\text{sen.}(2m-1)\phi+q\lambda^{2m-2}\,\text{sen.}(2m-2)\phi\ldots+\pi\lambda\,\text{sen.}\,\phi$$

e tutto si riduce a provare che vi è sempre un valore di λ e di ϕ, il quale dà simultaneamente $P=0$, $Q=0$.

Sieno λ', ϕ' due qualunque determinati valori di λ, ϕ; e P, Q divengano respettivamente P', Q'. Pongasi $\lambda'+k$ per λ', $\phi'+h$ per ϕ', essendo k, h quantità infinitesime: si trascurino le potenze di k, h, superiori alla prima, e chiamando P'', Q'' ciò che respettivamente divengono P', Q', si avrà (n.° I e n.° II)

$$P''=P'+\left[2m\lambda'^{2m}\cos.\,2m\phi'+(2m-1)p\lambda'^{2m-1}\cos.(2m-1)\phi'\ldots+\pi\lambda'\cos.\,\phi'\right]\frac{k}{\lambda'}$$
$$-[2m\lambda'^{2m}\,\text{sen.}\,2m\phi'+(2m-1)p\lambda'^{2m-1}\,\text{sen.}(2m-1)\phi'\ldots+\pi\lambda'\,\text{sen.}\,\phi']h,$$

$$Q''=Q'$$

$$Q''=Q'+\left[2m\lambda'^{2m}\,\mathrm{sen}.\,2m\phi'+(2m-1)p\lambda'^{2m-1}\,\mathrm{sen}.\,(2m-1)\phi'\ldots+\pi\lambda'\,\mathrm{sen}.\,\phi'\right]\frac{h}{\lambda'}$$
$$+\left[2m\lambda'^{2m}\cos.\,2m.\phi'+(2m-1)p\lambda'^{2m-1}\cos.\,(2m-1)\phi'\ldots+\pi\lambda'\cos.\,\phi'\right]k.$$

Noi diciamo che il valore ed il segno di k, h, si possono prender tali, che P'', P'; Q'', Q' risultino del medesimo segno; che sia $P''<P'$, $Q''<Q'$, e che le differenze $P'-P''$, $Q'-Q''$ sieno infinitesime. Pongasi

$$2m\lambda'^{2m}\cos.\,2m\phi'+(2m-1)p\lambda'^{2m-1}\cos.\,(2m-1)\phi'\ldots+\pi\lambda'\cos.\,\phi'=\mathrm{M}$$
$$2m\lambda'^{2m}\,\mathrm{sen}.\,2m\phi'+(2m-1)p\lambda'^{2m-1}\,\mathrm{sen}.\,(2m-1)\phi'\ldots+\pi\lambda'\,\mathrm{sen}.\,\phi'=\mathrm{N}$$

onde si abbia

$$P''=P'+\frac{\mathrm{M}k}{\lambda'}-\mathrm{N}h,\ Q''=Q'+\frac{\mathrm{M}h}{\lambda'}+\mathrm{N}k.$$

Se $P'>0$ e $Q'>0$ bisogna che $\frac{\mathrm{M}k}{\lambda'}-\mathrm{N}h$, $\frac{\mathrm{M}h}{\lambda'}+\mathrm{N}k$ sieno quantità infinitesime negative, e viceversa se $P'<0$, e $Q'<0$: condizioni che si verificano in ambedue i casi con fare

$$\left\{\frac{\mathrm{M}k}{\lambda'}-\mathrm{N}h=\pm\alpha,\ \frac{\mathrm{M}h}{\lambda'}+\mathrm{N}k=\pm\alpha'\right\}\ldots(\mathrm{I})$$

essendo α, α' quantità infinitesime, ed il segno essendo qual si richiede dalle circostanze. Le stesse equazioni sussidiarie (I) soddisfano al caso che una delle quantità P', Q' sia positiva, l'altra negativa.

Ottenuti i nuovi valori di P, Q, cioè $P''(<P')$, $Q''(<Q')$ procedasi ad una seconda trasformazione, per cui da P'' si derivi $P'''<P''$, da Q'' si derivi $Q'''<Q''$. Indicando $\lambda'+k$ per λ'', $\phi'+h$ per ϕ'', e rappresentando per M', N' ciò che respettivamente divengono M, N, quando vi si pone λ'', ϕ'' per λ', ϕ', è chiaro che si avrà

$$P''-P'''=P'-P'',\ Q''-Q'''=Q'-Q''$$

purchè s'istituiscano l'equazioni

$$\left\{\frac{\mathrm{M}'k'}{\lambda''}-\mathrm{N}'h'=\pm\alpha,\ \frac{\mathrm{M}'h'}{\lambda''}+\mathrm{N}'k'=\pm\alpha'\right\}\ldots(\mathrm{II})$$

e quindi si deduca il valore di k' ed h'.

Suppongasi protratta all'infinito questa serie di successive trasformazioni, e per fissare le idee si suppongano P' e

Q' positivi e $P' < Q'$. Avendosi $P'' = P' - a$, $P''' = P'' - a = P' - 2a$, $P'''' = P''' - a = P'' - 2a = P' - 3a$, ec. si dee giungere ad un punto in cui si trovi $P^{(n)} = 0$, e però esiste un valore di λ e di φ il quale dia $P = 0$.

Affinchè le quantità P', Q', mediante i successivi decrementi svaniscano insieme, si richiede che la maggiore decresca per gradi proporzionalmente più forti; e qualunque sia il rapporto che per quest'effetto dee sussistere fra a ed a', è certo che tal rapporto è possibile. Pongasi che a' abbia ad a il richiesto rapporto, e risolvendo l'equazioni (I) si avrà il corrispondente valore infinitesimo di k e di h. L'equazioni (II) daranno il corrispondente valore infinitesimo di k' e di h', e così in seguito. Spingendo all'infinito la serie delle indicate trasformazioni, si giungerà necessariamente ad ottenere l'evanescenza simultanea di P e di Q. Dunque vi è sempre un valore di λ e di φ, che sostituito nell'espressione d'x verifica la proposta: per conseguenza ogni equazione algebrica determinata ha per lo meno una risolvente reale o immaginaria.

ARTICOLO III

Ricerca delle risolventi razionali dell'equazioni di 3.°, 4.° e 5.° grado, le quali sieno prive del 2.° termine, o tali che il coefficiente di detto termine sia divisibile pel massimo esponente dell'incognita: dove della estrazione di $\sqrt[3]{(a \pm \sqrt{b})}$, *e della maniera di ottenere i fattori razionali componenti un equazione di 5.° grado, le di cui risolventi sieno tutte irrazionali.*

§. 1. Essendo $x^3 + px + q = 0$ un'equazione cubica qualunque, i Geometri hann'osservato, che quando si ha $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3 = 0$ due delle sue risolventi sono eguali.

Partendo dall'ipotesi contraria, cioè che due risolventi sieno eguali, pongasi

$x^3+px+q=(x^2\pm 2fx+f^2)(x\mp 2f)=x^3-3f^2x\mp 2f^3=0$. Risulta $-3f^2=p, \mp 2f^3=q$; quindi $f=\sqrt{-\frac{1}{3}p}=\sqrt[3]{\mp\frac{1}{2}q}$, e fatta la potenza sesta si ha $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3=0$ come sopra: si ha inoltre $p<0$, altrimenti $\frac{1}{4}q^2$ avrebbe un valore negativo ed f sarebbe immaginario.

I criterj coi quali si può decidere dell'eguaglianza di due risolventi eguali di un'equazione cubica della forma
$x^3+px+q=0$, sono dunque $p=-3m^2, q=\pm 2m^3$.

Teor. Se due risolventi di un'equazione cubica come sopra sono eguali, tutte le sue risolventi sono razionali.

Infatti perchè sia f irrazionale, bisogna che tali sieno ambedue le quantità $\sqrt{-\frac{1}{3}p}, \sqrt[3]{\mp\frac{1}{2}q}$. Ma il quadrato di queste dà il numero razionale $-\frac{1}{3}p=\sqrt[3]{\frac{1}{4}q^2}=\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}\right)^3}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}}=$ $\frac{\frac{1}{2}q}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}}$ numero irrazionale. Dunque ec.

§. 2. Non verificandosi i criterj delle risolventi eguali, suppongasi che la proposta abbia una risolvente razionale $\pm f$, e si faccia
$x^3+px+q=(x^2\pm fx+g)(x\mp f)=x^3+(g-f^2)x\mp gf=0$. Il confronto dà $g-f^2=p$, $\mp gf=q$. Dunque si divida q in due fattori: si prendano per f, g, quelli che danno $g-p=f^2$, ed il valore di f è la risolvente cercata.

La riprova de' valori reciproci di q diviene anche più facile e breve, osservando 1.° che se $p>0$, g dev'essere $>p$; e se $p<0$, il massimo valor negativo di g dev'essere $<p$.

2.° Che se $q>0$ il segno di g è contrario a quello di f: è lo stesso se $q<0$. Basta avvertire che il segno di f si desume dall'equazione ipotetica $x=\pm f$.

3.° Il divisore estremo q rimane escluso quasi sempre, perchè non può essere $x=\pm q$ se non abbiasi p negativo ed insieme $p\pm 1$ un quadrato, dove si ha il segno $+$ se q è negativo e viceversa. È questa una conseguenza della sostituzione di $\pm q$ per x nell'equazione $x^3+px+q=0$.

ESEMPIO I. Abbiasi $x^3 - 21x - 20 = 0$. Risciolgo 20 ne' fattori 4, 5; 2, 10, escludendo gli estremi 1, 20; il primo perchè troppo piccolo, il secondo perchè 21 + 1 non è un quadrato.

Posto $f = 5$ osservo che $g + 21 = f^2$ diviene $4 + 21 = 5^2$ e ne deduco $x = 5$. Il fattore $x^2 \pm fx + g$ si cangia in $x^2 + 5x + 4$ e dà $x = -1$, $x = -4$.

ESEMPIO II. Sia $x^3 - 17x + 40 = 0$. I più semplici divisori di 40 essendo 1, 2, 4, 5, 8, sperimento i primi tre, e veggo subito che non può farsi $f = \pm 1$, ± 2, ± 4, perchè il 2.° membro della caratteristica $g + 17 = f^2$ risulta eccessivamente minore del primo. Pongo $f = 5$, e siccome trovo $8 + 17 = 5^2$, ne deduco $x = -5$. Il fattor quadratico è $x^2 - 5x + 8$.

