ANALISI E SOLUZIONE SPERIMENTALE DEL PROBLEMA DELLE PRESSIONI

Del Signor Paolo Delanges.

Ricevuta li 8 *Marzo* 1810.

INTRODUZIONE.

A chiunque legge gli Atti di questa scientifica Società, sembrerà certamente, che l'Italia siasi determinata di dare la soluzione, o di mostrarne l'impossibilità, d'una tra le più ardue questioni che alla statica de' solidi appartengono, e cui può in questi termini enunciarsi. " Giacendo un corpo con piedi ad „ esso annessi sul piano soggetto, o sopra sostegni di cui le „ estremità sieno nello stesso piano; trovare la pressione, ossia la parte del peso di detto corpo che gravita sopra ciascu„ no de' punti nel primo caso, o degli appoggi nel secon„ do „. Ognun poi intende che l'essenza del problema consiste nelle due supposizioni " I.° che la sodezza degli appoggi de„ ve esser tale da sostenere almeno ciascuno da per sè anche „ l'intero peso del corpo, II.° e che esser deve la sua rigi„ dezza tale che inflessibili rimangano le sue parti che spor„ gessero fuori degli appoggi per l'azione del peso ad esse „ spettante „. Qualunque però sia il risultato delle serie applicazioni fatte sì da' passati che da' presenti Geometri intorno a così interessante e famoso problema, convenir è duopo, che quantunque non fossero compiutamente riusciti nell' intento loro, le immaginate ipotesi ed i lumi sparsi da essi, inutili non debbono reputarsi per chi di nuovo ne volesse tentare l'impresa. Innanzi pertanto di esporre ora gli studj che su questo particolare io ripigliai colla scorta dell'esperienza, in quanto può esserne esso sottoposto, mi credei in dovere di richiamare qui le obbiezioni che sono state fatte a quelli che ho già pubblicati, manifestando con ingenuità la mia persuasione per quelle che mi convinsero; e di rappresentare nello stesso tempo pure succintamente i metodi proposti e le opinioni degli illustri Autori che sull'argomento stesso trattarono, il che feci osservando per ogni riguardo l'epoca de'loro scritti, onde trarre e raccogliere tutte quelle nozioni che mi comparvero utili a maggiormente dilucidarlo .

§. I

Dal primo istante ch'io rivolsi la mente a siffatta questione, ho pensato, come tuttavia sono di parere che se " sieno quanti si vogliano i piedi co'quali un corpo giace " sopra un piano immobile ed orizzontale, o sostenuto venga da appoggi di cui le estremità situate sieno nello stesso piano, la pressione sofferta da ciascun punto dipender " deggia dalla posizione respettiva che ha verso gli altri, e " verso il centro di gravità del corpo; come appunto avviene se è sostenuto in equilibrio da un solo sottoposto al " detto centro, ovvero combinato coll'azione d'una potenza " che agisca in direzione contraria a quella della gravità; o " da due appoggi ad esso sottoposti (Tom. V Società Italiana delle Scienze) "; e quindi seguendo questa massima condussi rette linee dai punti d'appoggio al centro di gravità del corpo, riducendo il problema a quello d'un vette di tre, quattro ec. braccia o rami, ed avendo ottenuto un risultamento determinato pel caso dei tre appoggi in triangolo, col supporre tre istantanee rotazioni intorno ai tre assi menati perpendicolarmente ai tre rami, e coll'instituire le tre equazioni proprie del principio meccanico de'momenti o delle minime azioni; passai alla soluzione del caso dei quattro appoggi, come si vede nella citata mia Memoria al problema II, in cui, chiamando qui quella figura IX col numero I, essendo G il centro di gravità del corpo che riposa con quattro piedi ne' punti A B C M sul piano soggetto, trasformai il problema in quello del vette a quattro braccia che denominai AG $= a$, BG $= b$, CG $= c$, MG $= d$, alle cui estremità condotti ad angoli retti gli assi RAI, DBE, FCP, ZMQ, calai ad essi le perpendicolari, nominandole come segue, AD$=f$, AH$=g$, AQ$=\vartheta$, BI$=h$, BF$=l$, BZ$=\lambda$, CE$=m$, CL$=n$, CS$=\gamma$, MR$=p$, MN$=q$, MP $=\varpi$. Fatto ciò instituii le quattro equazioni (1) (2) (3) (4)

$$(1) \ldots\ldots \mathrm{A}g + \mathrm{B}l + \mathrm{M}\varpi = \mathrm{G}c$$
$$(2) \ldots\ldots \mathrm{A}\vartheta + \mathrm{B}\lambda + \mathrm{C}\gamma = \mathrm{G}d$$
$$(3) \ldots\ldots \mathrm{A}f + \mathrm{C}m + \mathrm{M}q = \mathrm{G}b$$
$$(4) \ldots\ldots \mathrm{B}h + \mathrm{C}n + \mathrm{M}p = \mathrm{G}a$$

convenienti ai detti quattro assi di rotazione, dalle quali dedussi le formole esprimenti le pressioni sentite da ciascuno de' quattro appoggi. Cotali formole aveano per comune denominatore

$$(h\vartheta\varpi + gp\lambda - lp\vartheta)(m+q) + f\varpi(n\lambda - h\gamma) + flp\gamma$$

ed il numeratore per esempio della frazione che deffiniva la pressione in A, era

$$(dh\varpi + cp\lambda - a\varpi\lambda - lpd)(m+q) + b\varpi(n\lambda - b\gamma) + blp\gamma.$$

Non riferisco le altre tre formole, perchè ciò non abbisogna.

§. II

Nel successivo Tomo VI trattò il Sig. *Paoli* da grande Geometra questo problema, e convertendolo in quello di cercare le forze necessarie a rattenere un piano orizzontale in equilibrio aggravato in un dato punto da un dato peso, mediante tre, quattro forze ec., applicate a tre, quattro punti ec. dati di posizione sul piano stesso, e che agiscano in direzione opposta a quella della gravità, stabilisce, che una delle equazioni per la soluzione del problema sia quella che dà il principio meccanico delle velocità virtuali o istantanee, per impedire al piano suddetto il movimento di discesa, cioè, che

la somma delle forze sostenenti, eguagliar deve il peso che lo aggrava nel fissato punto; e col supporre poscia due istantanee rotazioni del dato sistema intorno a due arbitrarj assi, deduce pel principio de' momenti altre due equazioni conchiudendo (pag. 538, Tom. cit.) che se tali tre equazioni soltanto " avranno luogo, sarà impedito al piano qualunque
„ moto progressivo e di rotazione, e quindi egli sarà in equi-
„ librio „. Siccome poi, com' ei dice (pag. 539, Tom. cit.)
„ i principj della meccanica non ci danno per determinare
„ le pressioni esercitate da varj appoggi di un corpo che *le*
„ *tre suddette equazioni*, ne segue che il problema si potrà
„ risolvere quando tre sono gli appoggi, ma resterà indeter-
„ minato, quando il numero degli appoggi è maggiore „.
O per meglio dire, conchiude il prelodato Autore (pagine 536, 537, Tom. cit.), che il problema " è indeterminato
„ quando gli appoggi sono più di tre, o quando gli appoggi
„ sono in linea retta; e nel caso dei tre appoggi non in di-
„ ritto che le soluzioni de' Signori *Euler*, *Bossut*, e *Delanges*
„ sono esatte, e son comprese tra le infinite soluzioni che
„ si possono dare di questo problema differenti di aspetto,
„ ma in sostanza conformi „.

§. III

Ma avendo io considerato in seguito nella seconda mia Memoria (Tom. VIII, P. I), che coll' ipotesi del Sig. *Paoli* trasmutasi il problema degli appoggi nell' inverso problema di trovare, cioè, dato il centro di gravità, e la somma d' un sistema di corpi, il peso di ciascuno di essi, oppure, data la resultante d' un sistema di forze verticali, il valore di ciascuna di esse, data già essendo sì nel primo, che nel secondo caso, la posizione respettiva de' corpi, o delle forze componenti il proposto sistema: e fermo io altronde che nel problema degli appoggi devesi riguardare il corpo non già sostenuto, ma con piedi ad esso annessi poggiato sopra un piano immobile ed orizzontale, ovvero giacente sulle sommità esistenti in un piano orizzontale di sostegni inconcussi che sorgono dal piano sottoposto; intrapresi nella summentovata Memoria a trattare l'enunciato statico problema inverso, e mi lusingo di avere geometricamente dimostrato, che nell' unico caso della ricerca delle tre forze in triangolo, data la resultante, il detto problema è determinato, non differendo perciò da quello degli appoggi; e che appunto a questa combinazione voluta, dirò così, dalla natura, è da attribuirsi l'identità de' resultati della soluzione *Euleriana*, nella quale ammette esser sufficiente, per ottenere l'equilibrio nel dato Sistema, l'istituzione di due equazioni dipendenti da due rotazioni di esso intorno a due arbitrarj assi, dovendosi assumere per terza quella della somma delle pressioni; e dell'altra proposta dal sommo Geometra Sig. *Bossut* fondata sulla teoría del centro di gravità, con quelli che dalla mia si ricavano, senza introdurre l'equazione della somma predetta, dando spontaneamente la teoría de' momenti, applicata nel modo da me indicato, le tre equazioni necessarie alla soluzione determinata del problema.

§. IV

Non ostante ciò giudicai opportuno per confermare il mio metodo d'imprendere un'applicazione pratica delle formole che avea trovate pel caso dei quattro appoggi agli angoli d'un trapezio, come riscontrasi nella sunnominata Memoria, ed essendomi comparsi valori determinati per le pressioni su i quattro appoggi, e che insieme presi eguagliavano il peso totale del corpo supposto, mi parve in tal guisa di avere compiutamente sciolta l'agitata questione; quando ecco, che nel Tom. IX il Sig. *Paoli*, immutabile nella già spiegata sua massima ripete, che " in luogo di cercar le pressio„ ni esercitate sopra i punti di appoggio da un corpo soste„ nuto sopra un piano immobile „ possano sostituirsi " alle

„ pressioni ne' punti d'appoggio delle forze attive in senso „ contrario „ e cercare " l'equilibrio di un piano mobile spin- „ to da una parte da queste forze attive, e dall'altra dal „ peso del corpo „ nè trovando errore nel calcolo dell'assunto mio esempio, prese il lodevole partito di esaminare la riduzione delle quattro equazioni primitive dalla mia ipotesi somministrate, e quindi conobbe; che a me " era occorso uno sbaglio nelle formole generali „ danti i valori delle ricercate pressioni, nella prima mia Memoria (Tom. V), cioè " che il denominatore comune ai valori delle quattro pres- „ sioni, è il seguente

$$(h\delta\varpi + gp\lambda - lp\delta)\,m + (ghy + ln\delta - gn\lambda)\,q + f\varpi(n\lambda - hy) + flp\varkappa$$

„ e che il numeratore, per esempio, della formola che as- „ segna la pressione sul punto A, deve essere

$$(dh\varpi + cp\lambda - a\lambda\varpi - dlp)\,m + (dln + ch\varkappa - cn\lambda - al\varkappa)\,q$$
$$+ b\varpi(n\lambda - h\varkappa) + blp\varkappa\,.$$

E così è certamente. Le variazioni che passano tra queste e le espressioni date da me al §. I si rilevano con il semplice confronto.

