SUL PARAGONE DEL CALCOLO DELLE FUNZIONI DERIVATE COI METODI ANTERIORI.

MEMORIA

Del Sig. Tommaso Valperga-Caluso.

Ricevuta li 2 Novembre 1808.

La chiarissima Accademia di Padova ha proposto un premio a chi meglio dimostri 1.° *In che differisca veramente la metafisica del calcolo sublime del Sig. Lagrange dalla metafisica dei metodi anteriori*. 2.° *Quale sia il grado della sua superiorità*. 3.° *Se, e come possa ridursi alla semplicità degli altri metodi, massimamente del Leibniziano, tanto nelle applicazioni puramente analitiche, quanto nelle geometriche e meccaniche*.

Non vi concorro, perchè dovrei tener occulto quel, ch' io ne pensi, fino a Maggio del 1810, con pericolo che allora non si pubblicasse: nè senza discapito mi sarebbe facile, per non dar indizio di me, astenermi dal mentovare una mia stampata Memoria sui metodi anteriori a quello del Sig. *Lagrange*: e ciò, che sono per esporre, non è precisamente ciò, che l'Accademia domanda, nè lavoro di calcolo da lusingarmi che per esso ella potesse coronare la mia Dissertazione.

Siccome però parmi di aver a dir cose non indegne di essere considerate, mi affretto a darle alla nostra Società Italiana con tutta la fiducia che non perciò saranno discare alla mentovata insigne Accademia, ch'io pregio e venero, come devo.

Nè credo ch'Essa voglia che imprendasi a divisare e discutere tutte le fondamentali teorie, le diversità di metafisica de' metodi anteriori; che sarebbe troppo lunga opera; e delle eccezioni, che a parecchie si danno, si avrà occasione di dir quanto basta. Onde a principio presenterò soltanto la speculazione la più antica.

I luoghi geometrici avevano reso ai Matematici familiare l'uso delle coordinate a rappresentare due qualsivoglia grandezze, fra cui si abbia un'equazione, e di cercare queste coordinate a diversi punti, seguendo colla mente la descrizione, il corso de' *luoghi*, le cui intersezioni ci danno colle ivi coordinate la soluzione de' problemi. *Neuton* pensò a considerarle scorrenti, e aprì con questa speculazione una nuova maravigliosa carriera nella ricerca di grandezze non facili a trovarsi per altra via.

Sieno x e y due cose qualunque di grandezza connessa, onde reciprocamente dall' arbitraria determinazione dell' una resti l'altra determinata. Si potranno sempre far rappresentare da due coordinate, poniamo (*Fig.* 1.^{a}) da $AP = x$, $PM = y$, e da $AQ = y$, $QM = x$. Se suppongo, come nella figura, che crescendo AP cresce AQ, dovrò necessariamente concepire che allontanandosi il punto P da A con certa celerità o lentezza, Q si allontanerà pur da A con simultanea celerità, maggiore, minore, o uguale; e chiamando flussioni le velocità de' punti fluenti, avrò la flussione di x nella velocità del punto P, e la flussione di y nella velocità del punto Q, le quali sebbene d'ipotesi totalmente arbitraria, saranno però di grandezze necessariamente l'una all'altra connesse per la connessione delle grandezze di x, e y, che debbono venir sempre rappresentate da AP ed AQ.

Segniamo le flussioni con un $\mathfrak{d}$, onde sieno $\mathfrak{d}x$, $\mathfrak{d}y$ le flussioni di x, e y. Potranno niente meno $\mathfrak{d}x$, $\mathfrak{d}y$ farsi rappresentare da due coordinate di una seconda curva, dove facendo similmente fluire i punti, che terminano le coordinate, avrò le flussioni di queste, che saranno perciò flussioni di $\mathfrak{d}x$ e $\mathfrak{d}y$, grandezze rappresentateci da esse coordinate. Sicchè avremo flussioni di flussioni. Segniamo queste con esponenti apposti al $\mathfrak{d}$, onde sieno $\mathfrak{d}^2x$, $\mathfrak{d}^2y$ le flussioni di $\mathfrak{d}x$, $\mathfrak{d}y$; $\mathfrak{d}^3x$, $\mathfrak{d}^3y$ quelle di $\mathfrak{d}^2x$, $\mathfrak{d}^2y$, ec.

A veder come dalle fluenti si passi alle flussioni, cioè come dalla *legge di relazione*, per così chiamarla, che determina la grandezza di y corrispondente a ciascuna grandezza di x, si ritragga la legge di relazione, che determina $\mathfrak{d}y$ corrispondente a $\mathfrak{d}x$, sia primieramente il luogo geometrico di x, e y una retta e. g. AM (*Fig.* 2.^{a}). Essendovi sempre $x : y ::$ AP : AQ in una ragione costante, poniamo di $a : b$, se si fa scorrere il punto P in p, dovrà il punto Q scorrere in q con tal velocità, che sia pur sempre $Pp : Qq :: a : b$. Onde qualunque incremento Pp si pigli ad arbitrio a rappresentar la flussione $\mathfrak{d}x$, s'avrà da pigliare per $\mathfrak{d}y$ un incremento $Qq = Pp \times \frac{b}{a}$, e però far $\mathfrak{d}y = \frac{b\mathfrak{d}x}{a}$.

Nè v'è difficoltà quando così può il moto supporsi uniforme, onde la grandezza delle velocità generatrici degl'incrementi evidentemente vien da essi rappresentata, come sempre la grandezza delle cagioni si misura dagli effetti.

Ma quando il rapporto fra $\mathfrak{d}x$ e $\mathfrak{d}y$ non è costante, la legge di relazione fra esse non si può dedurre immediatamente dai rapporti degl'incrementi; perchè una almeno delle due flussioni si ha da suppor variare, mentre si fan gl'incrementi; e perciò uno degli incrementi non sarà puro e totale effetto della flussione quale ella era al cominciar di esso; e per altra parte la grandezza di tal flussione, poichè non per tutto è la stessa, non si può assegnare che riferendone la determinazione a certo punto; poniamo quello, dove l'incremento comincia.

Nella Fig. 1.^{a} se io suppongo $AP = x$ generata con moto uniforme da un punto, che va di A in P, e che AP rappresenti $\mathfrak{d}x$ costante, AQ non corrisponderà a quella grandezza di $\mathfrak{d}y$, con cui si è cominciato a generare AQ, perchè la velocità del suo punto generatore ha dovuto via via sempre scemare mentre esso andava di A in Q. Se però supponiamo che esso punto colla velocità, che aveva in A, se fosse questa sempre rimasta la medesima, sarebbe giunto in S, quando il punto generatore di x è giunto in P; avendo fatto $\mathfrak{d}x = AP$, sarà $AS = \mathfrak{d}y$ la grandezza della flussione quale ell'era al cominciamento di AQ.

E così generalmente possiamo pigliar per principio che a determinare i rapporti delle flussioni, quando queste non sono in ragion costante, si debbono pigliare gl'incrementi, non quali si fanno, ma quali si farebbero, se le flussioni rimanessero, o continuassero quali sono al punto, a cui se ne vuole riferire la determinazione.

