

LI BARATTI MERCANTILI  
RIDOTTI E DIMOSTRATI PER ALGEBRA.

M E M O R I A

DEL SIGNOR PIETRO COSSALI

Ricevuta li 12 Febbrajo 1812.

Sublimi e celebratissimi uomini hanno recata l'algebra a versare su di soggetti aritmetici e teorici, e pratici, ed hanno fornito di bellissime Memorie gli Atti delle Accademie. Ma niuno, che io mi sappia, ha preso cura di richiamare all'algebraica scienza i problemi su i Baratti. *Eulero* nella sua *Arithmetique Demonstrée* ne tratta quattro ma de' più facili, due sotto il titolo di *Règle du trois*, e due altre sotto il titolo di *Questionnaire sur les précédentes Règles* all'articolo *sur la Règle du trois*. Ma oltre che sono in dati particolari, e numerici, egli è ben lungi, che dimostrati sieno della Regola i fondamenti, non essendovi a ciascuno Problema, che la prova per mezzo dell'inversione di esso. Numero ben maggiore di tai problemi, e ben più complicati ritrovasi nelle Opere di *F. Luca*, e di *Tartaglia*. Nella somma del primo uscita l'anno 1494 montano essi a 48, e nel Trattato generale del secondo ascendono a 43. Ma nell'uno, e nell'altro le risoluzioni mancano di dimostrazione, e nel primo alcune sono false. Avendo io trasportate dai numeri alle lettere tutte esse risoluzioni, ed essendomi riuscito di scoprire in due equazioni l'una che chiamo di *contanti* l'altra che di *baratto* denomino, il fondamento generale di tutte, mi è sembrato quindi bene di presentare qui un compendio ristretto a XI Problemi discutendole, e mostrando la verità delle buone, la falsità delle erronee, ed il difetto delle imperfette. E poichè *F. Luca* distingue tre sorti di Baratti, 1.º che egli chiama

*semplice*, 2.° che egli appella *composto*, 3.° che egli denomina a *tempo* quando il pagamento non si fa di presente; io perciò incomincerò dal *semplice*, proseguirò per lo *composto* che è quando parte si fa per contanti, e terminerò per quello a tempo.

PROBLEMA I. La merce M vale a contanti P, ma in baratto ne vuole il Mercante P + A, la merce m vale in contanti p: a quale prezzo deve il secondo Mercante porla in baratto per non avere discapito? E per quantità Q della merce M qual deve essere la quantità q della merce m? S'instuisca la proporzione  $P : P + A :: p : \frac{P}{p}(P + A)$ , che si chiamerà  $p + x$ , e sarà questo il prezzo, che dovrà volere per la sua merce m il secondo Mercante.

La quantità q si determinerà dall'equazione  $Q(P + A) = q(p + x)$ , d'onde  $q = \frac{Q(P + A)}{p + x}$ . Così *F. Luca* nel quesito suo 1.°, e *Tartaglia* ne' suoi quesiti 3.°, 4.°, 5.°

Io comincerò a distinguere due equazioni l'una, che chiamo

Equazione di contanti  $QP = qp$

l'altra, che dico

Equazione di baratto  $Q(P + A) = q(p + x)$

Dalla prima ne viene  $q = \frac{QP}{p}$ .

Dalla seconda  $q = \frac{Q(P + A)}{p + x}$

d'onde  $P : P + A :: p : p + x$ , che è la proporzione stabilita sul principio da *F. Luca*, e da *Tartaglia*.

PROBLEMA II. Il Mercante della merce M vuole la parte  $\frac{c}{n}$  del prezzo P + A in contanti, qual deve essere il prezzo  $p + x$  della merce m, onde il secondo Mercante non abbia nel baratto discapito?

*F. Luca* nei quesiti 9.°, 10.°, 39.°, e *Tartaglia* nel 9.°

ingiungono d'istituire la proporzione seguente

$$P - \frac{e}{n}(P+A) : P+A - \frac{e}{n}(P+A) :: p : p+x = \frac{p(P+A) - \frac{e}{n}(P+A)}{P - \frac{e}{n}(P+A)}$$

Che io riduco a  $p + \frac{pA}{P - \frac{e}{n}(P+A)}$ .

Ma ciò, che merita di essere qui considerato, si è, che nè *Fra Luca*, nè *Tartaglia* non adducono ragione della comandata proporzione. Io a dimostrarla pongo le due equazioni, l'una che seguo ad appellare dei contanti in quanto che oltre alla parte  $\frac{e}{n}$  del prezzo  $P+A$  di baratto in contanti, contiene li prezzi a contanti  $P, p$ , l'altra, che chiamo equazione di baratto, poichè comprende i soli prezzi di baratto.

Equazione di contanti  $\frac{e}{n}(P+A)Q + qp = PQ$ .

Equazione di baratto  $\frac{e}{n}(P+A)Q + q(p+x) = (P+A)Q$   
sottraendo da questa la equazione prima ne viene  $qx = QA$ ,  
d'onde  $q = \frac{QA}{x}$ , sostituendo il qual valore nella prima ne segue

$\frac{e}{n}(P+A)Q + \frac{QAq}{x} = PQ$ , e dividendo per  $Q$ , e liberando  $x$

risulta  $x = \frac{pA}{P - \frac{e}{n}(P+A)}$ , e quindi  $p+x = p + \frac{pA}{P - \frac{e}{n}(P+A)}$ .

È poi semplicissima la espressione a me proveniente di  $q = \frac{QA}{x}$ . Secondo *F. Luca*, e *Tartaglia* essa verrebbe ad

essere  $q = \frac{Q(P+A) - \frac{e}{n}Q(P+A)}{p+x}$ , e sostituendo il valore di

$p+x$  si avrebbe

$$q = \frac{[Q(P+A) - \frac{e}{n}Q(P+A)] [P - \frac{e}{n}(P+A)]}{p(P+A) - \frac{e}{n}(P+A)} = \frac{Q [P - \frac{e}{n}(P+A)]}{p}$$

espressione molto più composta della mia. La coincidenza però manifestasi, osservando essere  $x = \frac{pA}{P - \frac{e}{n}(P+A)}$ , conse-

guentemente  $P - \frac{e}{n}(P+A) = \frac{pA}{x}$ .

ESEMPIO di *F. Luca*. *M* è panno, che a contanti vale lire 5, ed a baratto 6, *m* è lana che a contanti vale 17 lire al cento; il Mercante del panno vuole  $\frac{1}{3}$  dell'importo del suo panno al prezzo 6 in contanti: a quale prezzo il Mercante della lana deve alzarne il prezzo?  $6 - 5 = A = 1$ ,  $p = 17$ ,  $\frac{e}{n} = \frac{1}{3}$ , onde  $x = \frac{17 \cdot 1}{5 - \frac{1}{3} \cdot 6} = \frac{17}{3} = 5 \frac{2}{3}$ ,  $p+x = 17 + 5 \frac{2}{3} = 22 \frac{2}{3}$ .

Si prenda qualunque quantità di panno e. g. canne 68, sarà il numero di centinaja di libbre da prendersi di lana =  $q = \frac{68 \cdot 1}{5 \frac{2}{3}} = 12$ , cioè libbre di lana 1200. Di fatto, il prezzo di canne 68 di panno a lire 6 la canna =  $68 \cdot 6 = 408$ ,  $\frac{1}{3} \cdot 408 = 136$ , 12 centinaja di lana a lire 17 il centinajo =  $12 \cdot 17 = 204$ ; ora  $136 + 204 = 340 = 68 \cdot 5$  secondo la prima equazione;  $136 + 12 \cdot 21 \frac{2}{3} = 136 + 272 = 408 = 68 \cdot 6$  giusta la equazione seconda.

Dalla equazione  $x = \frac{pA}{P - \frac{e}{n}(P+A)}$  delle cinque quantità

$P, A, \frac{e}{n}, p, x$  date quattro qualunque si troverà la quinta, su di che vertono altri quesiti di *F. Luca*, e di *Tartaglia*.

