NUOVO METODO PER LA TRIGONOMETRIA SFERICA

Del Sig. Gioacchino Pessuti.

Ricevuto li 7 Giugno 1810.

Sin dalla mia prima geometrica infanzia (che qualcuno forse dirà durare in me tuttavia, o almeno essersi rinnovata) mi venne in pensiero e coraggiosamente mi accinsi all' impresa di simplicizzare l' una, e l' altra Trigonometrìa, e massime la Sferica, e conservo ancora un mio scritto di que' remoti tempi su di quest' oggetto, che mostrai allora a qualche mio Amico, siccome qualcuno di essi tuttora vivente potrebbe renderne autorevole testimonianza. Se le circostanze della mia vita posteriore non mi permisero di pubblicare questi ed altri tali miei parti od aborti che voglian chiamarsi di quella mia prima età, ne dimisi poscia intieramente il pensiero, allorchè andai a mano a mano ritrovando alcune di queste mie idee nelle Opere, e ne' libri giuntimi alle mani, o venuti dopo di quell' epoca alla luce. Contuttociò non credo tuttavìa affatto indegne dell' attenzione de' Geometri, nè affatto prive di novità, alcune mie considerazioni sulla Trigonometrìa Sferica, che intendo esporre in questa Memoria, e che si connettono e derivano da quelle mie prime puerili meditazioni.

Non sapeva io approvare in quelle mie puerili meditazioni che la risoluzione de' triangoli obbliquangoli si dovesse dedurre, siccome comunemente si usa, da quella de' triangoli rettangoli, sembrandomi molto più naturale di doversi considerare quest' ultima come un caso particolare della prima; e molto meno potea poi soffrire che ogni caso particolare de' triangoli obbliquangoli esigesse un nuovo metodo e un nuovo raziocinio per essere risoluto, e che tutti supponessero, oltre alla risoluzione de' triangoli rettangoli, la cognizione di tanti Teoremi relativi alle proprietà de' triangoli sferici, e di tanti Lemmi, che si doveano andare a mano a mano premettendo, e dimostrando. A liberar pertanto la Trigonometrìa Sferica da quest' incomodi, e da questa complicazione, mi venne in pensiero di risalire all' origine primitiva della Trigonometrìa Sferica, di rappresentare cioè i tre lati e i tre angoli di qualsisia triangolo sferico, quelli coi tre angoli piani, questi cogli angoli di reciproca inclinazione delle tre faccie di una piramide triangolare avente per base il proposto triangolo sferico, e per vertice il centro della sfera. E così rappresentando le sei parti di qualsiasi triangolo sferico, mi riuscì assai facile con una sola ed unica figura di risolvere qualunque caso, di vedere cioè e di esprimere con una conveniente formola la connessione che v' ha fra tre quali si vogliano parti date, ed una qualunque delle altre tre che per mezzo di quelle si cerchi. Da questa risoluzione generale poi de' triangoli obbliquangoli ne nascevano come facili Corollarj, e con ordine che a me sembrava più naturale, le risoluzioni di tutti i casi de' triangoli rettangoli, e l' istessa *Regola Neperiana*, che tutti li comprende in una generale enunciazione.

Un altro vantaggio di questa mia maniera di considerare la Trigonometrìa sferica si era che mi presentava in molti casi una costruzione ovvia e facile in piano della risoluzione del caso proposto, la quale poteva esser utile a quei che non hanno gran destrezza nel maneggio delle formole e del calcolo trigonometrico, e poteva anche riescir comoda ai Geometri stessi in qualche circostanza. Ma sapendo io che gli antichi Astrolabj aveano in varie guise e completamente esaurita questa costruzione in piano della Trigonometrìa Sferica, e non credendola d' altronde di grandissimo uso, mi contentava perciò in quel mio primo ed antico scritto di accennarla di volo, e quasi per una superflua digressione. Mi richiamò però molti anni dopo a considerarla di nuovo una Memoria dell' ingegnoso Geometra Sig. Ab. *Boscovik* inserita nel III Tomo delle sue voluminose Opere stampate a Bassano, e che ha appunto questa costruzione in piano della Trigonometrìa Sferica per unico suo argomento. Mi venne pertanto allora in pensiero di far servire questa costruzione in piano come di base, e fondamento a un Trattato elementare di Trigonometrìa Sferica, derivando dalla medesima la dimostrazione delle formole più generali, e da' Geometri più usitate. E così mi sembrava che questa costruzione in piano de' Problemi di Trigonometrìa Sferica, alla quale si era fermato il *Boscovik*, potesse divenire interessante ed utile, quando che da sè sola sarebbe stata da' Geometri trascurata e dimenticata.

Questo adunque sarà il soggetto di questa mia breve Memoria, in cui invertendo l' ordine delle mie antiche idee su di questo articolo, invece di dedurre la costruzione in piano dalla dimostrazione delle formole, come prima faceva, farò per lo contrario nascer queste da quella. Premetterò pertanto sulle mie antiche idee, molto analoghe a quelle del *Boscovik* una *costruzione generale* in piano della Trigonometrìa Sferica, e deducendone quindi in altrettanti Problemi le costruzioni particolari de' diversi casi, andrò passo passo derivando da queste le formole corrispondenti. Uno de' pregi di questo nuovo metodo che propongo, mi sembra esser quello di conciliare alle dimostrazioni delle anzidette formole una singolar facilità, e semplicità, e di renderle poi affatto indipendenti l' una dall' altra, benchè derivino tutte dal medesimo fonte.

COSTRUZIONE GENERALE IN PIANO DE' PROBLEMI DELLA TRIGONOMETRIA SFERICA.

Sopra di un circolo qualunque prendansi successivamente gli archi AB, AC, CB' eguali ai tre lati *ab*, *ac*, *cb* del triangolo sferico *abc*. Per ottenere sul piano del circolo qualunque degli angoli del triangolo per es. a, avendo condotte le corde BB″, B′M normali ai raggi AF, CF, figuriamoci, che gli archi AB, CB′ si stacchino dal piano del circolo, e rotino attorno i raggi AF, CF, finchè i punti B, e B′ s'incontrino in un sol punto, onde formare il triangolo sferico identico col proposto abc. Sarà allora l'angolo a eguale all' inclinazione del piano AB col piano AC, cioè all'angolo che faranno allora tra loro le BD, ED tutte due perpendicolari alla comune intersezione de' due piani AF. Per aver quest' angolo si rifletta che in questa rotazione degli archi AB, CB′ le perpendicolari calate dai punti B, B′ sopra il piano del circolo BACB′, debbono sempre cadere, la prima su qualche punto della BB″, e la seconda su qualche punto della B′M, onde quando i punti B, B′ si riuniscono in un solo, questa comune perpendicolare dovrà cadere sull' intersezione E delle corde BB″, B′M. Quando dunque i punti B, B′ si saranno riuniti, l'angolo che tra loro faranno le BD, ED, sarà l'angolo in D di un triangolo rettangolo avente ED per base, e BD per ipotenusa. Quindi descritto sopra di BB″ un semicircolo, ed alzata dal punto E la normale EH, sarà HDE l'angolo a che si cerca.

Egli è evidente che se si fossero presi invece gli archi AB, AC′, C′B′ respettivamente eguali ad ab, bc, ac, condotta la corda B′M′ normale a C′F, che taglia la BB″ in E′, ed alzata la normale E′H′ si avrebbe in piano allo stesso modo l'angolo H′DE′ eguale allo sferico b. Ma la costruzione di quest'angolo b può derivarsi anche più comodamente da quella del primo già trovato a: imperocchè essendo $AC = ac = B'C' = C'M'$, e $CM = B'C = bc = AC'$, sarà $AC - CM = C'M' - AC'$, cioè $AM = AM'$. Quindi condotta la corda B′M per la costruzione dell'angolo a, se si prenderà $AM' = AM$, e si condurrà la corda BM′, si avrà il punto E′, da cui dipende la costruzione dell'altro angolo b.

Si potrà anche avere il terz'angolo c per mezzo della stessa costruzione che ha servito a trovare il primo a. Imperocchè

perocchè rotandosi come prima gli archi AB, CB′ attorno di AF, CF, sinchè i punti B, B′ si riuniscono in un solo, l'angolo c, ossia l'angolo d'inclinazione del piano in cui trovasi CB′ con quello in cui trovasi AC, usando dello stesso raziocinio, che si è tenuto per l'angolo a, si farà vedere esser l'angolo in G di un triangolo rettangolo in E avente EG, EH per lati, e GB′ per ipotenusa. Quindi prendendo EL $=$ EG, e conducendo HL, sarà l'angolo HLE eguale al terzo angolo cercato c.

Che se si considereranno invece gli archi AB, AC′, C′B′ rispettivamente eguali ad ab, bc, ac, l'angolo c sarà allora eguale all'inclinazione del piano C′B′ col piano AB, allorchè rotando attorno di C′F ed AF questi due piani i punti B′ e B si uniranno in un sol punto; e l'inclinazione di questi due piani sarà allora, come prima, eguale all'angolo in G′ del triangolo rettangolo avente per lati G′E′, H′E′, e B′G′ per ipotenusa. Quindi come prima si potrà anche mettere in piano l'angolo c, prendendo E′L′ $=$ E′G′, e conducendo H′L′, poichè si avrà come prima H′L′E′ $= c$.

