ESPOSIZIONE
DEL VERO PRINCIPIO DIMOSTRATIVO
DELL' EQUILIBRIO

Del Sig. Ermenegildo Pini (*).

Ricevuta li 4 Aprile 1808.

Sino ai tempi di Daniele Bernoullio si fece uso nella Meccanica della Risoluzione e Composizione delle Forze, abbenchè dell' Equilibrio non si fosse per anco data una dimostrazione a lui compiutamente satisfacente; e ciò per le ragioni, ch' egli espose nel Tomo I dei Commentarj dell' Accademia di Pietroburgo. Quindi egli ne produsse un' altra maniera di dimostrazione a suo giudizio più esatta. Questa però anche al rinomato *d' Alembert* non sembrò *la più semplice*, *nè la più rigorosa:* ond' egli ne sostituì un' altra, che espose nel Tomo I de' suoi Opuscoli matematici, e ch' egli riguarda come dotata di quelle proprietà, ch' egli desiderava in quella del *Bernoullio*. Nulladimeno altre dimostrazioni sullo stesso oggetto furono in seguito da altri prodotte; e recentemente anche il sublime Sig. *Laplace* nella sua Meccanica celeste ne espose una, facendo uso del calcolo infinitesimale.

L' eguaglianza di tre potenze, o forze agenti su di loro con direzioni, che formino un angolo di 120 gradi è il principio

(*) = *Lettera dell' Autore al Presidente* = Milano 2 Marzo 1808. = La scarsezza di Memorie Sociali da Lei accusata nell' ultima sua circolare mi richiamò alla mente quella mia Memoria, che Ella stimò non poter entrare nel Volume della Società a motivo di alcuni cenni riguardati come protologici o metafisici. Io pertanto l' ho riveduta per riconoscere quali questi fossero, e se potevano essere detratti senza togliere considerabilmente la chiarezza alle dimostrazioni. Avendo pertanto veduto, che ciò poteva farsi, io li detrassi; e ridussi la Memoria a quella, che io ora le trasmetto, credendo che essa possa aumentare non il solo numero delle Memorie: giacchè avendola comunicata ad alcuni Professori di Padova, allorchè io colà mi trovava, la trovarono soddisfacente al rigore dimostrativo.

Il Presidente, rispettando l' opinione del chiariss. Socio più della propria, ha ordinato la stampa della presente Memoria.

cipio assunto dal Sig. *D'Alembert*; e quello è il vero principio costitutivo dell'equilibrio, a cui è analoga la così detta *composizione e risoluzione* delle forze; e fa maraviglia, come da tale principio, che è per sè manifesto, non abbiano cominciato a partire i primi Meccanici, e molto più, che dopo di essere stato proposto da quell'illustre Matematico, non sia stato assunto dai Meccanici seguenti. Forse di ciò la ragione si è, ch'egli in quell'Opuscolo trattò dell'equilibrio, derivando le dimostrazioni non dall'assunto principio, così che questo vi rimane come una sterile nozione, quando che esso è fecondissimo di verità. Per lo che mi è sembrato poter essere utile cosa la dichiarazione di tale principio, e l'applicazione di esso alla dimostrazione generale dell'equilibrio meccanico fatta con un metodo quanto facile, altrettanto esatto. Quale questo sia verrò esponendo nella presente Memoria, aggiugnendovi alcune riflessioni sui principj da altri usati.

1. Come principio costitutivo dell'equilibrio io assumo la seguente asserzione: tre potenze R, S, T eguali in grandezza tra loro, che nello stesso piano agiscono verso un punto C (Fig. 1) con direzioni tra loro equidistanti AC, BC, EC, sono in equilibrio, cioè sono permanenti nello stesso stato, ossia in quiete.

Il principio è manifesto non meno di qualunque assioma; e la ragione dell'evidenza altri forse deriveranno dal non esservi ragione, per cui una prevalga all'altre. Ma questa ragione è negativa, epperò non del tutto soddisfacente. La ragione positiva è, che una potenza non può prevalere alle altre, in quanto che per la funzione propria dell'eguaglianza di tre potenze ognuna delle tre dà alle altre due quello, che da esse riceve: la qual ragione sarà meglio compresa dalle cose, che in seguito esporrò.