ESEMPIO III. Suppongasi data l'equazione $x^3 + 28x + 64 = 0$. La caratteristica $g - 28 = f^2$ dimostra che il minimo valore di g non può esser < 29. Dunque non si può assumer per g altro divisore che 32. Ma $32 - 28 = 2^2$, e -2 verifica la proposta. Dunque $x = -2$.

ESEMPIO IV. L'equazione assegnata sia $x^3 - 96x - 576 = 0$, che per essere $p < 0$ non è (§. 2, n.° I°) pel nostro metodo delle più vantaggiose. Cominciando dalla ricerca de' più semplici divisori di 576, trovo 1, 2, 4, 6, 8, 9, 12. Quindi escludo i divisori 1, 576; il primo perchè troppo piccolo, il secondo perchè 96 + 1 non è un quadrato, e passo a provare alternativamente per f e g nell'equazione $g + 96 = f^2$ i divisori reciproci 2, 288; 3, 192; 4, 144; 6, 96: ma siccome g non può avere alcun valore negativo $= 0 > 96$, avverto di prendere positivamente per g i numeri 288, 192, 144, 96.

Un brevissimo sperimento dimostrandomi che le prime cinque coppie di divisori sono inutili, provo le due coppie susseguenti 8, 72; 9, 64, e queste essendo parimente inutili, pongo $f = 12$, $g = 48$. Il risultato è $48 + 96 = 12^2$. Dunque $x = 12$. Ecco il quadro delle operazioni che sono necessarie pel metodo de' divisori. (*Vedi Tavola*)

Tavola che dovrà collocarsi tra le pag. 244, 245 della Parte I del Tomo XVI.

Indicando per a un divisore di q, abbiamo

Valori di a	576	288	192	144	96	72	64	48	36	32	18	16	12	9	8	6	4	3	2	1
Valori di $\frac{q}{a}$	1	2	3	4	6	8	9	12	16	18	32	36	48	64	72	96	144	192	288	576
Valori di $\frac{q}{a}+p$	−95	−94	−93	−92	−90	−88	−87	−84	−80	−78	−64	−60	−48	−32	−24	0	48	96	192	480
Valori di $\left(\frac{q}{a}+p\right):a$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	−4	*	−3	0	12	32	96	480
Valori di $\frac{\left(\frac{q}{a}+p\right):a+o}{a}$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	3	*	48	480

Valori di a	−1	−2	−3	−4	−6	−8	−9	−12	−16	−18	−32	−36	−48	−64	−72	−96	−144	−192	−288	−576
Valori di $\frac{q}{a}$	−576	−288	−192	−144	−96	−72	−64	−48	−36	−32	−18	−16	−12	−9	−8	−6	−4	−3	−2	−1
Valori di $\frac{q}{a}+p$	−672	−384	−288	−240	−192	−168	−160	−144	−132	−128	−114	−112	−108	−105	−104	−102	−100	−99	−98	−97
Valori di $\left(\frac{q}{a}+p\right):a$	672	192	72	60	32	21	*	12	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Valori di $\frac{\left(\frac{q}{a}+p\right):a+o}{a}$	−672	−96	−24	15	*	*	*	−1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

Il divisore 12 che verticalmente corrisponde al numero -1, da cui resta verificata l'ultima condizione $\frac{\left(\frac{q}{a}+p\right):a}{a}+1=0$ ci dà la risolvente richiesta $x=12$.

Esempio V. Abbiasi finalmente $x^3 - 60x - 1600 = 0$. Siccome $p > 0$ e $q < 0$, g dev'essere > 60, f positivo e < 27. Basta dunque cercare i divisori di 1600 minori di 27, che sono 1, 2, 4, 8, 10, 16, 20, e che danno respettivamente $g = 1600, 800, 400, 200, 160, 100, 80$. Si vede subito che i primi quattro non convengono alla caratteristica $g - 60 = f^2$; che il 5.° dà $160 - 60 = 10^2$, e però $x = 10$. (*)

§. 3. Quando la formola Cardanica è reale, nel qual caso una soltanto può essere la risolvente razionale della proposta, il valore di tal risolvente, se esiste, trovasi anche con estrarre successivamente le respettive radici quadrata e cubica, indicate dalla formola $\sqrt[3]{(a \pm \sqrt{b})}$. Così da $x^3 + 3x - 14 = 0$ si ritrae $x = \sqrt[3]{(7 + \sqrt{50})} + \sqrt[3]{(7 - \sqrt{50})} = \sqrt[3]{(7 + 7{,}071)} + \sqrt[3]{(7 - 7{,}071)} = \sqrt[3]{14{,}071} + \sqrt[3]{-0{,}071} = 2{,}4\ldots - 0{,}4\ldots = 2$.

Da $x^3 + 6x - 20 = 0$ si deduce $x = \sqrt[3]{(10 + 6\sqrt{3})} + \sqrt[3]{(10 - 6\sqrt{3})} = \sqrt[3]{(10 + 6 \times 1{,}732)} + \sqrt[3]{(10 - 6 \times 1{,}732)} = \sqrt[3]{20{,}392} + \sqrt[3]{-0{,}392} = 2{,}7\ldots - 0{,}7\ldots = 2$.

Questo metodo, che è molto facile nel caso rarissimo che b sia un quadrato, ed $a \pm \sqrt{b}$ sieno cubi, come in $x^3 - 9x + 28 = 0$, esige quasi sempre un calcolo fastidioso, che divien tale anche di più, se i numeri a, b contengono delle frazioni; e riesce poi del tutto inutile quando è $b < 0$. Avendosi per esempio l'equazione semplicissima $x^3 - 5x + 12 = 0$, si trova

(*) Per agevolare la supposta riduzione di un'equazione cubica qualunque $Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0$ alla forma $x^3 + px + q = 0$, giova far uso della formola
$x^3 + (AC - 3m^2)x + A(AD - Cm) + 2m^3 = 0$
dove m sta per $\frac{B}{3}$ ed x è $= Ay + m$.

Il numero de' casi in cui si verifica che sia p divisibile per 3, è il terzo di tutti i casi possibili, ed a questo numero deesi aggiungere quello dell'equazioni originariamente prive del 2.° termine. Quindi apparisce quanto esteso sia il numero dell'equazioni da noi contemplate.

$$x=\sqrt[3]{\left(6+\sqrt{\frac{847}{27}}\right)}+\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{\frac{847}{27}}\right)}=\sqrt[3]{(6+5,596)}+\sqrt[3]{0,404}=\sqrt[3]{11,596}+\sqrt[3]{0,404}=2,2\ldots+0,7\ldots$$

espressione dipendente da una serie di otto operazioni, che indica una risolvente razionale 3, ma ci lascia nella necessità di verificarla.

Il metodo del §. 2 è incomparabilmente più semplice e più spedito, poichè l'equazione $g+5=f^2$ si verifica subito con fare $f=3$, $g=4$.

§. 4. Gli autori di elementi algebrici, in vece dell'anzidetto metodo aritmetico, sogliono adoperare nella ricerca delle risolventi razionali l'estrazione algebrica della radice cubica esatta (*).

Noi, quantunque siamo persuasi esser questa un'operazione assolutamente viziosa, ci proponiamo di trattarne, perchè la ricerca di $\sqrt[3]{(a\pm\sqrt{b})}$ può riguardarsi come un problema relativo al calcolo algebrico, necessario al compimento dell'Algebra Trascendente, e perchè siamo d'avviso di poterne perfezionare ulteriormente la soluzione.

Omesso il metodo di tentativo, omai abbandonato, per cui la parte razionale della radice cubica fassi dipendere dalla determinazione di un numero t, il quale renda un quadrato la funzione $\frac{m-t^3c}{3t}$, a noi sembra che uno soltanto sia il metodo attualmente adottato dagli Analisti.

Pongasi $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}=y+\sqrt{t}$, essendo y, t, due numeri razionali da determinarsi. Fatto il cubo si deduce

$$a=y^3+3yt\ldots(1)\qquad \sqrt{b}=(3y^2+t)\sqrt{t}\ldots(2).$$

(*) Fra i moderni *Tommasini* (*Introductio in Alg. Tom. II*, *pag.* 6); *Paoli* (*Elem. d' Alg. Tom. I*, *p.* 110); *Francoeur* (*Cours Compl. de Math. vol.* 2, *pag.* 79 etc.). *Bossut* si serve unicamente del metodo del §. 3, ma non lo adopera nella ricerca di una risolvente razionale. *Lacroix* tralascia ogni applicazione della teoria dell'equazioni cubiche; omissione, che per essere affatto nuova tra gli autori di elementi, ci dà luogo di sospettare ch'egli non fosse contento de' metodi pratici conosciuti.

La differenza de' quadrati dà $a^2 - b = (y^2 - t)^3$, cioè $y^2 - t = \sqrt[3]{(a^2 - b)}$. Affinchè y, t sieno razionali dev' essere $a^2 - b = \pm h^3$ cubo razionale. Dunque $t = y^2 \mp h$, e l'equazione (I) diventa $4y^3 \mp 3hy - a = 0 \ldots (\mathrm{Y})$; equazione, che se ha luogo la radice ipotetica, dee avere una risolvente razionale, per la di cui determinazione si ricorre al metodo de' divisori. (*)

§. 5. Prima di prendere in esame l'esposto metodo, ci giova stabilire alcune utili verità, ed osservare se possa vantaggiosamente estendersi ai casi, in cui $a + \sqrt{b}$ non è un cubo.

I. Siccome deesi avere $a^2 - b = \pm h^3$ tutti i binomj cubi della forma $a \pm \sqrt{b}$ sono compresi nella formola $a \pm \sqrt{(a^2 \mp h^3)}$. Ma una formola di questa natura suppone un' equazione cubica $z^3 \pm 3hz - 2a = 0$ e viceversa. Dunque la ricerca della radice cubica esatta di $a \pm \sqrt{b}$, e la ricerca di una risolvente razionale dell' equazione $z^3 \pm 3hz - 2a = 0 \ldots (\mathrm{Z})$ sono due problemi che reciprocamente dipendono l'uno dall'altro. Lo stesso risulta dall' ispezione della (Y), la quale con fare $2y = z$ si cangia nella (Z), e sostituendo il valore di h diviene $z^3 - 3\sqrt[3]{(a^2 - b)} \times z - 2a = 0$, equazione da cui deriva $z = \sqrt[3]{(a + \sqrt{b})} + \sqrt[3]{(a - \sqrt{b})}$.