§. V

Il palesato errore in cui io sono incorso, avvertiti ci rende di non doversi fidare, che esatto sia il calcolo da cui una formola viene dedotta, quantunque presenti essa risultati ragionevoli in alcune sue particolari applicazioni. In fatti è forse irragionevole il risultato che dà le mie formole, che eguali sieno le pressioni sopra i quattro appoggi nella circostanza che sieno disposti agli angoli d'un quadrato, o d'un parallelogrammo qualunque, nel di cui centro cada il centro di gravità del corpo? Poteva io dubitare della verità di esse quando in una data posizione irregolare degli appoggi, mi presentarono quattro valori distinti, determinati, e di cui la somma pareggiava il peso intero del corpo? È osservabile però, che se le formole in questione corrette, come trovò il

Sig. *Paoli*, ne' due casi indicati, danno valori della forma $\frac{0}{0}$, cioè indeterminati, concorrono nullameno colle surrogazioni di $a=\frac{1}{4}(h+n+p)$, $b=\frac{1}{4}(f+m+q)$, $c=\frac{1}{4}(g+l+\omega)$, e $d=\frac{1}{4}(\delta+\lambda+\gamma)$ convenienti al noto teorema *Guldiniano*, a comprovare il teorema II, che dimostrai nella già accennata prima mia Memoria (Tom. V), cioè, che " Qualunque sia il „ numero de' punti di appoggio, se il punto in cui cade nel „ piano di essi la verticale che passa pel centro di gravità „ del corpo, è centro di gravità di supposti pesi uguali col- „ locati ne' punti medesimi, gli appoggi sono aggravati ugual- „ mente „. Riservandomi di parlare sul caso degli appoggi situati in direzione rettilinea, ricorderò qui, come merita d'essere ricordato, che dopo l'esame che fece il Sig. *Paoli* de' miei e degli studj altrui, come si vedrà in seguito, convenne pure col parere de' sommi Geometri *Euler*, *d' Alembert*, e *Bossut*, esprimendosi così " dopo i varj tentativi che „ sono stati fatti per risolvere il problema degli appoggi mi „ confermo sempre più nella mia opinione; che, finchè non „ sarà scoperto qualche nuovo principio di statica, quelli che „ finora si conoscono, saranno insufficienti a determinare le „ pressioni sofferte da più di tre appoggi, a meno che non „ si unisca ad essi qualche particolare supposizione „.

§. VI

Nel Tomo VII havvi la Memoria col titolo *Dell' azione d'un corpo retto da un piano* ec. del Sig. Cav. *Lorgna*. Conchiusi io (Tom. VIII P. I), che siccome il metodo da questo Autore proposto, tirate a cagion d'esempio le diagonali AC, BM (*Fig. II*) nel trapezio ABCM " ai di cui angoli stanno „ disposti quattro appoggi A, B, C, M, e supposto cadere „ il centro di gravità G del corpo dentro i due triangoli „ ABM, ACM „ conduce al concreto risultato " che l'appog- „ gio B soffre la metà della pressione, che soffrirebbe se so- „ stenuto fosse il corpo dai tre soli appoggi A, B, M; l'ap-

„ poggio

„ poggio C la metà di quella, se sostenuto fosse dai tre soli „ A, C, M; e che la pressione sull'appoggio A è la metà „ delle due pressioni che porterebbe negli accennati due ca- „ si, e così quella dell'appoggio M „ conchiusi dico " che „ per non giudicare arbitraria l'enunciata distribuzione del „ peso del corpo su i quattro appoggi, bisogna dimostrare „ il teorema, o che l'ipotesi da cui esso immediatamente ne „ deriva, convenga al problema da risolversi „. Il Sig. *Paoli* non esitò di dire (Tom. IX) che " la soluzione del Cavalier „ *Lorgna* è appoggiata ad una ipotesi così capricciosa, che „ sembra impossibile sia per essere da alcuno abbracciata „. Nel suddetto Tomo VIII, P. II si legge la Memoria del Sig. *Malfatti* " Tentativo sul problema delle pressioni ec. „. Sono degne d'un eccellente Geometra le osservazioni che fece lo stesso Sig. *Paoli* anche sul metodo immaginato da questo Autore, dimostrando come può vedersi nel sopra citato Tomo IX, che si ottiene con esso una soluzione " che non oltrepassa di molto i confini di una ipotesi ingegnosa „.

§. VII

È decorato il Tomo X, P. II della pregevole, non dirò Memoria, ma Opera, e che giustamente porta il titolo " I principj della Meccanica richiamati alla massima semplicità ed evidenza „ del chiarissimo Collega Sig. *Ferroni* in cui riluce e il suo genio veramente geometrico nell'agitare le più sublimi questioni fisico-matematiche, ed insieme la vastissima sua scientifica erudizione. In siffatta Opera pertanto nell'applicare il prelodato Autore i suoi principj a parecchi difficili problemi meccanici, non dimentica anche quello degli appoggi, ed è suo sentimento, che per arrivare alla completa ed esatta soluzione di esso, necessario sia il soddisfare alle condizioni " pag. 574, 1.ª che la *somma* delle pressioni di tut- „ ti insieme gli *appoggi* equivalga precisamente alla forza „ unica da sostenersi; 2.ª che rimanga ad un tempo elimi-

„ nata e distrutta ogni *tendenza* del sistema alla rotazione; „ 3.^{a} che dal *centro delle medie distanze* d'un sistema qualunque di punti si propaghi sopra i medesimi con eguale „ scompartimento la forza che in esso risieda ec. „. Quindi *inammissibile* riguarda " la maniera ideata da *Lorgna* de' due „ sistemi *attivo* ed *inoperante* d'ogni ternario d'appoggi per „ la falsità del principio „ . . . . . " che gli appoggi medesimi „ tutti insieme sostengano una forza maggiore della premen- „ te, e che poi con un' *ipotetica* regola di proporzione deb- „ ba ridursi alla rigorosa eguaglianza „. Dimostra *redarguibile il piano Malfatti* perchè " dipendente da un' analogìa „ non abbastanza provata, e più pel motivo ch' esso repu- „ gna „ alla terza delle riferite condizioni; il che conferma coll' esaminare i risultati singolarmente del caso in cui esistano gli appoggi agli angoli del Romboide, o del Rombo; ed è consona la di lui conclusione sopra tale metodo a quella del Sig. *Paoli* (§. VI), vale a dire " che incerto egli sia „ il cammino *retrogrado* per via di vetti, aperto in sequela „ della nuda analogìa del triangolo „ pag. 576. Così stessamente conviene che il Sig. *Paoli* abbia (Tom. VI) " vitto- „ riosamente provata insussistente, e scevra d' incongruenza „ nel caso unico dei tre appoggi in triangolo „ l' ipotesi *Euleriana* ec.; e lodando in ultimo assai più di quello meritano i miei studj intorno, com' egli con fondamento dice " a quest' oscuro ed astruso problema „ . . . . . è persuaso, ch' io debba convenire " giusta i rilievi esatti di *Paoli*, 1.° che „ il problema del quale si tratta, altro non sia che un' equi- „ librazione di forze; 2.° che in conto di queste forze deb- „ bano annoverarsi le *reazioni* degli *appoggi* „ da me " con- „ cesse in principio, e dipoi ritrattate; 3.° che due soli as- „ si di rotazione s' abbiano da contemplare a piacimento in „ un piano per l' egualità dei *momenti*, poichè introducendo- „ ne altri, l' equazioni nuove che si ottenessero per satisfare „ alle *condizioni* dell' equilibrio, non sarebbero *indipendenti*, „ ma *identiche* colle prime, siccom' è teorìa già fissata, non

„ che dalla Statica, dalla Geometrìa elementare „. Io non ho giammai dubitato che il problema degli appoggi non sia, parlando in senso astratto, un problema di *equilibrazione di forze*, ma ho sostenuto, che la di lui condizione è ben diversa da quella del problema notissimo di un sistema di forze agenti in direzione verticale, cui è di natura sua indeterminato, eccettuato il caso dei tre appoggi in triangolo (§. III). Confesso pure che nell' occasione di trattare nuovamente la soluzione del caso degli appoggi in linea retta (Tom. VIII, P. I), conobbi, che per convenientemente usare il principio de' momenti, o delle minime azioni, onde mantenere il problema generale degli appoggi nella sua naturale condizione (§. III) essere duopo piuttosto, che supporre le istantanee rotazioni provenienti dalle rotazioni istantanee degli appoggi, il supporle relativamente all' istantanea cessione del centro di gravità del corpo, considerando sempre che ogn' uno di essi faccia a vicenda la funzione di centro del moto. Per reputare poscia certo il terzo su rapportato precetto, bisognerebbe che assurda riuscita fosse la mia soluzione per i tre appoggi in triangolo, perchè fondata sopra tre, e non due soli assi di rotazione; ma essendo essa difesa da geometrica dimostrazione, non può perciò asserirsi che la comune accennata teorìa, che vale per l' *equilibrazione* d'un sistema di forze verticali, valga insieme per determinare le pressioni in un sistema di appoggi generalmente.

