

SULLA TEORIA DELL'ATTRAZIONE
DEGLI SFEROIDI ELITTICI

MEMORIA

DEL SIG. GIOVANNI PLANA.

PRESENTATA DAL SIG. SENATORE ORIANI LI 24 NOVEMBRE 1810
ED APPROVATA DAL SIG. CAV. CESARIS.

I. Il metodo del celebre Sig. *La-Place* per determinare l'attrazione degli sferoidi ellittici sopra i punti situati fuori della loro superficie, quale trovasi esposto al Capitolo primo del Tomo secondo della *Meccanica celeste*, presenta, a mio giudizio, alcune difficoltà, che fanno desiderare una maggiore spiegazione. La brevità, e la singolarità di questo metodo mi hanno indotto a produrlo in un modo più chiaro lusingandomi, che un tal lavoro potrà per avventura riuscire di vantaggio se non a tutti, ad alcuni di que' lettori almeno, che si daranno all'esame dell'opera suddetta.

Per soddisfare al mio assunto nel miglior modo di cui sono capace, comincerò a svolgere in serie la funzione cercata in una maniera analoga a quella, che lo stesso Signor *La-Place* pubblicò nel suo libro intitolato: *Théorie du mouvement et de la figure Elliptique des planètes*, ed appoggiammi in seguito ad alcune proprietà, che da essa facilmente derivano cercherò di giungere ai principali risultati di questa teoria.

2. Consideriamo in generale l'attrazione di uno sferoide omogeneo sopra un punto esteriore alla sua superficie, le di cui ordinate ortogonali sono espresse per a, b, c . Siano x, y, z le ordinate di una molecola dello sferoide, che chiameremo \mathcal{M} , indicando la lettera M la totalità della massa. Ciò posto

egli è chiaro, che dinotando con V la somma delle molecole dello sferoide divise per la loro distanza al punto attratto, si avrà

$$V = \int \frac{\delta M}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}}$$

Siano A, B, C le attrazioni rispettivamente parallele agli assi delle ordinate x, y, z ; noi avremo, siccome è noto, le seguenti equazioni

$$A = -\left(\frac{\delta V}{\delta a}\right), \quad B = -\left(\frac{\delta V}{\delta b}\right), \quad C = -\left(\frac{\delta V}{\delta c}\right)$$

le quali riducono il problema alla ricerca del valore di V .

Ora abbiamo

$$V = \int \frac{\delta M}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{2ax + 2by + 2cz - x^2 - y^2 - z^2}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2}}$$

e riducendo in serie si otterrà

$$V = \int \frac{\delta M}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \left(1 + \frac{1}{2} Z + \frac{1.3}{2.4} Z^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6} Z^3 + \text{ec.} \right)$$

ponendo

$$Z = \frac{2ax + 2by + 2cz - x^2 - y^2 - z^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Essendo finora arbitraria la posizione dell'origine delle ordinate, nulla impedisce di supporla al centro di gravità dello sferoide, d'onde risultano le equazioni

$$f \cdot x \delta M = 0, \quad f \cdot y \delta M = 0, \quad f \cdot z \delta M = 0,$$

e per conseguenza

$$V = \frac{M}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \int \frac{\delta M}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{1.3}{2.4} Z^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6} Z^3 - \text{ec.} \right)$$

Si concepisca adesso un piano, che passi per l'asse delle ordinate x , e per la molecola δM ; chiamando q l'angolo, che questo piano forma con quello delle (xy) ; p l'angolo formato dall'asse delle x e dal raggio, che unisce il centro di gravità colla stessa molecola, e chiamando u il valore di questo stesso raggio, si avranno le equazioni

$$x = u \cos. p, \quad y = u \text{ sen. } p \cos. q, \quad z = u \text{ sen. } p \text{ sen. } q,$$

$$\delta M = u^2 \delta u \delta p \delta q \text{ sen. } p, \quad u^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$Z = u \left(\frac{2a \cos. p + 2b \text{ sen. } p \cos. q + 2c \text{ sen. } p \text{ sen. } q - u}{a^2 + b^2 + c^2} \right),$$

dalle quali si ottiene

$$\begin{aligned} V = & \frac{M}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} - \frac{1}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \int \cdot u^4 \delta u \delta p \delta q \text{ sen. } p \times \\ & \left\{ \frac{1}{2} - \frac{3}{2 \cdot 4} \cdot \left(\frac{2a \cos. p + 2b \text{ sen. } p \cos. q + 2c \text{ sen. } p \text{ sen. } q - u}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2 \right\} \\ & - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \int \cdot u^5 \delta u \delta p \delta q \text{ sen. } p \times \\ & \left(\frac{2a \cos. p + 2b \text{ sen. } p \cos. q + 2c \text{ sen. } p \text{ sen. } q - u}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^3 \\ & - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{1}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \int \cdot u^6 \delta u \delta p \delta q \text{ sen. } p \times \\ & \left(\frac{2a \cos. p + 2b \text{ sen. } p \cos. q + 2c \text{ sen. } p \text{ sen. } q - u}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^4 - \text{ec.} \end{aligned}$$

Sviluppando le potenze della funzione sottoposta al segno integrale, facilmente si scorge, che questo valore di V può venire espresso sotto la forma

$$V = \frac{M}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} - \frac{1}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \iiint u^4 \delta u \delta p \delta q \text{ sen. } p \times \\ (G + G'u + G''u^2 + \text{ec.});$$

ove le lettere $G, G', G'', \text{ec.}$ rappresentano delle funzioni razionali e intere di $\text{sen. } p, \cos. p, \text{sen. } q, \cos. q$.

Occupiamoci ora dell'integrazione della precedente serie. In primo luogo osservo, che chiamando U il raggio u condotto dal centro fino alla superficie da una parte dello sferoide, e U' quello, che va alla superficie dalla parte diametralmente opposta, si dovrà integrare da $u = -U'$ fino a $u = U$; ma negli sferoidi ellittici si ha $U' = U$, dunque

$$V = \frac{M}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} - \frac{2}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \iint U^5 \delta p \delta q \text{ sen. } p \times \\ \left(\frac{G}{5} + \frac{G'}{7} U^2 + \frac{G''}{9} U^4 + \text{ec.} \right).$$

Prima di procedere alle ulteriori integrazioni si osservi, che essendo

$$G = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2a \cos. p + 2b \text{ sen. } p \cos. q + 2c \text{ sen. } p \text{ sen. } q}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2$$

$$G'' = -\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{3.5}{2.4.6} \cdot 3 \left(\frac{2a \cos. p + 2b \text{ sen. } p \cos. q + 2c \text{ sen. } p \text{ sen. } q}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2$$

$$+ \frac{3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \left(\frac{2a \cos. p + 2b \text{ sen. } p \cos. q + 2c \text{ sen. } p \text{ sen. } q}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^4$$

ec.

le funzioni G, G'', G'''' , ec. sono omogenee per rapporto alle quantità a, b, c , di un grado rispettivamente eguale a $0, -2, -4$, ec. e che come tali hanno la proprietà di soddisfare alle equazioni

$$a \left(\frac{\partial G}{\partial a} \right) + b \left(\frac{\partial G}{\partial b} \right) + c \left(\frac{\partial G}{\partial c} \right) = 0,$$

$$a \left(\frac{\partial G''}{\partial a} \right) + b \left(\frac{\partial G''}{\partial b} \right) + c \left(\frac{\partial G''}{\partial c} \right) = -2G'',$$

ec.