Qualunque volta la ricerca del valore esatto di $\sqrt[3]{(a + \sqrt{b})}$ *debba servire alla soluzione di un' equazione cubica, il metodo sopra esposto ci riconduce dunque con circolo vizioso al punto da cui siamo partiti.*

II. *Se vien data un' equazione cubica qualunque* $x^3 + px + q = 0$, *che abbia almeno una risolvente razionale, esiste sempre la radice cubica esatta del binomio* $-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}$

(*) Il metodo proposto dal P. *Boscovich* (*Elem. Univ. Math. T. II*, *p.* 145. *Venet.* 1757) sembra del tutto diverso dal precedente, ma se attentamente si considera l'equazione finale del suo calcolo, cioè $u^3 - 6au^2 + (276 - 15a^2)u - 8a^3 = 0$, si vede ch'ella equivale ad un' incomoda trasformata della (Y). Infatti con porre $u = o + 2a$ si ottiene $o^3 - 27(a^2 - b)o - 27(a^2 - b) \times 2a = 0$, ovvero, perchè $a^2 - b = h^3$, $o^3 - 27h^3 o - 2a \times 27h^3 = 0$, equazione che si cangia nella (Y) purchè si faccia $o = 2 . 3hy$.

sotto la forma $y+\sqrt{t}$, poichè la determinazione di questa radice non dipende che dall'esistenza di una risolvente razionale della (Z) identica colla proposta. (*)

Qualora il binomio dato sia $a+\sqrt{-b}$, e la (Z) abbia tutte le risolventi razionali, i tre valori della radice $y+\sqrt{t}$ sono immaginarj come dev'essere; e l'immaginarietà deriva dall'essere $t=y^2-\sqrt[3]{(a^2+b)}$, e $\sqrt[3]{(a^2+b)}$ sempre maggiore del quadrato del massimo valore d'y. Sappiamo infatti dalla teoria dell'equazioni cubiche, che nell'equazione $x^3-px\pm q=0$, le di cui risolventi sieno tutte reali, è $x<2\sqrt{\frac{1}{3}p}$. Dunque nella (Z) si ha $z^2<4h<4\sqrt[3]{(a^2+b)}$. Ma $z^2=4y^2$. Dunque $y^2<\sqrt[3]{(a^2+b)}$.

III. *La formola Cardanica è inutile per determinare le risolventi razionali, ove si tratti del caso irriducibile.* Infatti nulla si ottiene coll'estrazione algebrica della radice cuba, perchè si cade in un circolo vizioso; a nulla giova il metodo aritmetico del §. 3 perchè $\sqrt{-b}$ non può estrarsi: nè le serie derivanti dallo sviluppo della potenza $\frac{1}{3}$ di $a+\sqrt{-b}$, $a-\sqrt{-b}$, sono di alcun vantaggio, perchè altro non danno generalmente che delle semplici approssimazioni.

IV. Il valore di $\sqrt[3]{(a\pm\sqrt{b})}$ essendo necessariamente triplice, è impossibile determinarlo con un metodo diretto, il quale sia indipendente da un'equazione di 3.° grado.

V. Essendo a, b numeri intieri, per qualunque valore razionale dispari di z si ha y sotto la forma $\frac{2M+1}{2}$, e $\sqrt{t}$ $[=\sqrt{(y^2-h)}]=\frac{1}{2}\sqrt{[(2M+1)^2-4h]}=\frac{1}{2}\sqrt{t'}$ purchè sia ϕ numero dispari. Dunque, sebbene a, b sien numeri intieri, può aversi $\sqrt[3]{\left(a+\sqrt{b}\right)}=\frac{z+\sqrt{t'}}{2}$ ... (I), proposizione gratuitamente contradetta da qualche illustre Geometra, e segnatamente dal P. *Boscovich* (*Op. cit. Tom. II, p.* 147).

(*) Male dunque si appose il P. *Boscovich* (*Op. cit. p.* 131) ove disse: *Sæpe autem radicis cubicæ extractio haberi non poterit, licet æquatio proposita rationales radices habuerit.*

Istituendo subito l'equazione (I) si giunge alla (Z) senza passare per la (Y). L'equazione ipotetica (I) è dunque preferibile.

VI. Affinchè due risolventi dell'equazione $x^6+fx^3+g=0$ sieno della forma $y\pm\sqrt{t}$, bisogna che sia $g=h^3$, e che l'equazione sussidiaria $z^3-3hz+f=0$ abbia almeno una risolvente razionale. Infatti la proposta ci dà

$$x=\sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}f\pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}f^2-g\right)}\right]}.$$

§. 6. Se $a+\sqrt{b}$ non è un cubo, sia n un numero intiero o fratto, tale che risulti $\sqrt[3]{[n(a+\sqrt{b})]}=y+\sqrt{t}$. Indicando $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\left(=\sqrt[3]{\frac{1}{n}}\right)$ per $\sqrt[3]{N}$, abbiamo $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}=(y+\sqrt{t})\sqrt[3]{N}$, e l'equazioni (1), (2) del §. prec. divengono

$$a=N(y^3+3yt),\quad \sqrt{b}=N(3y^2+t\sqrt{t}).$$

Da queste $y^2-t=\sqrt[3]{\frac{a^2-b}{N}}=\frac{\sqrt[3]{(a^2-b)N}}{N}$, e però si vede che per determinare il valore di n, basta trovare un numero N il quale renda a^2-b un cubo; numero che sempre esiste, perchè tali sono $(a^2-b)^2$, $(a^2-b)^{-1}$. Per altro, siccome richiedesi per m il più semplice fra i valori possibili, e per la ricerca di questo valore più semplice non evvi alcun metodo, tutto il successo dipende dalla dubbia scorta di un fastidioso tentativo. Trovato il più semplice fra i valori di n, valore che non può essere un cubo, altrimenti non sarebbe atto a trasformare in un cubo il binomio dato, la radice dimandata comparisce sotto la forma $(y+\sqrt{t})\sqrt[3]{N}$. Ma questa esige l'estrazione di una radice quadrata e di una radice cubica, e poi una somma ed una moltiplicazione, mentre per determinare aritmeticamente il valore di $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}$ basta l'estrazione delle due radici ed una somma. Dunque, anche nel caso il più favorevole che sia N un numero intiero, il metodo del §. 3 non si estende nè con facilità nè con vantaggio ai casi in cui $a+\sqrt{b}$ non sia un cubo.

Diciamo adesso, che il metodo di cui si tratta non va esente da ogni difetto, neppure nel caso che il binomio dato sia un cubo: 1.° perchè il metodo de' divisori, da cui si fa dipendere la ricerca de' valori d'y, è laborioso e prolisso: 2.° perchè la forma dell'ausiliare (Y) è sovente inopportuna. Infatti, qualunque volta la (Z) ha una sola risolvente razionale dispari, la (Y) ha una sola risolvente razionale fratta; e quando la (Z) ha tutte le risolventi razionali dispari, tutte le risolventi della (Y) sono razionali fratte. In ambedue questi casi riesce del tutto inutile il sottoporre la (Y) al metodo de' divisori. Così l'equazione (Y) relativa al binomio $-20+\sqrt{\frac{5887}{27}}$ è $4y^3-17y+20=0$, e non ha nessuna risolvente razionale intiera. Prevalendoci della (Z) che è $z^3-17z+40=0$, si trova subito (§. 2, es. 2) $z=-5$. Dunque $y=-\frac{5}{2}$, e siccome $h=\frac{17}{3}$ ne deriva $t\left(=\frac{25}{4}-\frac{17}{3}\right)=\frac{7}{12}$, e la radice è $-\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{7}{12}}$. (*)

§. 7. In seguito di quanto si è fin qui esposto si può adesso concludere, che per ottenere il valore esatto di $\sqrt[3]{+(a\sqrt{b})}$ giova istituire l'equazione ipotetica $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}=\frac{z+\sqrt{t}}{2}$: dedurne cubando $8a=z^3+3zt\ldots(a)$, $8\sqrt{b}=(3z^2+t)\sqrt{t}$. Quindi $(8a)^2-(8\sqrt{b})^2=(z^2-t)^3$, cioè $z^2-t=4\sqrt[3]{(a^2-b)}$ e $t=z^2-4h$. Così l'equazione (a) diventa $4z^3-12hz-8a=0$, e divisa per 4 coincide colla (Z), della quale si hanno facilmente (§. 2) le risolventi razionali, ed in conseguenza

$$\sqrt[3]{\left(a+\sqrt{b}\right)}=\frac{z}{2}+\sqrt{\left[\frac{z^2}{4}-\sqrt[3]{\left(a^2-b\right)}\right]}.$$

(*) Data un'equazione $kx^m+\text{ec.}=0$, prima di applicarle il metodo de' divisori, giova liberarla dal coefficiente k, altrimenti può succedere, che l'applicazione di detto metodo non porti a verun risultato, quantunque la proposta abbia più di una risolvente razionale, reperibile dopo la trasformazione indicata.

In pratica basta calcolare il valor di $h\,[=\sqrt[3]{(a^2-b)}\,]$ per sostituirlo nella (Z) che si risolve come sopra.

Questo metodo, il quale come ognun vede, altro non ha di comune con quello del §. 4, che l'artifizio con cui si ottiene il valore di t, ne differisce 1.° nell'equazione d'ipotesi: 2.° nell'equazione finale: 3.° nella maniera di ottenere le risolventi razionali dell'equazione finale.

Per conseguire anche più speditamente l'intento, gioverà 1.° osservare, che quando a sia intiero e $b>0$ non può supporsi $z=2a$, poichè l'equazione (a) diverrebbe $8a=8a^3+bat$, cioè $1=a^2+\frac{b}{4}t$, dove t ha necessariamente il segno di b. In moltissimi altri casi, l'esclusione del divisore $2a$ si desume in un istante dal segno, o dal valore del coefficiente $3h$ della (Z) (§. 2, n.° 3). 2.° Con mettere a prova la prima coppia di divisori reciproci appena ottenuta, quindi la seconda ec., poichè in questa guisa spesso ci riuscirà dispensarci dalla ricerca di una parte di tali divisori: circostanza favorevole che sempre ha luogo quando è $p>0$ (§. 2, n.° I°). Le seguenti applicazioni, che non sono scelte fra le più facili, faranno sempre meglio conoscere l'opportunità del nostro metodo, anche nel caso che i numeri a, b siano fratti; caso pel metodo comune assai svantaggioso, perchè riducendo la (Y) a forma intiera, l'ultimo suo termine notabilmente si accresce.