Si avrà quindi HLE $=$ H′L′E′ $= c$, ed essendo perciò simili i triangoli HLE, H′L′E′ sarà

$$\mathrm{HL} : \mathrm{H'L'} = \mathrm{HE} : \mathrm{H'E'}$$

Ma HL, H′L′ ossia B′G, B′G′ sono come i seni degli archi B′C, B′C′, ossia bc, ac, ed HE, H′E′ sono come i seni degli angoli HDE, H′DE′, ossia degli angoli a, e b. Si avrà dunque

$$\text{sen.}\, bc : \text{sen.}\, ac = \text{sen.}\, a : \text{sen.}\, b$$

cioè i seni de' lati di qualunque triangolo sferico proporzionali ai seni degli angoli opposti, ch'è uno de' principali e fondamentali Teoremi della Sferica Trigonometrìa.

Ma non più di questa *Costruzione generale*, e de' Corollarj che se ne possono immediatamente dedurre, poichè sì quella che questi meglio e più ampiamente si svolgeranno nelle costruzioni particolari de' seguenti Problemi, e nella dimostrazione delle formole, che nasceranno da queste costruzioni.

PROBLEMA I

Dati i tre lati ab, ac, bc *di un qualunque triangolo sferico* bac, *trovare qualunque de' suoi angoli, per es.* a.

Costruzione.

Si prendano sopra di un circolo descritto con qualunque raggio gli archi AB, AC, CB′ rispettivamente eguali ai lati dati *ab*, *ac*, *bc* del triangolo *abc*. Fatto AB″ = AB, e CM = CB′, si conducano le corde BB″, B′M le quali si taglino in E. Sopra di BB″ si descriva un semicircolo, e dal punto E ora trovato s'innalzi sopra di BB″ la normale EH. Condotto il raggio HD, dalla *costruzione generale* immediatamente risulta che l'angolo HDE sarà eguale all'angolo richiesto *a*.

Una costruzione analoga farà egualmente trovare gli angoli *b*, e *c*; ed inoltre si è veduto nella medesima *costruzione generale* come questi due angoli possono anche più speditamente determinarsi per mezzo della medesima costruzione, che ha servito pel primo *a*.

Formola

$$\text{Cos.}\, a = \frac{\text{cos.}\, bc - \text{cos.}\, ab \,.\, \text{cos.}\, ac}{\text{sen.}\, ab \,.\, \text{sen.}\, ac}$$

Dimostrazione.

Sarà dunque in virtù della *costruzione* $\text{cos.}\, a = \frac{\text{DE}}{\text{DH}} = \frac{\text{DE}}{\text{DB}}$.
Ora fatto il raggio AF = 1, si ha DB = sen. AB = sen. *ab*; e condotte le normali DI, DK, nel quadrilatero birettangolo EDFG si ha $\text{DE} = \frac{\text{DI}}{\text{sen. DEI}} = \frac{\text{DI}}{\text{sen. DFK}} = \frac{\text{DI}}{\text{sen. AC}} = \frac{\text{DI}}{\text{sen.}\, ac} = \frac{\text{FG} - \text{FK}}{\text{sen.}\, ac} = \frac{\text{cos. B'C} - \text{DF . cos. AC}}{\text{sen.}\, ac} = \frac{\text{cos.}\, bc - \text{cos.}\, ab \,.\, \text{cos.}\, ac}{\text{sen.}\, ac}$. Dunque $\text{cos.}\, a = \frac{\text{DE}}{\text{DB}} = \frac{\text{cos.}\, bc - \text{cos.}\, ab \,.\, \text{cos.}\, ac}{\text{sen.}\, ab \,.\, \text{sen.}\, ac}$. C. C. D. D.

Si avranno, com'è evidente, due formole analoghe e simili a questa per gli altri due angoli b, e c, e da dimostrarsi nel medesimo modo, cioè

$$\cos.\ b = \frac{\cos.ac - \cos.ab\ .\cos.cb}{\text{sen}.ab\ .\text{sen}.cb}$$

$$\cos.\ c = \frac{\cos.ab - \cos.ac\ .\cos.bc}{\text{sen}.ac\ .\text{sen}.bc}$$

PROBLEMA II

Dati due lati e l'angolo compreso, per es. ab, ac, *ed* a, *trovare il resto.*

Costruzione.

Si prendano sopra di un qualunque circolo gli archi AB, AC eguali ai lati dati ab, ac. Fatta quindi AB'' = AB, e condotta la corda BB'', si descriva sopra di questa il semicircolo BHB'', ed in esso si prenda l'arco B''H ovvero l'angolo B''DH eguale all'angolo dato a. Si conduca la normale HE, e da E l'altra normale EGB' sopra di CF: in virtù della *costruzione generale* sarà CB' il valore del terzo lato cb.

Sopra di BB'' prolungata, s'è necessario, si prenda EL = EG, e condotta la HL, l'angolo HLE, in virtù della *costruzione generale* sarà il valore dell'angolo c.

Che se si mutino i luoghi degli archi AB, AC, cosicchè l'uno cada dalla parte ove prima cadea l'altro, egli è evidente che colla medesima costruzione con cui si trovò c si troverebbe b, il quale d'altronde, avendosi ora i tre lati AB, AC, CB', e l'arco AM, potrà anche più speditamente determinarsi, come s'insegnò nella *costruzione generale*.

Formola per il lato cb

$$\text{Cos}.\ cb = \cos.ab\ .\ \cos.ac + \cos.\ a\ .\ \text{sen}.ab\ .\ \text{sen}.ac\ .$$

DIMOSTRAZIONE.

Questa formola nasce immediatamente dall' altra dimostrata nel *Problema precedente*.

$$\cos.\,a = \frac{\cos.\,cb - \cos.\,ab\,.\,\cos.\,ac}{\text{sen}.\,ab\,.\,\text{sen}.\,ac}$$

Volendo però per abbondanza tornare a dimostrarla, si osservi che facendosi, come prima, il raggio $AF = 1$, si avrà $\cos.\,cb = \cos.\,CB' = FG$. Ora $FG = FK + DI$, ed FK, come nel Problema precedente $= FD\,.\,\cos.\,AC = \cos.\,AB\,.\,\cos.\,AC = \cos.\,ab\,.\,\cos.\,ac$, $DI = DE\,.\,\text{sen}.\,DEI = DE\,.\,\text{sen}.\,AC = DE \times \text{sen}.\,ac$, ed essendo $\frac{DE}{HD} = \frac{DE}{DB} = \frac{DE}{\text{sen}.\,AB} = \frac{DE}{\text{sen}.\,ab} = \cos.\,HDE = \cos.\,a$, sarà $DE = \cos.\,a\,.\,\text{sen}.\,ab$. Quindi

$$\cos.\,cb = FK + DI = \cos.\,ab\,.\,\cos.\,ac + \cos.\,a\,.\,\text{sen}.\,ab\,.\,\text{sen}.\,ac.$$

FORMOLA PER L' ANGOLO c

$$\text{Tang}.\,c = \frac{\text{sen}.\,a}{\cot.\,ab\,.\,\text{sen}.\,ac - \cos.\,ac\,.\,\cos.\,a}.$$

DIMOSTRAZIONE.

Dalla premessa costruzione risulta $\text{tang}.\,c = \text{tang}.\,HLE = \frac{HE}{EL} = \frac{HE}{EG}$. Ora essendo $\frac{HE}{HD} = \frac{HE}{DB} = \frac{HE}{\text{sen}.\,AB} = \frac{HE}{\text{sen}.\,ab} = \text{sen}.\,HDE = \text{sen}.\,a$, sarà $HE = \text{sen}.\,ab\,.\,\text{sen}.\,a$. Si ha poi $EG = DK - EI = FD\,.\,\text{sen}.\,DFK - DE\,.\,\cos.\,DEI = \cos.\,AB\,.\,\text{sen}.\,AC - DE \times \cos.\,AC = \cos.\,ab\,.\,\text{sen}.\,ac - DE\,.\,\cos.\,ac$, e si è trovato nella dimostrazione della formola antecedente $DE = \cos.\,a\,.\,\text{sen}.\,ab$. Dunque

$$\text{tang}.\,c = \frac{HE}{EG} = \frac{\text{sen}.\,ab\,.\,\text{sen}.\,a}{\cos.\,ab\,.\,\text{sen}.\,ac - \cos.\,a\,.\,\text{sen}.\,ab\,.\,\cos.\,ac}$$

ossia dividendo sopra e sotto per $\text{sen}.\,ab$

$$\text{tang}.\,c = \frac{\text{sen}.\,a}{\cot.\,ab\,.\,\text{sen}.\,ac - \cos.\,a\,.\,\cos.\,ac} \quad C.\,C.\,D.\,D.$$

Mutando i luoghi degli archi AB, AC, cosicchè l'uno si prenda dalla parte ove prima si prendea l'altro, si avrà per l'angolo b una formola simile a quella che si è trovata per c, cioè

$$\text{tang.}\, b = \frac{\text{sen.}\, a}{\text{cot.}\, ac \,.\, \text{sen.}\, ab - \cos.\, a \,.\, \cos.\, ab}\,.$$

Corollario.

Se l'angolo a sarà retto, le formole del Problema, facendo in esse $\text{sen.}\, a = 1$, $\cos.\, a = 0$, serviranno per risolvere il caso in cui essendo dati in un triangolo rettangolo bac i due lati ab, ac attorno l'angolo retto, si cerchino le altre tre parti rimanenti. Si avrà pertanto per la prima formola

$$\cos.\ \text{Ipot.}\ bc = \cos.\, ab \,.\, \cos.\, ac\,.$$

Dalla seconda si avrà

$$\text{tang.}\, c = \frac{1}{\text{cot.}\, ab \,.\, \text{sen.}\, ac}$$

ovvero

$$\text{sen.}\, ac = \frac{1}{\text{cot.}\, ab \,.\, \text{tang.}\, c} = \text{tang.}\, ab \,.\, \text{cot.}\, c\,.$$

E similmente dalla terza

$$\text{tang.}\, b = \frac{1}{\text{cot.}\, ac \,.\, \text{sen.}\, ab}$$

ossia

$$\text{sen.}\, ab = \frac{1}{\text{cot.}\, ac \,.\, \text{tang.}\, b} = \text{tang.}\, ac \,.\, \text{cot.}\, b\,.$$

PROBLEMA III

Dati i tre angoli a, b, c *trovare qualunque de' tre lati per es.* bc *opposto all' angolo* a.