Si vedrà in seguito l'utilità di quest'osservazione.

Ritorniamo ora all'integrazione del valore di V , che ancora dobbiamo eseguire per rapporto agli angoli p , e q i quali hanno entrambi per limiti 0° , e 180° .

Sia $x^2 + my^2 + nz^2 = K^2$

l'equazione, che appartiene alla superficie dell'elissoide. Facendo in questa

$$x = U \cos. p, y = U \text{ sen. } p \cos. q, z = U \text{ sen. } p \text{ sen. } q,$$

ne risulterà

$$U^2 = \frac{K^2}{1 - \text{sen.}^2 p \cdot \{ (1-m) \cos.^2 q + (1-n) \text{ sen.}^2 q \}}$$

Siccome questo valore di U non permette l'integrazione, è necessario di svolgerlo in una serie ordinata secondo le potenze di $1-m$, e $1-n$; allora il termine $\iint \partial p \partial q \text{ sen. } p \cdot \frac{2}{3} GU^5$, che appartiene al valore di V , darà una serie composta di termini facili ad integrarsi; supponendo adunque le due integrazioni fatte, si avrà

$$\frac{2}{3} \iint \partial p \partial q \text{ sen. } p \cdot GU^5 = K^5 R,$$

indicando R una serie ordinata secondo le potenze di $1-m$, e $1-n$. Invece delle quantità $1-m, 1-n$ sarà più oppor-

tuno di far uso delle eccentricità dell'elissoide. A questo uopo osservisi, che chiamando θ , σ i quadrati delle eccentricità si ha

$$\theta = K^2 \cdot \frac{1-m}{m}, \quad \sigma = K^2 \cdot \frac{1-n}{n},$$

e per conseguenza

$$1-m = \frac{\theta}{K^2 + \theta} = \frac{\theta}{K^2} - \frac{\theta^2}{K^4} + \frac{\theta^3}{K^6} - \text{ec.},$$

$$1-n = \frac{\sigma}{K^2 + \sigma} = \frac{\sigma}{K^2} - \frac{\sigma^2}{K^4} + \frac{\sigma^3}{K^6} - \text{ec.}$$

Sostituendo questi valori in quello della serie rappresentata da R, si otterrà una nuova serie ordinata secondo le potenze di $\frac{\theta}{K^2}$, e $\frac{\sigma}{K^2}$, che chiameremo R'. Avremo adunque

$$\iint \delta p \delta q \text{ sen. } p \text{ GU}^5 = K^5 R',$$

ovvero

$$\iint \delta p \delta q \text{ sen. } p \text{ GU}^5 = MK^5 \cdot \frac{R'}{M} = MK^5 \cdot \frac{R'}{\frac{4}{3}\pi\sqrt{mn}},$$

osservando, che

$$M = \frac{4\pi K^3}{3\sqrt{mn}} = K^3 \cdot \frac{4\pi}{3} \sqrt{\left(1 + \frac{\theta}{K^2}\right) \left(1 + \frac{\sigma}{K^2}\right)}$$

si potrà per conseguenza ridurre $\frac{R'}{\frac{4}{3}\pi\sqrt{mn}}$ in una serie ordi-

nata secondo le potenze di $\frac{\theta}{K^2}$, e $\frac{\sigma}{K^2}$; chiamando S questa serie, si avrà finalmente

$$\iint \delta p \delta q \text{ sen. } p \text{ GU}^5 = MK^5 S.$$

Collo stesso raziocinio si dimostrerà, che il termine seguente $\iint \delta p \delta q \text{ sen. } p \text{ GU}^7$ del valore di V potrà essere espresso da una quantità della forma $MK^4 S'$, indicando parimenti con S' un'altra serie ordinata secondo le potenze di $\frac{\theta}{K^2}$, e $\frac{\sigma}{K^2}$.

Resta adunque dimostrato, che il valore di V può essere messo sotto la forma

$$V = \frac{M}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - K^2 S - K^4 S' - K^6 S'' - \text{ec.})$$

ove bisogna ritenere, che K^2S , K^4S' , K^6S'' , ec. sono funzioni omogenee riguardo alle quantità a , b , c delle quali le rispettive dimensioni sono 0 , -2 , -4 , ec.

Sia U la somma di tutti i termini della serie $(a^2 + b^2 + c^2)^{-1} \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - K^2S - K^4S' - K^6S'' - \text{ec.})$, che sono indipendenti dalla lettera K . Egli è chiaro, che questi termini si trovano prendendo nella serie S quelli soltanto moltiplicati per $\frac{\theta}{K^2}$, e $\frac{\varpi}{K^2}$; e prendendo parimenti nelle serie S' , S'' , ec. quelli moltiplicati per le potenze di K eguali a -4 , -6 , ec. Tra i termini dipendenti dalla lettera K , prendiamo solamente quelli moltiplicati per la più piccola potenza di $\frac{\theta}{K^2}$, che noi chiameremo r ; tra questi si considerino soltanto quelli moltiplicati per la più piccola potenza di $\frac{\varpi}{K^2}$ che noi chiameremo r' ; e finalmente fra i coefficienti di $\frac{\theta^r}{K^{2r}} \cdot \frac{\varpi^{r'}}$ conserviamo solamente quelli, che sono moltiplicati per la più piccola potenza di K^2 , che noi chiameremo i .

La somma di tutti questi termini dati dalla serie $-(a^2 + b^2 + c^2)^{-1} (K^2S + K^4S' + \text{ec.})$, potrà adunque essere espressa da una funzione della forma $K^{2i} \cdot \frac{\theta^r}{K^{2r}} \cdot \frac{\varpi^{r'}}$ P , indicando P una funzione delle ordinate a , b , c indipendente dalle quantità K , θ , e ϖ .

Ciò posto si avrà

$$V = M \cdot \left\{ U + K^{2i} \cdot \frac{\theta^r}{K^{2r}} \cdot \frac{\varpi^{r'}}{K^{2r'}} P + \text{ec.} \right\},$$

i essendo eguale o superiore all'unità, e r , r' indicando dei numeri interi, e positivi. Il valore di V posto sotto questa forma ci sarà utile in seguito, e prima di andare più oltre osserviamo, che P deve essere la somma di parecchie funzioni omogenee per rapporto alle quantità a , b , c delle quali

la più piccola in dimensione è di un ordine eguale a -3 , giacchè la frazione

$$\frac{-K^2S - K^4S' - K^6S'' - \text{ec.}}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}}$$

è composta di funzioni omogenee le dimensioni delle quali procedono secondo la serie $-3, -5, -7, \text{ec.}$

3. Col precedente metodo si può soltanto arrivare ad un valore approssimato di V ; ma le cognizioni, che noi n'abbiamo tratto sulla forma di questa funzione serviranno per farci giungere al bellissimo teorema del Sig. *Legendre* mediante il quale, l'attrazione di un ellissoide sopra un punto esteriore alla sua superficie dipende in ogni caso da quella dei punti situati sulla superficie.