2. L'assumere le direzioni delle potenze equidistanti tra loro è bensì lo stesso, che supporre di 120 gradi l'angolo formato dalle due prossime tra loro, allorchè si riguarda l'equilibrio espresso al senso nostro, come equilibrio da compiersi. Ma nell'equilibrio come compiuto, ossia nel suo complemento, che è in un sol punto, rimane l'eguaglianza, o anzi l'identità delle direzioni senza che v'intervenga angolo veruno.

3. Nelle tre potenze assunte l'equilibrio non dipende dalla grandezza loro, ma dalla ragione d'eguaglianza, che è sì

nella grandezza, come nella direzione loro: d'onde segue, 1.°, che ognuna di esse potrà essere espressa da qualunque retta, purchè le rette si assumano eguali, ed equidistanti tra loro; 2.°, che quando tre potenze sieno in equilibrio, anche tre altre ad esse proporzionali, e similmente disposte, quanto alle loro direzioni, saranno in equilibrio.

4. Descrivendo dal punto C come centro col raggio AC un circolo, e supponendo che le potenze in vece di agire dalla circonferenza verso il centro, agiscano dal centro verso la circonferenza, i raggi CD, CH, CZ esprimeranno le tre potenze R, S, T, e le loro direzioni.

5. Conducendo le corde AZ, AH, HE, ED, DB, BZ, e prolungando le corde AZ, AH, come pure BD, BE sino al loro concorso nei punti L, Q risulteranno quattro rombi equilateri AOCH, QOCB, BCED, CHLE, che sono tra loro eguali.

6. In ciascuno di questi rombi, come BCED, la potenza espressa dalla diagonale CD, che passa per gli angoli ottusi, è in equilibrio colle due espresse dai lati contigui BC, CE, ossia è equivalente a queste due. Perciocchè le tre R, S, T agenti verso il punto C sono in equilibrio (n.° 1.); e supponendo, che la potenza R in vece di agire dal punto A verso C agisca da C verso D, il suo effetto sulle potenze BC, CE, ossia S, T è lo stesso: onde saranno in equilibrio anche le tre BC, CE, CD.

7. La precedente costruzione presenta parimenti tre rombi ACBZ, ACEH, BCED, i quali in tutto sono eguali tra loro: onde in ciascuno la diagonale CZ, CH, che passa pei loro angoli ottusi, esprimerà una potenza equivalente alle due espresse dai lati contigui; e tali potenze rispettivamente saranno tra loro in equilibrio.

8. Poichè nel rombo BCED la diagonale CD esprime una potenza equivalente alle due BC, CE, perciò le potenze espresse dalle tre rette CD, BC, CE costituiscono quell'equilibrio, che dai Meccanici si suole considerare; ed in questo le due potenze espresse dai lati BC, CE, si potranno chiamare *Componenti*, e l'altra CD espressa dalla diagonale, potrà dirsi *Risultante*. Queste denominazioni però, che dai Meccanici si sogliono usare, non devonsi prendere in senso assoluto, quasi che la risultante non possa essere componente: poichè, come appare dalla precedente costruzione, ogni risultante può esse-

re componente, e viceversa. In fatti per esempio CH nel rombo ACEH è risultante delle due AC, CE, ed insieme è una delle componenti nel rombo DCHE: il che deriva da questo, che nell'equilibrio primo ognuna delle tre potenze non può riguardarsi come componente, nè come risultante, ma tutte e tre devonsi dire *costituenti* dell'equilibrio; ond'è che quando tre potenze sono in equilibrio, ognuna delle tre devesi dire equivalente alle altre due.

9. L'equilibrio delle potenze espresse nel rombo BCED dalla diagonale CD, e dai lati ad essa contigui, si chiamerà originario, come quello, che è immediatamente derivato dall'equilibrio primamente assunto, che dee chiamarsi equilibrio primo. Quindi originario per brevità si chiamerà ognuno dei rombi sopradescritti, ed ognuno dei triangoli rettangoli, come NCE, formati dalle diagonali CD, BC, e dai lati del rombo BCED: come pure per segno dell'equivalenza assumeremo il seguente ⊏, così che l'espressione R⊏S, T, oppure CD⊏BC, CE, significherà, che la potenza R, ovvero CD è equivalente alle due S, T, ovvero BC, CE.