Ed è chiaro che questo principio può applicarsi anche dove la fluente non sia rappresentata da una linea. Ma perciò cominciamo a osservare che siccome essendo $y = \frac{bx}{a}$, abbiamo trovato $\mathfrak{d}y = \frac{b\mathfrak{d}x}{a}$, così posto $z = \frac{cu}{a}$, sarà $\mathfrak{d}z = \frac{c\mathfrak{d}u}{a}$; onde si possono le stesse grandezze rappresentare a piacere o colle linee y, z, δy, δz, o colle aree bx, cu, $b\delta x$, $c\delta u$, per le quali saranno $b\delta x$, $c\delta u$ le flussioni di bx, cu, come δy, δz lo sono di y, z. Vale a dire che la flussione d'un rettangolo, di cui sia un lato costante, l'altro fluente, sarà il rettangolo del lato costante per la flussione del fluente.

Or non sia l'area un rettangolo, ma solo da due lati terminata da due rette perpendicolari l'una all'altra, $AP = x$, $PM = y$ (*Fig.* 3.^{a}), e sia terzo termine dell'area una retta, che faccia in M un angolo qualunque con MP. Se io fo scorrere con moto uniforme la perpendicolare y da PM in pm, o in pm', è chiaro che crescerà l'area non con prestezza costante, ma o via via maggiore, o via via minore, secondo che PM anderà crescendo, o scemando. Dunque sarà il caso di doversi la flussione rappresentare pigliando l'incremento non quale si fa, ma quale si farebbe, se le flussioni perseverassero quali sono al punto, a cui se ne vuole riferire la determinazione. Onde per la flussione dell'area, dove $y = PM$, si avrà da pigliar l'incremento nel supposto che PM non cresca, nè scemi; poichè non si può altrimenti la flussione dell'area conservar la stessa. Dunque, qualunque sia l'angolo in M, la flussione dell'area sarà sempre $PMm''p = y\delta x$, supposta $\delta x = Pp$, ed al rettangolo di Pp per una retta $= 1$.

La verità di questa conclusione, così legittimamente dedotta da sì evidente principio, si rende palpabile col riflesso che l'incremento nel caso d'obbliquità d'angolo si può scomporre in due parti, l'una $PMm''p$, la stessa per ogni obbliquità, l'altra variabile, il triangolo $m''Mm$, ovvero $m''Mm'$, da aggiungersi o togliersi, e che questa parte variabile, proporzionale a δy, è manifestamente l'effetto dell'aumento o della diminuzione di quella velocità, che varia insieme con y; onde anche ne' due casi della stessa mutazione di velocità in più, e in meno abbiamo eguali i triangoli, che fanno il divario fra l'incremento corrispondente alla prima velocità, e i provenienti da essa velocità alterata.

Così adunque la flussione d'un'area per lo moto, quale si è supposto, di un lato, sarà la stessa in ogni caso; essendo chiaro che il principio, da cui si è tratto il teorema, si applica nello stesso modo ove PM sia l'ordinata a una curva, come nella *Fig.* 4, in cui si vede similmente che i divarj fra gl'incrementi quali si fanno, e l'incremento, che si dee pigliare per aver il rappresentativo della flussione dell'area, sono gli effetti dell'alterazione di essa flussione per lo crescere o scemare di y. Ma l'evidenza del teorema non avendo bisogno di questo riflesso, non m'arresto a schiarirlo.

Ritorniamo alla *Fig.* 1.^{a} Il rettangolo AQMP $= xy$ è composto dell'area AQM, e dell'area AMP, le cui flussioni per ciò, che veniamo di dimostrare, sono $x\partial y$, e $y\partial x$. Dunque la flussione di esso rettangolo xy sarà $x\partial y + y\partial x$.

Avendo $\partial(xy) = x\partial y + y\partial x$, fo $x = y$, ed ho $\partial(xx) = 2x\partial x$, e fatto quindi $y = x^2$, $\partial y = 2x\partial x$, ho $\partial(x^3) = 3x^2\partial x$, e così proseguendo a fare $y = x^3$, poi $y = x^4$, ec. è chiaro che il coefficiente e l'esponente cresceranno ciascuna volta di una unità, e sarà sempre $\partial(x^m) = mx^{m-1}\partial x$, almeno in questo nostro supposto, dove m è numero positivo ed intero.

Per accertarlo in ogni altro sieno n, e p numeri positivi ed intieri. Fatto $z = \frac{1}{x^n}$; $zx^n = 1$ è costante; onde ne dee la flussione esser nulla, $nzx^{n-1}\partial x + x^n\partial z = 0$; $\partial z = -\frac{nz\partial x}{x} = -\frac{n\partial x}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}\partial x$.

Fatto $z = x^{\frac{n}{p}}$, è $z^p = x^n$, $pz^{p-1}\partial z = nx^{n-1}\partial x$. Ora è $z^{p-1} = x^{n-\frac{n}{p}}$. Dunque $\partial z = \frac{nx^{n-1}\partial x}{px^{n-\frac{n}{p}}} = \frac{n}{p}\, x^{\frac{n}{p}-1}\partial x$. Dunque sia $m = -n$, sia $m = \frac{n}{p}$, sostituendo si avrà sempre $\partial(x^m) = mx^{m-1}\partial x$.

Ho voluto dar compita la dimostrazione di un teorema, che si può dire il cardine, su cui tutta si volge la parte algebraica del metodo diretto, e inverso. Ma so bene che non debbo quì darne un trattato; e me ne basta questo cominciamento per giungere a quella più generale speculazione, che qui mi bisogna. Per cui sia $y = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$ ec. Avrò $\partial y = B\partial z + 2Cz\partial z + 3Dz^2\partial z + 4Ez^3\partial z +$ ec. e supposta ∂z costante,

$$\partial^2 y = 2C\partial z^2 + 2\,.\,3Dz\partial z^2 + 3\,.\,4Ez^2\partial z^2 + \text{ec.}$$
$$\partial^3 y = 2\,.\,3D\partial z^3 + 2\,.\,3\,.\,4Ez\partial z^3 + \text{ec.}$$
$$\partial^4 y = 2\,.\,3\,.\,4E\partial z^4 + \text{ec.}$$

Dunque, quando $z=0$, $y=A$, $\frac{\partial y}{\partial z}=B$, $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}=2C$, $\frac{\partial^3 y}{\partial z^3}=2.3D$, $\frac{\partial^4 y}{\partial z^4}=2.3.4E$, ec. Quindi notando y' un altro valore di y a distinguerlo da quello, a cui si hanno a riferire le flussioni, e che s'intenderà determinatamente significato da y, sia questo la coordinata di $x=b$, e però $z=x-b$; fatto $\partial x=\partial z=1$, ponendo in vece di A, B, C, ec. i valori loro, sarà $y'=y+z\partial y+\frac{1}{2}z^2\partial^2 y+\frac{z^3\partial^3 y}{2.3}+\frac{z^4\partial^4 y}{2.3.4}+$ ec. dove y' è la coordinata di $x=b+z$.

Così dai valori di y, e delle sue flussioni di ogni ordine, quali corrispondono a certo valore di x, questo celebre teorema, che è il Coroll. II a pag. 23 del Metodo degli Incrementi di *Taylor*, naturalmente conduce ad altri valori di y corrispondenti ad altri valori di x. Ma insieme generalmente vi si scorge la connessione delle flussioni di ogni ordine coi diversi valori corrispondenti di x ed y, per la qual connessione lo stesso teorema dà il passo dai valori delle coordinate a quelli delle flussioni.