Secondo ciò, che trovasi dimostrato al Capitolo primo del Tomo secondo della Meccanica Celeste si hanno le seguenti equazioni

$$V = 2 \iint \delta p \delta q \text{ sen. } p \cdot \frac{\sqrt{R}}{L},$$

$$A = 2 \iint \delta p \delta q \text{ sen. } p \cos. p \cdot \frac{\sqrt{R}}{L},$$

$$B = 2 \iint \delta p \delta q \text{ sen. } ^2 p \cos. q \cdot \frac{\sqrt{R}}{L},$$

$$C = 2 \iint \delta p \delta q \text{ sen. } ^2 p \text{ sen. } q \cdot \frac{\sqrt{R}}{L},$$

$$I = a \cos. p + mb \text{ sen. } p \cos. q + nc \text{ sen. } p \text{ sen. } q,$$

$$L = \cos. ^2 p + m \text{ sen. } ^2 p \cos. ^2 q + n \text{ sen. } ^2 p \text{ sen. } ^2 q,$$

$$R = I^2 + (K^2 - a^2 - mb^2 - nc^2) L.$$

I limiti delle integrali sono determinati dall'equazione $R=0$.

Le quantità $A, e V$ essendo fra loro legate per via dell'equazione $A + \left(\frac{\delta V}{\delta a}\right) = 0$ ne risulta, che se fosse possibile di formare tra le medesime un'altra equazione, si potrebbe allora eliminarne A , ed avere un'equazione fra le differenze parziali di V prese per rapporto alle sei costanti a, b, c, m, n, K di cui è funzione. La ricerca del valore di V sarebbe

in

in questo modo ridotta all'integrazione di un'equazione a differenze parziali, e siccome trattasi qui di aver soltanto un valore particolare della variabile principale, la forma stessa dell'equazione potrebbe servire a determinarlo.

Non sarebbe facile, a mio avviso, il dimostrare *a priori* l'esistenza di una simile equazione; ma egli è certo, che se ella esiste deve essere del secondo ordine, poichè non v'hanno, che le equazioni di questo ordine cui si possa soddisfare per via di doppie integrali definite, siccome trovasi dimostrato dal Sig. *La-Place* (*Académie de Paris année 1779*).

Questa considerazione ci porta a combinare le differenze parziali del primo ordine delle quantità A , e V . Al cui fine vuolsi dimostrare, che per differenziare A per rapporto a qualsivoglia delle sei costanti di cui è funzione, basterà differenziare per rapporto alle stesse costanti la funzione sottoposta al segno integrale, e considerare in seguito la doppia integrazione fra li stessi limiti assegnati alla funzione A .

Quindi si avrà, per esempio

$$\left(\frac{\delta A}{\delta m}\right) = 2 \cdot \iint \delta p \delta q \operatorname{sen} p \cos p \cdot \delta \cdot \frac{\sqrt{R}}{L} \frac{1}{\delta m}$$

i limiti di p , e q essendo sempre quelli, che danno $R=0$.

Per dimostrare l'equazione precedente è necessario fare alcune osservazioni sul principio conosciuto della differenziazione delle funzioni sottoposte al segno integrale. Allorchè si ha $y = \int X \delta x$, e che X rappresenta una funzione qualunque di x , e di una costante a , si sa, che in generale, $\frac{\delta y}{\delta a} = \int \frac{\delta X}{\delta a} \delta x$; ma importa molto di osservare, che quest'equazione cessa d'essere vera ove i limiti di x sono funzioni di a . Per darne un esempio semplicissimo, sia $X = a^2 x^2 - ax + b$; si otterrà

$$y = a^2 \frac{x^3}{3} - a \frac{x^2}{2} + bx + \text{costante},$$

e prendendo per i limiti di x ; $x=0$, $x=p$, si avrà

$$y = a^2 \frac{p^3}{3} - a \frac{p^2}{2} + bp,$$

e per conseguenza

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{2}{3} ap^3 - \frac{p^2}{2},$$

ossia $\frac{\partial y}{\partial a} = \int \frac{\partial X}{\partial a} \delta x$ entro gli stessi limiti. Supponiamo ora, che i limiti di x siano $x=0$, $x=a$; in questa ipotesi

$$y = \frac{a^5}{3} - \frac{a^3}{2} + ba,$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{5}{3} a^4 - \frac{3}{2} a^2 + b$$

risultato molto diverso da quello, che si avrebbe prendendo il valore di $\int \frac{\partial X}{\partial a} \delta x$ da $x=0$ fino a $x=a$.

Per dimostrare la stessa cosa in generale, sia U il valore indefinito di $\int X \delta x$, e siano x' , x'' i valori di x corrispondenti ai limiti dell'integrale; noi avremo $y=U''-U'$ (chiamando U' , U'' i valori di U corrispondenti ai limiti dati). Ciò posto, se si considerano le quantità x' , x'' come funzioni di a , egli è manifesto, che si avrà

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \left(\frac{\partial U''}{\partial a} \right) - \left(\frac{\partial U'}{\partial a} \right) + \left(\frac{\partial U''}{\partial x''} \right) \cdot \frac{\partial x''}{\partial a} - \left(\frac{\partial U'}{\partial x'} \right) \cdot \frac{\partial x'}{\partial a}.$$

Ora si comprende senza difficoltà, che $\left(\frac{\partial U''}{\partial x''} \right)$ è eguale a ciò, che diventa X quando si sostituisce x'' in luogo di x ; dunque chiamando X'' , X' i valori di X corrispondenti a $x=x''$, e $x=x'$, si avrà

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \left(\frac{\partial U''}{\partial a} \right) - \left(\frac{\partial U'}{\partial a} \right) + X'' \cdot \frac{\partial x''}{\partial a} - X' \cdot \frac{\partial x'}{\partial a}.$$

Ma $\left(\frac{\partial U''}{\partial a} \right) - \left(\frac{\partial U'}{\partial a} \right)$ è evidentemente eguale al valore di $\int \frac{\partial X}{\partial a} \delta x$ preso da $x=x'$ fino a $x=x''$, dunque

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \int \frac{\partial X}{\partial a} dx + X'' \cdot \frac{\partial x''}{\partial a} - X' \cdot \frac{\partial x'}{\partial a}.$$