Esempio 1.° Si dimanda $\sqrt[3]{(10+\sqrt{108})}$. Abbiamo $h=\sqrt[3]{-8}=-2$, e la (Z) è $z^3+6z-20=0$. Esclusi i divisori 1, 20 perchè $p>0$ (§. 2, n.° 3) pongo $20=2\times10$ e fo $f=2$, $g=10$. Siccome $g-6=f^2$ resta verificata, deduco $\frac{z}{2}=1$, $t\,[=1^2-(-2)]=3$, $\sqrt[3]{(10+\sqrt{108})}=1+\sqrt{3}$.

Esempio 2.° Si vuole $\sqrt[3]{(81+\sqrt{6534})}$. Essendo $a^2-b=27$ e però $h=3$ la (Z) è $z^3-9z-162=0$, e si tratta di verificare $g+9=f^2$. Escludo subito i divisori 1, 162; il primo perchè l'ispezione della (Z) lo dimostra falso; il secondo perchè a è intiero e $b>0$. Suppongo $162=2\times81$, ma l'equazione $g+9=f^2$ indica subito la falsità di questi valori. La terza coppia di divisori reciproci essendo $6, 27$, pongo $f=6$ e trovo $27+9=6^2$. Dunque $\frac{z}{2}=3$, $t=3^2-3=6$, $\sqrt[3]{(81+\sqrt{6534})}=3+\sqrt{6}$.

ESEMPIO 3.° Si cerca $\sqrt[3]{\left(\frac{32}{135}+\sqrt{\frac{64}{1125}}\right)}$. Essendo $h=\sqrt[3]{\left[\left(\frac{32}{135}\right)^2-\frac{64}{1125}\right]}=-\frac{4}{45}$, si ha $z^3+\frac{4}{15}z-\frac{64}{135}=0$. Pongo $15z=u$ ed ottengo $u^3+60u-1600=0$. Dunque (§. 2 sul fine) $u=10$, $\frac{z}{2}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$, $t=\frac{1}{9}+\frac{4}{15}=\frac{1}{5}$ ed $\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{1}{5}}$ è la radice richiesta. (*)

§. 8. La ricerca delle risolventi razionali ed eguali di un'equazione di 4.° grado $x^4+px^2+qx+r=0$, per mezzo del noto metodo del massimo comune divisore, essendo di sua natura molto incomoda, e ordinariamente soggetta ad un inutile tentativo; e la ricerca delle risolventi razionali diseguali per mezzo della ridotta $s^3+2ps^2+(p^2-4r)s-q^2=0$, esigendo talvolta un prolisso e fastidioso calcolo, o perchè sia troppo grande l'ultimo termine q^2, o perchè troppo grandi sieno i coefficienti di s, s^2, e grande insieme il valore de' divisori quadrati di q^2; ed essendo, come in seguito dimostreremo, la suddetta ricerca impossibile col metodo generale, quando la proposta abbia una sola risolvente razionale, noi ci proponiamo di rintracciare le risolventi razionali eguali e diseguali, con un metodo semplice, che direttamente conduca all'esatto valore delle medesime.

Nell'ipotesi che la proposta abbia tre risolventi eguali,

(*) Se ambedue i termini del binomio sieno affetti da irrazionalità quadratica, giova ridurre i radicali alla più semplice espressione, e poi moltiplicare e dividere tutto il binomio pel cubo di uno de' suoi radicali. Così $\sqrt{243}+\sqrt{242}=9\sqrt{3}+11\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{3}(9\sqrt{3}+11\sqrt{2})}{3\sqrt{3}}=\frac{81+33\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}$, e la radice è $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

può supporsi

$$x^4+px^2+qx+r=(x^3\mp 3fx^2+3f^2x\mp f^3)(x\pm 3f),\ \text{cioè}$$

$$x^4+px^2+qx+r=x^4-6f^2x^2\pm 8f^3x-3f^4.$$

Dunque l'equazione data dev'essere $x^4-px^2\pm qx-r=0$..(A) dove deesi avere $-q$ se le risolventi eguali sono negative. Il confronto de' termini dà

$$6f^2=p,\ \pm 8f^3=q,\ 3f^4=r.$$

Quindi $\sqrt{\tfrac{1}{6}p}=\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{q}=\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}r}$, ovvero $p^2=12r$, $q^2=\tfrac{8}{27}p^3$. Queste condizioni, unite con quella che risulta dai segni della formola (A), costituiscono i criterj per distinguere se un' equazione di 4.° grado abbia tre risolventi eguali. Verificandosi le predette condizioni si deduce

$$x=\sqrt{\tfrac{1}{6}p},\ x=\sqrt{\tfrac{1}{6}p},\ x=\sqrt{\tfrac{1}{6}p},\ x=-3\sqrt{\tfrac{1}{6}p}.$$

Sia per esempio $x^4-24x^2+64x-48=0$.

Si ha $p<0$ ed $r<0$ 1.ª condizione: poi

$$\sqrt{\tfrac{1}{6}p}\,(=2)=\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{64}=\sqrt[4]{16}.\ \text{Dunque}\ x=2,=2,=2,=-6.$$

Fatto il confronto di $\sqrt{\tfrac{1}{6}p}$, $\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{q}$ come al §. 1, si trova che f dev'essere un numero razionale[*]. Dunque *un' equazione di 4.° grado, che abbia tre risolventi eguali, le ha tutte razionali.*

§. 9. Pongasi che le risolventi eguali sieno due, e però

$$x^4+px^2+qx+r=(x^2\pm 2fx+f^2)(x^2\mp 2fx+g)$$

$$=x^4+(g-3f^2)x^2\pm 2(fg-f^3)x+gf^2\ \ldots\ (B).$$

Ne deriva $gf^2=r$, $\pm 2(fg-f^3)=q$, $g-3f^2=p$, dove i segni inferiori hanno luogo quando le risolventi eguali sono positive. Dalla 1.ª $f^2=\frac{r}{g}$: la 3.ª diviene $g^2-pg=3r$ e dà $g=\frac{p\pm\sqrt{12r+p^2}}{2}$, valore razionale, perchè razionali debbon essere f,g, onde tale sia l'equazione (B) e però la proposta. Trovato g si deduce $f=\sqrt{\frac{r}{g}}$, e se i valori di f,g, verificano l'equazione $\pm 2(fg-f^3)=q$, la proposta ha due risolventi eguali, il di cui valore è f. Le altre si ricavano da $x^2\mp 2fx+g=0$.

Tre sono pertanto i criterj che decidono dell' esistenza di due risolventi eguali: 1.° che $12r+p^2$ sia un quadrato; 2.° che tale sia $\frac{r}{g}$ ed inoltre un numero intiero; 3.° che i valori di g, f, cioè $\frac{p\pm\sqrt{(12r+p^2)}}{2}$, $\sqrt{\frac{2r}{p\pm\sqrt{(12r+p^2)}}}$ verifichino l' equazione $\pm 2(fg-f^3)=q$.

Moltiplicando per f l'equazione $g-3f^2=p$ si deduce $f^3=\frac{f}{3}(g-p)$. Pongasi questa espressione in $-2f^3+2fg=q$, dove si prendono per maggior comodo i segni superiori, e si avrà $f=\frac{3q}{2(p+2g)}$. Dunque *due risolventi di un' equazione di 4.° grado non posson essere uguali senza che sieno razionali*.

Sia $x^4-41x^2+72x+112=0$. Avendo riconosciuto che si ha $12r+p^2=1344+1681=3025=55^2$, deduco $g=-\frac{41}{2}\pm\frac{55}{2}=7$, $f=\sqrt{\frac{112}{7}}=4$, e siccome questi valori sostituiti in $\pm 2(fg-f^3)=q$ danno $\pm 8(7-16)=72$, equazione identica se si prende il segno inferiore, concludo che la proposta ha le due risolventi $x=4$, $x=4$. Le altre due sono comprese in $x^2+8x+7=0$.

Se nella proposta mancasse anche il 3.° termine, il metodo sarebbe anche più spedito. Abbiasi $x^4+4x+3=0$. Siccome $12\times 3+0^2=6^2$ deduco $g=\pm\frac{\sqrt{36}}{2}=\pm 3$, $f=\pm\sqrt{\frac{r}{g}}=\pm 1$, e l'equazione $\pm 2(3-1)=4$ resta verificata con prendere il segno superiore. Dunque $x=-1$, $x=-1$ e poi $x^2+2x+3=0$.

Questo metodo, è come ognun vede, molto più semplice di quello che dipende dalla ricerca del massimo comune divisore, perchè la non esistenza delle risolventi eguali viene spesso indicata dalla mancanza del primo criterio, quasi sempre dalla mancanza de' primi due, e sì l'uno che l'altro con somma facilità si sperimentano.

§. 10. Prima di accingerci alla ricerca delle risolventi razionali diseguali, crediamo a proposito di stabilire le due seguenti proposizioni.

I. Che il metodo generale relativo alla soluzione di un' equazione di 4.° grado, non è atto a somministrare il valore delle risolventi razionali, che nei casi in cui queste sieno due o quattro.

II. Che la soluzione ricavata dal metodo generale è difettosa in tutti quei casi, in cui niuna risolvente della ridotta è un numero quadrato.

Per concepire la verità della prima proposizione, basta osservare che ciascuno de' fattori quadratici componenti la proposta, non può dare che due risolventi razionali, o due risolventi irrazionali. Se la proposta contenga una sola risolvente razionale, non si può dunque averne il valore mediante il metodo generale. È chiaro poi che le risolventi razionali non possono esser tre, altrimenti la proposta sarebbe sotto una forma irrazionale, contro l'ipotesi.

Passando alla seconda proposizione convien riflettere, che quando nessuna risolvente della ridotta è un numero quadrato, i coefficienti de' fattori quadratici sono numeri decimali indefiniti. Eccettuato il caso rarissimo che questi sieno tutti periodici, l'inesattezza de' coefficienti debbe influire nel valore dell'incognita x, valore che risulta anche più inesatto, quando il valore di s non possa ottenersi esattamente.