Costruzione.

Invertendo l'ordine della *costruzione generale*, invece d'incominciare dal circolo BACB' in cui si prendono i lati, per passare all'altro BHB″ in cui si prendono gli angoli, s'incominci al contrario da questo per passare a quello. Sopra un diametro qualunque BB″ si descriva pertanto un semicircolo, ed in esso primieramente si prendano gli archi B″H, B″H′, ovvero gli angoli al centro B″DH, B″DH′ eguali rispettivamente agli angoli dati a, e b; e conducendo quindi le normali HE, H′E′, si conducano le parallele HL, H′L′ che facciano con esse gli angoli LHE, L′H′E′ eguali al complemento del terz'angolo dato c, cosicchè ne risulti HLE = H′L′E′ = c. Siegue dalla *costruzione generale* che EG, E′G′ saranno rispettivamente eguali ad EL, E′L′, e B′G, B′G′ ad HL, H′L′, cosicchè portando HL, H′L′ da L ed L′ in P, e P′, si avranno le EB′, E′B′ rispettivamente eguali ad EP, E′P′.

Se dunque dai dati punti E ed E′ come centri coi dati intervalli EP, E′P′ si descriveranno due archi di circolo, questi intersecandosi daranno il punto B′. Si avranno dunque tre punti B, B″, B′, per i quali dovrà passare e descriversi il circolo ABB′CB″, e ciò fatto, e condotte dal centro F le normali FA, FC sopra le BB″, EB′, saranno in virtù della *costruzione generale* gli archi AB, AC, CB′ i valori de' tre richiesti lati ab, ac, cb.

FORMOLA PER IL LATO cb

$$\cos. cb = \frac{\cos. a + \cos. b . \cos. c}{\text{sen}. b . \text{sen}. c}.$$

DIMOSTRAZIONE.

Facciasi il raggio DB del semicircolo = 1, onde sia HE = sen.a, H′E′ = sen.b, DE = cos.a, DE′ = cos.b, epperò EE′ = cos.a — cos.b. Sarà quindi $\frac{HE}{HL} = \frac{\text{sen}. a}{HL} = \text{sen. HLE} = \text{sen}. c$, onde $HL = B'G = \frac{\text{sen}. a}{\text{sen}. c}$; e similmente $\frac{H'E'}{H'L'} = \frac{\text{sen}. b}{H'L'} = \text{sen}. H'L'E' = \text{sen}. c$, epperò $H'L' = B'G' = \frac{\text{sen}. b}{\text{sen}. c}$. Si avrà ancora $\frac{EL}{HL}=\frac{EL\,.\,\text{sen.}\,c}{\text{sen.}\,a}=\cos.\text{HLE}=\cos.c$, epperò $EL=EG=\frac{\text{sen.}\,a\,.\,\cos.\,c}{\text{sen.}\,c}$; e allo stesso modo $\frac{E'L'}{H'L'}=\frac{E'L'\,.\,\text{sen.}\,c}{\text{sen.}\,b}=\cos.H'L'E'=\cos.c$, e quindi $E'L'=E'G'=\frac{\text{sen.}\,b\,.\,\cos.\,c}{\text{sen.}\,c}$. Dunque $EB'=B'G+EG=\frac{\text{sen.}\,a\,.(1+\cos.c)}{\text{sen.}\,c}$, ed $E'B'=B'G'+E'G'=\frac{\text{sen.}\,b(1+\cos.c)}{\text{sen.}\,c}$.

Si conosceranno dunque tutti tre i lati del triangolo rettilineo $EE'B'$, epperò per le note formole si potrà ottenere il coseno di qualunque de' suoi angoli, per es. dell'angolo $EE'B'$, ossia (perchè essendo $AB=AB''$, ed $AM=AM'$ in virtù della *costruzione generale* le corde BB'', $M'M$ sono tra loro parallele) dell'angolo $MM'B'$, la di cui misura è la metà dell'arco MCB', ossia $CB'=cb$. Sarà dunque per le anzidette note formole di Trigonometrìa piana

$$\cos.EE'B'=\cos.cb=\frac{E'B'^2-EB'^2+EE'^2}{2EE'.E'B'}$$

cioè sostituendo i poc'anzi trovati valori di EE', EB', $E'B'$

$$\cos.cb=\frac{\frac{(\text{sen.}\,b^2-\text{sen.}\,a^2).(1+\cos.c)^2}{\text{sen.}\,c^2}+(\cos.a-\cos.b)^2}{2(\cos.a-\cos.b)\,.\,\frac{\text{sen.}\,b\,.(1+\cos.c)}{\text{sen.}\,c}}$$

ossia ponendo nel primo termine del numeratore $\cos.a^2-\cos.b^2$ invece di $\text{sen.}b^2-\text{sen.}a^2$, moltiplicando quindi tanto il numeratore che il denominatore per $\text{sen.}c^2$ ovvero $1-\cos.c^2$, e dividendo finalmente numeratore e denominatore per $(\cos.a-\cos.b).(1+\cos.c)$

$$\cos.cb=\frac{(\cos.a+\cos.b).(1+\cos.c)+(\cos.a-\cos.b).(1-\cos.c)}{2\,\text{sen.}\,b\,.\text{sen.}\,c}$$

cioè finalmente

$$\cos.cb=\frac{\cos.a+\cos.b\,.\,\cos.c}{\text{sen.}\,b\,.\,\text{sen.}\,c}\,.\ \text{C.C.D.D.}$$

Egli è poi evidente che se gli angoli b e c prenderanno il luogo dell'angolo a, si avranno col medesimo discorso due formole analoghe e simili alla ritrovata per determinare i lati opposti ac, ab, cioè

$$\cos.ac = \frac{\cos.b + \cos.a.\cos.c}{\text{sen}.a.\text{sen}.c}$$

$$\cos.ab = \frac{\cos.c + \cos.a.\cos.b}{\text{sen}.a.\text{sen}.b}.$$

COROLLARIO.

Se l'angolo a sarà retto, le tre formole del Problema, facendo in esse $\text{sen}.a = 1$, $\cos.a = 0$, serviranno a risolvere il caso di un triangolo rettangolo in cui essendo dati gli altri due angoli b, c si cerchi per mezzo di essi qualunque de' tre lati. Si avrà infatti dalla prima

$$\cos.\ \text{Ipot}.\ cb = \frac{\cos.b.\cos.c}{\text{sen}.b.\text{sen}.c} = \cot.b.\cot.c.$$

Dalla seconda

$$\cos.ac = \frac{\cos.b}{\text{sen}.c},\ \text{ossia}\ \cos.ac.\text{sen}.c = \cos.b$$

e dalla terza finalmente

$$\cos.ab = \frac{\cos.c}{\text{sen}.b},\ \text{ossia}\ \cos.ab.\text{sen}.b = \cos.c.$$

PROBLEMA IV

Essendo dati due angoli e il lato frapposto per es. a, b *ed* ab, *trovare il resto.*

COSTRUZIONE.

Sopra di un circolo descritto con qualunque raggio si prenda l' arco AB = AB″ eguale al lato dato ab. Condotta quindi la corda BB″ sopra di questa come diametro si descriva un semicircolo, nel quale si prendano gli archi B″H, B″H′ ovvero gli angoli B″DH, B″DH′ eguali rispettivamente ai dati angoli a e b, e si conducano le normali HE, H′E′.

Dalla

Dalla *costruzione generale* risulta che se AC, CB′ sieno gli altri due lati cercati ac, cb, condotte le B′EM, B′E′M′, si avrà AM=AM′, onde essendo anche AB″=AB, sarà MM′ parallela a B″B, epperò B′E : B′E′=EM : E′M′, e quindi B′E × EM : B′E′.E′M′, cioè per proprietà del circolo B″E.EB : B″E′.E′B ossia $HE^2 : H'E'^2 = B'E^2 : B'E'^2$. Ma per l'angolo MB′M′ diviso in mezzo dalla retta B′A si ha ancora B′E : B′E′ = EQ : E′Q, e quindi $B'E^2 : B'E'^2 = EQ^2 : E'Q^2$. Sarà dunque $HE^2 : H'E'^2 = EQ^2 : E'Q^2$, ed HE : H′E′=EQ : E′Q, cioè per determinare il punto Q, si dovrà dividere la data EE′ nella data ragione de' seni HE, H′E′ de' dati angoli a e b.

Trovato poi il punto Q facilmente si compirà la desiderata costruzione; poichè condotta per A e Q la AQB′ si avrà il punto B′, e da questo per il dato punto E condotta la BEM, e sopra questa dal centro F calata la perpendicolare FC, saranno, in virtù della *costruzione generale*, AC, CB′ i valori de' cercati lati ac, cb.

Finalmente portando EG da E in L, e condotta la HL, in virtù della medesima *costruzione generale* sarà l'angolo HLE il valore del terz'angolo cercato c.

Formola per il lato ac

$$\text{Cot.}\, ac = \frac{\text{sen.}\, a \,.\, \text{cot.}\, b}{\text{sen.}\, ab} + \cos.\, a \,.\, \text{cot.}\, ab \,.$$

Dimostrazione.