Questo risultato ci mostra chiaramente, che l'equazione

$$\frac{\partial v}{\partial a} = \int \frac{\partial X}{\partial a} \partial x$$

non può sussistere, se non nei due casi seguenti; 1.° allorchè $\frac{\partial v'}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial v''}{\partial a} = 0$, la qual cosa accade quando i limiti sono indipendenti dalla costante a ; 2.° allorchè $X'' = 0$, $X' = 0$, il che ha luogo quando i limiti dell'integrale riducono a zero uno dei fattori della funzione X , ed è appunto quello, che accade alle quantità V , A , B , C . Infatti riprendiamo il valore di

$$A = 2 \cdot \int \partial q \int \partial p \operatorname{sen} . p \cos . p \cdot \frac{\sqrt{R}}{L},$$

e chiamisi Q il valore di $\int \partial p \operatorname{sen} . p \cos . p \cdot \frac{\sqrt{R}}{L}$ preso entro i limiti che danno $R = 0$; noi avremo $A = 2 \int Q \partial q$. Se ora si considera, che Q rappresenta l'attrazione di una porzione qualunque dell'elissoide compresa fra due piani infinitamente vicini, che passano pel punto attratto, si vedrà senza difficoltà, che i valori di q corrispondenti ai limiti dell'integrale debbono rendere nulla la funzione Q , come quella, che dà la forza attrattiva di una porzione nulla verso i limiti di q .

In vigore del principio dimostrato si avrà adunque $\left(\frac{\partial A}{\partial m}\right) =$

$2 \int \frac{\partial Q}{\partial m} \partial q$; ma i limiti di p sono tali, che $R = 0$, per conseguenza

$$\frac{\partial Q}{\partial m} = \int \partial p \operatorname{sen} . p \cos . p \cdot \partial \cdot \frac{\sqrt{R}}{L},$$

e finalmente

$$\left(\frac{\partial A}{\partial m}\right) = 2 \iint \partial p \partial q \operatorname{sen} . p \cos . p \cdot \partial \cdot \frac{\sqrt{R}}{L}.$$

Stabilito in questo modo il principio della differenziazione sotto il doppio segno integrale, avremo

$$\left(\frac{\partial A}{\partial b}\right) = 2 \iint \delta p \delta q \operatorname{sen}. p \cos. p \cdot \frac{\partial R}{\partial b} : 2L\sqrt{R}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial c}\right) = 2 \iint \delta p \delta q \operatorname{sen}. p \cos. p \cdot \frac{\partial R}{\partial c} : 2L\sqrt{R}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial K}\right) = 2 \iint \delta p \delta q \operatorname{sen}. p \cos. p \cdot \frac{\partial R}{\partial K} : 2L\sqrt{R}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial m}\right) = 2 \iint \delta p \delta q \operatorname{sen}. p \cos. p \cdot \frac{\partial R}{\partial m} : 2L\sqrt{R}$$

$$- 2 \iint \delta p \delta q \operatorname{sen}. p \cos. p R \frac{\partial L}{\partial m} : L^2\sqrt{R}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial n}\right) = 2 \iint \delta p \delta q \operatorname{sen}. p \cos. p \cdot \frac{\partial R}{\partial n} : 2L\sqrt{R}$$

$$- 2 \iint \delta p \delta q \operatorname{sen}. p \cos. p R \frac{\partial L}{\partial n} : L^2\sqrt{R}.$$

Sostituendo in luogo di $\frac{\partial R}{\partial b}$, $\frac{\partial R}{\partial c}$, $\frac{\partial R}{\partial K}$ i loro valori si otterrà

$$\left(\frac{\partial A}{\partial b}\right) = 2m \iint \delta p \delta q \operatorname{sen}. p \cos. p \cdot (I \operatorname{sen}. p \cos. q - bL) : L\sqrt{R}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial c}\right) = 2n \iint \delta p \delta q \operatorname{sen}. p \cos. p \cdot (I \operatorname{sen}. p \operatorname{sen}. q - cL) : L\sqrt{R}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial K}\right) = 2K \iint \delta p \delta q \operatorname{sen}. p \cos. p : \sqrt{R}.$$

Osservisi adesso, che essendo

$$L = \cos.^2 p + m \operatorname{sen}.^2 p \cos.^2 q + n \operatorname{sen}.^2 p \operatorname{sen}.^2 q,$$

ne risulta

$$\frac{\partial L}{\partial m} = \operatorname{sen}.^2 p \cos.^2 q, \quad \frac{\partial L}{\partial n} = \operatorname{sen}.^2 p \operatorname{sen}.^2 q,$$

e per conseguenza

$$\frac{\partial L}{\partial m} + \frac{\partial L}{\partial n} = \operatorname{sen}.^2 p,$$

$$m \cdot \frac{\partial L}{\partial m} + n \cdot \frac{\partial L}{\partial n} = L - \cos.^2 p.$$

Sottraendo queste due equazioni l'una dall'altra, si avrà

$$(m-1) \frac{\partial L}{\partial m} + (n-1) \frac{\partial L}{\partial n} = L - I.$$

Col soccorso di questa equazione, se si moltiplica $\left(\frac{\delta A}{\delta m}\right)$ per

$1 - m$, $\left(\frac{\delta A}{\delta n}\right)$ per $1 - n$, si otterrà

$$\begin{aligned} & - (m - 1) \cdot \left(\frac{\delta A}{\delta m}\right) - (n - 1) \cdot \left(\frac{\delta A}{\delta n}\right) = \\ & - 2 \iint \delta p \delta q \frac{\text{sen. } p \cos. p}{2L\sqrt{R}} \cdot \left((m-1) \frac{\delta R}{\delta m} + (n-1) \frac{\delta R}{\delta n} \right) \\ & + 2 \iint \delta p \delta q \text{sen. } p \cos. p \cdot \frac{\sqrt{R}}{L} - 2 \iint \delta p \delta q \text{sen. } p \cos. p \cdot \frac{R}{L\sqrt{R}}, \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} & - (m - 1) \left(\frac{\delta A}{\delta m}\right) - (n - 1) \left(\frac{\delta A}{\delta n}\right) - A = \\ & - 2 \iint \delta p \delta q \frac{\text{sen. } p \cos. p}{2L\sqrt{R}} \cdot \left((m-1) \frac{\delta R}{\delta m} + (n-1) \frac{\delta R}{\delta n} \right) \\ & - 2 \iint \delta p \delta q \text{sen. } p \cos. p \cdot \frac{R}{L\sqrt{R}} \dots \dots \dots (a) \end{aligned}$$

ricordandosi, che $A = 2 \iint \delta p \delta q \text{sen. } p \cos. p \cdot \frac{\sqrt{R}}{L}$.