E se reciprocamente il Mercante della merce *M* dar dovesse al Mercante della merce *m* in contanti la parte  $\frac{e}{n}(p+x)q$ , e ciononostante si trattasse di cercare il valore di  $p+x$ , le due equazioni sarebbero

$\frac{e}{n}(p+x)q + Q(P+A) = q(p+x)$  equazione di baratto

$\frac{e}{n}(p+x)q + QP = qp$  equazione di contanti, e sottraendo

questa da quella si avrebbe al solito  $QA = qx$ , donde  $q = \frac{QA}{x}$ ,  
 che sostituito nell'equazione seconda dà  
 $\frac{e}{n}(p+x) \frac{QA}{x} + PQ = \frac{QA}{x} p$ , dalla quale dividendo per  $Q$ ,  
 e liberando  $x$  si ottiene

$$x = \frac{(1 - \frac{e}{n}) p A}{P + \frac{e}{n} A}, \text{ e quindi } p + x = p + \frac{(1 - \frac{e}{n}) p A}{P + \frac{e}{n} A}.$$

*Tartaglia* nel suo quesito 14.º insegna la proporzione

$$P + \frac{e}{n-e}(P+A) : P+A + \frac{e}{n-e}(P+A) :: p : p+x \text{ d'onde}$$

$$p+x = \frac{p(P+A + \frac{e}{n-e}(P+A))}{P + \frac{e}{n-e}(P+A)} = p + \frac{pA}{P + \frac{e}{n-e}(P+A)} = p + \frac{(1 - \frac{e}{n}) p A}{P + \frac{e}{n} A}.$$

La Proporzione adunque di *Tartaglia* si riduce alla mia  
 formola. Non così la proporzione di *F. Luca* nel suo quesito  
 12.º la qual è  $P + \frac{e}{n}(P+A) : P+A + \frac{e}{n}(P+A) :: p : p+x$ ;  
 laonde erra *F. Luca*.

Se si ha poi ad indovinare la via, per la quale *Tartaglia*  
 pervenne alla sua proporzione, forse fu questa. Dall'equazione  
 di baratto  $\frac{e}{n}(p+x)q + Q(P+A) = q(p+x)$  si  
 ha  $Q(P+A) = (1 - \frac{e}{n})(p+x)q$ . Si faccia ora

$$(1 - \frac{e}{n})(p+x)q : Q(P+A) :: \frac{e}{n}(p+x)q : \frac{e}{n-e} Q(P+A)$$

il che è generalmente lecito, essendo il prodotto degli estremi  
 uguale al prodotto de' medj, e si avrà, siccome il primo  
 termine uguale al secondo, così il terzo uguale al quarto,  
 laonde la stessa equazione di baratto si cangia in

$$\frac{e}{n-e} Q(P+A) + Q(P+A) = q(p+x),$$

e l'equazione in contanti  $PQ + \frac{e}{n}(p+x)q = pq$  cangiasi in

$$PQ + \frac{e}{n-e} Q (P + A) = qp : \text{onde}$$

$$P + \frac{e}{n-e} (P + A) : P + A + \frac{e}{n-e} (P + A) :: p : p + x .$$

PROBLEMA III. Avendo il secondo Mercante, che diede al primo in contanti la parte  $\frac{e}{n} (P + A) Q$ , alzata la merce sua dal prezzo  $p + x$ , cercasi se lo fece con vantaggio, o con discapito, e del quanto per 100.

F. Luca ne' suoi quesiti 9, e 27 trovato per il Probl. II il prezzo  $p + x$ , a determinare il quanto di vantaggio, o discapito per 100 di capitale argomenta

$$pq : q [\pm (p + z) \mp (p + x)] :: 100 : \frac{100}{p} [\pm (p + z) \mp (p + x)]$$

$$\text{che si riduce a } p : (\pm z \mp x) :: 100 : \frac{100}{p} (\pm z \mp x).$$

Ed a trovare il quanto di vantaggio, o discapito per ogni 100 di baratto argomenta

$$q(p + x) : q [\pm (p + z) \mp (p + x)] :: 100 : \frac{100}{p + x} [\pm (p + z) \mp (p + x)]$$

$$\text{che similmente riducesi a } p + x : (\pm z \mp x) :: 100 : \frac{100}{p + x} (\pm z \mp x)$$

Tartaglia comincia dall'argomentare

$$P + A - \frac{e}{n} (P + A) : P - \frac{e}{n} (P + A) :: q(p + z) : \frac{q(p + z) [P - \frac{e}{n} (P + A)]}{P + A - \frac{e}{n} (P + A)},$$

indi ordina di sottrarre dal quarto termine il prodotto  $qp$ , finalmente comanda d'instituire la proporzione

$$qp + \frac{e}{n} (P + A) Q : \frac{q(p + z) [P - \frac{e}{n} (P + A)]}{P + A - \frac{e}{n} (P + A)} - qp :: 100 : G$$

intendendo per G il guadagno per 100 sopra la somma del secondo Mercante nel contratto impiegata  $qp + \frac{e}{n} (P + A)$ .

Io rifletto alle due equazioni

Tomo XVI.

R

$$1.^{\circ} \text{ in contanti } \frac{e}{n} (P+A) Q + qp = PQ$$

$$2.^{\circ} \text{ di baratto } \frac{e}{n} (P+A) Q + q(p+z) = (P+A) Q.$$

Essendovi per il 2.<sup>o</sup> Mercante guadagno si verifica la seconda, ma non già la prima. Per esempio essendo *M* panno, il cui prezzo in contanti alla canna  $P =$  lire 5, in baratto  $P + A = 6$ , la quantità  $Q =$  canne 75; *m* lana fatta valere in baratto  $p + z =$  lire 30 al cento in luogo di  $p = 20$  in contanti,  $q = 10$  centinaja, ed essendo  $\frac{e}{n} = \frac{1}{3}$ , si avrà

$$\frac{e}{n} (P+A) Q = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 75 = \frac{1}{3} \cdot 450 = 150; (P+A) Q = 450,$$

$q(p+z) = 10 \cdot 30 = 300$ : onde  $300 + 150 = 450$ , ecco verificata la equazione seconda di baratto.

Ma avendosi  $qp = 10 \cdot 20 = 200$ ;  $PQ = 75 \cdot 5 = 375$  si ha

$$\frac{e}{n} (P+A) Q + qp = 350; PQ = 375. \text{ Onde non sarà veri-}$$

ficata la equazione prima dei contanti, ma si avrà

$$\frac{e}{n} (P+A) Q + qp = PQ - 25.$$

Dunque in generale sarà  $qp + \frac{e}{n} (P+A) Q < PQ$ , cioè il dato dal secondo Mercante meno, che il ricevuto, e l'eccezzo del ricevuto sopra il dato  $PQ - [qp + \frac{e}{n} (P+A) Q]$  sarà il suo guadagno: nell'addotto caso il 25. Perciò chiamando il guadagno  $g$  si avrà l'equazione generale in contanti  $qp + \frac{e}{n} (P+A) Q = PQ - g$ .

Ora sottraendo questa da quella di baratto

$$q(p+z) + \frac{e}{n} (P+A) Q = (P+A) Q \text{ si ha } q = \frac{QA+g}{z}; \text{ e}$$

sostituendo questo valore nella prima si trova

$$g = \frac{z[PQ - \frac{\sigma}{n}(P+A)Q] - QAp - (p+z-p)[PQ - \frac{\sigma}{n}(P+A)Q] - QAp}{p+z} = \frac{p+z}{p+z} \\ = PQ - \frac{\sigma}{n}(P+A)Q - \frac{p}{p+z}[P+A - \frac{\sigma}{n}(P+A)]Q$$

e sarà questo il guadagno del 2.° Mercante sopra  $qp + \frac{\sigma}{n}(P+A)$  o sia sopra  $(PQ - g)$ ; onde capitale e guadagno ::  $PQ - g : g ::$

$$\frac{\sigma}{n}(P+A)Q + \frac{p}{p+z}[P+A - \frac{\sigma}{n}(P+A)]Q : PQ - \frac{\sigma}{n}(P+A)Q - \frac{p}{p+z}[P+A - \frac{\sigma}{n}(P+A)]Q :: 1 : \frac{(p+z)P}{(p+\frac{\sigma}{n}z)(P+A)} - 1, \text{ e giu-}$$

sta questa ragione il 100 al guadagno per 100, che dirò G diverrà  $G = \left( \frac{(p+z)P}{(p+\frac{\sigma}{n}z)(P+A)} - 1 \right) 100.$

Si penetra la ragione della proporzione

$$P+A - \frac{\sigma}{n}(P+A) : P - \frac{\sigma}{n}(P+A) :: q(p+z) : \frac{q(p+z)[P - \frac{\sigma}{n}(P+A)]}{P+A - \frac{\sigma}{n}(P+A)}$$

di Tartaglia, e della sottrazione ordinata di  $qp$  dal quarto termine, se in luogo dell'equazione in contanti

$$qp + \frac{\sigma}{n}(P+A)Q = QP - g$$

si finga l'equazione in contanti

$$qp' + \frac{\sigma}{n}(P+A)Q = QP$$

concependo per  $p'$  un prezzo in contanti maggiore di  $p$ , il quale faccia verificare l'equazione, suppiendo al bisogno di sottrarre  $g$  da  $PQ$ . Da questa equazione cavando il valore

di  $Q = \frac{qp'}{P - \frac{\sigma}{n}(P+A)}$ , e sostituendolo nella equazione di bar-

ratto  $\frac{\sigma}{n}(P+A) + q(p+z) = (P+A)Q$  si troverà

$$P+A - \frac{\sigma}{n}(P+A) : P - \frac{\sigma}{n}(P+A) :: q(p+z) : qp' = \frac{q(p+z)[P - \frac{\sigma}{n}(P+A)]}{P+A - \frac{\sigma}{n}(P+A)}$$



e quindi  $qp' - qp = \frac{q(p+z)[P - \frac{e}{n}(P+A)]}{P+A - \frac{e}{n}(P+A)} - qp$