Si è già veduto nella *costruzione generale* che i seni de' lati bc, ac sono proporzionali ai seni degli angoli opposti a e b. Lo stesso può anche dedursi dalla costruzione dell'attuale Problema; poichè per le parallele MM′, EE′, e per l'angolo EB′E′ diviso in mezzo dalla B′A, le B′M, B′M′ sono proporzionali alle B′E, B′E′, cioè alle EQ, QE′, cioè alle HE, H′E′, ossia ai seni degli angoli a e b. Ora $\frac{1}{2}$B′M, $\frac{1}{2}$B′M′ sono proporzionali ai seni degli archi B′C, B′C′, ossia B′C, AC, ossia bc, ac. Sarà dunque dato il rapporto de' seni de' lati cercati bc, ac, cioè si avrà sen. bc : sen. ac = sen. a : sen. b, e quindi sen. $bc=\frac{\text{sen.}\,a}{\text{sen.}\,b}$. sen. ac.

Conducasi ora la normale FR sopra di B'A, e sarà $\frac{AR}{FR}=\frac{AD}{DQ}=\text{tang.}\,\frac{1}{2}(AC+B'C)=\text{tang.}\,\frac{1}{2}(ac+bc)$; e sarà poi facile di ottenere per mezzo delle parti date i valori di AD, e DQ. Infatti facendosi il raggio AF = 1, sarà primieramente AD = AF − DF = 1 − cos. AB = 1 − cos. ab. Essendo poi ED, E'D i coseni di B″H, B″H', cioè di a, e b per il raggio HD = DB = sen. ab, sarà ED = cos. a . sen. ab, E'D = cos. b . sen. ab, e quindi EE' = ED − E'D = (cos. a − cos. b) . sen. ab. Ma per ciò che si è dimostrato nella costruzione dee stare EQ : E'Q = sen. a : sen. b, epperò EE' : EQ = sen. a + sen. b : sen. a. Sostituendo pertanto il valore di E'E, si avrà $EQ=\frac{(\cos.\,a-\cos.\,b)\,.\,\text{sen.}\,a\,.\,\text{sen.}\,ab}{\text{sen.}\,a+\text{sen.}\,b}$, e quindi $DQ=ED-EQ=\cos.\,a\,.\,\text{sen.}\,ab-\frac{(\cos.\,a-\cos.\,b)\,.\,\text{sen.}\,a\,.\,\text{sen.}\,ab}{\text{sen.}\,a+\text{sen.}\,b}=\frac{\text{sen.}\,ab\,.\,\text{sen.}\,(a+b)}{\text{sen.}\,a+\text{sen.}\,b}$. Si avrà dunque finalmente $\frac{AD}{DQ}=\text{tang.}\,\frac{1}{2}(ac+bc)=\frac{(1-\cos.\,ab)\,.\,(\text{sen.}\,a+\text{sen.}\,b)}{\text{sen.}\,ab\,.\,\text{sen.}\,(a+b)}$.

Il Problema adunque è ridotto a questo di trovare due archi bc, ac, essendo nota la proporzione de' loro seni, e la tangente della loro semisomma. Chiamisi n questa tangente della semisomma, che abbiamo ora trovata, ed 1 : m sia il noto rapporto de' seni di bc, ac, cosicchè sia sen. $bc=m\times$ sen. ac, cioè $m=\frac{\text{sen.}\,a}{\text{sen.}\,b}$. Essendo dunque per le note formole trigonometriche tang. $\frac{1}{2}(ac+bc)=\frac{\text{sen.}\,ac+\text{sen.}\,bc}{\cos.\,ac+\cos.\,bc}$, si avrà $n=\frac{(1+m)\,.\,\text{sen.}\,ac}{\cos.\,ac+\sqrt{1-m^2\,\text{sen.}\,ac^2}}$, e quindi $(1+m)$. sen. $ac-n\times$

$\cos.ac = n\sqrt{1-m^2 \operatorname{sen}.ac^2}$; d'onde quadrando e riducendo si dedurrà agevolmente $(1+m)^2.\operatorname{sen}.ac - 2n(1+m).\cos.ac - n^2.\operatorname{sen}.ac = -n^2m^2.\operatorname{sen}.ac$, e quindi

$$\cot.ac = \frac{(1+m)^2-n^2(1-m)^2}{2n(1+m)} = \frac{1+m+n^2(m-1)}{2n} = \frac{1+m}{2n} + \frac{n(m-1)}{2}.$$

Ristabiliti i valori di m ed n, si otterrà dopo le più ovvie riduzioni

$$\cot.ac = \frac{\operatorname{sen}.ab.\operatorname{sen}.(a+b)}{2\operatorname{sen}.b.(1-\cos.ab)} + \frac{(1-\cos.ab).(\operatorname{sen}.a^2-\operatorname{sen}b^2)}{2\operatorname{sen}.b.\operatorname{sen}.ab.\operatorname{sen}.(a+b)}$$

cioè riducendo allo stesso denominatore, e dopo di ciò invece di $\operatorname{sen}.ab^2$ che verrà nel primo termine del numeratore mettendo $1-\cos.ab^2$, e dividendo quindi sopra e sotto per $1-\cos.ab$

$$\cot.ac = \frac{(1+\cos.ab).\operatorname{sen}.(a+b)^2+(1-\cos.ab).(\operatorname{sen}.a^2-\operatorname{sen}.b^2)}{2\operatorname{sen}.b.\operatorname{sen}.ab.\operatorname{sen}.(a+b)}.$$

Si metta ora in luogo di $\operatorname{sen}.(a+b)$ il suo valore $\operatorname{sen}.a \times \cos.b + \operatorname{sen}.b.\cos.a$, e sviluppando e raccogliendo i prodotti, si otterrà

$$\cot.ac = \frac{(\operatorname{sen}.a^2.\cos.b^2+\operatorname{sen}.a.\operatorname{sen}.b.\cos.a.\cos.b)+(\operatorname{sen}.b^2.\cos.a^2+\operatorname{sen}.a.\operatorname{sen}.b.\cos.a.\cos.b).\cos.ab}{\operatorname{sen}.b.\operatorname{sen}.ab.(\operatorname{sen}.a.\cos.b+\operatorname{sen}.b.\cos.a)}$$

ed infine dividendo attualmente i due termini del numeratore per il fattore $\operatorname{sen}.a.\cos.b+\operatorname{sen}.b.\cos.a$ del denominatore

$$\cot.ac = \frac{\operatorname{sen}.a.\cos.b}{\operatorname{sen}.b.\operatorname{sen}.ab} + \frac{\cos.a.\cos.ab}{\operatorname{sen}.ab} = \frac{\operatorname{sen}.a.\cot.b}{\operatorname{sen}.ab} + \cos.a.\cot.ab.\text{ C.C.D.D.}$$

Egli è evidente che mettendo a ove sta b e viceversa, si troverebbe col medesimo discorso una formola analoga e simile per il lato bc, cioè

$$\cot.bc = \frac{\operatorname{sen}.b.\cot.a}{\operatorname{sen}.ab} + \cos.b.\cot.ab.$$

Formola per l'angolo c

$$\cos.c = \cos.ab.\operatorname{sen}.a.\operatorname{sen}.b - \cos.a.\cos.b.$$

Dimostrazione.

Dopo di aver dimostrato come nel Problema antecedente che

$$\cos.ab=\frac{\cos.c+\cos.a.\cos.b}{\text{sen}.a.\text{sen}.b}$$

facilmente se ne dedurrà

$$\cos.c=\cos.ab.\text{sen}.a.\text{sen}.b-\cos.a.\cos.b.$$

Corollario.

Volendo applicare queste formole ad un triangolo rettangolo in a, ed in cui essendo dati il lato ab, e l'angolo adjacente b, si cerchino le altre parti, bisognerà nelle anzidette formole fare sen. $a=1$, cos. $a=0$, e si avrà così dalla prima

$$\cot.ac=\frac{\cot.b}{\text{sen}.ab},\ \text{ovvero sen}.ab=\frac{\cot.b}{\cot.ac}=\cot.b.\text{tang}.ac.$$

Dalla seconda

$$\cot.bc=\cos.b.\cot.ab,\ \text{ovvero}\ \cos.b=\frac{\cot.bc}{\cot.ab}=\cot.bc.\text{tang}.ab.$$

Dalla terza

$$\cos.c=\cos.ab.\text{sen}.b.$$

PROBLEMA V

Essendo dati due lati, ed un angolo opposto a uno di questi lati, per es. ab, bc, *ed* a, *trovare il resto.*

Costruzione.

Sopra di un circolo descritto con qualunque raggio AF si porti al solito il lato dato ab da A in B ed in B"; e condotta quindi la corda BB" e sopra di essa descritto il solito semicircolo, si faccia nel centro di esso l'angolo B''DH eguale all'angolo dato a, e si conduca la normale HE.

Risulta dalla *costruzione generale* ch'essendo AC, CB' gli altri due lati *ac, cb* del proposto triangolo, e l'angolo HLE eguale all'angolo c del medesimo, si avrà $EL = EG$, ed $HL = LP = B'G = \text{sen.}\, B'C = \text{sen.}\, bc$ relativamente al raggio AF. Se dunque si condurrà un diametro qualunque AU, e preso poi l'arco UX eguale al dato lato bc si condurrà la normale XZ, portando questa dal punto dato H in L, e quindi da L in P, si avrà $EP = EB'$, onde dal dato punto E preso per centro colla data apertura EP si potrà determinare il punto B' sul circolo ABUB''.

Trovati i punti L e B' si potranno aver subito in virtù della *Costruzione generale* tutte tre le parti incognite del triangolo abc, cioè gli angoli c, e b e il terzo lato ac. Imperocchè primieramente l'angolo HLE sarà l'angolo c. Condotta quindi la normale FGC, sarà AC il terzo lato ac; e finalmente prolungata la B'E in M, presa $AM' = AM$, condotta la B'M' che tagli la B''B in E', ed alzata la normale E'H', sarà B''H' ovvero l'angolo B''DH' il valore dell'angolo b.