Ora abbiamo

$$\frac{\delta R}{\delta m} = 2Ib \text{sen. } p \cos. q - b^2 L + (K^2 - a^2 - mb^2 - nc^2) \text{sen. }^2 p \cos. ^2 q,$$

$$\frac{\delta R}{\delta n} = 2Ic \text{sen. } p \text{sen. } q - c^2 L + (K^2 - a^2 - mb^2 - nc^2) \text{sen. }^2 p \text{sen. }^2 q,$$

e sostituendo questi valori nell'equazione (a) si avrà

$$\begin{aligned} & - (m - 1) \left(\frac{\delta A}{\delta m}\right) - (n - 1) \left(\frac{\delta A}{\delta n}\right) - A = - 2 \iint \delta p \delta q \times \\ & \text{sen. } p \cos. p \cdot \frac{R}{L\sqrt{R}} - 2 \iint \delta p \delta q \frac{\text{sen. } p \cos. p}{L\sqrt{R}} \times \end{aligned}$$

$$\left\{ (m-1)Ib \text{sen. } p \cos. q + (n-1)Ic \text{sen. } p \text{sen. } q - \left(\frac{m-1}{2}\right)b^2 L - \left(\frac{n-1}{2}\right)c^2 L \right\}$$

$$+ 2 (K^2 - a^2 - mb^2 - nc^2) \iint \delta p \delta q \frac{\text{sen. } p \cos. p}{2L\sqrt{R}}$$

$$- 2 (K^2 - a^2 - mb^2 - nc^2) \iint \delta p \delta q \frac{\text{sen. } p \cos. p}{2L\sqrt{R}}.$$

Paragonando il secondo membro di quest'equazione con i valori precedenti di $\left(\frac{\partial A}{\partial b}\right)$, $\left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)$, $\left(\frac{\partial A}{\partial K}\right)$ facilmente si trova la seguente equazione

$$\begin{aligned} & -(m-1) \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial m}\right) - (n-1) \left(\frac{\partial A}{\partial n}\right) - A + \left(\frac{m-1}{m}\right) b \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial b}\right) \\ & + \left(\frac{n-1}{n}\right) c \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial c}\right) + \left(\frac{K^2 - a^2 - b^2 - c^2}{2K}\right) \left(\frac{\partial A}{\partial K}\right) \\ & = \iint \delta p \delta q \operatorname{sen} p \cos p \cdot \left(\frac{K^2 - a^2 - b^2 - c^2}{L\sqrt{R}}\right) - 2 \iint \delta p \delta q \operatorname{sen} p \cos p \cdot \frac{R}{L\sqrt{R}}, \end{aligned}$$

la quale, per essere

$$R = I^2 + (K^2 - a^2 - b^2 - c^2) L$$

si riduce a

$$\begin{aligned} & -(m-1) \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial m}\right) - (n-1) \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial n}\right) - A + \left(\frac{m-1}{m}\right) b \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial b}\right) \\ & + \left(\frac{n-1}{n}\right) c \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial c}\right) + \left(\frac{K^2 - a^2 - b^2 - c^2}{2K}\right) \left(\frac{\partial A}{\partial K}\right) \\ & = - \iint \delta p \delta q \operatorname{sen} p \cos p \cdot \frac{(R+I^2)}{L\sqrt{R}} \dots \dots \dots (\beta) \end{aligned}$$

Per togliere il segno d'integrazione dal secondo membro di quest'equazione osservisi, che

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) &= 2 \iint \delta p \delta q \operatorname{sen} p \cos p \cdot \frac{(R+I^2)}{L\sqrt{R}} - 2a \iint \delta p \delta q \operatorname{sen} p \cdot \frac{I}{L\sqrt{R}} \\ \left(\frac{\partial V}{\partial K}\right) &= 2K \iint \delta p \delta q \operatorname{sen} p \cdot \frac{I}{L\sqrt{R}}, \end{aligned}$$

e per conseguenza

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) + \frac{a}{2K} \left(\frac{\partial V}{\partial K}\right) = \iint \delta p \delta q \operatorname{sen} p \cos p \cdot \frac{(R+I^2)}{L\sqrt{R}}.$$

Questo risultato essendo sostituito nell'equazione (β) , si avrà

$$\begin{aligned} 0 = & -(m-1) \left(\frac{\partial A}{\partial m}\right) - (n-1) \left(\frac{\partial A}{\partial n}\right) - A + \left(\frac{m-1}{m}\right) b \left(\frac{\partial A}{\partial b}\right) \\ & + \left(\frac{n-1}{n}\right) c \left(\frac{\partial A}{\partial c}\right) + \left(\frac{K^2 - a^2 - b^2 - c^2}{2K}\right) \left(\frac{\partial A}{\partial K}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) + \frac{a}{2K} \left(\frac{\partial V}{\partial K}\right). \end{aligned}$$

Tale è l'equazione fra le funzioni A, e V, che si trattava di rinvenire in un modo diretto. Egli è attualmente

chiaro, che per via di un calcolo affatto simile al precedente si debbono ottenere due altre equazioni analoghe a questa, delle quali una esisterà fra le funzioni B e V, e l'altra fra le funzioni C e V, di modo che si avrà

$$c = -(m-1) \left(\frac{\partial B}{\partial m} \right) - (n-1) \left(\frac{\partial B}{\partial n} \right) - B + \frac{(m-1)}{m} b \left(\frac{\partial B}{\partial b} \right) + \frac{(n-1)}{n} c \left(\frac{\partial B}{\partial c} \right) \\ + \left(\frac{K^2 - a^2 - b^2 - c^2}{aK} \right) \left(\frac{\partial B}{\partial K} \right) + \frac{1}{am} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial b} \right) + \frac{b}{aK} \left(\frac{\partial V}{\partial K} \right),$$

$$c = -(m-1) \left(\frac{\partial C}{\partial m} \right) - (n-1) \left(\frac{\partial C}{\partial n} \right) - C + \frac{(m-1)}{m} b \left(\frac{\partial C}{\partial b} \right) + \frac{(n-1)}{n} c \left(\frac{\partial C}{\partial c} \right) \\ + \left(\frac{K^2 - a^2 - b^2 - c^2}{aK} \right) \left(\frac{\partial C}{\partial K} \right) + \frac{1}{an} \left(\frac{\partial V}{\partial c} \right) + \frac{c}{aK} \left(\frac{\partial V}{\partial K} \right).$$

Eliminando A, B, C col soccorso delle equazioni

$$\Lambda + \left(\frac{\partial V}{\partial a} \right) = 0, \quad B + \left(\frac{\partial V}{\partial b} \right) = 0, \quad C + \left(\frac{\partial V}{\partial c} \right) = 0,$$

ne risulterà

$$0 = \frac{1-m}{m} b \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial b} \right) + \frac{1-n}{n} c \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial c} \right) + \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2 - K^2}{aK} \right) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial K} \right) \\ - (1-m) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial m} \right) - (1-n) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial n} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial a} \right) + \frac{a}{aK} \left(\frac{\partial V}{\partial K} \right); \dots \dots (1)$$

$$0 = \frac{1-m}{m} b \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial b^2} \right) + \frac{1-n}{n} c \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial b \partial c} \right) + \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2 - K^2}{aK} \right) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial b \partial K} \right) \\ - (1-m) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial b \partial m} \right) - (1-n) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial b \partial n} \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial b} \right) + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial V}{\partial b} \right) + \frac{b}{aK} \left(\frac{\partial V}{\partial K} \right) \dots (2)$$

$$0 = \frac{1-m}{m} b \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial b \partial c} \right) + \frac{1-n}{n} c \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial c^2} \right) + \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2 - K^2}{aK} \right) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial c \partial K} \right) \\ - (1-m) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial c \partial m} \right) - (1-n) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial c \partial n} \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial c} \right) + \frac{1}{2n} \left(\frac{\partial V}{\partial c} \right) + \frac{c}{aK} \left(\frac{\partial V}{\partial K} \right) \dots (3)$$