A dimostrar poi la seconda proporzione di esso *Tartaglia* cioè

$$qp + \frac{e}{n}(P+A)Q : \frac{q(p+z)[P - \frac{e}{n}(P+A)]}{P+A - \frac{e}{n}(P+A)} - qp :: 100 : G$$

alla mia formola di *G* riducibile non si ha, che a sostituire nel primo termine di essa proporzione il valore di *Q* tolto dall'equazione di baratto, con che il termine convertesi in

$$pq + \frac{q(p+z) \cdot \frac{e}{n}(P+A)}{P+A - \frac{e}{n}(P+A)}, \text{ e divisa la prima ragione per } q \text{ co-$$

mune a tutti i termini risulta

$$p + \frac{(p+z) \cdot \frac{e}{n}(P+A)}{P+A - \frac{e}{n}(P+A)} : \frac{(p+z)[P - \frac{e}{n}(P+A)]}{P+A - \frac{e}{n}(P+A)} - p :: 100 : G;$$

ed a togliere il divisore  $P+A - \frac{e}{n}(P+A)$ , moltiplicando per esso  $p, -p$ , indi dividendo per  $p(P+A) + \frac{e}{n}z(P+A)$  proviene per lo appunto  $G = \left( \frac{(p+z)P}{(p + \frac{e}{n}z)(P+A)} - 1 \right) 100$ .

Egli è poi evidente che *F. Luca* calcolò il quanto per 100 del guadagno, o discapito del secondo Mercante sopra il prezzo della sua merce in contanti  $p$ , o sopra il prezzo per il baratto accresciuto  $p+x$ ; e dice di essersi su di ciò trovato in grandi controversie; ma pur *finaliter si conclude per li saputi che ditto guadagno s'intende del Capitale* cioè di  $pq$ . *Tartaglia* lo condanna ragionevolmente volendo, che per capitale si consideri non solo il  $pq$ , ma unitamente il contante  $\frac{e}{n}(P+A)Q$ , che il secondo Mercante sborsa al 1.º, vale a dire tutta la somma  $pq + \frac{e}{n}(P+A)Q$ . E tanto mag-

gior ragione aveva *Tartaglia* di condannar *F. Luca*, quanto che questi nel suo quesito 32.<sup>o</sup> computa il guadagno del primo Mercante sopra  $\left(P - \frac{e}{n}(P+A)\right)Q$  cioè sopra la data  $PQ$  meno la somma ricevuta  $\frac{e}{n}(P+A)Q$ ; onde per essere coerente dovea similmente computare il guadagno del secondo Mercante nel caso opposto sopra l'aggregato della somma data in merci  $pq$ , e della data in contanti  $\frac{e}{n}(P+A)Q$ .

È poi manifesto, che dinotando per  $D$  il discapito del secondo Mercante qualora sia  $p+z < p+x$  per il Problema II determinato sarà

$$D = \left(1 - \frac{(p+z)P}{(p+z)\frac{e}{n}(P+A)}\right) 100.$$

Il guadagno del secondo Mercante è discapito del primo, e viceversa, ma vi ha questa differenza che laddove il guadagno, o discapito del secondo va riportato alla somma  $qp + \frac{e}{n}(P+A)Q$ ; il discapito all'incontro, od il guadagno del primo va giusta *F. Luca* stesso riportato alla somma  $PQ - \frac{e}{n}(P+A)Q$ : onde sarà capitale a discapito nel caso di  $p+z > p+x$

$PQ - \frac{e}{n}(P+A)Q : PQ - \frac{e}{n}(P+A)Q - \frac{p}{p+z}\left(P+A - \frac{e}{n}(P+A)\right)Q$   
e perciò chiamando  $D'$  il discapito del primo Mercante per 100

$$D' = \left(1 - \frac{p\left(P+A - \frac{e}{n}(P+A)\right)}{(p+z)\left(P - \frac{e}{n}(P+A)\right)}\right) 100$$

e nel caso di  $p+z < p+x$

$$G' = \left(\frac{p\left(P+A - \frac{e}{n}(P+A)\right)}{(p+z)\left(P - \frac{e}{n}(P+A)\right)} - 1\right) 100$$

se mai ti piacesse rapportare il D', e G' al semplice PQ, avresti

$$G' = \left( \frac{(p+z\frac{e}{n})(P+A)}{(p+z)P} - 1 \right) 100; D' = \left( 1 - \frac{(p+z\frac{e}{n})(P+A)}{(p+z)P} \right) 100.$$

Entrando in queste formole sei quantità cioè oltre G, o G', o D, o D' le quantità  $z, p, P, A, \frac{e}{n}$ , date cinque qualunque si troverà la sesta: versano in fondo su alcune di tali combinazioni i quesiti 19, 20, 21, 22, 23, 24 di *Tartaglia*. Stando all'esempio al principio delle mie riflessioni su di questo Problema addotto sarà

$$G = \left( \frac{30.5}{(20+\frac{1}{2}.10)6} - 1 \right) 100 = \left( \frac{15}{14} - 1 \right) 100 = 7\frac{1}{2}$$

$$D' = \left( 1 - \frac{20(6-\frac{1}{2}.6)}{30(5-\frac{1}{2}.6)} \right) 100 = 11\frac{1}{3} \text{ nel primo rapporto, e nel}$$

$$\text{secondo } D' = \left( 1 - \frac{(20+10.\frac{1}{2})6}{30.5} \right) 100 = 6\frac{2}{3}.$$

PROBLEMA IV. Uno ha la merce M, il cui prezzo in contanti P, in baratto P+A, l'altro ha le merci m, m', i prezzi delle quali in contanti p, p', in baratto p+x, p'+x', ed il primo vuole la parte  $\frac{e}{n}$  di P+A in contanti, e delle merci m, m' quantità q, q' tali, che  $kq(p+x) = q'(p'+x')$  si domanda l'equazione tra P, P+A, p, p+x, p', p'+x',  $\frac{e}{n}$ , & ? sarà

$$1.^{\text{a}} \text{ equazione di contanti } \frac{e}{n}(P+A)Q + qp + q'p' = PQ$$

$$2.^{\text{a}} \text{ equazione di baratto } \frac{e}{n}(P+A)Q + q(p+x) + q'(p'+x') = Q(P+A)$$

$$3.^{\text{a}} \text{ equazione di condizione } kq(p+x) = q'(p'+x')$$

sottraendo dalla seconda la prima si ha

$$qx + q'x' = QA, \text{ d'onde } q' = \frac{QA - qx}{x'}, \text{ e quindi } \frac{QA - qx}{x'}(p'+x')$$

$= kq(p+x)$  dal che si ricava

$$q = \frac{QA(p+x')}{x(p'+x') + kx'(p+x)} \quad q' = \frac{kQA(p+x)}{x(p'+x') + kx'(p+x)} \quad \text{sostituiti}$$

i quali valori nella prima equazione ne uscirà

$$\frac{\Delta[p(p'+x') + kp'(p+x)]}{x(p'+x') + kx'(p+x)} = P - \frac{e}{n} (P+A).$$

Se si supponesse  $q = q'$  avremmo le equazioni

$$1.^{\circ} \frac{e}{n} (P+A) Q + q(p+x') = PQ$$

$$2.^{\circ} \frac{e}{n} (P+A) Q + q(p+x+p'+x') = Q(P+A),$$

e sottraendo la prima dalla seconda proverrebbe  $q(x+x') = QA$

e surrogando nella prima il valore di  $q = \frac{QA}{x+x'}$  risulterebbe

$$\frac{(p+p')A}{x+x'} = P - \frac{e}{n}(P+A) \text{ e facendo uso della terza } k(p+x) = p'+x'$$

dalla quale si cava  $x' = k(p+x) - p'$  ne seguirebbe

$$\frac{(p+p')A}{x(k+1) + kp - p'} = P - \frac{e}{n}(P+A).$$

*Tartaglia* nel suo quesito 32, supponendo di fatto  $q = q'$ , e cercando  $p' + x'$  prescrive di fare

$$P - \frac{e}{n}(P+A) : P+A - \frac{e}{n}(P+A) :: p+p' : \frac{(p+p')(P+A) - \frac{e}{n}(P+A)}{P - \frac{e}{n}(P+A)}$$

$$\text{e di prendere } \frac{(p+p')(P+A) - \frac{e}{n}(P+A)}{P - \frac{e}{n}(P+A)} - (p+x) = p' + x',$$

che risolvesi in  $p+p' + \frac{(p+p')A}{P - \frac{e}{n}(P+A)} - p - x = p' + x'$ , o sia

$$\text{in } \frac{(p+p')A}{P - \frac{e}{n}(P+A)} = x+x', \text{ d'onde } \frac{(p+p')A}{x+x'} = P - \frac{e}{n}(P+A).$$

*F. Luca* nel quesito 23 in luogo di  $p+p'$  pone a terzo termine della proporzione  $p+x+p'$ , ed erra perciò, seguitando nel resto allo stesso modo, che *Tartaglia*. Nel quesito 22 non si sa che cosa si voglia non essendo coerente ne' numeri.