Vediamolo cangiando frasi; e sieno $fx, f(x+i)$ la stessa funzione di x, e di $x+i$; onde supposti x, e $x+i$ due valori dell'ascissa di una curva, sono $fx, f(x+i)$ i corrispondenti valori dell'ordinata. Fatto $i=z$, e supposta $y=fx$ la coordinata di $x=b$, $f(x+i)$ viene a essere lo stesso che y' coordinata di $x=b+z$, e però $f(x+i)=fx+i\partial y+\frac{1}{2}i^2\partial^2 y+\frac{i^3\partial^3 y}{2.3}+\frac{i^4\partial^4 y}{2.3.4}+$ ec. dove ∂y, $\partial^2 y$, ec. essendo le flussioni prima, seconda, terza ec. di fx, per aver queste flussioni basterà trovare i valori di p, q, r, s, ec. nello sviluppamento di $f(x+i)=fx+pi+qi^2+ri^3+si^4+$ ec. serie identica colla precedente, ed avremo $\partial y=p$, $\partial^2 y=2q$, $\partial^3 y=2.3r$, $\partial^4 y=2.3.4s$, ec.

Ecco donde è partito il Sig. *Lagrange*, il quale non ha però ristretto il suo pensiero a trarre tutte le flussioni da sviluppamento di serie; egli ha concepito, e condotto a fine un molto più gran disegno, di dare un metodo, ch'egli giudica non che il migliore, il solo senza eccezioni per far tutto ciò, che si fa colle flussioni, o altri calcoli equivalenti, senza che più per lo calcolo sia d'uopo neppur sapere che cosa sieno flussioni o differenziali.

In luogo adunque sia di quelle, sia di questi egli introduce con nuovo concetto le *funzioni derivate* con denominazione adattatissima al suo metodo; e distinguendo le funzioni in *primitive*, e *derivate*, e queste in *prima, seconda, terza*, ec. ne segna la distinzione con apici apposti all' f, che significa la funzione primitiva, onde se questa è fx, la sua funzione prima derivata è $f'x$, la seconda $f''x$, funzione prima di $f'x$, la terza $f'''x$, funzione prima di $f''x$, ec.

La funzione prima derivata è il primo coefficiente della serie, che si sviluppa sostituendo $x+i$ a x. Quindi le serie

$$f(x+i)=fx+pi+qi^2+ri^3+si^4+\text{ec.}$$
$$f'(x+i)=f'x+p'i+q'i^2+r'i^3+\text{ec.}$$
$$f''(x+i)=f''x+p''i+q''i^2+\text{ec.}$$
$$f'''(x+i)=f'''x+p'''i+\text{ec.}$$

danno $f'x=p$, $f''x=p'$, $f'''x=p''$, $f^{\text{iv}}x=p'''$, ec.

Col teorema di *Taylor* è facile eliminare i nuovi coefficienti delle serie per le funzioni derivate, e scorgere che sono

$$f'(x+i)=f'x+2qi+3ri^2+4si^3+\text{ec.}$$
$$f''(x+i)=f''x+6ri+12si^2+\text{ec.}$$
$$f'''(x+i)=f'''x+24si+\text{ec.}$$

siccome la prima è $f(x+i)=fx+if'x+\frac{1}{2}i^2f''x+\frac{i^3f'''x}{2.3}+\frac{i^4f^{\text{iv}}x}{2.3.4}+\text{ec.}$

Il Sig. *Lagrange* lo dimostra convenientemente al suo metodo con due sostituzioni, ch'ei fa nello sviluppamento di $f(x+i)$, una di $i+o$ a i, l'altra di $x+o$ a x, colle quali si deve avere un medesimo sviluppamento di $f(x+i+o)$, e però i termini $+op+2ioq+3i^2or+4i^3os+$ ec. trovati colla prima sostituzione, hanno a essere identici coi termini $+op+iop'+i^2oq'+i^3or'+$ ec., che si hanno colla seconda. Quindi $p'=2q$, $q'=3r$, $r'=4s$, ec. Veggansi le sue non so perchè anonime *Leçons sur le calcul des Fonctions .... à Paris an* 1806, dove a pag. 11 la sostituzione di $x+o$ è più chiaramente ragionata che a pag. 14 della *Théorie des Fonctions Analytiques* stampata in Maggio 1797 col nome dell'Autore, il quale nelle mentovate lezioni avendo fatto molti miglioramenti, e non pochi di ben altro rilievo che non è l'accennato, a esse piuttosto io debbo rimandare chi vuol conoscere ciò, che dobbiamo a cotanto Geometra in questa sua nuova Analisi.

Vi vedrà non solo riempito in tutta la sua estensione l'assunto primario di derivare le flussioni dalle serie, e darne un calcolo, che compitamente può tener il luogo del Neutoniano, o si voglia del Differenziale e Integrale in ogni genere di ricerca e applicazione; ma vedrà inoltre tutta cospersa l'opera di lumi d'altre analitiche ricerche, d'osservazioni, di metodi, di schiarimenti spettanti ad altre parti delle Matematiche inseriti dove l'occasione si offriva opportuna. Nè con quest' opera può sostenere il paragone alcun trattato, ch' io conosca, delle Flussioni; benchè veramente egregio sia quello di *Mac-Laurin*, quello di *Muller* abbia parti assai buone, e migliore sul totale sia quello di *Simpson*. Ma non possono non trovarsi talora al di sotto de' lumi dell' età nostra, avendo l'Analisi dopo i libri loro fatto maravigliosi progressi per opera di molti, e segnalatamente del Sig. *Lagrange*. Però non cercando del pregio del suo libro, ma del metodo in paragone del Neutoniano, non posso correre a preferirlo; perchè vi sono vantaggi per un verso con isvantaggi per altri, e sul totale mi sembra che adottando il nuovo calcolo più si abbia a perdere che a guadagnare.

Il metodo delle flussioni parte, dirò così, da terra, quello delle Funzioni derivate piglia le mosse da alto assai; ma i due metodi salgono all'istessa altezza. Il veder ogni cosa inchiusa nell'idea generalissima di funzione, e quindi sviluppare quasi allo stesso modo tutto ciò, che si vuole, è bellissima speculazione di analitica maestria. Ma vi si vede insieme che non è questa la via, per cui fosse facile di pervenire a que' teoremi ancor ignoti, ai quali l'Autore l'ha condotta, perchè gli eran notissimi. E chi non ha parte alla gloria di aver aperta questa nuova strada, volentieri preferirà quella, che ha condotto alle scoperte, e può più facilmente condurvi ancora. Nella nozione di funzioni, che sono i primi coefficienti di certe serie, non traluce come sieno proprio mezzo per conseguire ciò, che è facile prevedere che colle flussioni si conseguirà. Le dimostrazioni di puro calcolo e artifizio d'algebra possono per diversi riguardi e preferirsi, e posporsi a quelle di ragionamento, perchè la certezza de' calcoli è senza luce, e se un falso aspetto d'evidenza può ne' ragionamenti ingannare, anche ne' calcoli rivisti più volte veggiamo talor tardi di aver fatto errore.

Quanto alla Metafisica io sono onninamente del sentimento del Sig. *Lagrange*, che sia l'Analisi, sia la Geometria, a cui

cui più volentieri io riferisco la ricerca delle grandezze in astratto, non deve avere altra metafisica che quella de' proprj suoi primi principj. Però questa metafisica, che chiamerò matematica, richiede qui un poco di discussione; poichè di essa nominatamente l'Accademia di Padova c'invita a ragionare.