Formola per il terzo lato ac

$$\text{Cos.}\, ac = \frac{\pm \text{cos.}\, ab \,.\, \text{cos.}\, bc - \text{sen.}\, ab \,.\, \text{cos.}\, a \,.\, \sqrt{\text{sen.}\, bc^2 - \text{sen.}\, ab^2 \,.\, \text{sen.}\, a^2}}{1 - \text{sen.}\, ab^2 \,.\, \text{sen.}\, a^2}.$$

Dimostrazione.

Fatto al solito il raggio $AF = 1$, si avrà $FD = \text{cos.}\, AB = \text{cos.}\, ab$, $DB = HD = \text{sen.}\, AB = \text{sen.}\, ab$, $FG = \text{cos.}\, B'C = \text{cos.}\, bc$, e $B'G = HL = \text{sen.}\, B'C = \text{sen.}\, bc$. Inoltre essendo HE il seno, ed ED il coseno dell'angolo HDL, cioè dell'angolo a relativamente al raggio $HD = \text{sen.}\, ab$, si avrà $HE = \text{sen.}\, ab \,.\, \text{sen.}\, a$, $ED = \text{sen.}\, ab \,.\, \text{cos.}\, a$. Quindi $EL = EG = \sqrt{HL^2 - HE^2} = \sqrt{\text{sen.}\, bc^2 - \text{sen.}\, ab^2 \,.\, \text{sen.}\, a^2}$, $EI = DE \,.\, \text{cos.}\, DEI = DE \,.\, \text{cos.}\, AC = DE \,.\, \text{cos.}\, ac = \text{sen.}\, ab \,.\, \text{cos.}\, a \,.\, \text{cos.}\, ac$; e $GI = EG + EI =$

$\sqrt{\text{sen}.\,bc^2 - \text{sen}.\,ab^2\,.\,\text{sen}.\,a^2} + \text{sen}.\,ab\,.\,\text{cos}.\,a\,.\,\text{cos}.\,ac$. Ma GI $=$ DK $=$ FD . sen. AC $=$ cos. ab . sen. ac. Si avrà dunque l' equazione

$$\text{cos}.\,ab.\,\text{sen}.\,ac = \sqrt{\text{sen}.\,bc^2 - \text{sen}.\,ab^2.\,\text{sen}.\,a^2} + \text{sen}.\,ab.\,\text{cos}.\,a.\,\text{cos}.\,ac.$$

Per maneggiarla più comodamente, scriviamo quest' equazione in quest' altro modo equivalente

$$\text{FD}\,.\,\text{sen}.\,ac = \text{EG} + \text{DE}\,.\,\text{cos}.\,ac$$

ed innalzandola al quadrato, mettendo poscia nel primo membro $1 - \text{cos}.\,ac^2$ invece di sen. ac^2, ed ordinando secondo le potenze di cos. ac, si avrà

$$\text{cos}.\,ac^2 + \frac{2\,\text{EG}\,.\,\text{DE}}{\text{DE}^2 + \text{FD}^2}\,.\,\text{cos}.\,ac = \frac{\text{FD}^2 - \text{EG}^2}{\text{DE}^2 + \text{FD}^2}, \text{ e quindi}$$

$$\text{cos}.\,ac = -\frac{\text{EG}\,.\,\text{DE}}{\text{DE}^2 + \text{FD}^2} \pm \sqrt{\frac{\text{EG}^2\,.\,\text{DE}^2}{(\text{DE}^2 + \text{FD}^2)^2} + \frac{\text{FD}^2 - \text{EG}^2}{\text{DE}^2 + \text{FD}^2}}$$

$$= -\frac{\text{EG}\,.\,\text{DE} \pm \sqrt{\text{DE}^2\,.\,\text{FD}^2 + \text{FD}^4 - \text{EG}^2\,.\,\text{FD}^2}}{\text{DE}^2 + \text{FD}^2}$$

$$= -\frac{\text{EG}\,.\,\text{DE} \pm \text{FD}\sqrt{\text{DE}^2 + \text{FD}^2 - \text{EG}^2}}{\text{DE}^2 + \text{FD}^2} =$$

(perchè nel quadrilatero birettangolo EDFG si ha $\text{DE}^2 + \text{FD}^2 = \text{EG}^2 + \text{FG}^2$, cioè $\text{DE}^2 + \text{FD}^2 - \text{EG}^2 = \text{FG}^2$) $-\dfrac{\text{EG}\,.\,\text{DE} \pm \text{FD}\,.\,\text{FG}}{\text{DE}^2 + \text{FD}^2}$, cioè ristabilendo i valori di sopra trovati di EG, DE, FD, FG

$$\text{cos}.\,ac = \frac{-\,\text{sen}.\,ab\,.\,\text{cos}.\,a\sqrt{\text{sen}.\,bc^2 - \text{sen}.\,ab^2\,.\,\text{sen}.\,a^2} \pm \text{cos}.\,ab\,.\,\text{cos}.\,bc}{\text{sen}.\,ab^2\,.\,\text{cos}.\,a^2 + \text{cos}.\,ab^2}$$

ossia perchè $\text{sen}.\,ab^2\,.\,\text{cos}.\,a^2 + \text{cos}.\,ab^2 = 1 - \text{sen}.\,ab^2\,.\,\text{sen}.\,a^2$

$$\text{cos}.\,ac = \frac{\pm\,\text{cos}.\,ab\,.\,\text{cos}.\,bc - \text{sen}.\,ab\,.\,\text{cos}.\,a\sqrt{\text{sen}.\,bc^2 - \text{sen}.\,ab^2\,.\,\text{sen}.\,a^2}}{1 - \text{sen}.\,ab^2\,.\,\text{sen}.\,a^2} \text{ C.C.D.D.}$$

FORMOLA PER L' ANGOLO COMPRESO b

$$\text{sen}.\,b = \frac{\text{cos}.\,a\,.\,\text{cos}.\,bc\,.\,\text{sen}.\,ab \pm \text{cos}.\,ab\sqrt{\text{sen}\ bc^2 - \text{sen}.\,a^2\,.\,\text{sen}.\,ab^2}}{\text{sen}.\,a\,.\,\text{sen}.\,bc\,.\,(\text{cot}.\,a^2 + \text{cos}.\,ab^2)}$$

DIMOSTRAZIONE.

Dalla formola dimostrata nel *Problema II*

$$\text{tang.}\,a = \frac{\text{sen.}\,b}{\text{cot.}\,cb\,.\,\text{sen.}\,ab - \text{cos.}\,ab\,.\,\text{cos.}\,b}$$

si deduce immediatamente

$$(\text{tang.}\,a\,.\,\text{cot.}\,bc\,.\,\text{sen.}\,ab - \text{sen.}\,b)^2 = \text{tang.}\,a^2\,.\,\text{cos.}\,ab^2\,.\,(1 - \text{sen.}\,b^2)$$

d'onde risolvendo un'equazione del secondo grado risulta

$$\text{sen.}\,b = \frac{\text{tang.}\,a\,.\,\text{cot.}\,bc\,.\,\text{sen.}\,ab \pm \text{tang.}\,a\,.\,\text{cos.}\,ab\sqrt{1 + \text{tang.}\,a^2\,.\,\text{cos.}\,ab^2 - \text{tang.}\,a^2\,.\,\text{sen.}\,ab^2\,.\,\text{cot.}\,bc^2}}{1 + \text{tang.}\,a^2\,.\,\text{cos.}\,ab^2}$$

ossia dividendo sopra e sotto per tang.a^2, e mettendo $\frac{\text{cos.}\,bc}{\text{sen.}\,bc}$ invece di cot.bc

$$\text{sen.}\,b = \frac{\text{cos.}\,a\,.\,\text{cos.}\,bc\,.\,\text{sen.}\,ab}{\text{sen.}\,a\,.\,\text{sen.}\,bc\,.\,(\text{cot.}\,a^2 + \text{cos.}\,ab^2)} \pm \frac{\text{cos.}\,ab\sqrt{\text{sen.}\,bc^2\,.\,\text{cot.}\,a^2 + \text{cos.}\,ab^2\,.\,\text{sen.}\,bc^2 - \text{sen.}\,ab^2\,.\,\text{cos.}\,bc^2}}{\text{sen.}\,bc\,.\,(\text{cot.}\,a^2 + \text{cos.}\,ab^2)}$$

cioè riducendo allo stesso denominatore

$$\text{sen.}\,b = \frac{\text{cos.}\,a\,.\,\text{cos.}\,bc\,.\,\text{sen.}\,ab \pm \text{cos.}\,ab\sqrt{\text{sen.}\,bc^2\,.\,\text{cos.}\,a^2 + \text{sen.}\,a^2\,.\,\text{cos.}\,ab^2\,.\,\text{sen.}\,bc^2 - \text{sen.}\,a^2\,.\,\text{sen.}\,ab^2\,.\,\text{cos.}\,bc^2}}{\text{sen.}\,a\,.\,\text{sen.}\,bc\,.\,(\text{cot.}\,a^2 + \text{cos.}\,ab^2)}$$

ossia perchè la quantità sotto il segno radicale, ponendo $1 - \text{sen.}\,a^2$ in luogo di $\text{cos.}\,a^2$, si riduce a $\text{sen.}\,bc^2 - \text{sen.}\,a^2 \times \text{sen.}\,ab^2$

$$\text{sen.}\,b = \frac{\text{cos.}\,a\,.\,\text{cos.}\,bc\,.\,\text{sen.}\,ab \pm \text{cos.}\,ab\sqrt{\text{sen.}\,bc^2 - \text{sen.}\,a^2\,.\,\text{sen.}\,ab^2}}{\text{sen.}\,a\,.\,\text{sen.}\,bc\,.\,(\text{cot.}\,a^2 + \text{cos.}\,ab^2)}\ \text{C.C.D.D.}$$

Formola per l'altro angolo opposto c

$$\text{sen.}\,c = \frac{\text{sen.}\,ab}{\text{sen.}\,bc}\,.\,\text{sen.}\,a$$

Dimostrazione.