Se nella mia formola si supporrà  $p : p + x :: p' : p' + x'$ , sostituendo a  $p' + x'$  il suo valore  $\frac{p'}{p}(p+x)$ , si trasformerà essa in  $\frac{A(1+k)pp'}{xp' + kx'p} = P - \frac{e}{n}(P+A)$  e volendo anche eliminar  $x'$  col mezzo dell'equazione  $p' + x' = \frac{p'}{p}(p+x)$ , la quale porge  $x' = \frac{p'}{p}x$ , si avrà  $\frac{Ap}{x} = P - \frac{e}{n}(P+A)$ , ed in questo caso

$$q = \frac{QA}{x(1+k)} \quad q' = \frac{kQpA}{xp'(1+k)}$$

Sono queste mie formole più ragionevoli di quelle di *Tartaglia* nel quesito 32. E perchè prender  $q = q'$  a costo di dover senza proporzione alzare il prezzo  $p'$ ?

PROBLEMA V. Innalzando il secondo Mercante li prezzi delle sue merci  $m$ ,  $m'$  dalli prezzi in contanti  $p$ ,  $p'$  ai prezzi  $p+z$  +  $p'+z'$  >  $p+x$  +  $p'+x'$ , si domanda il suo guadagno per 100?

Le tre equazioni saranno per il Probl. III, e per il IV

$$1.^{\circ} \text{ in contanti } \frac{e}{n}(P+A) + qp + q'p' = PQ - g$$

$$2.^{\circ} \text{ di baratto } \frac{e}{n}(P+A) + q(p+z) + q'(p'+z') = Q(P+A)$$

$$3.^{\circ} \text{ di condizione } kq(p+z) = q'(p'+z')$$

Da queste tre equazioni si trova

$$\frac{(QA+g)[p(p'+z') + k'p'(p+z)]}{z(p'+z') + k'z'(p+z)} = PQ - \frac{e}{n}(P+A)Q - g$$

onde

$$g = \frac{[PQ - \frac{e}{n}(P+A)Q][z(p'+z') + k'z'(p+z)] - QA[p(p'+z') + k'p'(p+z)]}{(1+k)(p+z)(p'+z')}$$

guadagno sopra  $\frac{e}{n}(P+A) + qp + q'p'$ , o sia sopra  $PQ - g$ .

Ora  $PQ - g$  si trova uguale a

$$\frac{(P+A)Q(p(p'+z')) + k(p'(p+z)) + \frac{\sigma}{n}(P+A)Q(z(p'+z') + kz'(p+z))}{(1+k)(p+z)(p'+z')}$$

e perciò il guadagno G sopra 100

$$G = \left[ \frac{\left(P - \frac{\sigma}{n}(P+A)\right) \left(z(p'+z') + kz'(p+z)\right) - A \left(p(p'+z') + kp'(p+z)\right)}{(P+A) \left(p(p'+z') + kp'(p+z)\right) + \frac{\sigma}{n}(P+A) \left(z(p'+z') + kz'(p+z)\right)} \right] 100.$$

E nel caso di  $p+z+p'+z' < p+x+p'+x'$

$$D = \left[ \frac{A \left(p(p'+z') + kp'(p+z)\right) - \left(P - \frac{\sigma}{n}(P+A)\right) \left(z(p'+z') + kz'(p+z)\right)}{(P+A) \left(p(p'+z') + kp'(p+z)\right) + \frac{\sigma}{n}(P+A) \left(z(p'+z') + kz'(p+z)\right)} \right] 100$$

il corrispondente discapito D', o guadagno G' del primo Mercante, riportandosi a  $PQ - \frac{\sigma}{n}(P+A)Q$ , sarà

$$D' = \left[ \frac{\left(P - \frac{\sigma}{n}(P+A)\right) \left(z(p'+z') + kz'(p+z)\right) - A \left(p(p'+z') + kp'(p+z)\right)}{(1+k)(p+z)(p'+z') \left(P - \frac{\sigma}{n}(P+A)\right)} \right] 100$$

$$G' = \frac{A \left(p(p'+z') + kp'(p+z)\right) - \left(P - \frac{\sigma}{n}(P+A)\right) \left(z(p'+z') + kz'(p+z)\right)}{(1+k)(p+z)(p'+z') \left(P - \frac{\sigma}{n}(P+A)\right)} \times 100.$$

Se suppongasi  $p:p+z::p':p'+z'$  conseguentemente  $p:z::p':z'$  sostituendo  $\frac{p'}{p}(p+z)$  in luogo di  $p'+z'$ , e  $\frac{p'}{p}z$

in luogo di  $z'$  si trova  $G = \left( \frac{(p+z)P}{p+z\frac{\sigma}{n}(P+A)} - 1 \right) 100$ , non al-

trimenti, che allora quando di due sole merci M, m si tratta; dicasi lo stesso di D, e di G', D'.

Posta  $q=q'$ , siccome pone Tartaglia nel quesito suo 33, e di più fatto, come egli fa,  $k=1$ , dal che ne segue eziandio  $p+z=p'+z'$  diviene

$$G = \left[ \frac{\left(P - \frac{\sigma}{n}(P+A)\right) (z+z') - A(p+p')}{(P+A)(p+p') + \frac{\sigma}{n}(P+A)(z+z')} \right] 100$$

$$D = \left[ \frac{\Lambda(p+p') - \left(P - \frac{e}{n}(P+\Lambda)\right)(z+z')}{(P+\Lambda)(p+p') + \frac{e}{n}(P+\Lambda)(z+z')} \right] 100$$

$$G' = \left[ \frac{\Lambda(p+p') - \left(P - \frac{e}{n}(P+\Lambda)\right)(z+z')}{2(p+z)\left(P - \frac{e}{n}(P+\Lambda)\right)} \right] 100$$

$$D' = \left[ \frac{\left(P - \frac{e}{n}(P+\Lambda)\right)(z+z') - \Lambda(p+p')}{2(p+z)\left(P - \frac{e}{n}(P+\Lambda)\right)} \right] 100.$$

Non fa di bisogno di esporre le formole nel caso di  $\frac{e}{n} = 0$ . Noterò bensì, che *F. Luca* erra nel metodo, e nel computo nel suo quesito 24.

PROBLEMA VI. Si aggiunga per parte del secondo Mercante la merce  $m''$  il cui prezzo in contanti  $p''$ , in baratto  $p''+z''$ , essendo  $p+z+p'+z'+p''+z'' > p+x+p'+x'+p''+x''$ , e si aggiunga la condizione  $Hq(p+z) = q''(p''+z'')$ , essendo  $q''$  la quantità della merce  $m''$  si cerca l'equazione tra i prezzi, considerando anche il caso del guadagno?

Quattro essendo le equazioni

$$1.^{\circ} \text{ di contanti } \frac{e}{n}(P+\Lambda)Q + qp + q'p' + q''p'' = PQ - g$$

$$2.^{\circ} \text{ di baratto } \frac{e}{n}(P+\Lambda)Q + q(p+z) + q'(p'+z') + q''(p''+z'') = (P+\Lambda)Q$$

$$\text{di condiz. } 1.^{\circ} kq(p+z) = q'(p'+z')$$

$$2.^{\circ} Hq(p+z) = q''(p''+z'')$$

si troveranno operando similmente che nel Probl. III

$$q = \frac{(p'+z')(p''+z'')(QA+g)}{z(p'+z')(p''+z'') + kz'(p+z)(p'+z') + Hz''(p+z)(p'+z')}$$

$$q' = \frac{(p+z)(p''+z'')(QA+g)}{z(p'+z')(p''+z'') + kz'(p+z)(p'+z') + Hz''(p+z)(p'+z')}$$

$$q'' = \frac{(p+z)(p'+z')(QA+g)}{z(p'+z')(p''+z'') + kz'(p+z)(p'+z') + Hz''(p+z)(p'+z')}$$

li quali valori sostituiti nella equazione di contanti daranno l'equazione di  $g$ , che fatto

$$\left( PQ - \frac{e}{n}(P+A)Q \right) \left( z(p'+z')(p''+z'') + kz'(p+z)(p''+z'') + Hz''(p+z)(p'+z') \right) = RQ$$

$$QA \left[ p(p'+z)(p''+z'') + kp'(p+z)(p''+z'') + kp''(p+z)(p'+z') \right] = SQ$$

$$\text{sarà } g = \frac{(R-S)Q}{(1+k+H)(p+z)(p'+z')(p''+z'')}$$

e fatto

$$(P+A)Q \left[ p(p'+z')(p''+z'') + kp'(p+z)(p''+z'') + Hp''(p+z)(p'+z') \right] = TQ$$

$$\frac{e}{n}(P+A)Q \left[ z(p'+z')(p''+z'') + kz'(p+z)(p''+z'') + Hz''(p+z)(p'+z') \right] = UQ$$

$$\text{risulterà } PQ - g = \frac{(T+U)Q}{(1+k+H)(p+z)(p'+z')(p''+z'')}$$

$$\text{Laonde } \frac{g}{\frac{e}{n}(P+A) + qp + q'p' + q''p''} = \frac{g}{PQ - g} = \frac{R-S}{T+U}$$

e quindi

$$G = \left( \frac{R-S}{T+U} \right) 100; \quad D = \left( \frac{S-R}{T+U} \right) 100.$$