§. VIII

Sugli esami fatti degli studj altrui, e da me ora compendiosamente raccolti, propone il Sig. *Ferroni* un metodo molto ingegnoso per la soluzione del problema in controversia, e di cui per lo scopo prefissomi in questo mio lavoro, conviene che ne produca qui l'esposizione sua propria. " Ma „ veramente non havvi egli mezzo di risolvere questo pro„ blema difficoltoso relativo agli *appoggi* senz'analogìa di *fun-*

„ *zioni*, salve tutte le regole della statica, e d'averne sem-
„ pre una soluzione determinata? Io sono andato meco me-
„ desimo divisando, che potrebbe pur essere infra i tanti
„ possibili il modo *speciale* di distribuire una forza sopra gli
„ *appoggi*, che si realizzi in natura, quello di cui vado a
„ darne un brevissimo saggio. Siano quanti mai si vogliano
„ appoggi (*Fig. III*) A, B, C, D, E, ec., la forza P pre-
„ mente in I, ed O *centro* solito *delle medie distanze* dei
„ punti dati. Congiungasi I con O mediante la retta IO, e
„ questa si prolunghi dalla parte opposta a quella del centro
„ suddetto, rapporto ad I, fino all'incontro in M col lato
„ DC, o col vertice dell'angolo C quando occorra. Spartita
„ la forza premente come porta la leva OIM in due forze
„ parziali, una $F.\frac{MI}{MO}$ che agisca in O, l'altra $F.\frac{OI}{MO}$ che sol-
„ leciti in M la leva CD, o il punto solo C, la prima si sud-
„ divide *egualmente* pei principj premessi su tutti gli *appoggi*
„ assegnati; mentre la seconda o preme unicamente C, o si
„ ripartisce tra C e D a motivo della frapposta leva CMD,
„ in due giunte di nuove forze, cioè quanto a C espressa
„ da $F.\frac{OI}{MO}.\frac{DM}{DC}$, e per D da $F.\frac{OI}{MO}.\frac{CM}{DC}$, nel qual repar-
„ to di forze ognun vede, che se gli appoggi A, B, C, D,
„ E, ec., sono n di numero, ciascheduno di loro (me-
„ no i due C, D) sopporterà la pressione $\frac{F}{n}.\frac{MI}{MO}$, i rima-
„ nenti C, D respettivamente $\frac{F}{n}.\frac{MI}{MO}+F.\frac{OI}{MO}.\frac{DM}{DC}$, $\frac{F}{n}.\frac{MI}{MO}$
„ $+F.\frac{OI}{MO}.\frac{CM}{DC}$, salvandosi insieme tutte e tre le sopraenun-
„ ciate fondamentali Regole dell'equilibrio. E nel caso che
„ M cada in C, questo unico *appoggio* soffrirà il carico equiva-
„ lente a $\frac{F}{n}.\frac{MI}{MO}+F.\frac{OI}{MO}=F\left(\frac{MI+n.OI}{n.MO}\right)$, e tutti gli altri
„ a $F\left(\frac{MI}{n.MO}\right)$ per ciascuno „. Successivamente in compro-

vazione di tale suo metodo fa vedere il Sig. *Ferroni* che applicato ai tre appoggi in triangolo dà quel risultato " che volontieri si presta a tutti i metodi sin qui adoperati dagli Analisti ": risultati poscia egualmente ragionevoli dimostra che esso somministra applicandolo al Bomisco, ponendo *eccentrica* la forza premente in un punto qualunque del suo asse che taglia per mezzo i due lati opposti paralleli, come eziandio supponendo gli appoggi situati agli angoli d'un poligono regolare. Nullameno sembra che di tale soluzione non ne sia rimasto esso interamente convinto, mentre opina in fine che " Pochi esperimenti d'abili Operatori, e su pochi punti d'appoggio sarebber valevoli a decifrare il mistero ec. ".

§. IX

L'illustre Collega il Sig. Cav. *Araldi* diede col titolo di *Esame di alcuni tentativi di soluzione di un famoso problema di Meccanica Statica*, una Memoria nel Tomo XIII P. I, in cui dà nuove pruove dell'acutezza sua d'ingegno, e dell'esteso e profondo suo sapere. Il di lui assunto pertanto si è di mostrare che il problema degli appoggi sia " non già relativamente ai principj meccanici fin ora impiegati, ma per propria indole ed essenzialmente indeterminato (pag. 101) ". Quindi sostiene con nuove ragioni, convenendo col Sig. *Paoli* (Tom. VI), che *illusoria* si è l'ipotesi *Euleriana*, eccettuato il caso dei tre appoggi in triangolo per cui dà " quella stessa determinata soluzione a cui guidano i principj ordinarj della Meccanica (pag. 77) " e che così pure difettose ed insussistenti, fuori, che in detto caso, riescono le soluzioni proposte da *me* (Tomi V, VIII, P. I); dal *Lorgna* (Tom. VII), dal *Malfatti* (Tom. VIII, P. II), nè fa cenno veruno di quella del Collega Sig. *Ferroni* inserita nel Tom. X, P. II, e di cui ne ho fatta la succinta esposizione nell'antecedente paragrafo. Estimabile ed utile è l'enunciato lavoro del prelodato Sig. Cav. *Araldi* e singolarmente pegli schiarimenti che porta sulla metafisica de' principj statici. Lontano però io dal pretendere di proferir parere su le obbiezioni che fa agli studj degli altri Autori, siami concesso per ciò che dice riguardo al mio, di manifestare ch' io non posso convincermi che dedurre debbasi dall' osservazione che un corpo è sostenuto egualmente in equilibrio da una forza che equivalga al suo peso applicata ad un filo verticale che passa pel suo centro di gravità, come da un sostegno che collocato sia sotto il corpo nella direzione medesima, che il problema delle pressioni d' un corpo sugli appoggi sia " identico a quello della ricerca ,, delle forze parallele data la resultante. Alle considerazioni che ho già fatte e rammemorate ne' superiori paragrafi contro la stessa proposizione per cui altri Autori pure si dichiararono in qualche guisa fautori, trovo opportuno aggiugnere le seguenti, onde si conoscano maggiormente le ragioni tutte sulle quali io ho stabilita cotale mia disuasione.

§. X

Rappresentino le quattro sfere disuguali A, B, C, M (*Fig. IV*) poste agli angoli del trapezio ABCM quattro forze verticali: è manifesto, per la teorìa del centro di gravità delle due sfere B, C, ed E quello delle due A, M, congiunta la retta DE e divisa in G, sì che DG a GE abbia la ragione della somma delle due A, M, alla somma delle due B, C; sarà G il centro di gravità comune alle quattro sfere o forze verticali A, B, C, M. Ora immaginandosi che il dato sistema rattenuto sia dalle verghe rigide e non pesanti AG, BG, CG, MG unite nel comune punto G, è indubitato, che una forza verticale applicata in G equivalente alla somma di dette sfere o forze manterrà in equilibrio il proposto sistema: all' opposto è altresì chiaro, che data essendo detta forza, che dicesi *resultante*, all' infinito si possono variare le forze da situarsi ne' punti A, B, C, M, sempre pareggiando la somma loro la stessa resultante, che si equilibrino con essa, come infiniti sono gli assi che possono condursi pel punto G tra i lati opposti AM, BC del trapezio ABCM; e quindi resta dimostrato che mentre il problema delle forze parallele è determinato qualora sono esse date, e si cerca la resultante, è essenzialmente indeterminato il problema inverso, cioè che data essendo la resultante si cerchino le forze da situarsi agli angoli del dato sistema capaci ad equilibrarsi con essa. Concependo poscia giacente col suo centro di gravità sul punto G una sfera eguale alla somma delle quattro A, B, C, M, e che le estremità A, B, C, M delle verghe poggiassero sopra sostegni inconcussi, si passa in tal maniera dal problema delle forze a quello delle pressioni, e se questo potesse considerarsi sotto lo stesso aspetto di quello, ognuno evidentemente comprende che non rimarrebbe più ragion veruna di contendere sull'argomento, e che il problema delle pressioni sarebbe per condizione propria indeterminato, come s'è mostrato esser quello della semplice ricerca delle forze verticali, data la resultante; e perciò o inutili estimare dovrebbonsi tutti gli sforzi fatti da *Eulero* e da altri Geometri poscia, per risolvere generalmente il problema degli appoggi, oppure confessar devesi che non sono, com'è di fatti, io il solo che mi abbia formato un concetto singolare di tale problema, cioè che la di lui soluzione dipender debba da una teorìa diversa da quella del centro di gravità, e tale che conduca alla determinazione delle pressioni sugli appoggi A, B, C, M dipendentemente dalle posizioni loro respettive riguardo al centro di gravità del corpo; posizioni deffinite dalla lunghezza e dalla mutua inclinazione de' rami GA, GB, GC, GM. Siccome poi le pressioni debbono per legge di natura eguagliare nella loro somma il peso del corpo dagli appoggi sostenuto, e supponendosi ad esse sostituite forze verticali rappresentanti le reazioni degli stessi appoggi, e congiunte ai punti del corpo con cui sopra essi riposa, verrebbe esso egualmente sostenuto in equilibrio;

così ne segue che a simiglianza del problema delle forze verticali, nel problema delle pressioni, il centro pure di gravità del corpo esser dee centro di gravità delle pressioni.

§. XI

Che la teoría delle forze parallele valga per la soluzione dei tre appoggi in triangolo, ne ho già io data la dimostrazione geometrica che superiormente ricordai (§. III). Dalle formole generali però della mia soluzione deduconsi risultati, che finora non sono stati dimostrati assurdi, adattandole a diverse particolari posizioni dei tre appoggi, e sopratutto al caso che situati fossero in linea retta, in cui fanno conoscere che i due soli A, C (*Fig. V*) tra quali consiste la direzione del centro di gravità del corpo lo sostengono interamente in reciproca ragione delle distanze AG, GC, e che nulla è la pressione sul terzo B posto più lontano dalla parte del C. Nullameno per confermare questo risultato da nessuno per l'innanzi presunto, eccitato dopo i primi studj inseriti nel Tomo V a rintracciare nuove dimostrazioni intorno ad esso, diedi nel Tomo VIII, P. I la soluzione di questo caso particolare assoggettandolo direttamente al mio metodo, e ciò coll'ammettere, come avvisai (§. VII), le momentanee rotazioni Acb sull'appoggio A, cedendo col peso G gli appoggi C, B; la $Bc'a$ sull'appoggio B, cedendo col peso G gli appoggi A, C; e la $b'Ca'$ intorno all'appoggio C, in cui per cedere il peso G non cede che l'appoggio A, e diventa inerte o inutile l'appoggio B: chiamate così $AG = a$, $GB = b$, $GC = c$; scopersi che posto G il peso del corpo, è la pressione in $A = G\left(\frac{c}{a+c}\right)$, la pressione in $C = G\left(\frac{a}{a+c}\right)$, e la pressione in $B = G\left(\frac{o}{a+b}\right) = o$, risultamento conforme a quello che diedero le formole generali per i tre appoggi in triangolo modificate alla circostanza d'essere situati in direzione

zione rettilinea, come s'è superiormente detto. Similmente procedendo trovai eziandio che essendo quattro gli appoggi in linea retta, i due più vicini, e fra i quali sta la direzione del centro di gravità del corpo, soli lo sostengono, comparendo nulle le pressioni sugli altri due laterali, che nominerò d'ora in poi *eccentrici*. Nello stesso tempo feci vedere come essenzialmente riesce al contrario indeterminato il presente problema nella supposizione di poter sostituire in luogo delle pressioni sugli appoggi delle forze verticali, cioè volendo impiegare per la sua soluzione il principio statico ch'è confacente al problema delle forze parallele in un dato sistema collegate; ed è forse che sotto la predetta supposizione sentenziarono *Eulero*, *Bossut*, e *d'Alembert* il caso perfino di soli tre appoggi in linea retta insolubile; il che da un altro canto fa arguire che sicuramente questi celebri Geometri riguardassero in generale di condizione determinata il problema degli appoggi.