Essendo, secondo che si è già più volte dimostrato, i seni de' lati proporzionali ai seni degli angoli opposti, si avrà sen.bc : sen.ab = sen.a : sen.c, epperò

$$\text{sen.}\,c = \frac{\text{sen.}\,ab}{\text{sen.}\,bc}\,.\,\text{sen.}\,a\ .\ \text{C.C.D.D.}$$

Corollario.

Se l'angolo dato a sarà retto, epperò sen.$a = 1$, cos.$a = 0$, cot.$a = 0$, le tre formole del Problema risolveranno il caso di un triangolo rettangolo, in cui essendo dati un lato ab, e l'ipotenusa bc, si cerchi qualunque delle altre tre parti. Darà pertanto la prima formola

$$\cos.ac = \frac{\cos.ab\,.\cos.bc}{1-\text{sen}.ab^2} = \frac{\cos.ab\,.\cos.bc}{\cos.ab^2} = \frac{\cos.bc}{\cos.ab}, \text{ ossia}$$

$$\cos.ac\,.\cos.ab = \cos.bc\,.$$

Si avrà dalla seconda

$$\text{sen}.b = \frac{\cos.ab\,.\sqrt{\text{sen}.bc^2 - \text{sen}.ab^2}}{\text{sen}.bc\,.\cos.ab^2} = \frac{\sqrt{\text{sen}.bc^2 - \text{sen}.ab^2}}{\text{sen}.bc\,.\cos.ab}, \text{ onde}$$

$$\cos.b = \sqrt{1-\text{sen}.b^2} = \frac{\sqrt{\text{sen}.bc^2\,.\cos.ab^2 - \text{sen}.bc^2 + \text{sen}.ab^2}}{\text{sen}.bc\,.\cos.ab} =$$

$$\frac{\sqrt{\text{sen}.ab^2 - \text{sen}.bc^2\,.\text{sen}.ab^2}}{\text{sen}.bc\,.\cos.ab} = \frac{\sqrt{\cos.bc^2\,.\text{sen}.ab^2}}{\text{sen}.bc\,.\cos.ab} = \frac{\cos.bc\,.\text{sen}.ab}{\text{sen}.bc\,.\cos.ab} =$$

$$\cot.bc\,.\text{tang}.ab\,.$$

E finalmente dalla terza si otterrà

$$\text{sen}.c = \frac{\text{sen}.ab}{\text{sen}.bc}, \text{ ossia } \text{sen}.c\,.\text{sen}.bc = \text{sen}.ab\,.$$

PROBLEMA VI

Essendo dati due angoli, ed un lato opposto ad uno di questi angoli, per es. a, c, *ed* ab, *trovare il resto.*

Costruzione.

Sopra di un circolo di un qualunque raggio AF si prenderà, come prima, l'arco AB=AB″=ab, e sopra la corda BB″ descritto un semicircolo, si prenderà in questo l'angolo B″DH=a, e si calerà la normale HE.

Formato quindi in H l'angolo EHL eguale al complemento di c, cosicchè sia HLE=c, e portata la HL da L in P, l'intersezione fatta dal centro E coll'intervallo EP, darà il punto B′ sul circolo ABUB″, come nel *Problema precedente*. Condotta pertanto la B′EM, e sopra di questa la normale FGC, gli archi AC, B′C saranno i valori di ac, bc. Si troverà infine l'angolo b, come nella *Costruzione* del *Problema precedente*.

FOR-

Formola per il lato ac

$$\cos.ac = \frac{-\operatorname{sen}.2a\,.\cos.c\,.\operatorname{sen}.ab \pm 2\,.\cot.ab\,.\sqrt{\operatorname{sen}.c^2 - \operatorname{sen}.ab^2\,.\operatorname{sen}.a^2}}{2\operatorname{sen}.c\,.\operatorname{sen}.ab\,.(\cos.a^2 + \cot.ab^2)}.$$

Dimostrazione.

Si dimostrerà primieramente, come nella prima formola del *Problema precedente* l'Equazione

$$FD\,.\operatorname{sen}.ac = EG + DE\,.\cos.ac$$

e da questa se ne dedurrà allo stesso modo l'altra

$$\cos.ac = \frac{-EG\,.DE \pm FD\sqrt{DE^2 + FD^2 - EG^2}}{DE^2 + FD^2}.$$

Ora si avrà pure, come nella citata formola del *Problema precedente* $FD = \cos.ab$, $DE = \operatorname{sen}.ab\,.\cos.a$, $HE = \operatorname{sen}.ab \times \operatorname{sen}.a$. Si avrà inoltre $\frac{HE}{EL} = \frac{\operatorname{sen}.ab\,.\operatorname{sen}.a}{EL} = \frac{\operatorname{sen}.c}{\cos.c}$, epperò $EL = EG = \frac{\operatorname{sen}.ab\,.\operatorname{sen}.a\,.\cos.c}{\operatorname{sen}.c}$. Sostituendo pertanto questi valori ne risulterà

$$\cos.ac = \frac{-\operatorname{sen}.ab^2.\operatorname{sen}.a.\cos.a.\cos.c \pm \cos.ab\sqrt{\operatorname{sen}.ab^2.\cos.a^2.\operatorname{sen}.c^2 + \cos.ab^2.\operatorname{sen}.c^2 - \operatorname{sen}.ab^2.\operatorname{sen}.a^2.\cos.c^2}}{\operatorname{sen}.c\,.(\operatorname{sen}.ab^2\,.\cos.a^2 + \cos.ab^2)}$$

cioè dividendo sopra e sotto per $\operatorname{sen}.ab$, e ponendo $\frac{1}{2}\operatorname{sen}.2a$ invece di $\operatorname{sen}.a\,.\cos.a$ nel primo termine del numeratore

$$\cos.ac = \frac{-\operatorname{sen}.2a.\cos.c.\operatorname{sen}.ab \pm 2\cot.ab\sqrt{\operatorname{sen}.ab^2.\cos.a^2.\operatorname{sen}.c^2 + \cos.ab^2.\operatorname{sen}.c^2 - \operatorname{sen}.ab^2.\operatorname{sen}.a^2.\cos.c^2}}{2\operatorname{sen}.c\,.\operatorname{sen}.ab\,.(\cos.a^2 + \cot.ab^2)}.$$

Ora la quantità sotto il segno radicale, ponendo $1 - \operatorname{sen}.a^2$ in luogo di $\cos.a^2$, facilmente si riduce a $\operatorname{sen}.c^2 - \operatorname{sen}.ab^2 \times \operatorname{sen}.a^2$. Dunque finalmente

$$\cos.ac = \frac{-\operatorname{sen}.2a\,.\cos.c\operatorname{sen}.ab \pm 2\cot.ab\sqrt{\operatorname{sen}.c^2 - \operatorname{sen}.ab^2\,.\operatorname{sen}.a^2}}{2\operatorname{sen}.c\,.\operatorname{sen}.ab\,.(\cos.a^2 + \cot.ab^2)}.\ \text{C.C.D.D.}$$

Formola per il terzo angolo b

$$\operatorname{Sen}.b = \frac{\cos.ab\,.\cos.c \pm \cos.a\sqrt{\cot.a^2 + \cos.ab^2}}{\cot.a^2 + \cos.ab^2}.$$

Dimostrazione.

Dalla formola dimostrata nel *Problema III*

$$\cos.ab = \frac{\cos.c + \cos.a\,.\,\cos.b}{\text{sen}.a\,.\,\text{sen}.b}$$

si deduce immediatamente

$$(\cos.ab\,.\,\text{sen}.a\,.\,\text{sen}.b - \cos.c)^2 = \cos.a^2(1 - \text{sen}.b^2),$$ e quindi

$$\text{sen}.b^2\,\frac{-2\cos.ab\,.\,\text{sen}.a\,.\,\cos.c}{\cos.a^2 + \cos.ab^2\,.\,\text{sen}.a^2}\,.\,\text{sen}.b = \frac{\cos.a^2 - \cos.c^2}{\cos.a^2 + \cos.ab^2\,.\,\text{sen}.a^2};$$ d'onde

$$\text{sen}.b = \frac{\cos.ab\,.\,\text{sen}.a\,.\,\cos.c \pm \cos.a\sqrt{\cos.a^2 + \cos.ab^2\,.\,\text{sen}.a^2}}{\cos.a^2 + \cos.ab^2\,.\,\text{sen}.a^2}$$

ossia dividendo sopra e sotto per sen. a

$$\text{sen}.b = \frac{\cos.ab\,.\,\cos.c \pm \cot.a\sqrt{\cot.a^2 + \cos.ab^2}}{\text{sen}.a\,.\,(\cot.a^2 + \cos.ab^2)}\,.$$ C.C.D.D.

Formola per l'altro lato opposto bc

$$\text{sen}.bc = \frac{\text{sen}.a}{\text{sen}.c}\,.\,\text{sen}.ab$$

Dimostrazione.

La formola nasce dalla proporzione già più volte dimostrata tra i seni degli angoli, e i seni de' lati opposti, cioè

$\text{sen}.c : \text{sen}.a = \text{sen}.ab : \text{sen}.bc$; d'onde

$$\text{sen}.bc = \frac{\text{sen}.a}{\text{sen}.c}\,.\,\text{sen}.ab$$. C.C.D.D.