§. 11. Essendoci assicurati che la proposta equazione di 4.° grado non abbia risolventi eguali, suppongasi che ne abbia una di razionali, e si faccia

$$x^4+px^2+qx+r=(x^3\pm fx^2+gx+h)(x\mp f)=$$
$$x^4+(g-f^2)x^2+(h\mp fg)x\mp fh=0.$$

Dal confronto de' termini simili si ritrae

$$g-f^2=p,\ h\mp fg=q,\ \mp fh=r.$$

Dalla 1.ª $g=p+f^2$. La 2.ª diviene $h\mp pf\mp f^3-q=0$, ossia $f^3+pf\pm(q-h)=0\ldots$ (C) dove il segno superiore si riferisce alla risolvente positiva $x=f$: l'inferiore alla negativa $x=-f$. Si divida r in due fattori e si pongano in (C), uno per f, l'altro per h. S'ella resta verificata, il valore di f è una risolvente razionale della proposta; e se niuna coppia di divisori reciproci di r, presi co' segni $+$ e $-$, la verifica, non esiste alcuna risolvente razionale. Trovato f ed h si ha $g=p+f^2$, e però si conosce anche il fattore di 3.° grado.

Sia $x^4-2x^2+16x-15=0$. Abbiamo $f^3-2f\pm(16-h)=0$, e i divisori reciproci di 15 sono $3, 5;\ 1, 15$. Pongo $f=3$, $h=-5$; $f=-3$, $h=5$ ed ho
$27-2\times3\pm(16+5)=0,\ -27+2\times3\pm(16-15)=0$.
Siccome nella prima si debbon prendere i segni inferiori, e questi danno $0=0$, inferisco $x=-3$. La seconda, perchè si debbon prendere i segni superiori non resta soddisfatta.

Pongo quindi $f=-1$, $h=15$; $f=1$, $h=-15$, e trovo che l'equazione (C) mediante la prima sostituzione diventa $-1+2-(16-15)=0$. Dunque $x=1$. Le altre due risolventi si hanno con dividere la proposta per $(x+3)(x-1)$.

Sia $x^4-3x^2-42x-40=0$. I divisori reciproci di 40 sono $1, 40;\ 2, 20;\ 4, 10;\ 5, 8$. Posto $f=1$ suppongo $x+f=0$ e però $h=-40$. Preso il segno inferiore, perchè la risolvente ipotetica è negativa, l'equazione (C) diviene

$$1-3-(-42+40)=-3+3=0.$$

Dunque $x=-1$.

Abbiasi $x^4-25x^2+60x-36=0$. Essendo $36=1\times36=2\times18=3\times12=4\times9=6\times6$, pongo $f=1$ ed $x-1=0$. Preso il segno inferiore perchè r è negativo ed f si suppone positivo, l'equazione (C) diviene

$$1-25+(60-36)=-24+24=0$$

e però si ha $x=1$. Facendo $f=2$ ed $x-2=0$, l'equazione (C) si cangia in $8-50+(60-18)=-42+42=0$. Dunque $x=2$. Divisa la proposta per $(x-1)(x-2)$ si trova $x^2+3x-18=0$, cioè $x=3, =-6$.

Per

Per far uso del metodo generale sarebbe stato necessario calcolare la ridotta $s^3 - 50s^2 + 769s - 3600 = 0$: cercare i divisori quadrati di 3600, e sperimentare qual di essi la verifica. La seconda di queste operazioni è laboriosa, e molto più lo è la terza, qualora non si ottenga presto l'intento, come fortunatamente succede nel caso attuale in cui $s = 9$.

§. 12. Gli esempj addotti erano diretti a dimostrare, che il metodo da noi proposto è per ordinario assai comodo e vantaggioso. I due esempj che seguono serviranno a dare una riprova della proposizione I del §. 10, ed a stabilire per conseguenza il pregio maggiore del metodo di cui si tratta.

Sia proposta l'equazione $x^4 - 86x^2 + 600x - 1280 = 0$. Esclusi i divisori 1, 2, che sono manifestamente troppo piccoli, pongo $f = 4$ e però $h = 320$, e trovo che l'equazione (C) si cangia in $64 - 4 \times 86 + 600 - 320 = 0$, cioè in $64 + 280 - 344 = 344 - 344 = 0$. Dunque $x = 4$.

Divisa la proposta per $x-4$ si ottiene $x^3 + 4x^2 + 70x + 320 = 0$, per cui è molto incomodo il metodo de' divisori. Inerendo al metodo del §. 2, dopo aver osservato che qualunque sua risolvente reale dev'esser negativa, e che per g non può assumersi alcun numero negativo, veggo che è necessariamente $f < 10$, perchè $32 - 4 < 10^2$. Escluso il divisore -1 che è troppo piccolo, pongo dunque $f = -2, -4, -8$, e siccome la caratteristica $g - 4 = f^2$ non resta mai verificata, concludo che la proposta non ha verun' altra risolvente razionale.

Vediamo adesso qual risultato si avrebbe, applicando alla proposta il metodo generale.

La prima operazione che si presenta, ha per oggetto la formazione de' coefficienti $2p, p^2 - 4r, q^2$, onde aver la ridotta

$$s^3 - 172s^2 + 125165 - 360000 = 0.$$

Convien quindi cercare i divisori quadrati dell'ultimo termine, che sono

1, 4, 9, 16, 25, 36, 100, 144, 225, 324, 400, 900, 1600, 2500, 3600, 10000, 14400.

La verificazione de' divisori ottenuti, o mediante la sostituzione di ciascuno in luogo di s, o per mezzo del metodo de' divisori, costituisce una terza operazione molto più laboriosa delle altre, da cui risulta che niuno degli addotti divisori è atto a verificare la ridotta, raccogliendosi unicamente che una sua risolvente reale cade fra 36 e 100. Dunque bisogna togliere il 2.° termine con fare $s=t+\frac{172}{3}$, e siccome 172 non è divisibile per 3, è d' uopo liberare la trasformata dalle frazioni. Ciò posto convien dedurre il valore di t, e quindi quello di s: ma perchè il valore di s non è un quadrato, tutti i coefficienti dei due fattori quadratici della proposta provengono espressi per numeri decimali indefiniti. Dunque il valore d' x si trova doppiamente o triplicatamente inesatto, secondo che il valore di t sia razionale o irrazionale.

Infatti, l' inesattezza di t influisce in quella di s, questa in quella di f, g, g'. Questi coefficienti sono dunque doppiamente inesatti, e perchè espressi per numeri indefiniti, e perchè ricavati da valori inesatti. Un terzo fonte d' inesattezza, che immediatamente influisce nel valore d' x, deriva dalla soluzione dell' equazioni somministrate dai fattori quadratici. È dunque impossibile avere per mezzo del metodo generale il valore esatto della risolvente razionale della proposta, e neppure se ne può avere un valore assai prossimo al vero. Tal è il risultato di un calcolo estremamente lungo, complicato e laborioso.

Per vedere con un esempio semplicissimo la verità enunciata nella Proposizione I del §. 10 abbiasi l' equazione $x^4-4x^3-3x^2+13x-4=0$, che ha la sola risolvente razionale $x=4$. Tolto il 2.° termine si ottiene $z^4-9z^2-z+3=0$, e quindi la ridotta $s^3-18s^2+69s-1=0$. Ma questa non è soddisfatta da $s=\pm 1$, e non ha nessuna risolvente razionale. Dunque non può condurre al richiesto valore razionale di $z=3$, $x=4$.

Prima d'intraprendere la ricerca delle risolventi razionali di un'equazione di 4.° grado, conviene assicurarsi ch'ella non abbia tutte le risolventi immaginarie: il che speditamente si ottiene per mezzo de' seguenti criterj, dalla di cui simultanea sussistenza dipende l'immaginarietà di tutte le risolventi.

1.° $\frac{7}{3}p^2 - \frac{8}{3}p^3 - 4r < 0$;

2.° $-\frac{1}{27}\left\{\frac{7}{3}p^2 - \frac{8}{3}p^3 - 4r\right\}^3 > \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{27}p^3 + \frac{8}{3}pr - q^2\right\}^2$;

3.° $p^2 - 4r$ del segno stesso di p.

§. 13. Dovendosi risolvere un'equazione di 5.° grado $x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, si tenti s'ella abbia una risolvente razionale, e facciasi

$$=(x^4 \pm Fx^3 + Gx^2 + Hx + I)(x \mp F) = x^5 + (G - F^2)x^3 + (H \mp FG)x^2 + (I \mp FH)x \mp FI = 0.$$

Il paragone somministra

$$G - F^2 = p,\ H \mp FG = q,\ I \mp FH = r,\ \mp FI = s.$$

Dalla 3.ª $H = \frac{I - r}{\pm F} \ldots$ (D). Dalla 1.ª $G = p + F^2$, e la 2.ª diviene $F^3 + pF \pm (q - H) = 0 \ldots$ (C), e coincide coll'equazione (C) del §. 11. L'equazioni (C), (D) decidono dell'esistenza di una risolvente razionale F. La seconda dee dare per h un valore intiero; la prima un risultato identicamente $= 0$.

Sia $x^5 - x^3 - 2x^2 - 3x - 10 = 0$. Pongo $F = 2$, $I = 5$. L'equazione (D) somministra $H = \frac{5 + 3}{2} = 4$, e l'equazione (C), prendendo il segno superiore diviene $8 - 2 - 4 - 2 = 0$. Dunque $x = 2$.

Il tentativo è sempre molto semplice, perchè tal è l'equazione (C); è sempre molto limitato, perchè i divisori reciproci di s, i quali danno per $\frac{I - r}{\pm F}$ un numero fratto, restano subito esclusi.

§. 14. Avendo scoperto che la proposta non abbia alcuna risolvente razionale, può cercarsi s'ella sia risolubile in due fattori razionali, l'uno di 2.°, l'altro di 3.° grado.

Pongasi
$x^5+px^3+qx^2+rx+s=(x^3\pm Fx^2+Gx+H)(x^2\mp Fx+I)=0$.
Risulta $G-F^2+I=p$, $H\pm F(I-G)=q$, $GI\mp FH=r$, $IH=s$. Dalla 1.ª $G=p+F^2-I$. La 2.ª diviene $F^3+(p+2I)F\pm(q-H)=0$ . . . (1) e la 3.ª $I(p+F^2-I)=r\pm FH$ . . . (2).