Per cominciar adunque dalla dichiarazione delle parole, acciocchè non ne resti vaga l'idea, dirò che a mio intendimento la metafisica matematica è la teoria, che ci guida e accerta in ogni ricerca e determinazione di grandezze. Essa è la speculazione, che fa strada alla misura d'ogni cosa. La pratica può soltanto appressarsi alle misure vere; ma la speculazione vuol trovarle e dimostrarle rigorosamente, ed ha perciò bisogno che le si concedano alcune supposizioni, senza le quali non si può concepire grandezza alcuna precisamente determinata. La prima di queste si è la determinazione del *punto*, designazione di luogo preciso. Se io lo concepisco un cerchietto quanto si voglia piccolo, non mi basterà questo mai ad assegnare un termine di misura con precisione assoluta. Potrò concepirne il termine al centro del cerchietto: ma l'idea del centro già include quella del punto matematico. E se vi volessi con idea volgare sostituire un granelluccio di polvere, sottile eziandio quanto gli atomi d'Epicuro, se gli do forma sferica, finchè io non ne suppongo il diametro assolutamente nullo, vi concepirò sempre distinti luoghi, dentro, e d'intorno, inclusi dalla superficie. Che però, non potendosi annullare il diametro senza annullare insieme il cerchio, e la sfera, ella è chiara la necessità dell'idea del punto, quale dal Geometra si concepisce, e non può esistere che nel pensiero, non è corpo, non ha grandezza: è un mero concetto, e non più. Una designazione sì precisa è impossibile in pratica; ma dal supporla in teorica deriva ogni determinazione di grandezza, quale si vuole assolutamente precisa in Geometria. Nè altrimenti ne potrebbono essere le dimostrazioni di totalmente rigorosa verità.

Accettata la nozione de' punti, due ci danno precisa la posizione, e la lunghezza di una linea retta, un terzo fuori di essa determina un arco circolare, il piano, e sovra esso tre angoli, un'area. Ma per andar avanti felicemente nella geometrica speculazione si vuol sempre badar bene che mai essa non s'appoggi a supposti, che non hanno determinazione di grandezza precisa, come quando tanto si questionò sull'*angolo di contatto*. Si può a quel punto considerar la tangente come la direzione della curva, sicchè misura degli angoli piani fra linee curve sieno gli angoli, che fanno le tangenti all'intersezione; e per l'angolo mistilineo fra una curva e una retta, che la seghi, s'intenda l'angolo, che fa essa retta colla tangente al punto, dove la curva è tagliata. Ma per avere un angolo della tangente colla curva, a dar la grandezza di cotal angolo sarebbe necessario, oltre il punto del contatto, ed altro punto qualunque nella tangente, un altro punto nella curva. Or questo quale dovrà essere? Perciò l'idea di angoli di contatto non è di grandezze determinabili; non dee riceversi in geometria. Si dee dire che la tangente coll'arco non fanno angolo, poichè hanno al contatto la stessissima direzione.

Che poi fra la tangente e l'arco si possano per lo punto del contatto far passare quanti altri archi tangenti si vuole, questo non ha nè difficoltà, nè maraviglia, se non per chi ha l'infelicità purtroppo frequente di non concepir il punto senza grandezza: onde non vegga che sempre assolutamente due punti o del tutto coincidino e sono un solo, o sono disgiunti affatto e discosti. Punti, che l'un l'altro si tocchino, non sono punti matematici. Possono questi essere quanto si vuole vicini. Ma vicino e lontano, come picciolo e grande, eziandio quando sembrano detti assolutamente, sono pur sempre relativi, se non altro, all'uso de' sensi, ai mezzi ed ai bisogni nostri. E possiamo sempre a piacere gli stessi punti dir vicini o lontani, paragonandone la distanza ad altra maggiore o minore. In un cerchio i punti estremi del seno retto di un minuto secondo sono vicinissimi rispetto alla distanza loro dal centro, e lontanissimi rispetto a quella degli estremi del seno verso. La qual cosa si concepisce dal Geometra non meno chiaramente in un cerchio di diametro minore d'un millimetro, che in uno maggiore dell'orbita della Terra intorno al Sole. Perchè il cerchio, ch'ei considera, è sempre di pura contemplazione intellettuale; nè si tratta di veder cogli occhj, e distinguere quelle grandezze in un cerchio realmente descritto dove che sia.

E ciò sia detto acciocchè fin da'primi elementi si scorga l'importanza dell'attenzione a non mai confondere i teorici supposti coi casi pratici; e vieppiù a non mai assumere supposti d'idee di grandezze, che non si possono precisamente determinare. La speculativa non le determina, lascia alla pratica che le individui al bisogno: ma deve esserle chiaro che quando certe cose fossero fatte, sarebbe certa grandezza determinata, e che quelle certe cose almeno mentalmente si possono fare così e così, onde sola ragione di non determinar le grandezze sia l'inutilità.

Nè a spiegarsi le giova sempre dir tutto; perchè spesso molto più facilmente si conduce altri a vedere una verità tralasciando molte idee intermediarie per porre, dirò così, in contatto le bastanti a far concepire ciò, che si vuole. Le intermediarie si sottintendono; e quando ciò sia difficile, potrà l'ommissione biasimarsi; ma se l'ommissione si può supplire, la teoria sta. Così chi non vegga qual idea chiara e determinata si voglia significare colla parola *direzione* di una curva, potrammi riprendere di averla adoperata senza dichiararla qui avanti. Ma non ne sarà però meno certa, evidente la teoria, per cui l'ho adoperata. Perchè l'idea si può dichiarare: che sebbene *direzione* propriamente sia solo di linea retta, impropriamente se si vuole assegnare una direzione al moto, con cui si può descrivere un arco di cerchio, l'idea di direzione essendo pur sempre di linea retta prolungabile all'infinito ai lati opposti, è chiaro che si dovrà pigliare per direzione del moto circolare quella retta, che non si accosta più all'uno che all'altro di due punti della periferia presi a distanza eguale di qua e di là dal punto, che si considera, quella, che sola passa per quel punto, e non vi attraversa la curva. Nè importa che in qualunque modo si spieghi applicata alle curve la parola *direzione*, siccome non propria, non possa mai rendersi irreprensibile a un cavilloso. Perchè niuna cavillazione può renderne l'uso ambiguo, o indefinita la determinazione, sia di essa, sia di qualunque grandezza ne dipenda. Nè la buona teoria geometrica richiede che sulle sue parole non si possa disputare, purchè la disputa a lei non spetti, sia d'altra scienza o facoltà, di Dialettica, d'Ontologia, di Fisica, o di qual altra cognizione si voglia. A lei basta che i suoi concetti conducenti alla misura delle grandezze non lascin dubbio su queste. Che cosa fuori del suo concetto sia *corpo* ella non cura; chiama *solido* una cosa, che non esiste che nelle sue speculazioni. Tutto sta che queste sieno proprie ad accertar le grandezze. E sarebbe manifesto equivoco il dire che l'accertamento della grandezza non è possibile senza che gli preceda l'accertamento della cosa, che ha quella grandezza. Perchè la prenozione necessaria non è dell'essenza, e della natura del soggetto, nè della possibilità fisica ch'esso esista, e sia più che un supposto mentale. D'uopo è solo che sia accertato per quella parte, da cui dipende la sua grandezza; come se dirò che y è la cosa, la cui relazione a x è $y = X$. Sicchè nell'esame delle teorie geometriche a distinguere le sode obbiezioni dalle sofisticherie, si dee considerare se portin dubbiezza sul *quanto*.