Corollario I

Se l'angolo a sarà retto, facendo nelle precedenti formole $\text{sen}.a = 1$, $\text{sen}.2a = 0$, $\cos.a = 0$, $\cot.a = 0$, si avranno le formole per risolvere il caso di un triangolo rettangolo, in cui essendo dato un angolo c, e il lato opposto ab, si cerchi qualunque delle tre altre parti rimanenti.

Si avrà pertanto dalla prima

$$\text{cos.}\,ac = \frac{\text{cot.}\,ab\sqrt{\text{sen.}\,c^2 - \text{sen.}\,ab^2}}{\text{sen.}\,c\,.\,\text{sen.}\,ab\,.\,\text{cot.}\,ab^2} = \frac{\sqrt{\text{sen.}\,c^2 - \text{sen.}\,ab^2}}{\text{sen.}\,c\,.\,\text{cos.}\,ab},\ \text{e quindi}$$

$$\text{sen.}\,ac = \sqrt{1 - \text{cos.}\,ac^2} = \frac{\sqrt{\text{sen.}\,c^2\,.\,\text{cos.}\,ab^2 - \text{sen.}\,c^2 + \text{sen.}\,ab^2}}{\text{sen.}\,c\,.\,\text{cos.}\,ab} =$$

$$\frac{\sqrt{\text{sen.}\,ab^2 - \text{sen.}\,c^2\,.\,\text{sen.}\,ab^2}}{\text{sen.}\,c\,.\,\text{cos.}\,ab} = \frac{\sqrt{\text{sen.}\,ab^2\,.\,\text{cos.}\,c^2}}{\text{sen.}\,c\,.\,\text{cos.}\,ab} = \frac{\text{sen.}\,ab\,.\,\text{cos.}\,c}{\text{cos.}\,ab\,.\,\text{sen.}\,c} =$$

$\text{tang.}\,ab\,.\,\text{cot.}\,c$.

La seconda formola poi darà

$$\text{sen.}\,b = \frac{\text{cos.}\,ab\,.\,\text{cos.}\,c}{\text{cos.}\,ab^2} = \frac{\text{cos.}\,c}{\text{cos.}\,ab},\ \text{ossia sen.}\,b\,.\,\text{cos.}\,ab = \text{cos.}\,c.$$

E dalla terza finalmente si otterrà

$$\text{sen.}\,bc = \frac{\text{sen.}\,ab}{\text{sen.}\,c},\ \text{ossia sen.}\,ab = \text{sen.}\,c\,.\,\text{sen.}\,bc.$$

COROLLARIO II

Che se invece di a si supporrà retto l'angolo c, si avrà il caso di un triangolo rettangolo, in cui essendo data l'ipotenusa ab e un angolo adjacente a, si cerchi qualunque delle altre tre parti, e le formole per questo caso nasceranno da quelle del *Problema*, facendo in esse $\text{sen.}\,c = 1$, $\text{cos.}\,c = 0$.

La prima pertanto darà

$$\text{cos.}\,ac = \frac{\text{cot.}\,ab\sqrt{1 - \text{sen.}\,ab^2\,.\,\text{sen.}\,a^2}}{\text{sen.}\,ab\,.\,(\text{cos.}\,a^2 + \text{cot.}\,ab^2)},\ \text{e quindi}$$

$$\text{sen.}\,ac = \sqrt{1 - \text{cos.}\,ac^2} = \frac{\sqrt{\text{sen.}\,ab^2(\text{cos.}\,a^2 + \text{cot.}\,ab^2).(\text{cos.}\,a^2 + \text{cot.}\,ab^2) - \text{cot.}\,ab^2.(1 - \text{sen.}\,ab^2.\text{sen.}\,a^2)}}{\text{sen.}\,ab\,.\,(\text{cos.}\,a^2 + \text{cot.}\,ab^2)} =$$

$$\frac{\sqrt{(1 - \text{sen.}\,ab^2\,.\,\text{sen.}\,a^2)\,.\,(\text{cos.}\,a^2 + \text{cot.}\,ab^2) - \text{cot.}\,ab^2\,.\,(1 - \text{sen.}\,ab^2\,.\,\text{sen.}\,a^2)}}{\text{sen.}\,ab\,.\,(\text{cos.}\,a^2 + \text{cot.}\,ab^2)} =$$

$$\frac{\text{cos.}\,a\sqrt{1 - \text{sen.}\,ab^2\,.\,\text{sen.}\,a^2}}{\text{sen.}\,ab\,.\,(\text{cos.}\,a^2 + \text{cot.}\,a^2)};\ \text{d'onde}$$

$$\frac{\text{sen.}\,ac}{\text{cos.}\,ac} = \text{tang.}\,ac = \frac{\text{cos.}\,a}{\text{cot.}\,ab},\ \text{ossia cos.}\,a = \text{tang.}\,ac\,.\,\text{cot.}\,ab.$$

La seconda formola del *Problema* si convertirà poi in quest' altra

$\text{sen}.\,b = \frac{\text{cot}.\,a}{\sqrt{\text{cot}.\,a^2 + \text{cos}.\,ab^2}}$; e quindi $\text{cos}.\,b = \sqrt{1 - \text{sen}.\,b^2} = \frac{\text{cos}.\,ab}{\sqrt{\text{cot}.\,a^2 + \text{cos}.\,ab^2}}$; epperò

$\text{cot}.\,b = \frac{\text{cos}.b}{\text{sen}.b} = \frac{\text{cos}.\,ab}{\text{cot}.\,a}$, ossia $\text{cos}.\,ab = \text{cot}.\,a\,.\,\text{cot}.\,b$.

Finalmente dalla terza formola del *Problema* nascerà immediatamente

$$\text{sen}.\,bc = \text{sen}.\,a\,.\,\text{sen}.\,ab\,.$$

Benchè le formole dimostrate per i casi esaminati ne' due ultimi *Problemi* sieno alquanto complicate e d'incomodo maneggio, sono però altrettanto semplici quelle che se ne sono dedotte per i triangoli rettangoli ne' casi analoghi e simiglianti. Se si vorrà far uso di queste piuttosto che di quelle, anche ne' triangoli obbliquangoli, bisognerà ricorrere al consueto artificio di risolvere questi triangoli in due rettangoli con un arco normale condotto da un' estremità di un dato lato sopra il lato opposto, ed adjacente ad un angolo dato. Così nel *Problema V* in cui eran dati i lati ab, bc, e un angolo opposto a, s' intenderà condotto l'arco normale bd, ed allora nel triangolo rettangolo adb avendosi l' ipotenusa ab, e l'angolo adjacente a colle formole del *Coroll. II del Problema VI*, si troveranno tutte le altre parti, cioè ad, bd ed abd. Passando quindi all' altro triangolo rettangolo bdc in cui ora si conosce l' ipotenusa bc e un lato bd, si potranno in esso, per mezzo delle formole del *Coroll. del Problema V* determinare dc che aggiunto ad ad già trovato farà conoscere il lato ac, dbc che insieme con abd già trovato farà conoscer l'angolo abc, e finalmente l'angolo c. Similmente per il caso del *Problema VI* in cui suppongonsi dati gli angoli a, c ed un lato opposto ab, si comincierà dal risolvere il triangolo rettangolo adb per mezzo delle formole del *Cor. II del Problema VI*, per quindi passare colle formole del *Cor. I* dello stesso *Problema* alla risoluzione dell' altro triangolo rettangolo bdc, in cui ora sarà dato l'angolo c e il lato opposto bd.

Riassumendo le formole per la risoluzione de' triangoli rettangoli tutte facilmente dedotte ne' Corollarj de' precedenti Problemi dalle formole generali de' triangoli obbliquangoli, si verrà a formare quella dimostrazione, che sembra sia la sola che possa aversi, della celebre *Regola Neperiana*, che per comodo della memoria e dell'uso tutte quelle formole pe' triangoli rettangoli comprende nella seguente generale enunciazione. Non considerando l'angolo retto, allorchè in un triangolo rettangolo per mezzo di due parti date si cerca una qualunque delle rimanenti, le tre parti in questione, cioè le due date, e l'incognita saran sempre talmente disposte, che due di esse rispetto alla terza, che potrà chiamarsi *parte media*, o saranno a questa immediatamente contigue, nel qual caso si diranno *congiunte*, o ne saranno separate da una intermedia, nel qual caso si chiameranno *disgiunte*, non facendo più verun conto, come si disse, dell'angolo retto. Ora invece de' lati che formano l'angolo retto, surrogando i loro complementi, tutte le formole per la risoluzione di tutti i capi de' triangoli rettangoli furono felicemente comprese da *Nepero* nella seguente semplicissima regola: *Il prodotto del raggio per il Coseno della parte* media *è eguale a quello delle Cotangenti delle* parti congiunte, *ovvero a quello de' Seni delle* parti disgiunte. Aspettando che si trovi la dimostrazione generale di questo Teorema, che non si è ancor trovata, desso si potrà verificare, e dimostrare in ogni caso particolare per mezzo delle formole dimostrate ne' Corollarj de' Problemi precedenti. Così se per es. nel triangolo bac rettangolo in a sieno dati i lati ab, ac e si cerchi b, sarà ab *parte media*, ac e b *parti congiunte*, epperò prendendo in luogo di ab, ac i loro complementi, e supposto il raggio $= 1$ si avrà a tenore della *Regola Neperiana*

$$\text{sen.}\,ab = \text{tang.}\,ac\,.\,\text{cot.}\,b\text{, e quindi cot.}\,b = \frac{\text{sen.}\,ab}{\text{tang.}\,ac},$$

come appunto si trovò nell'ultima formola del *Corollario del Problema II*. Lo stesso consenso tra le formole da Noi dimostrate, e la *Regola Neperiana* si proverà allo stesso modo in tutti gli altri casi.