10. E qui è da osservare, che, trasformando l'equilibrio primo nel Meccanico, conviene supporre una forza resistente nel punto C oltre alle tre costituenti l'equilibrio, cioè a dire siccome nell'equilibrio meccanico supponesi, che la forza risultante agisca in senso diverso da quello, in cui agiscono le componenti, così conviene per esempio supporre, che le due BC, CE agenti al centro C non abbiano il solo contatto delle loro estremità, ma che sieno annesse alla terza CD per mezzo di un perno inflessibile, intorno al quale possano girare, ovvero conviene supporre, che le potenze agiscano applicate a tre fili non cedevoli, e tra loro connessi nel punto C. Laddove nell'equilibrio primo tal forza resistente non è necessaria, supponendosi le potenze agenti tra loro nello stesso senso, e verso lo stesso punto.

11. Se le estremità A, B, C delle rette esprimenti le potenze AC, BC, EC si congiungono colle rette AB, BE, EA si avrà un triangolo equilatero. In esso le metà dei suoi lati saranno i seni degli angoli opposti ai lati medesimi, ossia degli angoli formati dalle direzioni delle potenze stesse; le rette CN, C*n*, C*n*' saranno i coseni degli angoli medesimi: onde nell'equilibrio primo le potenze saranno proporzionali sì ai

seni, che ai coseni indicati, cioè potranno essere espresse per gli stessi seni e coseni.

12. Quindi se tre potenze sono espresse dai lati di un triangolo equilatero come DEC si dovranno dire in equilibrio, in quanto che esse sono riducibili all'equilibrio originario: il che si ottiene compiendo su di esso un rombo, qual è BDEC.

13. Se tre potenze sono in equilibrio, come BC, CE, DC, (Fig. 2) una qualunque di esse equivale alle altre due. Imperocchè se non fosse reciproca l'equivalenza, due prevalerebbero ad una, ovvero una prevalerebbe a due: il che escluderebbe l'equilibrio.

14. Quindi le tre potenze espresse dalle rette BC, CE, DC sono in equilibrio, compiendo su una qualunque di esse come diagonale un paralellogrammo; la potenza espressa dalla diagonale equivalerà alle due espresse dai lati ad essa contigui. Imperocchè se si compie il paralellogrammo sulle tre rette date, esso sarà BCED, nel quale è manifesto, che sarà DC ⊐ BC, CE, com'è per ipotesi.

15. Che se per diagonale si assume CE, il paralellogrammo si formerà prolungando BC sino in H, così che sia CH = BC, e conducendo EH paralella a DC. Ora è manifesto, che sarà CE ⊐ DC, CH. Perciocchè supponendo, che l'equilibrio fosse tra la potenza DC agente da D verso C, e le due agenti in senso diverso, cioè da C verso B, ed E, si potrà alla potenza BC sostituire la sua eguale CH, come agente da H verso C; giacchè l'azione da H verso C fa lo stesso, che l'azione da C verso B. Se dunque sono in equilibrio tra loro le tre potenze BC, CE, DC lo saranno anche le tre CH, CE, DC: onde sarà CE ⊐ DC, CH, ossia CE ⊐ DE, EH.

16. Se finalmente per diagonale si prende l'altra BC, si avrà il paralellogrammo prolungando EC sino in P, così che sia CP = CE, e conducendo BP paralella a DC. In questa costruzione la potenza PC, agendo da P verso C avrà la stessa azione, che ha CE agendo da C verso E. Per lo che essendo in equilibrio le tre BC, CE, DC, lo saranno parimenti le tre BC, PC, DC: onde sarà BC ⊐ PC, CD; ossia BC ⊐ BD, BP.

17. Nel rombo originario BCED (Fig. 1) la diagonale BE, che passa per gli angoli acuti esprime una potenza equivalente alle due espresse dai lati contigui CE, ED. Imperocchè l'equivalente alle due CE, ED, essendo queste eguali, deve

passare pel mezzo dell'angolo CED, epperò è nella direzione della diagonale EB. Ora se l'equivalente a queste non è espressa dalla diagonale stessa, suppongasi, che lo sia da un'altra o maggiore o minore di BE, e si chiami X. Se la supposta potenza X fosse veramente equivalente alle due CE, ED, le tre potenze CE, ED, X sarebbero in equilibrio, epperò (n.° 14, 15) su ciascuna delle rette esprimenti tali potenze presa per diagonale potrebbesi compiere un paralellogrammo, in cui la diagonale esprima una potenza equivalente alle due espresse dai lati contigui. Ma, posto che la potenza X sia espressa da una retta maggiore di EB, com'è EB', non può in verun modo colle rette EB', CE, ED formarsi un paralellogrammo. Lo stesso sarebbe se si supponesse X espressa da una retta minore di EB, qual sarebbe EB''. Non può pertanto una potenza X espressa da una retta maggiore, o minore della diagonale BE essere equivalente alle due CE, ED; epperò l'equivalente a queste due dee essere espressa dalla diagonale stessa BE.