Con questi riflessi è facile scorgere in che pecchino parecchie teorie più o meno diverse fra loro, ma che tutte coincidono a darci lo stesso Calcolo differenziale e integrale. Esse introducono nel calcolo supposte grandezze indeterminabili; gli vogliono dar per soggetto cose, delle quali il *quanto* non si può assegnare. Desidero che si legga ciò, che ne ho scritto nelle Memorie dell'Accademia di Torino *Années* 1786-87. *Des différentes manieres de traiter cette partie des Mathématiques que les uns appellent Calcul différentiel, et les autres Méthode des Fluxions*. Ma non fa d'uopo ch'io qui il ripeta con quel di più, che vi potrei aggiungere a mostrare non esservi mezzo fra le grandezze finite ed il nulla. Poichè se non s'incontrasse difficoltà negli infinitamente piccoli, niuna eccezione avrebbe la metafisica di detti calcoli, non si farebbe luogo al quesito, cui rispondo, ai desiderj dell'Accademia, che l'ha proposto.

Si vuol però badare che quantunque gl'infinitesimi possano sembrare il soggetto del calcolo infinitesimale, in verità vi sono soltanto un mezzo di ricerca di grandezze finite. Onde non è il caso totalmente lo stesso che per l'angolo di contatto, dove il concetto d'infiniti angoli infinitamente piccioli, uno minor dell'altro si terminava alla considerazione di esso angolo, e a comparazione di grandezze dove non v'ha grandezza alcuna: mentre al contrario il Calcolo differenziale è di speculazione utilissima nè più, nè meno che il Metodo delle flussioni; nè i suppostivi infinitamente piccioli il rendono incerto, perchè non vi sono che come uno strumento, che basta saper maneggiare. L'impossibilità di concepirli con idea veramente determinata ne rende un po' fosche e paradosse le fondamentali dimostrazioni, ma non tanto che non vi traluca la certezza della verità, e ne restino i trovati dubbiosi. Sicchè quello, che vi si biasima, si può dire non più che un neo sopra un bellissimo volto.

Sia però quanto si voglia picciolo questo neo, sarebbe gran torto, potendo, non volerlo togliere: ed a toglierlo una spedita via ci si mostra subito colla stessa riflessione, che ci ha condotti a scorgerlo, ed è che non si debbono in matematica mai assumere idee di grandezze, che non si possono precisamente determinare. Basta dunque risalendo alla prima supposizione di *Leibnizio* correggerla un pocolino. Egli nel 1684 (Operum T. III, p. 167, 169) supponeva $\mathfrak{d}x$ *pro arbitrio assumpta*, e $\mathfrak{d}x$, $\mathfrak{d}y$ proporzionali *differentiis*, *sive incrementis vel decrementis momentaneis*. Assumansi così pertanto i differenziali di grandezza determinabile a piacimento; e perchè il concetto d'incrementi momentanei ricade nella stessa difficoltà degli infinitamente piccioli, si spiani questa almen colla frase, come si può, adoprando l'usitatissima, benchè abusiva, d'infinitamente piccoli. Per esempio se dirò che vi sono de' rapporti, che si trovano facilmente colla comparazione di diversi valori successivi corrispondentisi, fingendo fra i valori successivi la differenza infinitamente piccola.

Che pertanto si segnino col Δ le differenze reali, e però finite, che chiameremo semplicemente differenze, onde sieno Δx, Δy, Δz, ec. le differenze, che si corrispondono fra due valori di ciascuna delle variabili x, y, z ec. E col $\mathfrak{d}$ si segnino grandezze, che si vogliono in quel rapporto fra loro, in cui dovrebbono essere le differenze, quando fossero infinitamente piccole. Cotali grandezze $\mathfrak{d}x$, $\mathfrak{d}y$, $\mathfrak{d}z$, ec. sieno i *differenziali*.

A determinarli rispettivamente avrassi a dar loro il rapporto, che dovrebbe avverarsi nelle differenze, s'elle potessero essere infinitamente piccole; mentre il fingerle tali non è altro che supporle quali si scorge che tendono a essere impicciolendo, e diverrebbero finalmente, se nell'annientarsi non cessassero di esistere.

Quindi per lo differenziale di xy avendo fra due suoi valori consecutivi, 1.° xy, 2.° $xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$ la differenza $x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$, e però il suo rapporto alla differenza arbitraria Δx essendo $\frac{x\Delta y}{\Delta x}+y+\Delta y$, vi si suppongano Δx e Δy infinitamente piccole; ne potrà il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ niente meno esser grande, ma Δy dovrà farsi nulla, e però il rapporto de' differenziali sarà $\frac{x\partial y}{\partial x}+y$, e $x\partial y+y\partial x$ il differenziale di xy.

Nulla più facile che far capire questa dimostrazione a chicchessia. Poichè due sole cose vi sono non tratte evidentemente dalla definizione, l'una che per la supposizione dell' infinita piccolezza delle differenze non ne segue che $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sia picciolo, l'altra che per essa dee farsi $\Delta y=0$. Per porre in evidenza la prima basta osservare che fatto $\Delta y=a\Delta x$, per quanto s'impicciolisano Δy e Δx, sarà sempre $\frac{\Delta y}{\Delta x}=a$; per la seconda osservare che sinchè non si sarà fatta $\Delta y=0$, si potrà proseguire a impicciolirla, e però non sarà ancor picciola infinitamente, come si vuol supporre. Vero è che questo è un voler suppor l'impossibile. Ma si è previamente spiegato come si abbia a intendere la supposizione.

Così adunque con picciola mutazione si può togliere dal Calcolo differenziale ogni biasimevole metafisica; e vie meglio se i differenziali si definiranno grandezze, i cui rapporti a un' arbitraria sieno i limiti de' rapporti delle differenze, le quali si vadano impicciolendo sino al nulla. Ma così verrebbero i differenziali a identificarsi colle flussioni; alla qual cosa le passioni umane hanno indutto molti a ripugnare acremente. Le gare hanno impegnato grandi Geometri a volere che il trovato di *Leibnizio* fosse un equivalente sì, ma non essenzialmente lo stesso con quel di *Neuton*. L'invenzione di *Neuton* è di stromento per trovare, e si vuole che sia altro quando si dimostra con altro supposto. Le Sezioni Coniche sono state proposte e dimostrate in molti diversissimi modi partendo da definizioni diverse, e pur quelli stessi, che nemmeno si curano di dimostrarne l'equazione nel cono, le chiamano tutti Sezioni coniche. Linee proporzionali agl' incrementi momentanei sono le flussioni, ma si vuole che non sieno flussioni i differenziali, e perciò è d'uopo che non sieno grandezze finite; ond'è la necessità di frasi assurde.

Lasciando però questo impegno, e supponendo i differenziali essere grandezze, come tutte le altre, che non si determinano, ma si potrebbero determinare senza difficoltà, sarà tolto ogni motivo di adottare una metafisica riprensibile, e tutti facilmente s'accorderanno a riguardare i divarj de' modi, con cui si potranno trattare le flussioni e i differenziali, come nulla più importanti che quelli de' trattati delle Sezioni Coniche. Onde si potrà similmente eziandio convenire del nome. Poichè fra tutti i nomi, con cui si possono chiamare grandezze, che impropriamente si possano dire proporzionali agli incrementi momentanei, ogni ragion vuole che il nome di flussioni si preferisca, non solo per dritto d'anzianità e di possesso, e per riguardo di gratitudine all'inventore, ma perchè presenta l'idea la più chiara, più facile, più naturale, e più manifestamente connessa, non con uno solo, ma con tutti i principj, con cui se ne possono trovare i rapporti.