§. XII

Mette in dubbio il Sig. *Paoli* tale mia soluzione dei tre appoggi in linea retta (Tom. IX), dicendo " Ma io non so, „ se i Geometri troveranno buone le ragioni; per le quali „ esclude (parlando di me) dalla terza equazione il momento di rotazione dell'appoggio B (*Fig. V*); anzi mi sembra „ che escludere questo momento sia lo stesso che supporre „ in principio nulla la pressione in B. Poichè se questa pressione ha qualche valore, la di lei reazione sul vette AB „ deve necessariamente produrre un momento di rotazione, „ e qualora questo si trascuri, si viene a supporre ciò che „ volevasi dimostrare, cioè che la pressione in B è nulla. „ Tutto ciò si oppone alla regola generale di sopra rammentata, per la quale alle pressioni si possono sostituire eguali „ forze attive in senso contrario „. Le tre equazioni che nascono dal mio metodo sono

$$(1) \ldots\ldots C(a+c)+B(a+b)=aG$$
$$(2) \ldots\ldots A(a+b)+C(b-c)=bG$$
$$(3) \ldots\ldots A(a+c) \ldots\ldots\ldots\ldots =cG$$

Frattanto che da altri Geometri vengano dimostrate erronee queste equazioni, o non bastantemente difese e tutelate dal principio stesso de' momenti, a me sembra poter salvarle dalle ora riferite obbiezioni del Sig. *Paoli*. Per poter asserire, che per non essere intruso nell' equazione (3) il momento dell' appoggio B " sia lo stesso che supporre in principio nulla la pressione in B „ io sono d'avviso che bisognerebbe ch' esso non si trovasse aggregato neppure nell' equazione (1): così la detta asserzione non ha luogo pel caso dei quattro, poichè se distribuiti sono due da una, e due dall' altra parte, ogn' uno dei due eccentrici comparisce in due equazioni delle quattro; e se i due eccentrici esistono dalla stessa banda, il più vicino entra in due equazioni, ed il più lontano in una sola, come osservasi nella sopraccennata mia Memoria. Quanto alla voluta regola di poter sostituire alle pressioni sugli appoggi le equivalenti reazioni, oltre all' avere io geometricamente dimostrato (Tom. VIII, P. II), che cangiasi in tal guisa il problema in altro di essenza sua indeterminato, confermerò presentemente anche in via analitica la proposizione medesima. Le verticali Aa, Cc, Bb (*Fig. VI*) sugli appoggi A, C, B proporzionali alle pressioni, che suppongonsi da essi sofferte, indichino le reazioni loro; è chiaro che riguardo alla rotazione sull' appoggio A, si avrà l' equazione (1) come prima, e così pure riguardo alla rotazione sull' appoggio B, avrà luogo l' equazione (2); ma riflettendo alla rotazione sull' appoggio C si scorge che questa non può immaginarsi se non colla cessione istantanea dell' appoggio B, diventando perciò negativo il suo momento di rotazione, e che in conseguenza la su descritta equazione (3) si riduce alla seguente

$$A(a+c)-B(b-c)=cG$$

la quale combinata colle (1), (2) somministra i valori $A=\infty$, $B=\infty$, e $C=\infty$ indeterminati e ripugnanti come s'è detto.

Valori pure inconcludenti si presentano, tenendo come convenevoli le equazioni (1), (2) ad impedire ogni moto di rotazione nel vette (§. II), ed alla terza si sostituisca l'equazione della somma delle tre ricercate pressioni eguagliata al peso totale.

§. XIII

Quantunque la mia soluzione intorno agli appoggi disposti in un vette retto induca ad ammettere, che sia legge naturale, che il peso di cui è aggravato venga distribuito su i soli due che stanno a canto dall'una e dall'altra parte del centro di gravità, impedendo essi, per così dire, che la sua azione si diffonda sugli eccentrici, io non sono per aderire col Sig. *Malfatti* che sia lecito assumere detta legge preventivamente per la soluzione del problema, avvegnachè allora con ragione potrebbe opporsi da' Geometri che supporrebbesi concesso ciò che devesi ritrovare e dimostrare. Il Sig. *Ferroni* (Tom. X, P. II) finalmente osservando che dal suo metodo (§. VIII), modificate le formole per i tre appoggi in triangolo al caso di essere situati in linea retta, risulta che l'appoggio eccentrico non risente pressione veruna, come palesano le mie formole e quelle del Sig. *Malfatti* in detto caso, conchiude da profondo Geometra " Conseguentemente a „ ciò inclino a credere, con *Galileo*, dov' esamina l'accidente della rottura d'una colonna sdrajata, e con *Delanges* e „ *Malfatti*, che l'economia della natura determini in modo „ le pressioni sopra più appoggi situati nella medesima direzione da caricarne soltanto quei due, tra i quali è *immediatamente* la forza premente, *quando non sia cedevole* „ *nessuno di loro;* laonde non abbiavi luogo per questo particolare di ricorrere a qualche altro principio ignoto di „ statica, come sospettò *Dalembert* ec. „. Ragionamento in cui è da notarsi singolarmente la vera concezione che indica l'Autore doversi fare del problema, ricordando la sua condizione principale, cioè che gli appoggi suppor si devono immobili, o della convenevole sodezza dotati.

§. XIV

Qualunque sia la forza però delle addotte ragioni in favore e conferma della soluzione ch'io proposi pel caso degli appoggi collocati in direzione rettilinea, nullameno l'estimazione che dee aversi, e ch'io altamente professo pegli studj fatti da parecchi sommi Geometri, come s'è veduto, su questo grave soggetto, mi spinse a rintracciare delle nozioni concrete intorno allo stesso, tentando la via sperimentale in quanto ho creduto potersi ad essa assoggettare, non alterando le condizioni sue naturali ed inseparabili. Il Sig. *Paoli* (Tom. VI) sagacemente riflette che le immersioni degli appoggi in una materia molle, sieno questi annessi al corpo, o spuntanti dalla superficie della stessa materia, non rappresentano le isolate pressioni da essi sofferte, ed anzi direi io di più, che non accertano se tutti in ogni combinazione sieno o no a carico soggetti, poichè dovendosi riguardare il corpo di qualità rigido ed inflessibile per sè stesso (Introduzione) una parte di esso ceder non può senza trascinar seco le altre, e quindi gli appoggi vengono gli uni dagli altri forzati ad immergersi più o meno di quello che alla loro respettiva pressione comporterebbe. Questa osservazione che decise il dubbio che mi si affacciò (Tom. V) nel considerare la teoría *Euleriana*, cioè che incerto fosse, che le estremità delle perpendicolari su gli appoggi proporzionali alle pressioni da essi sostenute " esister dovessero, anche se di maggior numero di tre in uno stesso piano „ questa osservazione dico fa escludere per sempre siffatta sorta di sperimenti, onde acquistare pratiche nozioni sicure nella recondita questione degli appoggi, come inutili sarebbero quelle che trarre si cercassero dalle depressioni di elastri che ad essi si sottoponessero: perciò trascurando gli artifizj accennati descriverò quella maniera di sperimenti che m'è riuscito di esercitare, e che giudicai adattati all'indagine.

§. XV

Poggiata co' suoi piedi Aa, Cc, Bb l'assicella ACB (*Fig. VII*) sul piano soggetto PS, l'ho caricata nel suo centro di gravità G de' pesi M, m, m', ec., e così facendo, osservai che trovandosi aggravata in fine, a segno di ridursi concava, rimanendo affrontati i due piedi Aa, Cc contro il piano soggetto, il terzo piede eccentrico Bb da esso si distaccava innalzandosi. Dimostrando questo sperimento che non soffre pressione il terzo piede Bb, dacchè l'assicella è nell'atto d'incurvarsi, pare certo che non ne debba soffrire nemmeno quando è caricata di peso che non la costrigne all'incurvamento; di maniera che il peso totale sopportato venga dai soli due piedi Aa, Cc fra quali è compreso il suo centro di gravità, venendo reso inutile ed inerte il piede eccentrico Bb dalla presenza dell'anteriore piede Cc, il quale insieme coll'altro Aa dall'opposta parte situato, trovano già la sodezza necessaria nel piano soggetto per resistere o reagire a' carichi che ad essi competerebbero se soli esistessero. Lo stesso fenomeno succedendo se l'assicella BAGCD (*Fig. VIII*) è fornita di quattro piedi Bb, Aa, Cc, Dd, alzandosi i due estremi Bb, Dd, e restando affrontati al piano soggetto i due Aa, Cc, sforzandola con pesi M, m, m' all'incurvamento: così non esiterei a conchiudere, che in generale dalla proposta sperienza debbasi arguire, che nel vette rettilineo, i due piedi immediatamente laterali al centro di gravità del peso lo sostengano interamente, e che gli eccentrici inerti rimangono ed inutili. Ma qui si para dinanzi l'obbiezione che le parti estreme ABK, CDO (*Fig. IX*) del corpo KBAGCDO potrebbero essere costrette a piegarsi caricando gli estremi piedi Bb, Dd, o per la soverchia loro estensione, o per la ragione di pesi estranei ad esse sopprapposti, o per qualche altra causa, e che perciò dovrebbero necessariamente premere non solo i piedi A*a*, C*c*, ma eziandio i detti piedi eccentrici contro il piano soggetto. L'esposto fatto, che può di sovente avverarsi, se servir deve di precauzione per non trascurare, secondo le circostanze, d'impiegare nelle pratiche anche de' sostegni eccentrici per lo scopo a cui si mirasse, non vale però per istabilire veruna regola intorno alla teorìa degli appoggi, in cui, come s'è altre volte detto, non può farsi a meno dell'astratta supposizione, che il corpo sia rigido e per sè stesso inflessibile.

§. XVI

Corredato il prisma rettangolare AB (*Fig. X*) di legno con tre uguali piedi A*a*, C*c*, B*b*, lo eressi sul piano soggetto PS, avendo già in esso contrassegnato il centro di gravità G nel suo asse orizzontale AGCB. Vedendo poscia che collo spignere il prisma dalla parte del piede solo A*a*, subito che l'asse verticale di questo piede cadeva fuori dell'estremità P del piano soggetto, capovolgevasi esso verso la stessa parte, restando affrontato il piede C*c*, ed innalzandosi dallo stesso piano l'estremo piede B*b*; ho legato un filo in O in direzione cioè dell'asse verticale del piede A*a*, all'altra estremità di cui, ravvolto sulla girella T in sito opportuno affissa, era attaccata la lance Q. Instituito con diligenza questo apparecchio, ho sperimentato che il peso occorrente a sostenere in equilibrio il prisma spinto fuori del piano soggetto fino a che l'asse del filo OT era nella stessa direzione verticale con l'asse del piede A*a* trasferito in 45, appoggiati restando su di esso gli altri due piedi C*c*, B*b* nelle situazioni corrispondenti a tale trasportamento, al peso totale dello stesso prisma, avea la ragione della distanza GC dal centro di gravità G all'asse verticale del piede C*c*, alla distanza AC degli assi verticali dei due piedi A*a*, C*c*. Io non so porre in dubbio che questa sperienza non termini di assicurare che il peso intero del prisma venga dalla natura stessa distribuito su i due soli piedi A*a*, C*c* nella già nota statica proporzione, e che indifferente sia il congiugnimento al prisma del terzo eccentrico B*b*. Questa deduzione viene inoltre, per così esprimermi, posta a coperto d'ogni scrupolosa e metafisica difficoltà coll'osservare, che spinto il prisma dalla parte opposta, sicchè il piede eccentrico B*b* (*Fig. XI*) cada fuori dell'estremità S del piano soggetto, come in *ou*, tuttavia immobile esso ne rimane. Imperciocchè ammesso questo fatto incontrastabile, è chiaro, che siccome concependo posto in contatto un piano *sur* colla base del nominato piede, non può sospettarsi che eserciti pressione contro di esso, e che nemmeno esercitar ne dovesse, se ad un tratto si supponesse congiunto in S in maniera che PS*sr* fosse un piano solo; così esercitar non abbia pressione nel primiero collocamento del prisma AGCB sul piano soggetto PS potendosi immaginare troncata la porzione RS in cui sovrasta, e quindi allo stesso connessa, come s'è detto del supposto piano aggiunto *sur*.