Ma per D', G', rapportandoli a  $PQ - \frac{e}{n}(P+A)Q$ , si avranno

$$D' = \left( \frac{g}{PQ - \frac{e}{n}(P+A)Q} \right) 100 = \left( \frac{S-R}{(1+k+H)(p+z)(p'+z')(p''+z'') \left( P - \frac{e}{n}(P+A) \right)} \right) 100$$

$$G' = \left( \frac{R-S}{(1+k+H)(p+z)(p'+z')(p''+z'') \left( P - \frac{e}{n}(P+A) \right)} \right) 100.$$

Se suppongasi  $p : p+z :: p' : p'+z' :: p'' : p''+z''$  le quantità  $q, q', q''$  si ridurranno a

$$q = \frac{QA-g}{1+k+H}; \quad q' = \frac{k(QA+g)p}{p'(1+k+H)}; \quad q'' = \frac{H(QA+g)p}{p''(1+k+H)} \text{ e quindi}$$

$$qp + q'p' + q''p'' = \frac{(QA+g)p}{z}; \text{ conseguentemente l'equazione in}$$

$$\text{contanti } \frac{e}{n}(P+A) + \frac{(QA+g)p}{z} = PQ - g, \text{ la stessa, che di-}$$

veniva nel Problema III, essendo una sola la merce del secondo Mercante; onde anche tutte le formole derivate saranno le medesime.



Se vogliamo  $q = q' = q''$  si ridurrà l'equazione prima di contanti ad  $\frac{e}{n}(P+A) + q(p+p'+p'') = PQ - g$ ; la seconda

di baratto ad  $\frac{e}{n}(P+A) + q(p+z+p'+z'+p''+z'') = (P+A)Q$

dalle quali si ha immantinenti  $q = \frac{QA+g}{z+z'+z''}$ , e quindi

$$G = \left( \frac{P - \frac{e}{n}(P+A)(z+z'+z'') - A(p+p'+p'')}{(P+A)(p+p'+p'') + \frac{e}{n}(P+A)(z+z'+z'')} \right) 100$$

$$G' = \frac{A(p+p'+p'') - \left( P - \frac{e}{n}(P+A) \right) (z+z'+z'')}{(p+z+p'+z'+p''+z'') \left( P - \frac{e}{n}(P+A) \right)}$$

d'onde si vede quali saranno le espressioni di D, e D'.

Delle quantità, che entrano a costituire le formole generali di g, G, D, G', D', si troverà una qualunque date le altre tutte.

ESEMPPIO. Sia M lana di  $P = 12$  al centinaio di libbre in contanti, m pepe di  $p = 24$ ,  $p+z = 28$ ; m' cannella di  $p = 45$ ,  $p'+z' = 53$ , m'' garofani di  $p'' = 34$ ,  $p''+z'' = 40$ . Vuole il Mercante della lana  $\frac{1}{2}$  in pepe,  $\frac{1}{3}$  in cannella,  $\frac{1}{4}$  in garofani: che deve essere  $P+A$ , onde riesca perfetta la uguaglianza senza guadagno o discapito per parte di alcuno de' due Mercanti? Sarà primieramente  $\frac{e}{n} = 0$ . E dovendo stare  $q'(p+z)$ :

$q'(p'+z') :: \frac{1}{3} : \frac{1}{2} :: \frac{2}{3} : 1$  sarà  $q'(p'+z') = \frac{2}{3} q'(p+z)$ , cioè  $k = \frac{2}{3}$ ; e per dover essere  $q''(p''+z'') : q'(p+z) :: \frac{1}{4} : \frac{1}{2} :: \frac{1}{2} : 1$ , e perciò  $q''(p''+z'') = \frac{1}{2} q'(p+z)$ , sarà  $H = \frac{1}{2}$ . Dunque dalla formola di g, fatto  $g = 0$ , ne verrà per essere anche  $\frac{e}{n} = 0$

$$A = \frac{P[z(p'+z')(p''+z'') + k z'(p+z)(p''+z'') + k z''(p+z)(p'+z')]}{p(p'+z')(p''+z'') + k p'(p+z)(p''+z'') + k p''(p+z)(p'+z')}$$

e sostituiti i valori dati

$$A = 2 + \frac{186a}{27427}, \text{ onde } P+A = 14 + \frac{186a}{27427}$$

E così trova *Tartaglia* nel suo quesito 35 prendendo in luogo di  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$  le frazioni  $\frac{6}{13}$ ,  $\frac{4}{13}$ ,  $\frac{3}{13}$ , che sono proporzionali. Piglia il prezzo di 6 quantità di pepe in contanti = 6.24 = 144, in baratto 168; l'importo della quantità di cannella dev'essere nel baratto  $\frac{3}{4}$  di quello della quantità del pepe: dunque =  $\frac{3}{4} \cdot 168 = 112$ ; e l'importo della quantità de' garofani =  $\frac{1}{2} \cdot 168 = 84$ ; dunque somma = 168 + 112 + 84 = 364. Si cerchino i corrispondenti valori in contanti, e si avrà

$$28:24::168:144 \dots 53:45::112:95\frac{5}{8} \dots 40:34::84:71\frac{1}{2}$$

somma = 310  $\frac{131}{256}$ .

Or argomentisi 310  $\frac{131}{256}$ :364::12:14  $\frac{1265}{256}$  = P + A.

F. Luca prende  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$  di P = 12, che sono 6, 4, 3; ma 6 + 4 + 3 = 13; dunque dicasi

$$13:6::12:5\frac{1}{3} \dots 13:4::12:3\frac{2}{3} \dots 13:3::12:2\frac{12}{13}.$$

Argomentisi ora

$$24:28::5\frac{1}{3}:\frac{24}{13} \dots 45:53::3\frac{2}{3}:\frac{24}{13} \dots 34:40::2\frac{12}{13}:\frac{24}{13} \dots 2\frac{12}{13}$$

sarà P + A =  $\frac{24}{13} \cdot 5\frac{1}{3} + \frac{24}{13} \cdot 3\frac{2}{3} + \frac{24}{13} \cdot 2\frac{12}{13} = 14 + \frac{316}{169}$ .

Lo spirito del metodo di *Tartaglia* è questo. Dovendo le tre somme di baratto, che dar deve il secondo Mercante esser tra loro in proporzione delle frazioni  $\frac{1}{f}$ ,  $\frac{1}{h}$ ,  $\frac{1}{l}$ , saran-

no parimenti nella proporzione di 1,  $\frac{f}{h}$ ,  $\frac{f}{l}$ . Dia egli in merce  $m$  la somma  $q(p+z)$ , saranno le somme proporzionali dovute nelle merci  $m'$ ,  $m''$ ,  $\frac{f}{h} q(p+z)$ ,  $\frac{f}{l} q(p+z)$ ,

e l'aggregato di tutte e tre  $q(p+z) + \frac{f}{h} q(p+z) + \frac{f}{l} q(p+z)$

$$= \left(1 + \frac{f}{h} + \frac{f}{l}\right) (p+z) q. \text{ Il valore in contanti corrispon-$$

dente al valore in baratto  $\frac{f}{h} q(p+z)$  della merce  $m'$  si troverà dicendo

$$p'+z':p':::\frac{f}{h} q(p+z):\frac{f}{h} \cdot \frac{q(p+z)p'}{p'+z'}; \text{ e similmente con fare}$$

$p'' + z'' : p'' :: \frac{f}{l} q(p+z) : \frac{f}{l} \cdot \frac{q(p+z)p''}{p''+z''}$  sarà questo il valore in contanti della merce  $m''$  corrispondente al valore di baratto  $\frac{f}{l} q(p+z)$ . Laonde l'aggregato dei valori in contanti sarà

$qp + \frac{f}{h} \cdot \frac{q(p+z)p'}{p'+z'} + \frac{f}{l} \cdot \frac{q(p+z)p''}{p''+z''}$ . Si faccia

$$qp + \frac{f}{h} \cdot \frac{q(p+z)p'}{p'+z'} + \frac{f}{l} \cdot \frac{q(p+z)p''}{p''+z''} : \left(1 + \frac{f}{h} + \frac{f}{l}\right) q(p+z) :: P : \\ \frac{\left(1 + \frac{f}{h} + \frac{f}{l}\right)(p+z)P}{p + \frac{f}{h} \cdot \frac{(p+z)p'}{p'+z'} + \frac{f}{l} \cdot \frac{(p+z)p''}{p''+z''}} = P + A$$

e si troverà questa formola nel caso dell'esempio coincidere con la mia prendendo  $\frac{f}{h} = k$ ,  $\frac{f}{l} = H$ .