Se il valore assunto per H, I è giusto, l'equazione (2) dee dare per F un valore razionale ed intiero, e questo dee verificare l'equazione (1). Si vedrà però facilmente, che siccome la massima potenza di F nell'equazione (1) è libera dal coefficiente, ed il metodo del §. 2 le si applica con molta prontezza, meglio è cercare la risolvente razionale dell'equazione (1) e verificar poscia l'equazione (2). Sia $x^5-25x^3+23x^2+58x+20=0$. Facendo $H=5$, $I=4$ l'equazione (1) diviene $F^3-33F\pm 18=0$, e preso il segno superiore si trova (§. 2) che la caratteristica $g+33=f^2$ resta verificata con fare $g=3$, $f=-6$. Mediante la sostituzione di H, I, F nell'equazione (2) si ottiene $(-25+36-4)4=58-30$, cioè $7\times 4=28$. Dunque $H=5$, $I=4$, $F=-6$, $G(=p+f^2-i)=7$, ed i fattori cercati sono x^3-6x^2+7x+5, x^2+6x+4.

Se s sia un numero primo, o se le condizioni (1), (2) non possono verificarsi, la proposta non è risolubile in due fattori razionali, e convien ricorrere al metodo delle sostituzioni successive.

Articolo IV.

Si vuol dimostrare, che inoltrando quanto basta la serie de' numeri positivi decrescenti A, B, C, D. *ec. ottenuti col metodo del Sig.* Lagrange, *relativo alla soluzione in numeri razionali di un' equazione quadratica indeterminata, si giunge sempre ad un numero eguale all' unità.*

La proposizione enunciata nel titolo dell' Articolo attuale, essendo una base del metodo del Sig. *Lagrange*, e non trovando noi adequata la ragione su cui suole stabilirsi, ci proponiamo di darne una rigorosa dimostrazione: ed affinchè niuno debba cercare altrove la teoria che serve all' intelligenza del nostro calcolo, riassumiamo qui l' insigne metodo del Geometra Torinese, modificandone in una guisa forse non disacconcia, i dettagli e le simboliche indicazioni.

Assunta l' equazione generale

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

se ne deduca $2ax + by + d = \sqrt{[(by + d)^2 - 4a(cy^2 + ey + f)]}$, espressione, che facendo $b^2 - 4ac = \mathrm{B}$, $bd - 2ae = g$, $d^2 - 4af = h$ si cangia in $2ax + by + d = \sqrt{[\mathrm{B}y^2 + 2gy + h]}$.

Siccome per x, y si vogliono de' numeri razionali, la funzione $\mathrm{B}y^2 + 2gy + h$ dev' essere un quadrato. Sia t^2 questo quadrato, e moltiplicando per B l'equazione $\mathrm{B}y^2 + 2gy + h = t^2$, si avrà $\mathrm{B}y + g = \sqrt{[\mathrm{B}t^2 + g^2 - \mathrm{B}h]}$. Pongasi $g^2 - \mathrm{B}h = \mathrm{A}$, $\sqrt{[\mathrm{B}t^2 + \mathrm{A}]} = u$, e non si tratterà che di risolvere l' equazione $\mathrm{B}t^2 + \mathrm{A} = u^2$. Trovate tutte le soluzioni di questa in numeri razionali, si hanno tutti i valori d' x, y per mezzo dell' equazioni

$$x = \frac{t - by - d}{2a}, \quad y = \frac{u - g}{\mathrm{B}},$$

dove le indeterminate t, u posson prendersi con quel segno che si vuole.

Avendo ridotti i numeri t, u al medesimo denominatore, pongasi $u=\frac{\phi}{\omega}$, $t=\frac{\psi}{\omega}$, onde l'equazione da risolversi sia $\phi^2-B\psi^2=A\omega^2$, dove ϕ, ψ, ω debbon esser numeri intieri. Noi diciamo:

1.° Che i numeri ϕ, ψ, ω, si possono supporre tali, che non abbiano alcun divisore comune; perchè se questi avesse luogo, si toglierebbe con la divisione.

2.° Che i coefficienti A, B si possono supporre liberi da ogni fattore quadrato. Infatti, se $A=A'k^2$, $B=B'l^2$, basta fare $k\psi=\psi$, $l\omega=\omega'$, e la proposta diviene $\phi^2-B'\psi'^2=A'\omega'^2$, in cui A', B' hanno la proprietà divisata.

Dalle due proposizioni precedenti ne segue, che due qualunque de' numeri ϕ, ψ, ω possono riguardarsi come primi fra di loro, e la ragione si è, che se ϕ^2, ψ^2 contenessero il fattore θ^2, $A\omega^2$ dovrebbe esser divisibile per θ^2; cosa impossibile, perchè non è tale nè ω^2 nè A: non ω^2 per essere ϕ, ψ, ω numeri primi fra loro: non A perchè A non contiene alcun fattore quadrato. Nella stessa maniera si prova che ϕ, ω; ψ, ω non sono divisibili per θ^2.

Restano due osservazioni e sono 1.° che A, ψ debbon essere numeri primi fra loro, perchè se A, ψ^2 avessero un comune divisore θ, anche ϕ^2 dovrebb'esser divisibile per θ, e ϕ, ψ non sarebbero più numeri primi fra di loro.

2.° Che i numeri A, B sempre si possono supporre positivi. Infatti se si combinano i segni di A e di B in tutte le maniere possibili, si ottengono le seguenti formole:

$$\phi^2-B\psi^2=+A\omega^2,\quad \phi^2-B\psi^2=-A\omega^2,$$
$$\phi^2+B\psi^2=+A\omega^2,\quad \phi+B\psi=-A\omega^2,$$

l'ultima delle quali è assurda, la terza coincide colla seconda, e si rende simile alla prima con moltiplicarla per A, e con fare $A\omega=\omega'$, $AB=B'$, poichè risulta $\omega'^2-B'\psi'^2=A\phi'^2$.

Premesse queste nozioni preliminari eccoci alla soluzione.

Sia nel 2.° membro il termine affetto dal coefficiente maggiore, e nell'ipotesi di $A>B$ abbiasi $\phi^2-B\psi^2=A\omega^2$. Se la proposta è solubile, nel qual caso esiste almeno un determinato valore di ϕ e di ψ, per esempio $\phi=m$, $\psi=n$, si può sempre (Teoria dell'equazioni indeterm. di 1.° gr.) soddisfare all'equazione $m=an-\mathrm{A}\psi'$, dove m, n, A son numeri dati primi fra loro, perchè primi sono ϕ, ψ ed A, ψ; e dove a, ψ' sono due indeterminate. Senza conoscere i valori m, n, si può dunque supporre $\phi=a\psi-\mathrm{A}\psi'$. Così la proposta diviene

$$\left(\frac{a^2-\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\right)\psi-2a\psi\psi'+\mathrm{A}\psi'^2=\omega^2$$

ed $a^2-\mathrm{B}$ dev'essere divisibile per A, poichè A, ψ sono primi fra di loro. Sia $\frac{a^2-\mathrm{B}}{\mathrm{A}}=\mathrm{A}'k^2$, essendo k^2 il massimo quadrato che può dividere il numero $\frac{a^2-\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$, e l'equazione da sciogliersi sarà

$$\mathrm{A}'k^2\psi^2-2a\psi\psi'+\mathrm{A}\psi'^2=\omega^2 \ldots . (a)$$

dove A' non contiene alcun fattore quadrato.

Qualunque sia il valore di a che rende $a^2-\mathrm{B}$ divisibile per A, è certo che assumendo un numero qualunque μ, deesi avere anche $(\mu\mathrm{A}\pm a)^2-\mathrm{B}$ divisibile per A. Ma nell'espressione $\mu\mathrm{A}\pm a$ si può prendere il segno di a ed il valore di μ tale, che $\mu\mathrm{A}\pm a$ cada fra i limiti $\frac{\mathrm{A}}{2}, -\frac{\mathrm{A}}{2}$. Dunque se vi è un valore di a che renda $a^2-\mathrm{B}$ divisibile per A, debb'esservi un valore di a compreso fra i limiti $\frac{\mathrm{A}}{2}, -\frac{\mathrm{A}}{2}$, ovvero $=\pm\frac{\mathrm{A}}{2}$, che soddisfi alla medesima condizione; altrimenti la proposta non è solubile in numeri razionali.

Si moltiplichi l'equazione (a) per $\mathrm{A}'k^2$, e facendo

$$\left\{\mathrm{A}'k^2\psi-a\psi'=\phi',\ k\omega=\omega'\right\} \ldots . (\mathrm{I})$$

si avrà $\phi'^2-\mathrm{B}\psi'^2=\mathrm{A}'\omega'^2$. Risoluta questa si ha ϕ, ψ, ω per mezzo delle ausiliari (I) e della proposta $\phi^2-\mathrm{B}\psi^2=\mathrm{A}\omega^2$. Osservisi che avendo preso $a<\frac{\mathrm{A}}{2}$, il numero $\frac{a^2-\mathrm{B}}{\mathrm{A}k^2}$ cioè A', risulta positivo e $< \frac{A}{4}$: positivo, perchè se fosse $\alpha^2 < B$, per una più forte ragione sarebbe $\alpha^2 - B < B$, e però $\alpha^2 - B$ non sarebbe divisibile per A che è $> B$, cioè $\frac{\alpha^2 - B}{A}$ non sarebbe divisibile per A che è $> B$, cioè $\frac{\alpha^2 - B}{A}$ non sarebbe un numero intiero qual dev'essere: è $A' < \frac{A}{4}$, perchè nell' ipotesi la più svantaggiosa, che sia cioè $\alpha = \frac{1}{2}A$, $B = 0$, $k = 1$, si ha $\frac{\alpha^2 - B}{Ak^2} = \frac{1}{4}A$. Si può dunque concludere, che in virtù del calcolo precedente, la soluzione della proposta dipende da quella di una trasformata del tutto simile, nella quale il coefficiente A', che tien luogo di A, è $< \frac{A}{4}$.