§. XVII

Confermato dalle mie ed altrui riflessioni sì teoriche che pratiche in questo mio scritto raccolte, che il principio de' momenti, o delle minime azioni adoperato nella maniera ch' io reputo convenire alla naturale costituzione del problema delle pressioni, e coll'avvertenza sopratutto di non usare del sussidio dell'equazione che la somma di esse equivaler debba al peso intero del corpo; il che è lo stesso che ammettere per cognita una condizione tuttavia incognita, e su di cui anzi è chiamato il Geometra a scoprire le posizioni degli appoggi nelle quali, o tutti, o in parte soffrano pressione; confermato dico di ottenere col proposto mio metodo una soluzione determinata sì pel caso di tre appoggi in triangolo, che di quanti si vogliano in direzione rettilinea collocati, mi corse tosto in pensiero il dubbio, che il difetto della generale soluzione analitica pel caso dei quattro appoggi agli angoli d'un trapezio, come si è notato (§. IV), derivasse non già dall'insufficienza dell'assunto principio meccanico, ma dalla non aggiustata applicazione di esso, onde avere i convenevoli risultati nel passare ad una soluzione concreta e propria d'una data particolare posizione degli appoggi e del centro di gravità del corpo. Con tale prevenzione m'accinsi nuovamente a tale ricerca, prendendo principalmente per guida quelle nozioni che potei rilevare dalle sperienze che ora qui sotto rappresenterò.

§. XVIII

Sulla superficie di un grosso cartone del peso di oncie 36, e di figura rettangolare KVZO (*Fig. XII*), ho condotta pel punto G che corrispondeva nella verticale del suo centro di gravità G, e che trovavasi nell'intersecazione delle diagonali KZ, VO, la BGD parallela a'lati opposti KV, OZ, cioè perpendicolare agli opposti KO, VZ, e fatta BG uguale a GD, ho fissata per unità la sesta parte di tutta la BD. Tirata poscia la retta ADM ad angoli retti alla stessa BD in D, e presa AD eguale a quattro di dette unità, e DM doppia della AD, ho congiunta la retta BM, a cui, divisa per mezzo in E, innalzai la perpendicolare EC uguale alla BG, o GD. Unite le rette AB, BC, CM, e così conformato il quadrilatero ABCM tale che il punto G esistente nella superficie del cartone, e nella verticale innalzata dal suo centro di gravità, era compreso, menata l'altra diagonale AC, ne' due triangoli ABM, ABC; ed inseriti quattro eguali piedi agli angoli A, B, C, M, appoggiai il cartone KZ sul piano soggetto PS, su cui ho eseguiti gli sperimenti.

I.° Soprapponendo de' pesi sul punto G a grado che violentata era a farsi concava la superficie del cartone KVZO, nullaostante tutti e quattro i piedi si affrontavano contro il piano

piano soggetto; il che, a differenza del caso che disposti sieno in direzione rettilinea (§. XV), dimostra che nessuno di essi va esente dal sofferire pressione, e di trasferirla sul piano stesso.

II.° Trasportato il cartone KZ, anche caricato d'un peso sul punto G, di modo che il piede C sortisse fuori del piano soggetto, rimaneva esso in quiete su i tre piedi A, B, M; e facendo sortire il piede M restava pure in quiete su gli altri tre piedi A, B, C.

III.° Cadendo fuori del piano soggetto il piede A, capovolgevasi il cartone rotando sulla diagonale BM, ed innalzandosi dallo stesso piano, il piede più lontano C; e così, spingendo fuori del piano soggetto il piede B, rotavasi sulla diagonale AC, sollevandosi il più lontano piede M.

IV.° Tirando fuori del piano soggetto i piedi a due a due collegati in un lato del trapezio ABCM, il cartone KZ si disponeva alla rotazione sul lato opposto: sicchè portando fuori i piedi A, M la rotazione facevasi sul lato BC; sul lato CM cadendo fuori i piedi A, B; sul lato AM facendosi sortire i piedi B, C; ed in fine sul lato AB non poggiando i piedi C, M sul piano soggetto.

V.° Delineati sul cartone i quattro rami AG, GB, GC, GM, osservai che inclinava esso a rotarsi secondo la direzione di essi, trasportando fuori del piano soggetto i tre piedi opposti: vale a dire i piedi B, C, M riguardo al ramo AG, gli A, M, C rispetto al ramo BG, gli A, B, M, pel ramo GC, e gli A, B, C pel ramo GM.

§. XIX

Nessuno potrà opporre che così fatti sperimenti non inducano a giudicare, che se il principio meccanico de' momenti è atto a dare la ricercata generale soluzione determinata del problema delle pressioni, questa dee resultare, o col considerare le rotazioni su i due assi del trapezio ABCM (sperim. 3), o quelle intorno a' suoi lati (sperim. 4), o per ultimo le rotazioni nella direzione de' rami AG, GB, GC, GM (sperim. 5). Quindi imprenderemo ad analizzare i resultati proprj alle applicazioni accennate, e ciò alla bella prima in via concreta, come sembra dover essere trattato questo problema, in cui i resultati aver devono un' immediata relazione non solo alla prescritta scambievole posizione degli appoggi, ma eziandio a quella che hanno verso il centro di gravità del corpo, da cui emanano le pressioni sopra di essi. Suppongasi pertanto che il trapezio ABCM (*Fig. XIII*) sia simile a quello usato nell' apparecchio sperimentale (§. XVIII), onde sia $BG = GD = 3$, $AD = 4$, $DM = 8$, $CE = 3$; e sarà $AG = 5$, la diagonale $BM = 10$, la diagonale $AC = \sqrt{311.2} : \sqrt{5}$. Sia poscia a il punto in cui il ramo AG prodotto sega la diagonale BM, e d quello in cui la BD sega la diagonale AC, e facilmente si troverà che $Ga = \frac{5}{2}$, $Ba = \frac{25}{10}$, $aM = \frac{75}{10}$, $Gd = \frac{39}{49}$, $Ad = \frac{20}{49} \cdot \frac{\sqrt{311.2}}{\sqrt{5}}$, e $dC = \frac{29}{49} \frac{\sqrt{311.2}}{\sqrt{5}}$; e quindi con questi dati si troverà, per la già nota, e comunemente adottata soluzione di tre appoggi in triangolo, che rappresentato il peso del corpo, di cui G è il centro di gravità, dal numero 36; le pressioni su gli appoggi A, B, M, chiamate collo stesso nome di essi, come sempre faremo, supposto non esistente il quarto C, saranno nel triangolo ABM, $A = 12$, $B = 18$, ed $M = 6$; e le pressioni su gli appoggi A, B, C nel triangolo ABC, supposto non esistente il quarto M, saranno $A = 16\frac{26}{31}$, $B = 7\frac{17}{31}$, e $C = 11\frac{19}{31}$.

§. XX

Premessi i riferiti calcoli passiamo ad esaminare i resultati che ottengonsi coll' ammettere primieramente, che la soluzione del problema di determinare le pressioni sofferte da' quattro appoggi A, B, C, M dipenda dalle due rotazioni intorno agli assi BM, AC. È manifesto che pel principio meccanico de' momenti, la rotazione sull' asse BM fa riguardare AG*a* come un vette in cui nell' estremità *a* sta il centro del moto, e che perciò debba essere la pressione sull' appoggio $A=12$; e che similmente l' istantanea rotazione sull' altro asse AC fa considerare BG*d* come un vette di cui il centro del moto è all' estremità *d*, e che perciò la pressione sull' appoggio B sia $7\frac{17}{31}$. Concluso ciò non si presenta altro artifizio per rintracciare le pressioni su gli altri due appoggi M, C, che quello di ricorrere alla condizione inerente del problema, cioè che tutti e quattro insieme portano l' intero peso 36; e che però il richiesto scioglimento di esso debba conseguirsi dall' equazione

$$12+7\frac{17}{31}+M+C=36$$

cui è palesemente d' indole indeterminata. Ma potrebbe qui soggiungersi che il vette AG*a* dà anche la pressione di $M=6$ nel triangolo ABM, e che il vette BG*d* dà la pressione di $C=11\frac{19}{31}$ nel triangolo ABC. Sommate però le quattro pressioni $A=12$, $B=7\frac{17}{31}$, $C=11\frac{19}{31}$, ed $M=6$; si ha il numero $37\frac{5}{31}$ maggiore dell' intero peso 36; il che è resultato assurdo. L' artifizio in fine che sembra potersi adoperare nell' ipotesi di cui parliamo, si è di distribuire la pressione in *a* riguardo al vette AG*a* su i due appoggi B, M, e la pressione in *d* del vette BG*d* ne' due A, C, caratterizzando le diagonali BM, AC come due altri vetti ausiliarj; di maniera che raccogliendo in A le pressioni prodottevi da' due vetti AG*a*, BG*d*, e così in B le pressioni che vi producono i due vetti medesimi; sieno le quattro pressioni $A=28\frac{26}{31}$, $B=25\frac{17}{31}$,

$C = 11\frac{19}{31}$, ed $M = 6$: e siccome poi la somma di esse comparisce espressa dal numero 72, cioè doppia del fissato peso in G, come di fatti dee succedere, ponendosi agire esso, tanto se solamente esistesse nel triangolo ABM, quanto se pure esistesse nell'altro triangolo ABC unicamente; così si deliberasse che la metà delle dette pressioni fossero le vere sofferte dagli appoggi A, B, C, M, cioè che fosse $A = 14\frac{52}{124}$, $B = 12\frac{96}{124}$, $C = 5\frac{100}{124}$, ed $M = 3$. Questa è appunto la soluzione *Lorgna* spogliata dell'apparato geometrico e condotta al concreto.