Nell'esposizione, da cui ho cominciato, mi sono valuto del principio il più proprio, e immediato, che per la flussione, che varia, si vuol prendere l'incremento qual si farebbe, s'ella non mutasse. Il pensiero è così naturale ed obvio che anche un idiota per dar la misura della velocità, con cui vada egli allora camminando, potrà dire che di quel passo proseguendo ei farebbe due, tre o più miglia l'ora. Vero è che la velocità, la quale un idiota facilmente concepisce potersi ottimamente misurare col cammino, che non si fa, ma si farebbe, suole supporsi perseverare per alcun tempo la stessa. Ma siccome la determinazione di cotal misura di velocità non dipende in conto alcuno dal maggiore o minor tempo del moto realmente fatto con quella velocità, così è naturale di prescindere dalla considerazione di questo tempo. O la velocità si cangi di tratto in tratto per salto, o del continovo, la misura della sua grandezza non può esser altra; poichè l'idea di grandezze nelle velocità evidentemente si identifica coll'idea delle grandezze degli spazj, che le velocità fanno percorrere supposte costanti.

Il matematico non deve usar parole, che non s'intendano abbastanza per lo suo intento di condurre a certa e precisa misura delle grandezze. Ma il non adoperar parole, su cui si possano far questioni fuor di proposito, in niun discorso è possibile. Il cercare che cosa sia *velocità* è questione di Metafisica, e di Fisica, non di Geometria. La difficoltà più facilmente si scorge nella velocità, che varia del continuo. Ma è assolutamente la stessa nel moto uniforme considerato in un qualunque suo punto, sempre che si vuole stare alla precisione del punto matematico. Sinchè in un punto il movimento sarà del tutto nullo, il mobile starà immoto in quel punto eternamente. E se in quel punto v'è qualche cosa di movimento, che non è nulla, sia questa un impeto, una tendenza, un'energia, una forza di Inerzia Neutoniana, o che che si voglia, questo è la velocità, *quantitas motus in actu*, la grandezza del movimento, che si fa; non già fatto, o da farsi. Ed è chiaro che quando la grandezza ne sia stata a quel punto precisamente tanta, o si mantenga, o non si mantenga la medesima, nulla importa; non potrà essere stata altra a quel punto, perchè abbia variato poi. Molte sofisticherie si possono dire contra il moto, sulle quali basterà vedere la IV.ª Acroasi soggiunta alla Logica del Facciolati. E conosco un filosofo, che tuttora seriamente crede non potersi il moto spiegare che con sempre nuova creazione della stessa cosa in diverso luogo. Ma v'ha pur chi nega l'essere delle corporali cose, e le vuol tutte meri fenomeni. Non avremo a valerci del verbo *essere* in Matematica?

Ma mi si dirà che non si pretende che non debba il matematico prescindere da sì fatte questioni; nè gli si vieta d'adoperare al bisogno la parola *velocità*; solo si vuole che ne aspetti il bisogno nelle teorie della Meccanica. Osservo pertanto che nella nozione delle flussioni la velocità non è propriamente e del tutto la stessa cosa che in Meccanica. Noi non possiamo parlare delle cose ideali che trasportandovi i vocaboli dalle cose corporali. In queste la velocità è determinata da forza di Natura, nelle flussioni da forza di conseguenza di una legge di relazione supposta fra le fluenti. Ora il bisogno di mentovare questa geometrica velocità vien per appunto nel trattato delle flussioni. Si potevano queste in vece di velocità dire grandezze di mutabilità, o di variabilità. Ma sarebbe stata la frase senza motivo men chiara; poichè non parlandosi di cose spirituali, nè morali, tutte le mutazioni o variazioni si fanno unicamente col moto. Ora quello d'un punto bastando a qualunque variazione di grandezza rappresentata da una linea, qual ragione v'era di non valersi di così facil supposto?

Un secondo general principio, o piuttosto mezzo per trovare e dimostrar le flussioni sono gli *evanescenti*, i quali il Sig. *Lagrange* in fine della pag. 2 ponendo come un sinonimo degli infinitamente piccoli, ne inferisce esserne l'uso soggetto alle stesse difficoltà che il Calcolo Differenziale. Non so come abbia potuto ciò scrivere. Il Calcolo differenziale soffre difficoltà per gl' infinitamente piccoli, perchè a essi dà valore, e ne fa equazioni; quello delle flussioni non dà valore agli evanescenti, fa svanire gl' incrementi. Gl' infinitamente piccioli o si vogliono soltanto di picciolezza da non tenerne conto fra grandezze d'altro ordine, e non appagano lo spirito geometrico nella speculazione, o son nulla, e a un tempo stesso nol sono, sono un *nulla rispettivo*, e in questo *nulla rispettivo* ne sta tutta la difficoltà. Gl' incrementi svanendo cessan d'essere, diventan nulla assoluto: nè quando per mezzo loro le flussioni si trovano, si hanno perciò le flussioni a concepire piuttosto picciole che grandi. *Neuton* soleva tralasciare di tener conto della flussione costante, la quale essendo arbitraria, è naturale di farla $= 1$. Poneva adunque l'unità per le flussioni la stessa con quella delle grandezze costanti, o fluenti.

Il trovarle, dimostrarle per mezzo degli evanescenti è di tutt' altra ragione che la metafisica degl' infinitamente piccoli, e si riduce alla considerazione de' limiti mentovata prima dal Sig. *Lagrange*; siccome quella, che posa unicamente sul principio che impicciolendo gl' incrementi, la ragion loro $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ si va via via appressando alla ragione delle flussioni $\frac{\partial y}{\partial x}$, senza però giungervi che a quel punto, dove Δy e Δx pervengono insieme a svanire, esser nulla; nel qual punto $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{0}$ dovrebbe essere precisamente $= \frac{\partial y}{\partial x}$. Tutte cose, che non hanno la menoma difficoltà. Perchè è verissimo che $\frac{0}{0}$ per sè non significa grandezza determinata: ma vie meno significa doversi il rapporto in quel caso riputare indeterminato, mentre al contrario tutti sanno che si può esso altronde determinare. E si determina appunto col riflesso, che serve di principio all' uso degli evanescenti nella ricerca delle flussioni; che il rapporto di queste è quello, in cui vanno a terminare gl'incrementi, che svaniscono, o ciò, che riviene allo stesso, è il rapporto, in cui gl'incrementi si hanno a concepir nascere. Perchè in ogni altra ricerca, dove si devenga a $\frac{0}{0}$, supponendo che generalmente il numeratore, e il denominatore fossero due coordinate, è chiaro che $\frac{0}{0}$ è il rapporto loro al punto, dove esse cominciando insieme non si distinguono dai nascenti loro primi incrementi, e però se ivi esse non fosser nulla, vi sarebbero anch'esse nel rapporto delle flussioni loro. Ond'è il teorema $\left(\frac{y}{x}=\frac{0}{0}\right)=\frac{\delta y}{\delta x}$, $\left(\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{0}{0}\right)=\frac{\delta^2 y}{\delta^2 x}$, ec. non men necessario alla teoria delle Funzioni derivate, benchè in essa non sia così facile vederne la ragione.