Posto che sia $A' > B$, dalla $\phi'^2 - B\psi'^2 = A'\omega'^2$ deducasi collo stesso metodo una 2.ª trasformata $\phi''^2 - B\psi''^2 = A''\omega''^2$, e si avrà $A'' < \frac{A'}{4}$ e però $< \frac{A}{16}$, essendo A'' un numero positivo che non contenga verun fattore quadrato. Infatti, per giungere alla 2.ª trasformata convien trovare un numero α' tale, che $\frac{\alpha'^2 - B}{A'}$ sia un numero intiero $A''k'^2$; ma siccome si è ottenuto $\frac{\alpha^2 - B}{A'} = Ak^2$, la 2.ª condizione $\frac{\alpha'^2 - B}{A'} =$ n.° int.° resta compresa nella 1.ª $\frac{\alpha^2 - B}{A'} =$ n.° int.°. Ora se vi è un valore di α che renda $\alpha^2 - B$ divisibile per A', debb'esser tale anche il numero $\alpha' = \mu' A' \pm \alpha$. Dunque se si prendono il segno di α ed il valore di μ' tali, che α' cada fra i limiti $\frac{A'}{2}, -\frac{A'}{2}$, o sia $= \pm \frac{A'}{2}$, il numero $\frac{\alpha'^2 - B}{A'k'^2}$ ($= A''$) dee risultare intiero, positivo e $< \frac{A'}{4}$; numero che si può supporre

libero

libero da ogni fattore quadrato, per esser compresi in k'^2 tutti i fattori quadrati di $\frac{a'^2-B}{A'}$.

Se $A''>B$ deducasi una 3.ª trasformata $\varphi'''^2-B\psi'''^2=A'''\omega'''^2$, in cui $A'''<\frac{A''}{4}$ e così ec. Si ottiene in questa guisa il seguente sistema di trasformate secondarie

$$\left.\begin{array}{l}\varphi'^2-B\psi'^2=A'\omega'^2,\\ \varphi''^2-B\psi''^2=A''\omega''^2,\\ \varphi'''^2-B\psi'''^2=A'''\omega'''^2,\\ \ldots\ldots\ldots\\ \varphi^{(n)2}-B\psi^{(n)2}=A^{(n)}\omega^{(n)2}\end{array}\right\}\ldots\ldots(a)$$

nell'ultima delle quali dee necessariamente aversi $A^{(n)}<B$. Posto $A^{(n)}=C$ si trasponga nel 2.° membro il termine affetto dal coefficiente maggiore, e facendo $\varphi^{(n)}=\varphi_1$, $\psi^{(n)}=\psi_1$, $\omega^{(n)}=\omega_1$, si tratterà di risolvere $\varphi_1{}^2-C\omega_1{}^2=B\psi_1{}^2$, per lo che giova procedere alla diminuzione di B per mezzo di un secondo sistema di trasformate secondarie

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1'^2-C\omega_1'^2=B'\psi_1'^2,\\ \varphi_1''^2-C\omega_1''^2=B''\psi_1''^2,\\ \varphi_1'''^2-C\omega_1'''^2=B'''\psi_1'''^2,\\ \ldots\ldots\ldots\\ \varphi_1{}^{(m)2}-C\omega_1{}^{(m)2}=B^{(m)}\psi_1{}^{(m)2}\end{array}\right\}\ldots\ldots(b)$$

dove $B'<\frac{B}{4}$, $B''<\frac{B'}{4}$ ec., finchè giungasi ad una trasformata in cui si abbia $B^{(m)}\,(=D)<C$.

Sia nel 2.° membro il termine affetto dal coefficiente maggiore, e fatto $\varphi_1{}^{(m)}=\varphi_2$, $\psi_1{}^{(m)}=\psi_2$, $\omega_1{}^{(m)}=\omega_2$, il problema sarà ridotto alla soluzione di $\varphi_2{}^2-D\psi_2{}^2=C\omega_2{}^2$.

Proseguendo si forma la serie A, B, C, D ec. composta di numeri intieri positivi decrescenti, e la corrispondente serie di trasformate primarie:

$$\left.\begin{array}{l}
\phi^2 - B\psi^2 = A\omega^2, \\
\phi_1{}^2 - C\omega_1{}^2 = B\psi_1{}^2, \\
\phi_2{}^2 - D\psi_2{}^2 = C\omega_2{}^2, \\
\phi_3{}^2 - E\omega_3{}^2 = D\psi_3{}^2, \\
\ldots\ldots\ldots \\
\phi^2{}_{(r)} - U\omega^2{}_{(r)} = T\psi^2{}_{(r)} \text{ ovvero} \\
\phi^2{}_{(r)} - U\psi^2{}_{(r)} = T\omega^2{}_{(r)}
\end{array}\right\} \ldots\ldots (A)$$

dalla 1.ª delle quali si passa alla 2.ª per mezzo de' rapporti

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha^2 - B = AA'k^2,\ \alpha \text{ ossia } \mu A \pm \alpha < \frac{A}{2}, \\
\alpha'^2 - B = A'A''k'^2,\ \alpha' \text{ ossia } \mu' A' \pm \alpha < \frac{A'}{2}, \\
\alpha'' - B = A''A'''k''^2,\ \alpha'' \text{ ossia } \mu'' A'' \pm \alpha' < \frac{A''}{2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha^{(n-1)2} - B = A^{(n-1)}A^{(n)}k^{(n-1)2},\ \alpha^{(n-1)} \text{ ossia } \mu^{(n-1)} A^{(n-1)} \pm \alpha^{(n-2)} < \frac{A^{(n-1)}}{2} \\
A' < \frac{A}{4},\ A'' < \frac{A'}{4},\ A''' < \frac{A''}{4} \ldots\ldots A^{(n)} < \frac{A^{(n-1)}}{4},
\end{array}\right\} \tag{..(a)}$$

Dalla 2.ª si passa alla 3.ª per mezzo di questi altri rapporti

$$\left.\begin{array}{l}
\beta^2 - C = BB'l^2,\ \beta \text{ ossia } \gamma B \pm \beta < \frac{B}{2}, \\
\beta'^2 - C = B'B''l'^2,\ \beta' \text{ ossia } \gamma' B' \pm \beta < \frac{B'}{2}, \\
\beta'' - C = B''B'''l''^2,\ \beta'' \text{ ossia } \gamma'' B'' \pm \beta' < \frac{B''}{2}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\beta^{(n-1)2} - C = B^{(n-1)}B^{(n)}l^{(n-1)2},\ \beta^{(n-1)} \text{ ossia } \gamma^{(n-1)} B^{(n-1)} \pm \beta^{(n-2)} < \frac{B^{(n-1)}}{2} \\
B' < \frac{B}{4},\ B'' < \frac{B'}{4},\ B''' < \frac{B''}{4} \ldots\ldots B^{(n)} < \frac{B^{(n-1)}}{4},
\end{array}\right\} \tag{..(b)}$$

e così in seguito.

Il 1.° quoziente $A'k^2 \left(= \frac{\alpha^2 - B}{A}\right)$, estraendone il massimo quadrato, dà il valore di A'; e dall' equazione $\alpha' = \mu' A' \pm \alpha$

si deduce α', il valore arbitrario di μ' dovendo cadere fra i limiti $\frac{A'}{2}, -\frac{A'}{2}$. Il 2.° quoziente $A''k'^2 \left(=\frac{\alpha'^2-B}{A'}\right)$, estraendone il massimo quadrato, dà il valore di A'', e quello di α'' si ha dall'equazione $\alpha''=\mu''A''\pm\alpha'$, il valore arbitrario di μ'' dovendo cadere fra i limiti $\frac{A''}{2}, -\frac{A''}{2}$, e così in seguito.

Dicasi lo stesso relativamente ai rapporti (b). Siccome le trasformate secondarie (a), (b) ec. sono talmente legate fra loro e colle primarie (A), che prese insieme formano un solo ed unico sistema, qualora sappiasi sciogliere una delle (A), si può risalire alla soluzione delle precedenti sino alla proposta, come dalla 2.ª delle (A) si risalì alla 1.ª.

Per mostrare che il metodo esposto effettivamente conduce alla soluzione del problema, quando questi è possibile, basta dunque provare che fra le (A) ve n'è sempre una, che ammette una sicura e facile risoluzione. A tal effetto noi passiamo a dimostrare 1.° che prolungando quanto bisogna la serie delle (A) si giunge ad un'equazione $\phi^2{}_{(p)}-R\omega^2{}_{(p)}=Q\psi^2{}_{(p)}$ dove $R=1$; 2.° che l'equazione $\phi^2{}_{(p)}-\omega^2{}_{(p)}=Q\psi^2{}_{(p)}$ ammette una sicura e facile soluzione.

Cominciando dalla 2.ª proposizione, suppongasi che la trasformata di cui si tratta sia sotto la forma $\pi^2-\zeta^2=M\sigma^2$. Si sciolga M in due fattori m', m'', che saranno primi fra loro perchè M non contiene alcun fattore quadrato, e si sciolga σ ne' fattori s', s'', onde si abbia $M=m'm''$, $\sigma=s's''$. Risulta $(\pi+\zeta)(\pi-\zeta)=m'm''s'^2s''^2$; equazione a cui si soddisfa generalmente con fare $\pi+\zeta=m's'^2$, $\pi-\zeta=m''s''^2$. Quindi $\pi=\frac{m's'^2+m''s''^2}{2}$, $\zeta=\frac{m's'^2-m''s''^2}{2}$, $\sigma=s's''$; formole che danno π, ζ, σ per mezzo de' numeri cogniti m', m'' e delle arbitrarie s', s''; ed è chiaro che il numero delle soluzioni in questa guisa ottenute, eguaglia quello delle maniere con le quali il coefficiente M si può decomporre in due fattori.

Passando alla proposizione 1.ª (*) suppongasi di esser giunti all'equazione (I) $\phi^2_{(p)} - R\omega^2_{(p)} = Q\psi^2_{(p)}$ dove sia $R = o < 7$, $Q > R$ e tale, che procedendo alla diminuzione di Q mediante la formola $\frac{\varepsilon^2 - R}{Q\lambda^2} = Q'$ si trovi $Q' < R$. Noi diciamo che se la proposta è solubile, la prima o la seconda trasformata dedotta dall'equazione (I) dev'essere della forma $\pi^2 - \zeta^2 = M\sigma^2$.