§. XXI

Se io opinai che la predetta soluzione dipende dal dimostrare l'enunciato teorema, cioè che la distribuzione del peso del corpo sugli appoggi debba seguire la sopraindicata proporzione (§. VI), il che vale tanto, quanto il chiedere la soluzione del problema stesso; comparse essa così strana a'Geometri che in seguito la considerarono (§§. VI, VII), che la definirono, chi per *capricciosa*, e chi per *inammissibile*, e come io suppongo, per le ragioni stesse ch'io la chiamai *arbitraria*, sì per l'ipotesi su cui è fondata, che per l'artifizio con cui si è dall'Autore resa capace all'intrinseca e naturale condizione del problema, che la somma cioè delle pressioni equivaler debba al peso totale del corpo puramente. Eppure se tale soluzione non conviene al problema delle pressioni, essa è però una tra le infinite che appartengono al problema statico, in cui si ricercano le forze verticali disposte in un dato sistema, dato essendo il peso che debbono sostenere. Imperciocchè immaginato diviso il peso in G in due eguali parti, è evidente, che determinate le tre forze verticali d'applicarsi a'tre punti A, B, M per l'equilibrio della metà del peso G supposto giacente nel punto G del triangolo ABM; e così ancora le tre forze d'applicarsi a' punti A, B, C per l'equilibrio dell'altra metà del peso G giacente nel triangolo ABC, è evidente dico, che raccolte insieme e ridotte a solo due le quattro forze, che ne' due separati equilibrj sonosi respettivamente determinate per i punti A, B; queste due forze operando d'accordo con le due trovate per i punti C, M, mentre vorrebbero rappresentarsi con esse le pressioni su gli appoggi A, B, C, M, rappresentano le forze verticali che agir dovrebbono a' punti stessi per l'equilibrio del dato sistema ABCMG. Per conoscere poi ciò praticamente, si divida il lato CM del trapezio ABCM, di modo che i segamenti Cm, Mm sieno in reciproca ragione delle supposte pressioni $5 \frac{100}{124}$, e 3, ne' punti C, ed M; e si avrà $Cm = \frac{31}{91}\sqrt{34}$, ed $Mm = \frac{60}{91}\sqrt{34}$; indi si congiunga mG, e prolungata seghi in b il lato opposto BA, e trovati i segamenti, co' dati già espressi (§§. XVIII, XIX), $Bb = \frac{298}{281}\sqrt{13}$, $Ab = \frac{264}{281}\sqrt{13}$, $mG = \frac{1}{91}\sqrt{357817}$, e $bG = \frac{1}{281}\sqrt{357817}$; si riscontrerà che i segamenti Bb, Ab hanno la ragione reciproca delle supposte pressioni $12 \frac{96}{124}$, $14 \frac{52}{124}$ ne' punti B, ed A; e che i segamenti mG, bG stanno in reciproca ragione della somma delle indicate pressioni in A e B, concentrate nel punto b, alla somma delle pressioni in C ed M concentrate in m; come conviene che sia, ricercandosi quattro tra le infinite forze verticali, che stieno in equilibrio nel dato sistema: problema già che mostrai (§. X) esser soggetto alla teorìa del centro di gravità.

§. XXII

L'altra soluzione del problema degli appoggi stabilita sulla teorìa medesima, è quella dataci dal chiarissimo Collega il Sig. *Ferroni* (§. VIII). Sospendendo per poco di proseguire nel già cominciato esame sull'uso del principio meccanico de' momenti in tale questione, reputo opportuno, per mantenere possibilmente il miglior ordine nelle cose che mi restano ad esporre, di ridurre ora al concreto anche l'enunciato metodo dal prelodato Autore proposto. Sia perciò ABCM (*Fig. XIV*) il solito trapezio, e divisi per mezzo i lati opposti BC, AM ne' punti O, *o*, si meni la retta O*o*, cui divisa per mezzo in Z, sarà il punto Z il centro di gravità dei quattro punti A, B, C, M, o com' egli lo chiama, il *centro delle medie distanze*, ed unito questo punto col centro di gravità G del corpo, concorra la ZG prodotta col lato AB in X. Per le note dimensioni poscia del trapezio ABCM (§. XVIII), si trova che $GX = \frac{40}{51.20}\sqrt{2410}$, $GZ = \frac{1}{20}\sqrt{2410}$, e perciò tutta la $XZ = \frac{91}{51.20}\sqrt{2410}$; ed inoltre si trova che è $AX = \frac{3180}{3.51.20}\sqrt{13}$, e $BX = \frac{2940}{3.51.20}\sqrt{13}$, essendo l'intera AB $= 2\sqrt{13}$. Supposto pertanto essere 36 il peso concentrato nel punto G, e riguardato ZGX come un vette da sostenersi alle estremità Z, X; si ha che il punto Z viene caricato del peso $15\frac{75}{91}$, ed il punto X del peso $20\frac{16}{91}$. È poi noto per la teorìa del centro di gravità che il peso Z si distribuisce egualmente su i quattro punti A, B, C, M, ed il peso in X ne' punti A, B in reciproca ragione delle distanze AX, BX: quindi le forze per l'equilibrio del peso in G, esser dovrebbero in $A = 13\frac{59}{91}$, in $B = 14\frac{40}{91}$, in $C = 3\frac{87}{91}$, ed in $M = 3\frac{87}{91}$, che insieme prese esattamente lo pareggiano, e si vorrebbero rappresentare con esse le pressioni su gli appoggi A, B, C, D. Può bene corrispondere l'ingegnoso metodo al caso dei tre appoggi in triangolo, e ad altri casi particolari, nel dare risultati non repugnanti, come ha già dimostrato il Sig. *Ferroni*; che nullameno, e come egli stesso dichiarò, non lo assicura ciò dal non doversi annoverare fra gl'ipotetici o deficienti di dimostrazione; al che se giugner si potesse, si perverrebbe ad iscoprire il fenomeno veramente mirabile, che dei quattro appoggi A, B, C, M, i due C, ed M nell'assunto sistema, oppure anche i tre B, C, M, ovvero i tre A, M, C, incontrando la retta ZG, o il punto A, o il punto B, fossero ad eguale pressione sottoposti.

§. XXIII

Non dovendosi trascurare tutto ciò che può servire di lume, ove si tratti singolarmente d'un difficile argomento com'è il presente, investigheremo se a simiglianza della soluzione *Lorgna* (§. XXI) anche quella del Sig. *Ferroni* sia da riporsi tra le infinite che all'equilibrio d'un sistema di forze verticali convengono. E poichè sono eguali le forze equivalenti alle pressioni in C, ed M (*Fig. XV*), si divida il lato $CM = \sqrt{34}$ per mezzo in m, e sarà $Cm = mM = \frac{1}{2}\sqrt{34}$, e congiunta la retta mG si prolunghi e seghi l'opposto lato AB in a, e si determinino i valori di $Aa = \frac{73}{71}\sqrt{13}$, di $Ba = \frac{69}{71}\sqrt{13}$, essendo tutta la $AB = 2\sqrt{13}$, di $mG = \frac{1}{10}\sqrt{4770}$, di $Ga = \frac{2}{71}\sqrt{4770}$, e sarà tutta la $mGa = \frac{91}{10 \cdot 71}\sqrt{4770}$. Quindi si avrà, che le forze $13\frac{59}{91}$, $14\frac{40}{91}$, colle quali vogliono rappresentarsi le pressioni in A, e B, hanno la ragione reciproca de' segamenti Aa, Ba, e che la somma $7\frac{83}{91}$ delle supposte eguali pressioni in C, ed M concentrata in m, alla somma delle supposte préssioni in A, e B, che è $28\frac{8}{91}$, concentrata in a, ha la ragione reciproca del segamento mG al segamento Ga. Dunque mGa è uno degli infiniti assi che possono condursi pel punto G, onde determinare quattro forze che agendo verticalmente ai quattro punti A, B, C, M si equilibrino colla data forza resultante in G. Confrontando le quattro forze verticali da questo metodo dedotte (§. XXII) con quelle che al sopra ricordato metodo *Lorgna* (§. XX) appartengono, si osserva che l'asse a'Gm', da cui nasce la proporzione di dette forze in questo, pel suddetto equilibrio, cade in a' sotto l'estremità a, ed in m' sopra l'altra estremità m dell'asse aGm che dà la proporzione delle forze per l'equilibrio medesimo, secondo il metodo del Sig. *Ferroni*.

§. XXIV

Ma ritornando all'esame della validità del principio meccanico de' momenti per la soluzione del problema, facciamone l'applicazione dipendentemente alle quattro rotazioni (§. XIX) intorno ai lati del trapezio ABCM (*Fig. XVI*). Si prolunghino da una o da ambedue le parti i lati del detto trapezio secondo occorre nella già cognita sua configurazione (§. XVIII), e si calino dagli appoggi A ed M, e dal centro di gravità G del corpo le perpendicolari AR, GT, MS al lato opposto BC; le AF, GH, BL al lato MC; le BD, GD, CN al lato AM; e le CP, GQ, MO al lato AB. I valori delle nominate perpendicolari poscia saranno come segue, a' quali si è nello stesso tempo affisso il simbolo letterale per semplificare il calcolo, cioè $AR=\frac{3.31\sqrt{2}}{5\sqrt{17}}=h$, $GT=\frac{3.29}{5\sqrt{34}}=s$, $MS=\frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{17}}=l$, $AF=\frac{27.12}{5\sqrt{34}}=a$, $GH=\frac{61.3}{5\sqrt{34}}=p$, $BL=\frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{17}}=6$, $BD=b=c$,

GD

$=3=q$, $CN=\frac{27}{5}=d$, $CP=\frac{3.31}{5\sqrt{13}}=g$, $GQ=\frac{6}{\sqrt{13}}=r$, ed $MO=\frac{12.51}{17\sqrt{13}}=f$. Denominato G il peso del corpo, o la forza premente nel suo centro di gravità G; è manifesto che il principio de' momenti applicato alle rotazioni su i lati del trapezio, darà le quattro equazioni

$$(1)\ \ldots\ldots\ Ah+Ml=Gs$$
$$(2)\ \ldots\ldots\ Aa+Bb=Gp$$
$$(3)\ \ldots\ldots\ Bc+Cd=Gq$$
$$(4)\ \ldots\ldots\ Mf+Cg=Gr$$

ricavato dalle (1) (2) il valore di A dato per M e B, e dalle (3) (4) quello di C dato per M e B, si trova in fine il valore di B, cioè

$$B=\frac{G\left((dr-gq)al+(ph-as)fd\right)}{bhfd-aclg}$$

cui in concreto diventa $B=C\left(\frac{1321920}{0}\right)$, cioè infinito, ed infiniti in conseguenza anche quelli di A, M, C: risultato impossibile o assurdo, che voglia dirsi. Ma potrebbe opporsi che una delle equazioni che introdurre devonsi sia quella della somma delle pressioni, e che perciò non debba farsi conto specialmente della rotazione dei due appoggi C ed M, come quelli a' quali mancando ad uno ad uno il piano soggetto (§. XVIII, sp. 2) rimane niente meno il corpo sostenuto in quiete dai tre restanti; sicchè sieno le debite equazioni per la soluzione del problema le seguenti

$$(1)\ \ldots\ldots\ Ah+Ml=Gs$$
$$(2)\ \ldots\ldots\ Aa+Bb=Gp$$
$$(3)\ \ldots\ldots\ Bc+Cd=Gq$$
$$(4)\ \ldots\ldots\ A+B+C+M=G$$

Veggiamo però quali valori somministrino esse per le ricercate pressioni. Si trovino dalle due (1) (2) i valori di A, dati, uno per M, e l'altro per B, e sostituendo nella (4) il valore di C dato per B, che dà la (3), si ricavi un terzo valore di A dato per B ed M: in seguito si paragonino i primi due valori di A per avere quello di M dato per B, ed il secondo pure di A, con il detto terzo valore di essa, onde avere un altro valore di M dato per B, col quale paragonando l'antecedente si perverrà a conoscere che è

$$B = \frac{G\left((ds + ql - dl)a + (l - h)dp\right)}{al(c - d) + bd(h + l)}$$

Surrogando i valori numerici corrispondenti ai letterali si scopre, che $B = \frac{G.o}{150660}$, cioè che nulla è la pressione sull'appoggio B, e che inoltre la somma delle sole due pressioni A, e C resulta maggiore del totale peso G; il che termina di mostrare la falsità della tentata soluzione.