Mi rincresce di dovermi così estendere in dichiarazioni di cose notissime. Però a finirla osserverò che il Calcolo differenziale ha principj, e dirò così, leggi particolari sue proprie, per cui può aver bisogno d'una metafisica non necessaria ai Matematici, che quel calcolo non adottino. Ma il metodo delle flussioni non ha principio alcuno, nè legge, che non sia la stessa in altre parti delle matematiche; onde non può aver bisogno d'altra metafisica, oltre quella, che ogni Matematico dee riconoscere per buona, legittima, evidente. Richiede, è vero, che gli si conceda che due punti possono generare, percorrere due linee con diversa velocità. Ma questo, che in Natura si avvera d'infiniti punti a ogni momento, è un *postulato* men negabile ancora che i primi di Euclide; che da punto a punto si possa una retta condurre, e quindi continuare: dove le sue parole *ἀγαγεῖν*, e *κατὰ τὸ συνεχὲς* includono il flusso del punto. E chiunque voglia considerare come dianzi io da questo postulato sia giunto al teorema di *Taylor*, e come si può la flussione dell'area anche altrimenti con ogni rigore dimostrare senza far uso degli evanescenti (vedi il citato volume dell'Accademia di Torino pag. 495, e 496) scorgerà non esservi luogo neppure a pretesti di trovarvi principj, che ogni Matematico non fosse in necessità di confessare veri ed evidenti avanti al trovato delle flussioni. La qual cosa nè più nè meno scorgendosi nella Teoria delle Funzioni derivate, vanno per questa parte le due teorie del pari: nè fra esse v'è divario in questo che l'una sia di metafisica pura matematica, l'altra nò. Ugualmente amendue sono mere parti di quella metafisica, la quale ho detto essere la speculazione, che fa strada alla misura d'ogni cosa.

Siccome però si possono pur dire metafisiche diverse, inquanto elle sono speculazioni diverse, domandandosi in che differiscano, alle differenze già osservate aggiungerò che per molto diversa strada esse vanno ugualmente incontaminate dalla metafisica degl'infinitamente piccioli. Perchè la Teoria delle Funzioni derivate non dà apparentemente da principio neppure occasione di pensarvi: il metodo delle flussioni al contrario viene subito a teoremi, dove sotto uno o sotto altro de' suoi varj aspetti s'affaccia quella difficoltà, per cui s'è ricorso agli infinitamente piccoli. La difficoltà vien dalla richiesta di precisione assoluta, quale si è quella del punto matematico. Questa difficoltà, che non si scorge ne' rapporti de' numeri intieri, e comincia a lasciarsi vedere negli incommensurabili, soprattutto si manifesta in quella più sublime geometria, il cui soggetto sono le funzioni trascendenti, le grandezze, che neppure algebraicamente possono assegnarsi con un finito numero di termini. Queste conducono la speculazione a quelle serie, i cui termini vanno minorando all'infinito, e alla considerazione de' limiti, a cui le somme, i valori si appressano senza mai pervenirvi. E per la congiunzione delle due idee elementari, della precisione del punto, e della continuità della linea, da cui seguene la divisibilità all'infinito, si vien necessariamente a qualche difficil passo, come quello, che ci ha trattenuti non poco discorrendo della velocità, e quello, da cui parlando della direzione d'un punto della periferia ci siamo cavati col dichiarare che l'uso della parola era improprio.

Però questa non è difficoltà, che agl'ingegni non superficiali giovi palliare, dissimulare: conviene affrontarla. Il verbo *essere*, parlandosi di cose immutabili, ha significazione assoluta; ma delle mutabili necessariamente riguarda un tempo. Il presente, allor che dico di alcuna cosa ch'ella è, può pigliarsi con qualche estensione, che abbracci più, o meno del passato e del futuro. Ma se ne può ristringere il concetto quanto si vuole; ed è chiaro che se io vorrò portare l'indicazione del tempo presente a precisione assoluta, ne dovrà la durata esser nulla; e vieppiù è chiaro che supposto vero che una cosa sia di presente, quando io estendo il presente a un minuto secondo, non sarà men vero ch'ella è, quando io porti la precisione del mio intendimento a un punto di quel minuto secondo, concependo quel punto senza durata.

In geometria non v'è bisogno di considerazione di tempo, ma sempre che vi si considerino grandezze variabili, i punti, a cui si riferiscono i valori loro, vi tengono luogo degl' istanti nel tempo; come più manifestamente si vede nel supposto che si generi l'ascissa con flussione costante.

Dove a convincersi che la difficoltà unicamente proviene dalla richiesta di una precisione assoluta basta riflettere che rinunziando a questa, svanisce la difficoltà. Se ci contentiamo d'approssimazione maggior d'ogni bisogno, ci basta far crescer l'ascissa con un seguito d'incrementi uguali di tal picciolezza, che non sia da tenerne conto in paragone, supponiamo, del parametro della curva, e d'altre grandezze non troppo minori, e che si possa francamente considerare l'incrementuccio corrispondente della curva come rettilineo, con tutti gli altri supposti del calcolo differenziale Leibniziano, le cui differenze infinitamente picciole, se così riduconsi, con abuso di quel nome, a significare una picciolezza soltanto comparativa, non se ne può riprendere il calcolo, se non perchè dà aspetto d'approssimazione a ciò, che il geometra vuole, e può accertare precisamente. Perchè cotali infinitamente piccoli non sono grandezze, che non si possano a piacimento determinare, per esempio se io pongo che a sia dieci metri, e dico di non voler portar la precisione tant'oltre che colle grandezze fra a^{20} ed a^{-20} s'abbiano a porre in conto quelle, che stieno fra a^{-80}, ed a^{-120}; e che però sarà a^{-100} il decametro del primo ordine de'miei infinitamente piccioli, a^{-200} quel del secondo, ec. ed a^{100} il decametro del primo ordine degli infinitamente grandi, a^{200} quello del secondo, ec.

Ma niuno, che abbia spirito veramente geometrico, vorrà mai stare a precisione limitata. E perciò gli è d'uopo non isfuggire, ma vincere la difficoltà, riflettendo ch'ella è solo per la fantasia, la quale, dirò così, vuol farsi la figura di ogni cosa. E nelle figure non si possono distinguere insieme grandezze troppo diverse. Sulla carta, in cui stieno tracciate le orbite de'pianeti, non si può vedere il lungo telescopio di

Galileo, che stia osservando i satelliti di Giove. E pur la fantasia vorrebbe ogni cosa distinguere in una sua carta universale, la cui scala è proporzionata alle grandezze, che facilmente si misurano co' sensi nostri. Quindi la perduta sua pena a volersi rappresentare la distanza ora dal Sole a Sirio, ora de' centri di due contigue molecule del sangue, che scorre per le vene d'una pulce. Ma in tutto ciò l'intelletto non incontra la menoma difficoltà. Per aver punti precisi valendosi de' centri di gravità, i centri di gravità delle due molecule sono due punti diversi, e pertanto discosti e determinanti la lunghezza d'una linea retta nè più, nè meno che i due centri di gravità del Sole e di Sirio. Sono adunque le due distanze ugualmente grandezze lineari, finite da due punti, come tutte le altre. L'intelletto nelle parole *ogni*, *qualunque* vede incluse colla stessa facilità tutte le grandezze misurabili con qualunque scala; onde non gli giova il ricorso a diversi ordini di grandezze impropriamente definite *infinitamente picciole, finite, e infinitamente grandi*, il quale dà qualche soddisfazione alla fantasia mostrandole come, se essa non può tali grandezze distinguere tutte nella sua carta universale, ella può rappresentarsele distintamente in altre diverse carte particolari, ciascuna colla sua scala. Ma l'intelletto in questa distinzione vede soltanto implicita una contradizione che una stessa grandezza sia determinata e non terminata, e peggio ancora se si vuole che sia nulla, e nol sia.