Lo spirito del metodo di *F. Luca* è il seguente. Prendasi

$\frac{P}{f} + \frac{P}{h} + \frac{P}{l}$  e facciasi

$$\frac{P}{f} + \frac{P}{h} + \frac{P}{l} : P :: \frac{P}{f} : t :: \frac{P}{h} : u :: \frac{P}{l} : y$$

indi si argomenti

$$p : p+z :: t : \frac{t(p+z)}{p} \dots p' : p'+z' :: u : \frac{u(p'+z')}{p'} \dots p'' : p''+z'' :: y : \frac{y(p''+z'')}{p''}$$

$$\text{sarà } P + A = \frac{t(p+z)}{p} + \frac{u(p'+z')}{p'} + \frac{y(p''+z'')}{p''} =$$

$$\frac{1}{\frac{1}{f} + \frac{1}{h} + \frac{1}{l}} \left( \frac{p+z}{p} \cdot \frac{P}{f} + \frac{p'+z'}{p'} \cdot \frac{P}{h} + \frac{p''+z''}{p''} \cdot \frac{P}{l} \right).$$

Non si vede a prima vista la ragione perchè sia falso questo metodo, anzi sembra ragionevole, ma l'applicazione smentisce la buona sembianza, riuscendo la frazione  $\frac{226}{3315}$  più

che di  $\frac{7}{27427}$  maggiore della  $\frac{1862}{27427}$ . A scoprire il difetto applichiamo la espressione cui conduce di  $P + A$  con quella,

che proviene dal metodo di *Tartaglia* coincidente nelle circostanze dell'esempio con la mia dedotta da' suoi veri principj. Fatto pertanto paragone si ha

$$\frac{\frac{1}{f} + \frac{1}{h} + \frac{1}{l}}{\frac{1}{f} + \frac{1}{h} + \frac{1}{l}} \left( \frac{p+z}{p} \cdot \frac{1}{f} + \frac{p'+z'}{p'} \cdot \frac{1}{h} + \frac{p''+z''}{p''} \cdot \frac{1}{l} \right) = \frac{\left( 1 + \frac{f}{h} + \frac{f}{l} \right) (p+z)}{p + \frac{f}{h} \frac{(p+z)p'}{p'+z'} + \frac{f}{l} \frac{(p+z)p''}{p''+z''}}$$

onde

$$\left( \frac{1}{f} + \frac{1}{h} + \frac{1}{l} \right)^2 = \left( \frac{p+z}{p} \cdot \frac{1}{f} + \frac{p'+z'}{p'} \cdot \frac{1}{h} + \frac{p''+z''}{p''} \cdot \frac{1}{l} \right) \left( \frac{p}{p+z} \cdot \frac{1}{f} + \frac{p'}{p'+z'} \cdot \frac{1}{h} + \frac{p''}{p''+z''} \cdot \frac{1}{l} \right) = \frac{1}{f^2} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{l^2} + \left( \frac{p(p'+z')}{p'(p+z)} + \frac{p'(p+z)}{p(p'+z')} \right) \frac{1}{f} \cdot \frac{1}{h} + \left( \frac{p(p''+z'')}{p''(p+z)} + \frac{p''(p+z)}{p(p''+z'')} \right) \frac{1}{f} \cdot \frac{1}{l}$$

dalla qual equazione viene

$$\frac{p(p'+z')}{p'(p+z)} + \frac{p'(p+z)}{p(p'+z')} = 2; \quad \frac{p(p''+z'')}{p''(p+z)} + \frac{p''(p+z)}{p(p''+z'')} = 2;$$

$$\frac{p'(p'+z')}{p''(p'+z'')} + \frac{p''(p'+z'')}{p'(p'+z')} = 2$$

ciascuna delle quali equazioni è della forma

$$\frac{A}{B} + \frac{B}{A} = 2, \text{ che importa } A^2 + B^2 = 2AB, \quad A^2 - 2AB + B^2 = 0$$

$A - B = 0$ ,  $A = B$ . Dunque

$$p(p'+z') = p'(p+z), \quad p(p''+z'') = p''(p+z), \quad p'(p'+z') = p''(p'+z'')$$

d'onde ne segue

$$p'+z' = \frac{p'}{p}(p+z), \quad p''+z'' = \frac{p''}{p}(p+z), \quad p'+z'' = \frac{p''}{p'}(p'+z')$$

vale a dire la condizione dei prezzi di baratto in proporzione di quelli a contanti. Il metodo adunque di *F. Luca* è giusto a questa condizione, ed è perciò appunto, per avere cioè qualche verità, che non si appalesa a primo colpo falso. Ma *F. Luca* lo applica fuori del caso di tale condizione: e di fatto dovrebbe nell'esempio essere

$$53 = \frac{45 \cdot 28}{24} = \frac{45 \cdot 7}{6} = \frac{315}{6} = 52 \frac{1}{2}, \text{ e } 40 = \frac{34 \cdot 28}{24} = \frac{17 \cdot 7}{3} = \frac{119}{3} = 39 \frac{2}{3}.$$

Erra dunque *F. Luca* di un errore nato senza dubbio dall' avere trovato il metodo giusto in qualche caso compreso nella condizione, e dal non avere avvertita la differenza de' casi per difetto di non essere stato da lui con algebra generalizzato il metodo stesso, come io ho fatto.

PROBLEMA VII. Il Mercante della merce *M* ne alza il prezzo da *P* a  $P + A$ , e ne vuole la parte  $\frac{e}{n}$  di  $P + A$  in contanti; il Mercante della merce *m* ne alza il prezzo da *p* a  $p + z$ , e ne vuole in contanti la parte  $\frac{r}{t}(p + z)$ : cercare la equazione tra questi prezzi, ed il guadagno, o discapito dell' un Mercante, o dell' altro?

Le due equazioni in questo caso sono

$$1.^{\text{a}} \text{ in contanti } \frac{e}{n}(P + A) + qp = PQ + \frac{r}{t}(p + z)q - g$$

$$2.^{\text{a}} \text{ di baratto } \frac{e}{n}(P + A) + q(p + z) = (P + A)Q + \frac{r}{t}(p + z)q$$

sottratta la prima dalla seconda ricavasi  $q = \frac{QA + g}{z}$ , e rimettendo questo valore nella prima si deduce

$$g = \frac{z \left( PQ - \frac{e}{n}(P + A)Q \right) - QA \left( p - \frac{r}{t}(p + z) \right)}{\left( 1 - \frac{r}{t} \right) (p + z)} \quad \text{guadagno rispetto}$$

ad  $\frac{e}{n}(P + A)Q + \frac{QA + g}{z} \left( p - \frac{r}{t}(p + z) \right)$  onde si ricava

$$G = \left[ \frac{z \left( P - \frac{e}{n}(P + A) - A \left( p - \frac{r}{t}(p + z) \right) \right)}{\left( P + A \right) \left( p - \frac{r}{t}(p + z) \right) + \frac{e}{n}z(P + A)} \right] 100$$

il corrispondente *P'* del primo Mercante riportato al capitale

$$PQ + \frac{r}{t}(p + z)q - \frac{e}{n}(P + A)Q = \left( P - \frac{e}{n}(P + A) \right) Q +$$

$$\frac{r}{t}(p + z) \frac{QA + g}{z} = \frac{\left( P - \frac{e}{n}(P + A) \right) Q + QA \cdot \frac{r}{t}}{1 - \frac{r}{t}}$$

*D'* =

$$D' = \left[ \frac{z \left( P - \frac{c}{n}(P+A) \right) - \Lambda \left( p - \frac{r}{t}(p+z) \right)}{\left( P - \frac{c}{n}(P+A) + \Lambda \frac{r}{t} \right) (p+z)} \right] 100.$$

Dalla formola di G si ricava

$$\frac{r}{t} = \frac{\frac{G}{100} \left( p + z + \frac{c}{n} \right) (P+A) + \Lambda p - z \left( P - \frac{c}{n}(P+A) \right)}{\left( \frac{G}{100} (P+A) + \Lambda \right) (p+z)}.$$

A questa ultima formola io riferisco il quesito 3o di *Fra Luca* oscurissimo, e male in sè medesimo, e nella sua soluzione coerente, e che io interpreto così. Due Mercanti barattano panno e lana. Il primo del panno lo alza da  $5 = P$  in contanti alla canna ad  $8 = P + A$  in baratto, e ne vuole  $\frac{c}{n}(P+A)$  in contanti; il secondo alza il centinajo di libbre di lana dal prezzo  $p = 13$  in contanti al prezzo  $p + z = 15$  a baratto: egli dovrebbe giusta il Problema II aver discapito, ma invece vuole guadagnare il 5 per 100 con domandare  $\frac{r}{t}(p+z)$  in contanti: qual deve essere questa parte  $\frac{r}{t}$ ?