§. XXV

L'ultima applicazione del principio meccanico de'momenti che ci rimane di porre a cimento è quella di considerare (§. XIX) le quattro rotazioni in direzione de'rami GA, GB, GC, GM (*Fig. I*), ovvero intorno ai quattro assi RAI, DBE, FCP, QMS ad essi perpendicolari. Il trapezio su cui faremo la presente ricerca sia quello che adoperai nella mia Memoria (Tom. VIII, P. I), ed in cui supposi il ramo $AG = 20 = a$, $BG = 27 = b$, $CG = 31 = c$, ed il ramo $GM = 23 = d$, ed inoltre l'angolo $AGB = 110°$, l'angolo $BGC = 78°$, l'angolo $CGM = 46°$, sicchè era l'angolo $AGM = 126°$. Ho eletto questo trapezio in cui eziandio a simiglianza dell'altro impiegato nelle superiori disamine, il punto G in cui si contempla raccolto il peso del corpo, o sia la forza premente su i quattro appoggi A, B, C, M, sta dentro i triangoli ABM, ABC, sì per avere in pronto parecchi elementi occorrenti nelle pratiche applicazioni, che per essere essi derivati dalle date lunghezze de'rami, e dagli angoli dati delle scambievoli loro inclinazioni, che conducono a risultati più prossimi a'veri. E poichè viene dalla sperienza comprovato che hanno luogo in natura le quattro rotazioni su rammemorate (§. XVIII, sp. 5) sembrerebbe certamente che anche le quattro equazioni (§. I) instituite e proprie dell'enunciato principio de' momenti coll' eguagliare, facendo l'appoggio all'estremità d'ogni ramo la funzione di centro del moto, i momenti delle incognite pressioni su i tre restanti appoggi, al momento del peso G respettivamente all'asse competente al ramo stesso, dovessero essere atte a dare la compiuta soluzione del problema. Ella è verità però di fatto che dallo sviluppo di esse non ottengonsi che valori per le ricercate pressioni di aspetto indeterminato ed inconcludenti (§. IV), se si eccettui la circostanza che G sia e centro di gravità del corpo, e di quattro corpi eguali collocati ne' punti A, B, C, M, in cui le predette equazioni danno valori determinati, e fanno rilevare che eguali sono le pressioni su i quattro appoggi, e ciascuna uguale alla quarta parte del peso del corpo (§. V): nullameno io sono d'avviso, come superiormente dissi (§. XVII), e tanto più dopochè l'esperienza mi accertò accadere siffatte rotazioni, da me prima soltanto coll'immaginazione concepite, che tale strano risultamento provenga dall'indole del problema per cui debba trattarsi concretamente, cioè per ispiegarmi in qualche maniera, col maneggio immediato de' dati che fissano la vicendevole posizione degli appoggi e del centro di gravità del corpo.

§. XXVI

Dopo varj tentativi che in seguito esporrò, m'è riuscito, se non erro, scoprire finalmente il difetto nelle mentovate equazioni, per cui vane rendonsi alla soluzione del problema. Primieramente, e poichè tirandosi solo fuori del piano soggetto l'appoggio M non viene tolto l'equilibrio nel corpo, è chiaro, che nella rotazione sull'asse PCF esso non contribuisce se non in quanto posto in libertà dà luogo agli altri due B ed A non più di rotarsi sul lato opposto CM, ma

secondo la direzione del ramo GC, o sia sull'asse anzidetto, perciò escluder devesi il suo momento in tale rotazione: per la stessa ragione escluder devesi il momento dell'appoggio C nella rotazione di esso con gli A, B in direzione del ramo GM, ovvero sull'asse QMS. Osservandosi in secondo luogo, che qualora l'appoggio B è tirato fuori del piano soggetto, viene per contrario tolto l'equilibrio al corpo rotandosi sulla diagonale AC; così non può non arguirsi, che esso pure concorra con gli altri due C ed M, i quali essendo soli fuori del piano soggetto si rotano sul lato opposto AB, onde far succedere la rotazione secondo il ramo GA, cioè sull'asse RAI; e che per lo stesso motivo l'appoggio A concorra nella rotazione dei tre A, M, C nella direzione del ramo GB, cioè sull'asse DBE. Quindi è da conchiudersi la regola " che nel-
„ le rotazioni sugli assi PCF, QMS condotti per gli appoggi
„ M, C, i quali sortendo ad uno ad uno fuori del piano sog-
„ getto, non perciò rimane immobile il corpo, debbansi com-
„ putare i momenti soltanto dei due appoggi A, e B; e che
„ nelle rotazioni sugli assi RAI, DBE che passano pegli ap-
„ poggi A, B, che trasportati ad uno ad uno fuori del pia-
„ no soggetto ponesi il corpo in movimento, rotando sulle
„ diagonali BM, AC, valutare debbansi tutti e tre i momenti
„ degli appoggi M, C, B riguardo alla prima, e tutti e tre
„ quelli degli A, M, C rispetto alla seconda.

§. XXVII

Per difendere l'enunciata regola, benchè appoggiata a osservazioni sperimentali, da ogni maniera di controversie, imprenderemo l'esame de' risultati pratici che ella presenta nella sua applicazione al problema, singolare nella scienza meccanica, di cui si tratta. I materiali occorrenti per arrivare a questo scopo sono i valori delle distanze, cioè delle perpendicolari calate dagli appoggi ai quattro assi, i quali, conservando le denominazioni di esse (§. I), nelle date lunghezze ed inclinazioni de' rami (§. XXV), sono, usando del calcolo trigonometrico, prossimamente

$$AD = f = 33{,}8404 \qquad CE = m = 20{,}5547$$
$$AH = g = 50{,}8054 \qquad CL = n = 50{,}6983$$
$$AQ = \delta = 34{,}7557 \qquad CS = \gamma = 1{,}4656$$
$$BI = h = 29{,}2345 \qquad MR = p = 33{,}5191$$
$$BF = l = 25{,}3864 \qquad MN = q = 39{,}8614$$
$$BZ = \lambda = 38{,}0982 \qquad MP = \omega = 15{,}0229$$

Giova inoltre per i confronti, che faremo, avere preparati anche i valori delle pressioni su gli appoggi A, B, M del triangolo ABM nella supposizione che il corpo sopra di essi solamente giacesse; e così quelli delle pressioni su gli appoggi A, B, C nel triangolo ABC. Eseguiti gli opportuni calcoli, notando col numero 36 il peso del corpo, si trova che le pressioni nel triangolo ABM, sono $A = 13{,}28$, $B = 9{,}63$, ed $M = 13{,}9$; e nel triangolo ABC, $A = 20{,}86$, $B = 2{,}20$, e $C = 12{,}94$. Poste queste cose avremo pel principio meccanico de' momenti applicato al problema colla predetta regola le quattro equazioni

$$(1) \ldots\ldots Ag + Bl = Gc$$
$$(2) \ldots\ldots A\delta + B\lambda = Gd$$
$$(3) \ldots\ldots Af + Mq + Cm = Gb$$
$$(4) \ldots\ldots Bh + Cn + Mp = Ga$$

Le due (1) (2) danno i valori delle pressioni sugli appoggi A, e B, cioè

$$A = \left(\frac{c\lambda - dl}{g\lambda - l\delta}\right) G, \quad B = \left(\frac{dg - c\delta}{g\lambda - l\delta}\right) G$$

che in concreto nel sistema ABCMG che abbiamo scelto, sono $A = \frac{597{,}1570}{1053{,}2722} \cdot G$, $B = \frac{91{,}0975}{1053{,}2722} \cdot G$. Dalle due equazioni poi (3) (4), cognite essendo le pressioni A, B, si ricavano i valori delle pressioni sopra gli altri due appoggi C ed M, che sono

$$C = \left(\frac{a'q - b'p}{nq - pm}\right) G, \quad M = \left(\frac{b'n - a'm}{nq - pm}\right) G$$

in cui chiamati ϕ e π i prodotti delle frazioni che determinano i valori delle pressioni A, B per f ed h, si sono fatte le sostituzioni di $b' = b - \phi$, e di $a' = a - \pi$. Posti in tali formole i valori numerici, si trova la pressione $C = \frac{343,6191}{1053,2722} . G$, e la pressione $M = \frac{28,5380}{1053,2722} . G$; ed essendo il peso $G = 36$, i prossimi valori delle quattro pressioni sono $A = 20,41$, $B = 3,11$, $C = 11,74$, ed $M = 0,97$, le quali sommate eccedono il peso 36 di 23 centesime circa, eccesso, che come ognun vede, deriva dall'imperfezione dei valori delle distanze degli appoggi agli assi adoperati nel calcolo.

§. XXVIII

Trovo a proposito di manifestare qui i tentativi che mi diressero alle considerazioni esposte nel superiore §. XXVI valendo essi a convalidare l'instituzione delle equazioni, che si è fatta nell'antecedente, per la soluzione del problema. Il primo tentativo pertanto fu quello di riguardare operosi nelle rotazioni su gli assi DBE, RAI i momenti delle pressioni su gli appoggi A, M, e B, C, ed inutili i momenti delle pressioni sugli eccentrici C ed M, come quelli che tirati fuori ad uno ad uno del piano soggetto, resta tuttavia immobile il corpo su i tre restanti; per il che, date essendo le pressioni sugli appoggi A, B dalle due equazioni (1) (2), ricavar si dovessero quelle dei M, C dalle due (5) (6)

$$(5) \ldots\ldots Af + Mq = Gb$$

$$(6) \ldots\ldots Bh + Cn = Ga$$

Il secondo tentativo poscia è stato di valutare nelle predette rotazioni i momenti soli delle pressioni su gli appoggi A, C, e B, M, per la ragione che anche in questa ipotesi il corpo rimane immobile cadendo fuori del piano soggetto ad uno ad uno i due rimanenti M, e C; e che perciò le pressioni sugli appoggi C ed M dedurre si dovessero dalle due equazioni (7) (8)

$$(7) \ldots\ldots Af + Cm = Gb$$

$$(8) \ldots\ldots Bh + Mp = Ga$$

E per ultimo di computare nelle stesse rotazioni i soli momenti delle pressioni M, C tanto riguardo all' asse DBE che allo RAI, considerando inoperosi i momenti delle pressioni A, B, come sonosi considerati gli stessi delle M, C nelle rotazioni sugli assi PCF, QMS, quantunque col cadere fuori del piano soggetto ad uno ad uno gli appoggi A, B non rimanga immobile il corpo, come succede per gli altri due M, C; e quindi che fossero a desumersi le pressioni M, C dalle due equazioni (9) (10)

$$(9) \ldots\ldots Mq + Cm = Gb$$

$$(10) \ldots\ldots Mp + Cn = Ga$$

Chiaramente però riconosconsi assurde le tre immaginate supposizioni: imperocchè nella prima la somma delle quattro pressioni su gli appoggi A, B, C, ed M risulta prossimamente un quinto maggiore del peso del corpo, nella seconda, la metà, e nella terza più assurda di tutte, oltre al riuscire la somma delle pressioni maggiore della terza parte circa del peso del corpo, si presenta negativa la pressione sull' appoggio C.