Venendo pertanto al caso del rapporto delle mutabilità dell'area e dell'ascissa, dal quale ho cominciato, l'intelletto vede subito che gl'incrementi, o differenze sono le mutazioni fra due punti, non una mutabilità riferibile a un punto preciso, e che una differenza non appartiene piuttosto al termine, a cui debbasi aggiungere, che a quello, da cui si abbia a sottrarre, e che perciò nel caso della *Fig.*ª 3.ª il rapporto delle mutazioni ci darà il rapporto delle mutabilità al punto medio preciso, ma non così nel caso della *Fig.*ª 4.ª nel quale vedrà che più Pp sarà piccolo, meno Mm scosterassi da una linea retta. Ed eccolo alla difficoltà, che mentre la fantasia ravvicinando di più in più PM a pm, molto prima ch'ella pervenga a far di esse rette una sola, cesserà di distinguere fra i vicinissimi punti M, m, l'arcuccio dalla corda, l'intelletto al contrario vede il caso de' punti più vicini e quello de' più lontani indifferentemente nella proposizione generale, che qualunque retta abbia due punti comuni colla periferia, la taglia, e non ha con essa comune alcun altro punto.

Però volendo la precisione al punto, fra le varie speculazioni per conseguirla nel caso, doveva la medesima fantasia col moto de' punti, ch' ella andava approssimando, condurre i pensieri a quella di *Neuton* dedutta dalle idee del moto, e della velocità, la quale è quella grandezza di movimento, che concependosi la medesima in ugual moto uniforme, che duri un secolo, o solo un minuto secondo, rimane la medesima quando si assegni a un punto di tempo senza durata.

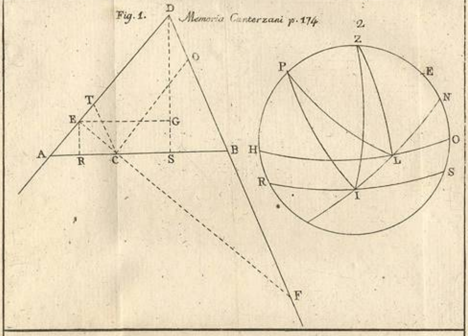
Or l' idea della velocità non lascia dubbio; ma abbiam veduto ch' ella affronta, non iscansa la difficoltà, che prova la fantasia a recarsi alla precisione del punto; onde può lasciar la brama d' una speculazione, che non incontri questa difficoltà. Che però grande certamente sarebbe la superiorità della metafisica del Calcolo delle Funzioni derivate per questo vantaggio, se altrimenti l' ottenesse, che col non mostrarsi ella stessa. Ella vi si rinchiude in un maneggio d' algebra, che non lascia dubbio sulla verità delle formole, a cui perviene, ma non pone in vista lo scopo, l' oggetto, il vero soggetto di tutti que' calcoli; onde chi non ne avesse altronde notizia, non vi vedrebbe che un' osservazione sui coefficienti di certe serie, una dimostrazione del rapporto fra i medesimi; che sviluppando in certo modo una funzione primitiva in serie, quindi il suo primo coefficiente in altra simil serie, e il primo coefficiente di questa seconda similmente in una terza, il primo coefficiente della terza in una quarta, e così proseguendo, quanto si vuole, notando p, q, r, s, ec. i coefficienti della prima serie, il primo coefficiente della seconda sarà $2q$, quello della terza $6r$, quello della quarta $24s$, ec.

Vero è che il Geometra altronde istruito subito scorge nella sostituzione di $x+i$ a x la solita sostituzione di $x+x$, o di $x+\Delta x$, la quale è il mezzo più generale per ottenere una espressione degl' incrementi o differenze in più termini, alcuni de' quali annullati, gli resta l' espressione della mutabilità, ch' egli chiama o flussione, o differenziale. Vede che in $f(x+i)=fx+pi+qi^2+ri^3+$ ec. i termini moltiplicati per le potenze di i si hanno a far nulli, e $f(x+i)-fx=pi$

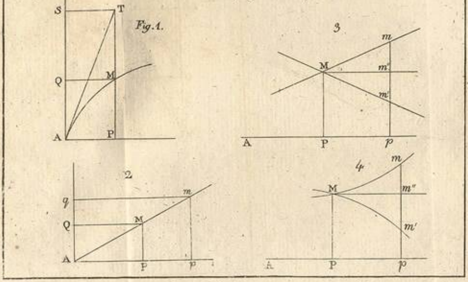
dà il rapporto delle mutabilità $\frac{pi}{i} = p$; e vede anche nella sostituzione di $x + o$ a x fatta per mezzo di $p + op'$, $q + oq'$, $r + or'$, primi termini di serie simili a $p + ip'$, $q + iq'$, ec. con quale artifizio il Sig. *Lagrange* sia pervenuto a un equivalente del teorema di *Taylor*. Ma vi vede altresì implicita nella teoria delle serie all'infinito la difficoltà, che arresta la fantasìa nel recarsi alla precisione del punto. E proseguendo la lettura del libro, mentre del continuo egli vi ammira la profondità del Geometra, che l'ha scritto, vi rivede in diversi luoghi trasparire la medesima difficoltà, la quale siccome intrinseca e inseparabile dalle ricerche di questi calcoli, a me pare che s'abbia a volere scoperta piuttosto che velata.

Resterebbeci a vedere se il calcolo delle funzioni derivate *possa ridursi alla semplicità degli altri metodi*, *massimamente del Leibniziano*, *tanto nelle applicazioni puramente analitiche, quanto nelle geometriche*. Il Sig. *Lagrange* non ha dimenticate queste applicazioni, benchè le *Lezioni* non s'estendano alla Meccanica, a cui egli aveva applicata la sua *Teorìa delle Funzioni* dalla pag. 223 all'ultima 277; sicchè o nell'uno de' citati libri, o in tutti e due egli ha tutte le precipue applicazioni, trattate con quella maestria, che lo distingue, e che pochissimi possono presumere di pareggiare. Vi brama dunque l'Accademia soltanto, se è possibile, maggiore *semplicità*, credo quella spedita facilità, che si trova per esempio nella *Analyse des Infiniment-petits* del Marchese *De l'Hôpital*. Le teorìe, che dall'universale ed astratto scendono al particolare e concreto, quanto più sono estese, profonde, e divisate accuratamente senza lasciarvi eccezione dimenticata, tanto debbono riuscire meno facili a chi comincia, e richiedono a bel principio calcoli, e formole meno brevi. Nè però voglio asserire che non si possano i principianti condurre per più facile strada all'intelligenza e alle applicazioni della teorìa delle funzioni derivate. Ma quanto e come ciò si possa, è ricerca non solo troppo ardua per le forze mie, ma solo convenevole a chi ne preferisca il calcolo ad ogni altro metodo. A me più si conviene bramare quello, che certamente è possibile, che qualche valentuomo dia un trattato elementare delle flussioni adattato, e corrispondente a quel grado di perfezione, a cui ora è giunta l'Analisi, ed esteso ai

Memoria Canterzani p. 174



Memoria Valperga Caluso p. 224



principj de' nuovi calcoli, di cui pure ho detto qualche cosa nel più volte citato volume dell'Accademia di Torino per l'anno 1786, dove avendo studiato di non lasciare sulle Flussioni la menoma difficoltà non ischiarita, vi rimando chi ne incontrasse in questo scritto.