Si trova giusta la formola  $\frac{r}{t} = \frac{192}{255}$ .

Ecco il quesito di *Fra Luca* tal quale egli lo propone. Doi barattano lana e panno: la canna (intendi del panno) a contanti vale lire 5, ed a baratto si contò lire 8, e vole  $\frac{c}{n}$  in contanti; el centinajo di libbre di lana val 13, e contosse 15; e quello della lana guadagnò 5 per cento: dimando, che parte deve all'altro Mercante chiedere a ciò il baratto sia uguale.

PROBLEMA VIII. Due Mercanti uno della merce M, l'altro della merce m volendo fare tra loro baratto, quello della merce M ne alza il prezzo da P in contanti e costo a P + X in baratto e colla dilazione del tempo T, e quello della mer-

ce  $m$  ne alza il prezzo da  $p$  in contanti e tosto a  $p+z$  in baratto, e colla dilazione del tempo  $t$ : stabilire la proporzione di  $X:z$ , tanto se niuno dei Mercanti richieggano in contanti parte alcuna dei prezzi, e tanto se il primo richiegga in contanti la parte  $\frac{e}{n}(P+X)$ , ed il secondo  $\frac{h}{m}(p+z)$ .

È primieramente evidente, che nel primo caso  $X:z::TP:tp$ ; spettano a questa proporzione li quesiti 37, 38, 39, 40, 41, 42 di *F. Luca*, e li 37, 38, 39, 40 di *Tartaglia*.

*F. Luca* nel suo 37 usa tre modi a dimostrare essa proporzione, 1.° si faccia  $P:P+X::P:\frac{p(P+X)}{P}$ , si prenda  $\frac{(P+X)p}{P} - p = \frac{pX}{P}$ : poi si argomenti  $\frac{pX}{P}:T::z:t$  d'onde  $t = \frac{TPz}{pX}$ . 2.° Poichè in mesi  $T$  il contante  $P$  cresce  $X$  sarà  $\frac{X}{P}$  il crescimento dell'unità in esso tempo  $T$ , ed  $\frac{X}{PT}$  il crescimento della unità del contante in unità del tempo, cioè in un mese, ed  $\frac{X}{PT} \cdot t$  il crescimento della unità del contante in numero di mesi  $t$ , e finalmente  $\frac{X}{PT} \cdot t \cdot p$  il crescimento del contante  $p$  nel tempo  $t$ , il quale crescimento dev'essere  $=z$ ; dunque  $\frac{X}{PT} \cdot t \cdot p = z$  e quindi  $t = \frac{TPz}{pX}$ . 3.° Dopo avere dedotto che  $\frac{X}{PT}$  è il crescimento della unità del contante  $P$  in un mese deduce essere similmente  $\frac{z}{pt}$  il crescimento della unità del contante  $p$  in un mese; dunque per uguaglianza di condizione  $\frac{X}{PT} = \frac{z}{pt}$  d'onde  $t = \frac{TPz}{pX}$ . *Tartaglia* dice che *F. Luca* conclude qui per una via oscura: io non so vedervi questa oscurità, essendo la stessa la unità del contante  $P$ , e del contante  $p$ .

Similmente dalla proporzione  $X : z :: PT : pt$  si fa manifesto, che nel caso secondo diminuito il contante  $P$  del contante  $\frac{e}{n} (P + X)$ , ed il contante  $p$  di  $\frac{h}{m} (p + z)$  si avrà  $X : z :: T \left( P - \frac{e}{n} (P + X) \right) : t \left( p - \frac{h}{m} (p + z) \right)$ . Su questa formula più composta versano il quesito 45, ed il 46 di *F. Luca*, ed il 42 di *Tartaglia*. È diverso il quesito 43 di *F. Luca* il quale però soggiugnerò sotto il titolo di

PROBLEMA IX. Due barattano panno, e lana. La lana costa al centinajo di libbre in contanti  $p$ , al baratto  $p + z$ , e di questo prezzo ne vuole il Mercante  $\frac{h}{m}$  in contanti dopo mesi  $t$ ; la canna del panno vale a contanti  $P$ , in baratto  $P + X$ ; i prezzi sono in lire: si domanda la rendita di una lira al mese?

Qui come si vede non vi ha che uno de' Mercanti, che conceda tempo, siccome uno solo ve ne ha, che richiegga parte del prezzo alterato in contanti dopo uno stabilito tempo; questa parte si è  $\frac{h}{m} (p + z) q$ . La parte  $\left( p + z - \frac{h}{m} (p + z) \right) q$  è quella da lui data tosto in baratto, ed uguagliata da

$(P + X) Q$ ; laonde  $Q = \frac{\left( p + z - \frac{h}{m} (p + z) \right) q}{P + X}$ . Il contante della quantità della lana è  $qp$ , ciò che il Mercante ricava dall'altro in panno vale contanti  $PQ$ , ciò che per uguaglianza dovrebbe di più ricevere è  $qp - PQ$ ; ma a tempo di mesi  $t$  riceve invece  $\frac{h}{m} (p + z) q$ ; dunque in mesi  $t$ ,  $pq - PQ$  diven-

ta  $\frac{h}{m} (p + z) q$ , per lo che una lira in mesi  $t$  diviene  $\frac{\frac{h}{m} (p + z) q}{pq - PQ}$ ,

così che la rendita viene a risultare  $\frac{\frac{h}{m} (p + z) q}{pq - PQ} - 1$ ; onde la



rendita in un mese si restringue ad  $\frac{r}{t} \left( \frac{h(p+z)q}{pq-PQ} - 1 \right)$ .

Nel quesito di *F. Luca*  $p = 20$ ,  $p + z = 30$ ,  $\frac{h}{m} = \frac{r}{2}$ ,

$t = 16$ ,  $P = 8$ ,  $P + X = 10$ . Quindi si ha primieramente  $Q = \frac{3}{2}$

la rendita di una lira in mesi  $16 = \frac{7}{8}$  ed al mese  $= \frac{7}{8 \cdot 16} = \frac{7}{128}$ .

**PROBLEMA X.** Il Mercante della merce  $M$ , che vale in contanti  $P$ , ed alza al prezzo  $P + X$  baratta col Mercante della merce  $m$  il cui prezzo in contanti è  $p$ , ed egli innalza al prezzo  $p + z$ ; ma questi domanda il tempo  $T$  esibendo di dare al primo Mercante tanta parte di  $(P + X)Q$  in contante, e tanto in merce  $m$ , che esso primo venga a guadagnare  $G$  per 100 sopra  $PQ$ : qual deve essere la parte di  $(P + X)Q$  in contante, e quanta la quantità della merce  $m$ .

Fatta la proporzione  $100 : 100 + G :: PQ : PQ + GPQ$  sarà  $PQ + \frac{G}{100} PQ$  ciò che col guadagno  $\frac{G}{100}$  varrà la quantità  $Q$  della merce  $M$  al prezzo  $P$  di contante dopo il tempo  $T$ , e tanto si faccia conto che vaglia al tempo del baratto. Si chiami poi  $\frac{e}{n}$  la parte di  $(P + X)Q$  che dopo il tempo  $T$  deve sborsare in contante il secondo al primo Mercante; e si ponga  $= q$  la quantità della merce  $m$ , che deve dare: si avranno, come nel Probl. II, surrogato a  $PQ$  la quantità  $PQ + \frac{G}{100} PQ$  nella prima equazione le due equazioni

$$1.^a \frac{e}{n} (P + X)Q + qP = \left( P + \frac{G}{100} P \right) Q$$

$$2.^a \frac{e}{n} (P + X)Q + q(p + z) = (P + X)Q.$$

Onde sottraendo la prima dalla seconda si ricava

$$q = \frac{\left[ P + X - \left( P + \frac{G}{100} P \right) \right] Q}{z} = \frac{\left( X - \frac{G}{100} P \right) Q}{z}$$

e sostituendo questo valore di  $q$  nella prima si rileverà il valore dell'altra incognita  $\frac{e}{n}$  che sarà

$$\frac{e}{n} = \frac{z \left( P + \frac{G}{100} P \right) Q - p \left( X - \frac{G}{100} P \right) Q}{z(P+X)Q}$$

e lo stesso valore di  $\frac{e}{n}$  si deduce dalla seconda equazione sostituivovi il valore di  $q$ .