Per dedurre da queste equazioni il valore di V ricordiamoci ora, che alla fine del N.° 2 abbiamo trovato

$$V = M \left\{ U + K^{2i} \cdot \frac{\theta^r}{K^{2r}} \cdot \frac{\varpi^r}{K^{2r}} P + \text{ec.} \right\},$$

e che per conseguenza è permesso di supporre

$$V = Mv = \frac{4\pi \cdot K^3}{31/mn} \cdot v,$$

facendo

$$v = U + K^2 \cdot \frac{\theta'}{K^2} \cdot \frac{\sigma'}{K^2} P + ec.$$

Trattasi adunque di trovare il valore di v ; ma questo essendo espresso in funzione delle eccentricità bisognerà introdurre le medesime nelle equazioni (1), (2), (3). Al cui uopo riprendiamo le equazioni

$$\theta = K^2 \cdot \left(\frac{1-m}{n} \right), \quad \sigma = K^2 \cdot \left(\frac{1-n}{n} \right),$$

e facilmente ne concluderemo le seguenti equazioni

$$m = \frac{K^2}{K^2 + \theta}, \quad n = \frac{K^2}{K^2 + \sigma}, \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial K} \right) = \frac{\sigma \theta}{K}$$

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial K} \right) = \frac{\sigma \theta}{K}, \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial m} \right) = -\frac{K^2}{m^2}, \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial n} \right) = -\frac{K^2}{n^2}$$

$$K \left(\frac{\partial V}{\partial K} \right) = M \cdot \left\{ 2\theta \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + 2\sigma \left(\frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) + K \left(\frac{\partial v}{\partial K} \right) + 3v \right\},$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial m} \right) = -M \cdot \left\{ \frac{K^2}{m^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{v}{2m} \right\},$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n} \right) = -M \cdot \left\{ \frac{K^2}{n^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) + \frac{v}{2n} \right\}$$

per via delle quali le equazioni (1), (2), (3) vengono trasformate nelle seguenti

$$\begin{aligned} 0 = & (a^2 + b^2 + c^2 + \theta) \cdot \theta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \sigma \partial \theta} \right) + (a^2 + b^2 + c^2 + \sigma) \sigma \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \sigma \partial \theta} \right) + b\theta \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial a \partial \theta} \right) \\ & + c\sigma \left(\frac{\partial^2 v}{\partial a \partial \sigma} \right) + \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2 - K^2}{2} \right) K \left(\frac{\partial^2 v}{\partial a \partial K} \right) + a\theta \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + a\sigma \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) \\ & + \frac{aK}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial K} \right) + \left\{ \frac{3}{2} (a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{2} \sigma \right\} \left(\frac{\partial v}{\partial a} \right) + \frac{3}{2} av; \dots (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = & (a^2 + b^2 + c^2 + \theta) \theta \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial \sigma} \right) + (a^2 + b^2 + c^2 + \sigma) \sigma \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial \sigma} \right) + b\theta \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial b \partial \theta} \right) \\ & + c\sigma \left(\frac{\partial^2 v}{\partial b \partial \sigma} \right) + \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2 - K^2}{2} \right) K \left(\frac{\partial^2 v}{\partial b \partial K} \right) + b\theta \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + b\sigma \left(\frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) \\ & + \frac{bK}{2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial K} \right) + \left\{ \frac{3}{2} (a^2 + b^2 + c^2) + \theta + \frac{1}{2} \sigma \right\} \left(\frac{\partial v}{\partial b} \right) + \frac{3}{2} bv; \dots (5) \end{aligned}$$

0 =

$$\begin{aligned}
c = & (a^2 + b^2 + c^2 + \theta) \theta \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial c \partial \theta} \right) + (a^2 + b^2 + c^2 + \sigma) \sigma \left(\frac{\partial^2 v}{\partial c \partial \sigma} \right) + b\theta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial b \partial c} \right) \\
& + c\sigma \left(\frac{\partial^2 v}{\partial c^2} \right) + \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2 - K^2}{a} \right) K \left(\frac{\partial^2 v}{\partial K \partial c} \right) + c\theta \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + c\sigma \left(\frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) \\
& + \frac{cK}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial K} \right) + \left\{ \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2) + \sigma + \frac{1}{2} \theta \right\} \left(\frac{\partial v}{\partial c} \right) + \frac{1}{2} c\sigma \dots \dots (6).
\end{aligned}$$

Per poco, che si rifletta su queste equazioni facilmente si scorge, che si può ad esse soddisfare prendendo per v una funzione delle quantità a, b, c, θ, σ indipendente dalla lettera K , come quella, che per sè stessa fa svanire tutti i termini moltiplicati per K . Ciò posto vuolsi dimostrare, che questo particolar modo di risolvere le tre precedenti equazioni è il solo, che possa convenire alla funzione, che deve dare l'attrazione dell'elissoide.

Riprendiamo la formola

$$v = U + K^{2i} \cdot \frac{\theta^r}{K^{2r}} \cdot \frac{\sigma^{r'}}{K^{2r'}} P + ec.$$

ed osserviamo, che sostituendo questo valore di v nell'equazione (4) si ottiene un risultato composto di due parti distinte; la prima dipendente da U sarà senza K , e dovrà essere nulla per sè stessa; la seconda dipendente da K (se si considera il solo termine $K^{2i} \cdot \frac{\theta^r}{K^{2r}} \cdot \frac{\sigma^{r'}}{K^{2r'}} P$ del valore di v) darà

$$\left. \begin{aligned}
& \left(\frac{1}{2} (\theta + \sigma) \left(\frac{\partial P}{\partial a} \right) \right. \\
& \left. + \theta r \left(\frac{\partial P}{\partial a} \right) + \sigma r' \left(\frac{\partial P}{\partial a} \right) + b\theta \left(\frac{\partial^2 P}{\partial a \partial b} \right) + c\sigma \left(\frac{\partial^2 P}{\partial a \partial c} \right) \right\} = 0. \\
& \left(-K^2 (i - r - r') \left(\frac{\partial P}{\partial a} \right) + (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{\partial P}{\partial a} \right) + aP \right) (i + \frac{1}{2})
\end{aligned}
\right\}$$

Chi provasse difficoltà nell'ammettere quest'equazione, a cagione dei termini, che seguono $K^{2i} \cdot \frac{\theta^r}{K^{2r}} \cdot \frac{\sigma^{r'}}{K^{2r'}}$ nel valore di v , potrà distruggerla, ricordandosi, che almeno uno dei tre numeri i, r, r' deve, per ipotesi, essere più grande in quei termini, che in questo, d'onde ne deriva, che la loro

sostituzione non potrà mai far nascere un termine moltiplicato per $K^{2i} \cdot \frac{\theta^r}{K^{2r}} \cdot \frac{w^r}{K^{2r}}$.