Dipartendosi adunque dal metodo comunemente seguito, abbiam fatta discendere la risoluzione de' triangoli rettangoli da quella degli obbliquangoli, cioè abbiam dedotta la risoluzione de' Casi particolari da quella de' Casi generali. Per compire quest' inversione, o piuttosto ristabilimento di ordine naturale, manca solo che, siccome nel comun metodo alla risoluzione de' triangoli rettangoli ed obbliquangoli si premette la dimostrazione di alcune proprietà de' triangoli sferici, delle quali si fa uso nella risoluzione medesima, così Noi per lo contrario deduciamo le dimostrazioni di alcune di queste proprietà dalle premesse risoluzioni. Noi lo faremo brevemente ne' seguenti Teoremi.

TEOREMA I. *Se avendosi un qualunque Triangolo sferico* abc, *un altro se ne intenda formato* $\alpha\beta\gamma$ *con tre lati* $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$, $\alpha\beta$ *eguali rispettivamente ai supplementi dei tre angoli del primo* a, b, c, *saranno reciprocamente i tre lati di questo* bc, ac, ab *rispettivamente eguali ai supplementi degli angoli del secondo* α, β, γ.

DIMOSTRAZIONE. Si avrà dalle formole del *Problema I*

$$\cos.\,\alpha = \frac{\cos.\,\beta\gamma - \cos.\,\alpha\gamma\,.\,\cos.\,\alpha\beta}{\mathrm{sen}.\,\alpha\gamma\,.\,\mathrm{sen}.\,\alpha\beta}.$$

Ma supponendosi $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$, $\alpha\beta$ eguali ai supplementi a due retti di a, b, c, saranno i coseni di quelli eguali ai coseni negativi di questi, e i seni eguali ai seni. Si avrà dunque

$$\cos.\,\alpha = \frac{-\cos.\,a - \cos.\,b\,.\,\cos.\,c}{\mathrm{sen}.\,b\,.\,\mathrm{sen}.\,c} = -\left(\frac{\cos.\,a + \cos.\,b\,.\,\cos.\,c}{\mathrm{sen}.\,b\,.\,\mathrm{sen}.\,c}\right) =$$

(per le formole del *Problema III*) $-\cos.\,bc$.

Dunque bc è eguale al supplemento di α; e lo stesso si dimostrerà allo stesso modo di ac, ab, rispetto a β, e γ. C.C.D.D.

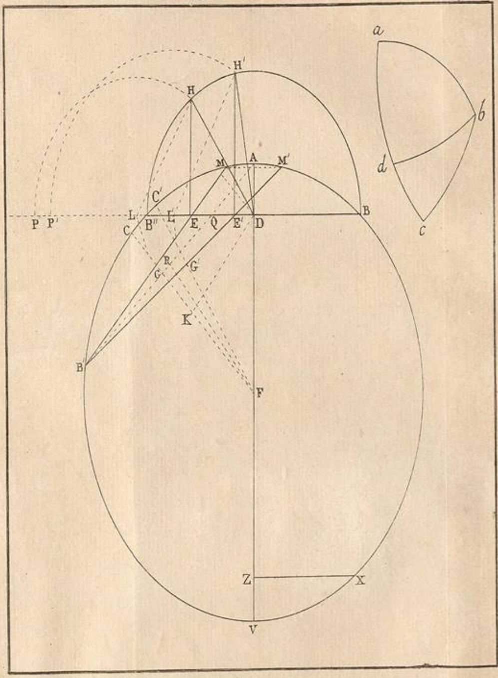
I triangoli abc, $\alpha\beta\gamma$ si chiamano per questa ragione *supplementarj* l'uno dell'altro; ed è evidente che si potrà sempre considerar l'uno invece dell'altro, poichè conoscendosi le parti dell'uno, quelle dell'altro saranno pur conosciute.

Quindi per mezzo di questo triangolo *supplementario*, i sei casi considerati ne' sei precedenti Problemi, possono ridursi a soli tre, ognun de' quali colle medesime formole potrà risolverne due. Così per es. se saran dati i tre angoli a, b, c, e si cerchino i lati bc, ac, ab, come nel *Problema III*, senza cercare nuove formole per questo caso, basterà risolvere colle formole del *Problema I* il triangolo *supplementario* $\alpha\beta\gamma$ in cui son dati i lati, e si cercan gli angoli, poichè queste formole daranno immediatamente quelle de' cercati lati bc, ac, ab, solo che in luogo de' lati $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$, $\alpha\beta$ si surroghino gli angoli a, b, c, e viceversa in luogo degli angoli α, β, γ si mettano i lati bc, ac, ab, mutando il segno ai coseni, e lasciando tal quale quello de' seni. Allo stesso modo il caso esaminato nel *Problema IV* in cui essendo dati gli angoli a e b e il lato intercetto ab si cercano le altre parti, si potrà trasportarlo al triangolo *supplementario* $\alpha\beta\gamma$, in cui saran dati $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ e l'angolo compreso γ, e risolverlo perciò colle formole del *Problema II*; e finalmente il caso del *Problema VI* in cui essendo dati due angoli a, c e un lato opposto ab si cerca il resto, si potrà risolvere colle stesse formole del *Problema V* considerandolo nel triangolo supplementario, in cui, come nel *Problema V*, saran dati i lati $\beta\gamma$, $\alpha\beta$ e un angolo opposto γ.

Teorema II. *In qualunque Triangolo Sferico rettangolo si ha la proporzione:* Il raggio al seno dell' Ipotenusa, come il seno di uno de' due angoli al seno del lato opposto.

Dimostrazione. Discende immediatamente la dimostrazione di questo Teorema da quella proporzione che abbiam più volte dimostrata nel corso de' precedenti Problemi tra i seni degli angoli, e i seni degli opposti lati. La medesima dimostrazione ci viene anche esibita dalla terza formola del *Coroll. I*, e dalla terza formola del *Coroll. II del Problema VI*, nel primo de' quali si supponea retto l'angolo a, e nella seconda l'angolo c; poichè la prima dava

$$\text{sen}.ba = \text{sen}.c\,.\,\text{sen}.bc\text{, cioè } 1 : \text{sen}.bc = \text{sen}.c : \text{sen}.ab$$


a
b
d
c
H'
H
M
A
M'
C'
L'
L
P
P'
C
B''
E
Q
E'
D
B
R
G'
G
K
B'
F
Z
X
V

e la seconda

$\text{sen}.bc = \text{sen}.a.\text{sen}.ab$, cioè $1:\text{sen}.ab = \text{sen}.a:\text{sen}.bc$

che rinchiudono appunto la proporzione enunciata nel Teorema. C.C.D.D.

TEOREMA III. *In ogni Triangolo Sferico rettangolo si ha la proporzione:* Il raggio al seno di uno de' due lati attorno l'angolo retto, come la tangente dell'angolo adjacente a questo lato alla tangente del lato opposto.

DIMOSTRAZIONE. Rinchiudono appunto l'enunciata proporzione le ultime due formole del *Coroll. del Problema II* in cui supponeasi retto l'angolo a, cioè

$\text{sen}.ac = \text{tang}.ab.\text{cot}.c$, ovvero $\text{sen}.ac.\text{tang}.c = \text{tang}.ab$

$\text{sen}.ab = \text{tang}.ac.\text{cot}.b$, ossia $\text{sen}.ab.\text{tang}.b = \text{tang}.ac$. C.C.D.D.

I due precedenti Teoremi sono d'altronde, com'è manifesto, compresi nella generale enunciazione della *Regola Neperiana*.

TEOREMA IV. *In ogni Triangolo Sferico rettangolo gli altri due angoli sono della medesima specie dei lati opposti, e viceversa, cioè o entrambi insieme* maggiori, *o entrambi insieme* minori *di* 90°.

DIMOSTRAZIONE. Supponendosi retto l'angolo a, dalle due ultime formole del *Corollario del Problema III* si ha

$$\cos.ac.\text{sen}.c = \cos.b;\ \cos.ab.\text{sen}.b = \cos.c$$

onde essendo necessariamente positivi $\text{sen}.c$ e $\text{sen}.b$, $\cos.b$ e $\cos.c$ saranno positivi, o negativi, cioè b e c saranno minori, o maggiori di 90°, secondo che saranno positivi, o negativi $\cos.ac$, $\cos.ab$, cioè minori, o maggiori di 90° i lati opposti ac, ab. C.C.D.D.

TEOREMA V. *In un Triangolo Sferico rettangolo se i due lati che forman l'angolo retto saranno della medesima specie, cioè o entrambi maggiori o entrambi minori di* 90°, *l'ipotenusa sarà minore di* 90°, *e sarà questa maggiore di* 90° *se i due lati che forman l'angolo retto saranno di specie diversa, cioè uno maggiore e l'altro minore di* 90°; *e viceversa*.

DIMO-

Dimostrazione. Supponendo al solito retto l'angolo a, la prima formola del *Corollario del Problema II* dà

$$\cos. bc = \cos. ab \,.\, \cos. ac$$

onde se $\cos. ab$, $\cos. ac$ saran tutti due positivi o tutti due negativi, cioè se ab, ac saran tutti due minori o tutti due maggiori di 90°, $\cos. bc$ sarà sempre positivo, cioè bc sarà minore di 90°; ma se $\cos. ab$, $\cos. ac$ saranno uno positivo e l'altro negativo, cioè ab, ac uno minore e l'altro maggiore di 90°, $\cos. bc$ sarà sempre negativo, cioè bc maggiore di 90°. Allo stesso modo si dimostrerà la proposizione inversa. C.C.D.D.

Ma ponghiam qui fine, giacchè in un argomento elementare, come questo, siam già stati forse soverchiamente lunghi.