ESEMPIO nel quesito 44 di *F. Luca*.  $M$  è panno che alla canna vale in contanti fiorini  $4 = P$ , a baratto  $5 = P + X$ ;  $m$  è lana che al centinajo di libbre vale fiorini  $10 = p$ , a baratto  $13 = p + z$ ,  $Q = 25$  canne, e  $\frac{G}{100} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ . Si ha quindi  $q = 5$  cioè 5 centinaj di lana, ed  $\frac{e}{n} = \frac{12}{25}$  di  $(P+X)Q$  cioè di  $5 \cdot 25$  vale a dire 60 fiorini.

Di fatto nella 1.<sup>a</sup> equazione  $60 + 5 \cdot 10 = 60 + 50 = \left( 4 + \frac{10}{100} 4 \right) 25 = 100 + 10$ ; nella 2.<sup>a</sup> equazione  $60 + 5 \cdot 13 = 60 + 65 = 5 \cdot 25 = 125$ .

*F. Luca* forma le ragioni  $\frac{13}{13-10} = \frac{13}{3}$ ,  $\frac{5}{5 - \left( 4 + \frac{10}{100} 4 \right)}$   $\frac{5}{\frac{5}{4}} = \frac{25}{3}$ : indi divide la ragione prima  $\frac{13}{3}$ , che è minore, per la seconda, che è maggiore, ed il quoziente  $= \frac{13}{25}$  si è la parte di  $5 \cdot 25 = 125$ , che il secondo Mercante deve in lana, che perciò trovasi  $= \frac{13}{25} \cdot 125 = 13 \cdot 5 = 65$ , ed  $1 - \frac{13}{25} = \frac{12}{25}$  di  $125 = 12 \cdot 5 = 60$  si è ciò che egli deve dare in danari. Trasportando dal particolare al generale le due frazioni sono  $\frac{p+z}{z}$ ,  $\frac{P+X}{P+X - \left( P + \frac{G}{100} P \right)}$   $= \frac{P+X}{X - \frac{G}{100} P}$ , e dividendo la prima per

la seconda, risulta la parte  $\frac{(p+z) \left( X - \frac{G}{100} P \right)}{z(P+X)}$  di  $(P+X)Q =$   
 $\frac{(p+z) \left( X - \frac{G}{100} P \right) (P+X) Q}{z(P+X)} = \frac{(p+z) \left( X - \frac{G}{100} P \right) Q}{z}$ , che fatta u-

guale a  $q(p+z)$  dà, come io ho trovato,  $\frac{\left( X - \frac{G}{100} P \right) Q}{z} = q$ .

Per riguardo ad  $\frac{e}{n}$  si trova  $\frac{e}{n} = 1 - \frac{(p+z) \left( X - \frac{G}{100} P \right)}{z(P+X)} =$   
 $\frac{z \left( P + \frac{G}{100} P \right) - p \left( X - \frac{G}{100} P \right)}{z(P+X)}$  immediatamente coincidente col va-

lore della mia formola. È dunque giusta la regola di *F. Luca*; ma il mio metodo ne dichiara in generale il fondamento, essendo ad un tempo più lucido, e più semplice.

PROBLEMA XI. Due barattarono merci *M*, ed *m*; la merce *M* valeva a contanti *P*, ed a baratto a termine di mesi *T* ne volle il Mercante il prezzo *P+X* richiedendone la parte  $\frac{e}{n}$  in contanti; la merce *m* valeva a contanti *p* ed il Mercante a baratto ne volle a termine di mesi *t* il prezzo *p+z*; ed il primo Mercante guadagnò  $\frac{6}{100}$  per 100: vi fu poi tra il prezzo *P* ed il prezzo *P+X* una data ragione: si cerca qual fosse *P*? Egli è questo il quesito 48 di *F. Luca* in cui pone  $P+X = 4\sqrt{P}$ ,  $\frac{e}{n} = \frac{1}{3}$ ,  $T = 12$ ,  $p = 24$ ,  $p+z = 29$ ,  $t = 9$ ,

ed il  $\frac{G}{100} = \frac{20}{100}$ . A sciogliere il quesito egli adopera la regola della *cosa* e suppone *P* uguale al censo, che noi significhiamo per  $y^2$ , e continuando a trasportare il particolare numerico al general letterale avremo  $P+X = 4y$ ,  $P - \frac{e}{n}(P+X) =$   
 $y^2 - \frac{e}{n} \cdot 4y$ ,  $P+X - \frac{e}{n}(P+X) = 4y - \frac{e}{n} \cdot 4y$ ,  $P+X - \frac{e}{n}(P+X) -$

$$\left(P - \frac{e}{n}(P+X)\right) = X = 4y - y^2 \text{ accrescimento di } y^2 - \frac{e}{n} \cdot 4y$$

per il tempo T; dunque  $\frac{t}{T}(4y - y^2)$  accrescimento per il tempo  $t$ . Ma il primo Mercante guadagnò G per 100 sul suo capitale  $y^2 - \frac{e}{n} \cdot 4y$ ; dunque questo divenne al fine del tempo T,  $y^2 - \frac{e}{n} \cdot 4y + \frac{G}{100}\left(y^2 - \frac{e}{n} \cdot 4y\right)$ , e tanto fa conto che

valesses la merce M a contanti. Prendi poscia  $\frac{t}{T}(4y - y^2) - \frac{G}{100}\left(y^2 - \frac{e}{n} \cdot 4y\right)$ . Finalmente instituisce la proporzione

$$y^2 - \frac{e}{n} \cdot 4y + \frac{G}{100}\left(y^2 - \frac{e}{n} \cdot 4y\right) : \frac{t}{T}(4y - y^2) - \frac{G}{100}\left(y^2 - \frac{e}{n} \cdot 4y\right) :$$

$p : z$  o sia

$$\left(1 + \frac{G}{100}\right)y - \left(1 + \frac{G}{100}\right)\frac{e}{n} \cdot 4 : \left(\frac{t}{T} + \frac{e}{n} \cdot \frac{G}{100}\right)4 - \left(\frac{t}{T} + \frac{G}{100}\right)y : p : z$$

d'onde

$$y = \frac{p\left(\frac{t}{T} + \frac{e}{n} \cdot \frac{G}{100}\right)4 + z\left(1 + \frac{G}{100}\right)\frac{e}{n} \cdot 4}{z\left(1 + \frac{G}{100}\right) + p\left(\frac{t}{T} + \frac{G}{100}\right)}, \text{ e } P = y^2.$$

Ne' dati particolari di *F. Luca* risulta  $y = 3$ ,  $y^2 = P = 9$ . Ma nella regola di *F. Luca* non è spiegata la ragione della proporzione, che prescrive d'istituire. A vederla fa di mestieri ricorrere a queste due mie equazioni

$$1.^a \text{ a contanti } pq = \left(P - \frac{e}{n}(P+X)\right)Q + \frac{G}{100}\left(P - \frac{e}{n}(P+X)\right)Q$$

$$2.^a \text{ di baratto } (p+z)q = \left(P - \frac{e}{n}(P+X)\right)Q + \frac{t}{T} \times \left(P - \frac{e}{n}(P+X)\right)Q.$$

Sottraendo la prima dalla seconda si trova

$$q = \frac{\left(\frac{t}{T} - \frac{G}{100}\right)\left(P - \frac{e}{n}(P+X)\right)Q}{z}, \text{ il qual valore sostituito nella prima, porge}$$

$$\frac{P}{z} \left[ \frac{t}{F} \times Q - \frac{G}{100} \left( P - \frac{e}{n} (P+X) Q \right) \right] = \frac{P}{z} \left( \frac{t}{F} - \frac{G}{100} \right) \times \left( P - \frac{e}{n} (P+X) \right) Q + \frac{G}{100} \left( P - \frac{e}{n} (P+X) \right) Q.$$

La qual equazione concorda con la proporzione prescritta da *F. Luca* sostituiti a *P* ed *X* i valori da lui attribuiti loro.

Del resto *F. Luca* nota, che correva il proverbio di chiamare *imbratti* li baratti, perchè spesso una delle parti resta dall'altra più astuta imbrattata; e che quando il sensaro mostrava saggio di alcuna merce, se gli domandava, se la dotava, e quanto? alludendo ai matrimonj, che il più delle volte male per avarizia oggi si fanno.

E *Tartaglia* riferendo il quesito 37 di *F. Luca* osserva, che tali quesiti con dilazione di tempo per l'una parte e per l'altra non possono intendersi per veri baratti, non dandosi attualmente nè dall'una parte, nè dall'altra soldo veruno, e che in luogo di baratti si dovrebbero intitolar quesiti di vendite, o sia di vendita, e contro-vendita con consegna di merci, e pagamenti poi con profitto dei danari proporzionato alle dilazioni.