Dovendo la precedente equazione essere vera per via di identità ne risulta, che la funzione

$$(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{\partial P}{\partial a} \right) + aP$$

deve, da sè stessa, essere nulla, come quella, che non può essere distrutta dagli altri termini. Dunque si avrà

$$0 = (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{\partial P}{\partial a} \right) + aP.$$

Lo stesso raziocinio fatto sulle equazioni (5) e (6) ci somministrerà le due seguenti

$$0 = (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{\partial P}{\partial b} \right) + bP,$$

$$0 = (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{\partial P}{\partial c} \right) + cP.$$

Integrando la prima di queste equazioni si ottiene

$$P = \frac{H}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

indicando H una funzione di b e c .

Sostituendo questo valore di P nelle altre due si hanno le equazioni

$$\left(\frac{\partial H}{\partial b} \right) = 0, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial c} \right) = 0$$

le quali provano, che H deve essere una quantità costante indipendente dalle ordinate del punto attratto.

Ciò posto avremo

$$V = M \cdot \left\{ U + K^{2i} \cdot \frac{\theta^r}{K^{2r}} \cdot \frac{w^r}{K^{2r}} \cdot \frac{H}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \text{ec.} \right\}$$

Ma abbiamo dimostrato N.° 2, che la più piccola dimensione delle funzioni omogenee per rapporto alle quantità a, b, c , che possa entrare nel termine $K^{2i} \cdot \frac{\theta^r}{K^{2r}} \cdot \frac{w^r}{K^{2r}} P$, è dell'ordine

ne -3 ; e siccome la funzione $\frac{H}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ è dell'ordine -1 ,

ne segue, che si deve avere $H = 0$. Ricordiamoci ora, che $K^{2i} \cdot \frac{\theta^r}{K^{2r}} \cdot \frac{w^{r'}}{K^{2r'}}$ P è il termine, in cui gli esponenti i, r, r' sono i più piccoli, dunque giacchè questo termine è eguale a zero, tutti gli altri debbono parimenti essere nulli. Si avrà per conseguenza

$$V = MU.$$

Per trovare attualmente la forma della funzione U, riprendiamo la formola

$$V = \frac{M}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}} (a^2 + b^2 + c^2 - K^2 S - K^4 S' - K^6 S'' - \text{ec.})$$

dimostrata nel N.° 2, ed osservisi, che dovendo in essa svanire la quantità K, è necessario, che abbiano luogo le seguenti equazioni

$$S = A \cdot \frac{\theta}{K^2} + A' \cdot \frac{w}{K^2},$$

$$S' = B \cdot \frac{\theta^2}{K^4} + B' \cdot \frac{\theta w}{K^4} + B'' \cdot \frac{w^2}{K^4},$$

$$S'' = C \cdot \frac{\theta^3}{K^6} + C' \cdot \frac{\theta^2 w}{K^6} + C'' \cdot \frac{\theta w^2}{K^6} + C''' \cdot \frac{w^3}{K^6}$$

ec.

nelle quali A, A' rappresentano delle funzioni omogenee per rapporto alle quantità a, b, c dell'ordine zero; B, B', B'', dell'ordine -2; C, C', C'', C''' dell'ordine -4, e così delle altre.

Avremo dunque

$$(d) \dots U = v = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} - \frac{1}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}} (\Lambda \theta + \Lambda' w + B \theta^2 + B' \theta w + B'' w^2 + \text{ec.})$$

Egli è chiaro, che questo valore di v sarà lo stesso per tutti quelli ellissoidi, che hanno lo stesso centro, la stessa posizione degli assi, e le medesime eccentricità $\sqrt{\frac{\theta}{a}}, \sqrt{\frac{w}{c}}$; dunque, se, senza cambiare questi dati, si fa passare la superficie di un ellissoide per il punto attratto, e che chiamisi V' il valore di V corrispondente a questo nuovo ellissoide, di cui supporremo la massa eguale a M', si avrà $V' = MU$, ma $V = MU$,

dunque

$$V = \frac{M}{M'} V' \dots \dots (b).$$

Quest'equazione degna di attenzione fa dipendere la ricerca del valore di V da quello di V' ; e si sa, che questo si può ottenere per via delle funzioni ordinarie ove l'ellissoide sia di rivoluzione, oppure colle trascendenti ellittiche quando tutte le sezioni dell'ellissoide sono di figura ellittica.

4. Abbenchè si possa, mediante l'equazione (b), ottenere il valore di V sotto una forma finita, sarà bene di calcolare i coefficienti della serie (d) cui daremo la forma

$$v = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} \dots + U^{(i)} + U^{(i+1)} + \text{ec.}$$

ponendo

$$U^{(0)} = (a^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$U^{(1)} = - (a^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (A\theta + A'\sigma),$$

$$U^{(2)} = - (a^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot (B\theta^2 + B'\theta\sigma + B''\sigma^2),$$

ec.

Essendo v indipendente da K , le equazioni (4), (5), (6) trovate nel numero 3.° si riducono a queste

$$\begin{aligned} 0 = & \theta \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + \theta) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial a \partial \theta} \right) + \pi (a^2 + b^2 + c^2 + \pi) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial a \partial \pi} \right) + b\theta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b} \right) \\ & + c\pi \left(\frac{\partial^2 v}{\partial a \partial c} \right) + a\theta \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + a\pi \left(\frac{\partial v}{\partial \pi} \right) + \left\{ \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\pi \right\} \left(\frac{\partial v}{\partial a} \right) + \frac{1}{2}a\pi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = & \theta \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + \theta) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial b \partial \theta} \right) + \pi (a^2 + b^2 + c^2 + \pi) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial b \partial \pi} \right) + b\theta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial b^2} \right) \\ & + c\pi \left(\frac{\partial^2 v}{\partial c \partial b} \right) + b\theta \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + b\pi \left(\frac{\partial v}{\partial \pi} \right) + \left\{ \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + \theta + \frac{1}{2}\pi \right\} \left(\frac{\partial v}{\partial b} \right) + \frac{1}{2}b\pi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = & \theta \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + \theta) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial c \partial \theta} \right) + \pi (a^2 + b^2 + c^2 + \pi) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial c \partial \pi} \right) + b\theta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial b \partial c} \right) \\ & + c\pi \left(\frac{\partial^2 v}{\partial c^2} \right) + c\theta \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + c\pi \left(\frac{\partial v}{\partial \pi} \right) + \left\{ \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + \pi + \frac{1}{2}\theta \right\} \left(\frac{\partial v}{\partial c} \right) + \frac{1}{2}c\theta. \end{aligned}$$