E veramente se le tre potenze espresse dalle rette CE, ED, EB' fossero in equilibrio, formando un paralellogrammo ECQ'B' coi lati EB', EC, questo dovrebbe avere per diagonale un lato BC = DE. Ma la diagonale CB' è maggiore di CB, ossia di DE. Per lo che quelle tre potenze non possono essere in equilibrio. Per simile ragione non lo possono essere se fossero espresse dalle tre rette CE, ED, EB''.

18. Quindi nel triangolo rettangolo NCE i tre lati esprimeranno tre potenze in equilibrio; ossia nel paralellogrammo rettangolo NCKE sarà CE ⊐ NE, EK. Imperocchè supponendo le due potenze EC, ED agenti da E verso i punti C, D, sarà 2EN ⊐ CE, ED (n.° 17), come pure supponendo le due potenze EC, EL agenti verso i punti C, L, sarà 2EK ⊐ EC, EL (n.° 6); onde si ha 2EN, 2EK ⊐ EC, ED, EC, EL. Ma ED, EL, essendo eguali ed opposte, sono come nulle: dunque sarà 2EN, 2EK ⊐ 2EC, ossia EC ⊐ EN, EK ⊐ EN, NC (n.° 3).

19. Poichè nel rettangolo NCEK la potenza espressa da CE è equivalente alle due CN, CK, ossia CN, NE, perciò le tre potenze espresse dai lati del triangolo rettangolo NCE si potranno dire in equilibrio nel senso esposto al n.° 14. E poichè nel triangolo rettangolo i lati sono gli stessi seni degli angoli opposti, perciò ognuna delle tre potenze sarà espressa dal seno dell'angolo formato dalle altre due, cioè a dire CE

sarà espressa dal seno dell'angolo CNE; EN da sen. NCE; NC da sen. NEC. Ma il seno dell'angolo NCE è lo stesso che il coseno dell'angolo NEC, che è il suo complemento, come pure sen. NEC è lo stesso che cos. NCE, epperò sarà EN : NC = cos. NEC : cos. NCE.

20. Come nel rombo originario la diagonale BC esprima (Fig. 1) una potenza equivalente alle due espresse dai lati contigui CE, ED si può più positivamente dimostrare nel seguente modo. È chiaro, che la risultante delle due CE, ED deve passare pel mezzo dell'angolo DEC, epperò deve essere nella direzione della diagonale EB, ed essere perpendicolare all'altra DC. È parimenti manifesto, che la risultante di due potenze non può essere diversa dalla risultante di due altre se non per ragione o della diversità di grandezza delle potenze, o della diversità delle loro direzioni, ossia degli angoli che formano, o per ambedue le ragioni insieme. Quindi, allorchè due potenze BC, CE eguali tra loro formano un angolo eguale a quello formato da altre due C*a*, C*d* eguali tra loro, ma diverse dalle prime, le loro risultanti devono essere in ragione delle componenti rispettive: il che primamente è chiaro, allorchè l'angolo BCE è di 120°, mentre la risultante allora è eguale a ciascuna delle componenti (n.° 6). Ma quando due potenze BC, CE sono eguali tra loro, ed a queste sono eguali due altre CE, ED, le quali formino un angolo CED diverso dall'angolo BCE formato dalle prime due, le risultanti non possono essere diverse tra loro, se non per ragione della diversità degli angoli, la quale diversità è da estimarsi dai seni degli angoli medesimi; e ciò è manifesto nell'equilibrio origmario, in cui la risultante DC è espressa dal seno dell'angolo ottuso BCE, nè può essere espressa dall'angolo medesimo. In fatti il rapporto delle tre potenze nell'equilibrio originario è di eguaglianza, poichè la risultante è eguale a ciascuna delle componenti: ma gli angoli, che formano tra loro le potenze, non sono eguali, essendo di 120 gradi l'angolo formato tra loro dalle due componenti, e di 60 quello formato dalla risultante con ciascuna componente: onde il rapporto d'eguaglianza delle tre potenze equilibrate tra loro non può esser espresso dagli angoli, ma è da esprimersi dai seni o coseni degli angoli, che esse formano, giacchè il seno dell'angolo di 120° è lo stesso col seno dell'angolo di 60°.