§. XXIX

Secondo il metodo *Lorgna* (§. VI) dalle pressioni superiormente calcolate (§. XXVII) convenienti ai due triangoli ABM, ABC (*Fig. XVII*), supposti isolatamente aggravati del peso del corpo, si deduce che esser dovrebbero con approssimazione le pressioni sugli appoggi nel proposto sistema ABCMG, seguendo l'ordine A, B, C, M

17,7 , 5,92 , 6,47 , 6,54

essendo esse per la nostra soluzione

20,41 , 3,11 , 11,74 , 0,97

Come differiscano in quantità queste respettivamente a quelle non v' ha duopo che dell' oculare ispezione. Quanto poscia lontani sieno i risultati nostri da quelli che otterrebonsi dall' altro ideato metodo del Sig. *Ferroni* (§. VIII), basta considerare, che essendo il punto O centro delle medie distanze, il quale nel dato sistema cade tra la retta BGΔ e la diagonale BM, e che congiunta le retta OG; se questa prolungata passa per l'appoggio A devono essere ugualmente caricati i tre B, C, ed M, se sega il lato AB lo devono essere solamente i due C, ed M, e così se sega il lato AM i soli due B, C; mentre le pressioni da noi scoperte, per esempio, sugli appoggi B, C, M, sono 3,11, 11,74, 0,97. E poichè inoltre, parlando della nostra soluzione, nelle date lunghezze ed inclinazioni de' rami (§. XXV), sono i prossimi valori di AM = 38,34, e di BC = 36,63; divisa la AM in reciproca ragione delle pressioni 20,41, 0,97 su gli appoggi A ed M, sarà Aa = 1,55, ed Ma = 36,79. Congiunta quindi la retta Ga, si prolunghi e seghi l'opposta BC in c; e si troverà nel triangolo GMa, Ga = 18,67, e nel triangolo BGc, Gc = 26,82, e Bc = 29,47, e perciò sarà Cc = 7,16. Ciò fatto si rileva con quella approssimazione che è permessa dall'usato calcolo, che le pressioni 3,11, 11,74 su gli appoggi B, C hanno la ragione reciproca de' segamenti Bc, Cc; e che la somma 21,38 delle pressioni in A ed M, alla somma 14,85 delle pressioni in B e C sta in ragione reciproca delle Ga, Gc; in guisa che praticamente si conosce, che il centro di gravità G del corpo, è centro anche di gravità delle pressioni che porta sugli appoggi A, B, C, M che lo sostengono, come s'è dimostrato dover essere (§. X). Atte poi sono a dare l'esatta dimostrazione di questo non meno specioso che interessante teorema, le equazioni (1) (2) (3) (4) (§. XXVII), trovandosi per avventura il detto centro di gravità O (*Fig. XVII*) situato dentro i triangoli ABM, ABC; avvegnachè sostituendosi per a, b, c, d i valori che competono alla fatta supposizione (§. V), risultano le pressioni A, B, C, D eguali ogn'una alla quarta parte del peso del corpo.

§. XXX

§. XXX

Osservando semplicemente che le due nominate soluzioni e la nostra adempiono ugualmente le due condizioni principali del problema, cioè, che la somma delle pressioni sugli appoggi pareggia il peso totale del corpo, e che il centro di gravità di essò è centro eziandio di gravità delle pressioni medesime, potrebbe taluno conchiudere, che siccome tutte e tre vere esser non possono, dando ciascuna resultati diversi, così, che nessuna di esse, o che indeciso restasse quale fosse da dichiararsi per l'esatta e legittima ricercata soluzione del problema. Ma per poco che attentamente si ponderino i metodi con cui si procede nelle due prime soluzioni in confronto del metodo da me proposto, si comprende ad evidenza, che la prima condizione necessariamente dee verificarsi in esse, dacchè si è introdotta come un dato nell' indagare le ricercate pressioni; e che la seconda doveva pure necessariamente comparire come propria della teorìa del centro di gravità per cui si pervenne alle soluzioni medesime (§§. XXI, XXII), le quali in conseguenza sono puramente da classificarsi tra le infinite che si possono assegnare dell' inverso indeterminato problema sull' equilibrio in un dato sistema di forze verticali. Ciò nulla ostante non sarà disutile il far vedere che dall' applicazione del nostro metodo al caso che il centro di gravità G del corpo (*Fig. XVIII*) diretto fosse nel punto x in cui il ramo BG prodotto incontra la diagonale AC, risultano nuove pruove, oltre alle già esposte, in confermazione delle fondamentali equazioni ch' esso somministra per la soluzione del problema negli altri casi. Nella detta supposizione si trovino i nuovi rami Ax, Bx, Cx, Mx, e gli angoli della mutua loro inclinazione, sulle già date lunghezze ed inclinazioni de' primi rami; e quindi si trovino ancora le lunghezze delle distanze degli appoggi agli assi perpendicolari a' detti nuovi rami. Ora siccome mancando nel caso supposto il piano soggetto ad ambedue gli appoggi B, M

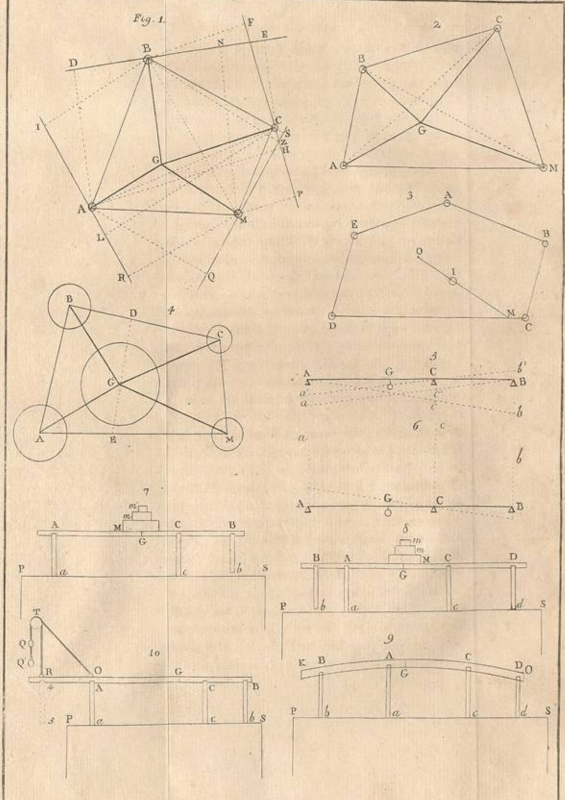
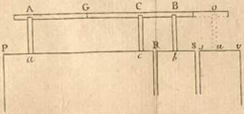
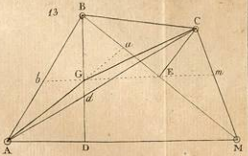


Fig. 1.
2
3
4
5
6
7
8
9
10

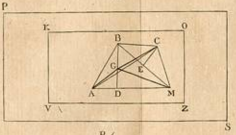
Fig. 11.



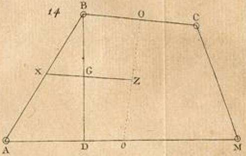
13



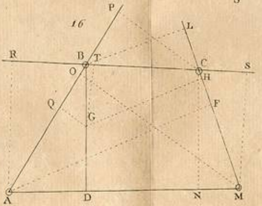
12



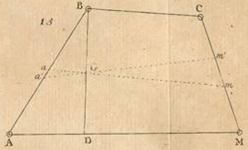
14



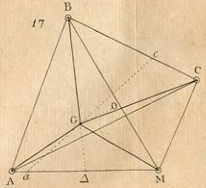
16



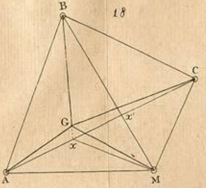
15



17



18



nello stesso tempo, rimane tuttavia il corpo immobile, così, pel nostro metodo, non debbono computarsi nelle due rotazioni che succedono secondo la direzione AC intorno agli assi condotti per gli altri due appoggi C ed A, trascinati ad uno ad uno fuori del piano soggetto, insieme già con i detti due B ed M, se non che il momento di A nella prima, e di C nella seconda, e perciò il corpo verrà sostenuto dai soli due appoggi A, C in reciproca ragione de' segamenti Ax, Cx. Che se il centro di gravità del corpo cadesse nel punto x' in cui scambievolmente s'intersecano le diagonali AC, BM, valendo lo stesso ragionamento fatto per gli appoggi A, C anche per gli B, ed M, bisognerebbe dividere il peso del corpo in quattro parti proporzionali a' segamenti Ax', Cx', Bx', Mx', e la parte del peso rappresentata da Cx' sarà la pressione sull'appoggio A, e da Ax' la pressione in C, e così la parte del peso rappresentata da Mx' la pressione in B, e da Bx' la pressione in M. Seguendo i metodi *Lorgna* e *Ferroni*, non solò sono sottoposti a pressione tutti e quattro gli appoggi A, B, C, M essendo in x' il centro di gravità del corpo, ma lo sono pure se sia in x. Ritornando però al nostro assunto, determinate le parti del peso portate dagli appoggi A, C nel vette retto AxC, si scoprirà, fatte le debite sostituzioni, che le due equazioni (1) (2) del caso generale trattato nel superiore paragrafo XXVII, modificate alla particolare circostanza che cada il punto G in x, cioè che sia la pressione in $B=0$, dà non solamente la prima, come non può non essere, ma eziandio la seconda, egualmente che la pressione in A è quella che appartiene al detto vette retto AxC. Sostituendo inoltre nell'equazione (3) i valori delle pressioni competenti agli appoggi A, C nel vette retto AxC, si trova, come esser deve, che nulla è la pressione sull'appoggio M; e dall'equazione (4) risulta col supporre nulla la pressione in M, e che la pressione in C sia quella che conviene al vette retto AxC, che nulla è la pressione in B: oppure che poste nulle le pressioni in B, ed M, che la pressione in C è appunto quella che spetta al caso del vette retto AxC.