Si moltiplichi ora la prima di queste equazioni per a , la seconda per b , la terza per c , e se ne faccia l'addizione dopo averle così moltiplicate; ponendo

$$Q = a \left(\frac{\partial v}{\partial a} \right) + b \left(\frac{\partial v}{\partial b} \right) + c \left(\frac{\partial v}{\partial c} \right)$$

si troverà

$$c = (a^2 + b^2 + c^2) \cdot \left\{ \theta \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta} \right) + \sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right) + \theta \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \sigma \left(\frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) + \frac{1}{2} Q + \frac{1}{2} v \right\} \\ + \theta^2 \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta} \right) + \sigma^2 \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right) + b \theta \cdot \left\{ \left(\frac{\partial Q}{\partial b} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial b} \right) \right\} + c \sigma \cdot \left\{ \left(\frac{\partial Q}{\partial c} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial c} \right) \right\} \\ + \left(\frac{\theta + \sigma}{2} \right) Q + \theta \cdot \frac{b}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial b} \right) + \sigma \cdot \frac{c}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial c} \right) \dots \dots \dots (A).$$

Per rendere più semplice questa equazione osservarsi, che $U^{(0)}$ è una funzione omogenea dell'ordine -1 , per rapporto alle quantità a, b, c ; che $U^{(1)}$ è una funzione omogenea dell'ordine -3 riguardo alle medesime quantità, e dell'ordine 2 relativamente a $\sqrt{\theta}, \sqrt{\sigma}$; e che per conseguenza $U^{(1)}$ è una funzione omogenea dell'ordine -1 , relativamente alle quantità $a, b, c, \sqrt{\theta}, \sqrt{\sigma}$. Si proverà nello stesso modo, che $U^{(2)}, U^{(3)}$ ec. sono funzioni omogenee dell'ordine -1 , rispetto alle medesime quantità. In conseguenza del noto teorema riguardo a queste funzioni si avrà l'equazione

$$a \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + b \left(\frac{\partial v}{\partial b} \right) + c \left(\frac{\partial v}{\partial c} \right) + 2\theta \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + 2\sigma \left(\frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) = -v$$

ossia

$$2\theta \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + 2\sigma \left(\frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) = -v - Q.$$

Per lo stesso principio sarà

$$a \left(\frac{\partial Q}{\partial a} \right) + b \left(\frac{\partial Q}{\partial b} \right) + c \left(\frac{\partial Q}{\partial c} \right) + 2\theta \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta} \right) + 2\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right) = -Q.$$

Si potrà adunque trasformare nella seguente l'equazione (A);

$$c = (a^2 + b^2 + c^2) \left\{ v + \frac{1}{2} Q - \frac{1}{2} \left(a \left(\frac{\partial Q}{\partial a} \right) + b \left(\frac{\partial Q}{\partial b} \right) + c \left(\frac{\partial Q}{\partial c} \right) \right\} + \theta^2 \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta} \right) \\ + \sigma^2 \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right) + \frac{1}{2} (\theta + \sigma) Q + b \theta \left(\frac{\partial Q}{\partial b} \right) + c \sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial c} \right) - \frac{1}{2} b \theta \left(\frac{\partial v}{\partial b} \right) - \frac{1}{2} c \sigma \left(\frac{\partial v}{\partial c} \right).$$

Facciasi ora in questa equazione la sostituzione della serie

$$U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} \dots \dots + U^{(i)} + U^{(i+1)}$$

in luogo di v . Chiaminsi s, s' le dimensioni di $U^{(i)}, U^{(i+1)}$ riguardo alle eccentricità $\sqrt{\theta}, \sqrt{\sigma}$; si avrà $-(s+1), -(s'+1)$ per il valore delle dimensioni di queste funzioni rispetto alle

ordinate a, b, c ; osservando poscia, che per la natura delle funzioni omogenee si hanno le equazioni

$$a \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial a} \right) + b \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial b} \right) + c \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial c} \right) = -(s+1) U^{(i)}$$

$$a \left(\frac{\partial U^{(i+1)}}{\partial a} \right) + b \left(\frac{\partial U^{(i+1)}}{\partial b} \right) + c \left(\frac{\partial U^{(i+1)}}{\partial c} \right) = -(s'+1) U^{(i+1)}$$

si otterrà

$$U^{(i+1)} = \left\{ \begin{array}{l} -(s+1)\theta^2 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial \theta} \right) - (s+1)\sigma^2 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial \sigma} \right) - \left(\frac{s+1}{2} \right) (\theta + \sigma) U^{(i)} \\ - (s+\frac{1}{2}) b \theta \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial b} \right) - (s+\frac{1}{2}) c \sigma \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial c} \right) \\ \hline s' \left(\frac{s'+3}{2} \right) (a^2 + b^2 + c^2) \end{array} \right\}$$

Per mezzo di questa equazione si ha il valore di $U^{(i+1)}$ conoscendo quello di $U^{(i)}$; ma noi abbiamo

$$U^{(0)} = (a^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

dunque si conoscerà $U^{(i)}$, e per conseguenza tutti i termini della serie, che rappresenta il valore di v .

La precedente formola è suscettibile di riduzione, se si osserva, che le dimensioni di $U^{(0)}$, $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, ec. crescono di due in due unità riguardo a $\sqrt{\theta}$, $\sqrt{\sigma}$, d'onde ne segue, che ponendo $s = 2i$ si avrà $s' = 2i + 2$. Si ha inoltre, per via della omogeneità

$$\sigma \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial \sigma} \right) = i U^{(i)} - \theta \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial \theta} \right)$$

dunque

$$U^{(i+1)} = \left\{ \begin{array}{l} (2i+1)\theta \cdot (\sigma - \theta) \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial \theta} \right) - (2i+\frac{1}{2}) b \theta \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial b} \right) \\ - (2i+\frac{1}{2}) c \sigma \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial c} \right) - \frac{1}{2} (2i+1) (\theta + (2i+1)\sigma) U^{(i)} \\ \hline (i+1)(2i+s)(a^2 + b^2 + c^2) \end{array} \right\}$$

Tale è la formola, che dà il termine generale della serie, che rappresenta il valore di v , ed è chiaro, ch'essa sarà convergente se le eccentricità $\sqrt{\theta}$, $\sqrt{\sigma}$ sono molto piccole, e nel caso in cui la distanza $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ del punto attratto al centro dell'ellissoide sarà molto grande riguardo alle dimensioni del corpo attrahente.