Ora la risultante delle due BC, CE, che è CD, ossia 2CN, è il doppio seno dell'angolo CEN, ovvero il doppio coseno dell'angolo DCE, ossia NCE, che la risultante DC forma con ciascuna delle due componenti BC, CE. Per lo che, dovendo il rapporto delle due risultanti da componenti eguali, ma costituenti diverso angolo, essere espresso dai rispettivi seni, o coseni dei loro angoli, la risultante delle due CE, ED costituenti un angolo di 60° supplemento dell'angolo di 120° deve parimenti essere espressa da una retta, che sia il doppio coseno dell'angolo NEC, ossia NED, ch'essa forma colle rette CE, ED; il qual coseno è NE. E poichè le due diagonali DC, BE si tagliano vicendevolmente per mezzo, e ad angoli retti, ed inoltre BE taglia per mezzo l'angolo CED = NCE, come CD taglia per mezzo l'angolo BCE, perciò la retta, che deve essere il doppio coseno dell'angolo NEC, ossia NED, cioè che deve essere 2NE, non può essere, che la diagonale EB, siccome quella, che è = 2NE. Dunque nel rombo originario la diagonale BE, che passa per gli angoli acuti esprime una potenza equivalente alle due espresse dai lati ad essa contigui.

21. Questa verità è così dedotta per analogia all'equilibrio originario derivante dall'equilibrio primo: la qual analogia devesi ammettere, affinchè il rapporto tra le due risultanti sia costante, cioè conveniente col principio dell'equilibrio primo. E veramente intanto la risultante DC può essere espressa da 2NC, come doppio coseno dell'angolo NCE, in quanto che essa deve formare, come si è veduto, un angolo retto colla risultante delle due CE, ED; d'onde viene costituito il triangolo rettangolo CNE, in cui l'ipotenusa CE è una delle tre potenze eguali costituenti sì l'equilibrio primo, che l'originario. Ora in questo triangolo è $\frac{1}{2}$ DC : NE = sen. NEC : sen. NCE, ossia DC : 2NE = sen. NEC : sen. NCE = cos. NCE : cos. NEC. Ma nell'equilibrio originario (n.° 20) le risultanti sono espresse dal coseno degli angoli, che esse formano colle componenti eguali. Dunque come DC, che è espressa da cos. NCE, è la risultante delle due BC, CE, così 2NE, ossia EB come espressa da cos. NEC, sarà la risultante delle due CE, ED, che sono eguali tra loro.

22. Quindi si può dedurre quello, che già fu dimostrato (n.° 18), cioè che nel triangolo rettangolo NCE i tre lati

esprimono tre potenze in equilibrio, ossia che nel rettangolo NCEK è CE $\sqrt{\ }$ NE, EK.

23. Avendo riguardo all'analogìa si può asserire, che tre potenze espresse o esprimibili dai lati di un triangolo qualunque sono in equilibrio, in quanto che compiendo su di essi un paralellogrammo, ogni diagonale di esso esprimerà una potenza equivalente alle due espresse dai lati a ciascuna contigui. Come ciò si verifichi nelle potenze espresse dai lati dei triangoli originarj DEC, CNE fu già da noi dimostrato. Ora affinchè tre altre potenze sieno tra loro in equilibrio, devono avere un'espressione analoga alle espressioni sì dell'equilibrio primo, che dell'originario, cioè devono essere riducibili alla condizione di tale equilibrio: perciocchè altrimenti sarebbero tre potenze, che si direbbero in equilibrio senza aver il senso di questo nome, ossia senza avere primamente formata un' idea vera dell'equilibrio, la quale richiede, che si determini la condizione prima, o la costituzione, che devono avere tre potenze per essere in equilibrio; condizione, che non dipende dall'arbitrio nostro, essendo costituita da Natura, cioè da quella Potenza, da cui sono le potenze, o forze meccaniche. Ma affinchè tre potenze si possano ridurre all'equilibrio primo ed originario, esse devono essere espresse, o esprimibili dai lati di un triangolo: perciocchè, essendo in ogni triangolo i lati come i seni degli angoli opposti, le potenze espresse dai lati saranno espresse col rapporto alle loro direzioni; epperò ognuna sarà espressa dal seno dell'angolo, che formano le altre due; il che è la condizione dell'equilibrio primo ed originario (n.° 11, 19). Certamente non si può trattar dell'equilibrio di tre potenze, senon supponendo tacitamente, che esse sieno esprimibili pei lati di un triangolo. Tre potenze pertanto, se sono espresse dai lati di un triangolo, sono in equilibrio; e vicendevolmente se sono in equilibrio sono esprimibili pei lati di un triangolo.