La supposizione che sia $R = o < 7$ e $Q' < R$ non porta eccezione alcuna alla dimostrazione, perchè l'ipotesi di $R > 7$ si riduce a quella da noi assunta, con diminuire i coefficienti Q, R uno dopo l'altro, finchè il più piccolo divenga $= o < 7$, e l'altro sia qual noi supponiamo il coefficiente Q. Infatti se $Q = 8, 9, 10, 11, 12$, affinchè la formola $\frac{\varepsilon^2 - R}{Q\lambda^2}$, dove $\varepsilon < \frac{R}{2}$, dia un numero intiero, deesi respettivamente avere $R = 1, 7, 6, 5, 4$.

Se $Q < 12$ ed $R = o < 7$, affinchè la proposta sia risolubile, dee potersi dedurre $\frac{\varepsilon^2 - R}{Q\lambda^2} = Q'$, dove sia $Q' < \frac{Q}{4}$; poi $\frac{Z^2 - R}{Q'\lambda'^2} = Q''$, dove $Q'' < \frac{Q'}{4}$ e così ec. fino a $Q^{(n-1)}$, essendo $Q^{(n-1)}$ tale, che $Q^{(n)}$ risulti $< R$.

Se finalmente sia $Q > 12$ ed $R > 7$, s'inoltri la serie

(*) Il Sig. *Legendre* (*Théor. des Nomb.* §. 20) rende ragione di questa proposizione dicendo = *La suite des nombres positifs et décroissants* A, B, C, D ec. *ne sauroit aller à l'infini: elle se terminera necessairement par l'unité*; ed il Sig. *Paoli* (*Elem. d'Alg. T. I, p.* 169) si esprime così: *Siccome i numeri* A, B, C, D ec. *formano una serie decrescente di numeri intieri, questa non potrà andare all'infinito, ma sarà sicuramente limitata. Onde se il problema non ammette soluzione in numeri razionali, giungeremo ad una condizione impossibile a soddisfarsi: ma se il problema è risolubile, arriveremo ad un'equazione, in cui uno de' coefficienti sarà un quadrato, e risoluta questa potremo rimontare retrocedendo sino alla prima.* Noi però non restiamo persuasi di un simile ragionamento, perchè in astratto non vediamo impossibile che la serie A, B, C, D ec. sia composta di numeri non quadrati, e termini con uno de' numeri 3, 2; ipotesi nelle quali la serie non dà luogo al conseguimento di un numero = 1.

Q', Q'', Q''' ec. $Q^{(n)}$ finchè sia $Q^{(n)} = o < 7$, e se R non sia tale che R' risulti $< Q^{(n)}$, si deduca R', R'', R''' .... finchè giungasi al numero desiderato. Con una simile operazione deesi arrivare ad una trasformata, i due coefficienti V, W sieno tali, che il più piccolo V sia $= o < 7$, l'altro essendo tale che W' provenga $<$ V. Ciò posto la dimostrazione è semplicissima. Noi sappiamo che se la proposta è solubile, tal è l'equazione (I), e che la formola $\frac{\varepsilon^2 - R}{Q\lambda^2}$ dee dare un intiero $Q' < \frac{Q}{4}$ e $< R$, onde ne derivi la trasformata

$$\text{(II)} \quad \varphi^2(p+1) - Q'\psi^2(p+1) = R\omega^2(p+1).$$

Dunque $\frac{\varepsilon^2 - Q'}{R} =$ n.° int.°; e perchè $\varepsilon < \frac{R}{2}$ si ha

$$\frac{3^2 - Q'}{R} \text{ ovvero } \frac{2^2 - Q'}{R} = \text{n.° int.°}$$

La 1.ª formola dà un numero intiero in tre ipotesi distinte e sono:
1.° che sia $Q' = 2$, $R = 7$; 2.° $Q' = 3$, $R = 6$; 3.° $Q' = 4$, $R = 5$, e queste conducono tutte ad un nuovo quoziente $R' = 1$.

La 2.ª formola dà un intiero se $Q' = 1$, $R = 3$.

Dunque o si ha $Q' = 1$ e la trasformata (II) è quale si richiede: ovvero R, Q' sono tali, che la trasformata dedotta dall'equazione (II) risulta della forma

$\varphi^2(p+2) - \omega^2(p+2) = Q'\psi^2(p+2)$, cioè della forma richiesta.

Articolo V

Sull'Integrazione dell'equazioni a differenze, i di cui coefficienti sieno costanti, e l'ultimo termine della forma a^x.

§. 1. Essendo proposta l'equazione

$$y_{x+n} = By_{x+n-1} + Cy_{x+n-2} \ldots + Ty_{x+1} + Uy_x + a^x : \ldots \text{(I)}$$

si faccia $y_x = z_x + Ha^x$, dove z_x sia un integrale particolare

Fig. 1

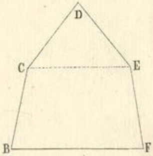


Fig. 2

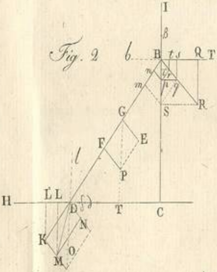


Fig. 3

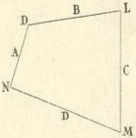


Fig. 4

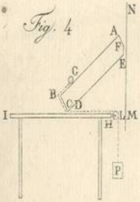


Fig. 5

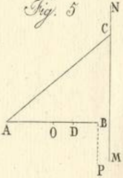
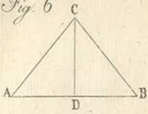


Fig. 6



della solita equazione ausiliare

$$z_{x+n} = Bz_{x+n-1} + Cz_{x+n-2} \ldots + Tz_{x+1} + Uz_x .$$

Siccome il valore espresso per z_x riduce l'equazione (I) all' ultimo suo termine a^x, altro non resta che verificare l'equazione

$$Ha^n - BHa^{n-1} - CHa^{n-2} \ldots - THa - UH = 1$$

il che si ottiene con prendere $H = \frac{1}{a^n - Ba^{n-1} \ldots - Ta - U}$.

Sia per esempio $y_{x+3} = y_{x+2} + 8y_{x+1} - 12y_x + 6^x$, e si cominci dal soddisfare all'equazione

$z_{x+3} = z_{x+2} + 8z_{x+1} - 12z_x$, con assumere $z_x = m^x$.

Ne proviene $m^3 - m^2 - 8m + 12 = 0$, equazione le di cui risolventi sono $m' = 2$, $m'' = 2$, $m''' = -3$. Posto -1 per B, ed i respettivi valori di m nella formola

$$z_x = m^x \Sigma^2 \left[- \left(\frac{2m+B}{m} \right) \right]^x . A$$

da noi esposta nel *T. XI della Soc. Ital.* §. 4, per servire alla completa integrazione dell' equazioni di 3.° ordine, le quali abbiano due risolventi eguali, si ottiene

$$z_x = 2^x \Sigma^2 (-\tfrac{3}{2})^x A, \quad z_x = -3^x \Sigma^2 (\tfrac{7}{3})^x A .$$

La 1.ª di queste formole equivale a

$z_x = \frac{a^2 A}{(3-a)^2} \left(\frac{3}{a} \right)^x + A_1 x + A_2$, e per brevità può mettersi sotto la forma $z_x = k \,.\, 3^x + k_1 \,.\, x2^x + k_2 \,.\, 2^x$.

Pongasi $y_x = k \,.\, 3^x + k_1 \,.\, x2^x + k_2 \,.\, 2^x + H6^x$, e perchè $B = +1$, $C = +8$, $D = -12$, si avrà

$$H = \frac{1}{6^3 - 6^2 - 6 \,.\, 8 + 12} = \frac{1}{144} :$$

e per essere $\frac{6^x}{144} = \frac{6^{x-2}}{4}$, si dedurrà

$$y_x = k \,.\, 3^x + k_1 \,.\, x \,.\, 2^x + k_2 \,.\, 2^x + \frac{6^{x-2}}{4} .$$

Abbiasi $y_{x+3} = 4y_{x+2} - y_{x+1} - 6y_x + 6^x$, la di cui equazione ausiliare $z_{x+3} = 4z_{x+2} - z_{x+y} - 6z_x$ somministra $m^3 - 4m^2 + m - 6 = 0$. Le risolventi di questa essendo $m' = -1$, $m'' = 2$,

$m''' = 3$, si ha $z_x = k3^x + k_1 2^x \pm k_2$. Pongasi $y_x = k3^x + k_1 2^x \pm k_2 + H6^x$, e fatta la sostituzione si avrà

$$6H\,(6^x + 6^x - 4.6.6^x + 6^2.6^x) = 6^x, \text{ cioè } H = \frac{1}{84}$$

ed $H6^x = \frac{6^x}{84} = \frac{6^{x-1}}{14}$: per conseguenza

$$y_x = k.3^x + k_1.2^x \pm k_2 + \frac{6^{x-1}}{14}.$$

Sia per ultimo es. $y_{x+3} = 9y_{x+2} - 26y_{x+1} + 24y_x + 5^x$. Si ha $m^3 - 9m^2 + 26m - 24 = 0$, $m' = 2$, $m'' = 3$, $m''' = 4$; e però $y_x = k.2^x + k_1.3^x + k_2.4^x + H5^x$.

Sostituendo si trova

$$5^3H = 9H5^2 - 26H.5 + 24H + 1.$$

Dunque $H = \frac{1}{5^3 - 9.5^2 + 26.5 - 24} = \frac{1}{125 - 225 + 130 - 24} = \frac{1}{6}$.

Suppongasi che i tre primi termini della serie a cui la proposta si riferisce, sieno 1, 2, 4. Siccome i respettivi valori d' x sono 0, 1, 2, ne deriva

$$1 = k + k_1 + k_2 + \tfrac{1}{6}$$
$$2 = 2k + 3k_1 + 4k_2 + \tfrac{5}{6}$$
$$4 = 4k + 9k_1 + 16k_2 + \tfrac{25}{6}$$

e quindi $k = \frac{5}{6}$, $k_1 = \frac{3}{6}$, $k_2 = -\frac{3}{6}$. Dunque il termine generale della serie 1, 2, 4, 9, 30, 157 ec. è

$$y_x = \frac{5.2^x + 3.3^x + 3.2^x + 5^x}{6}.$$

L'integrale completo delle tre equazioni sopra esposte erasi da altri ottenuto, ma con un metodo sommamente laborioso e prolisso.