24. L'antecedente teorema comprende tutti i varj casi dell'equilibrio di tre potenze. Ma perciocchè la dimostrazione di esso derivata dall'analogìa potrebbe ad altri sembrare non abbastanza convincente, io progredirò a dimostrare indipendentemente da essa, l'equilibrio di tre potenze espresse dai lati di qualunque triangolo rettangolo. A tal fine sulla diagonale CD (Fig. 3) del rombo originario BCED si formi

un

un rombo FCGD ad esso simile, ma in modo, che l'angolo acuto sia al punto C. Sarà CD⊐FC, CG (17, 20). Dippiù il triangolo rettangolo NCG, essendo simile all'altro NCE, esprimerà nei suoi lati tre potenze in equilibrio (n.° 3, 23), così che, compiendo su di esso un rettangolo, la potenza espressa dalla diagonale CG sarà equivalente alle due espresse dai lati NG, GX, ovvero CN, NG.

Sarà parimenti FG⊐CG, GD (n.° 3, 6): e poichè per essere DCE un triangolo equilatero le tre rette CG, GE, GD esprimono tre potenze costituenti l'equilibrio primo, perciò sarà EG⊐CG, GD: onde si avrà FG = GE = BF.

25. Descrivendo col raggio CN un cerchio TNY, le due ipotenuse CE, CG dei due triangoli rettangoli NCE, NCG sono secanti, ed i lati NE, NG sono le loro corrispondenti tangenti, ed il lato NC è ad essi comune: onde le potenze espresse dai tre lati di ciascuno di questi due triangoli, le quali abbiamo veduto essere in equilibrio, sono espresse dal raggio, dalla secante, e dalla corrispondente tangente. Ora conducendo qualunque altra secante, come CA, la potenza espressa dalla corrispondente tangente NA, sarà in equilibrio colle due espresse dal raggio CN, e dalla secante CA. Ciò devesi ammettere, affinchè l'equilibrio abbia una legge costante, quale è quella indicata dalle potenze espresse dai due triangoli NCE, NCG. Ma per una più precisa dimostrazione supponiamo, che la cosa sia altrimenti. In tale supposizione, o si vuole, che la potenza, la quale deve esser in equilibrio colle due NC, CA sia nella direzione della tangente, o no. Se supponesi in una direzione diversa da quella della tangente, essa non avrebbe comunicazione colla secante, epperò non potrebbe costituire equilibrio colle due NC, CA. Che se supponesi essere nella direzione della tangente, ma espressa da una retta minore della tangente NA, essa parimenti non comunicherebbe colla secante, onde non potrebbe essere in equilibrio colle due proposte potenze NC, CA. Resta pertanto, che si supponga maggiore. Per mostrare, che ciò non possa essere, intendasi la tangente divisa in piccolissime, ed innumerevoli parti tra loro eguali, ed una di queste si chiami dx. Intendansi parimenti condotte a ciascun punto di divisione le corrispondenti secanti, e sia Cr la prima secante, o la più vicina a CE: nella quale ipotesi la porzione Er della tangente intercetta tra le due secanti

CE, Cr sarà $= dx$. Ciò posto è chiaro, che se la potenza equilibrata colle due espresse dal raggio Cr, e da una secante qualunque fosse espressa da una tangente maggiore di quella, che corrisponde alla sua secante, la potenza equilibrata con CN, e Cr potrebbe essere N$r + dx$, ossia Nr + Er, cioè NE. Ma questo non può essere, perciocchè è dimostrato (n.° 23), che NE esprime la potenza, che è in equilibrio con CN, e CE. E veramente essendo la secante Cr minore di CE, e formando un angolo CrN acuto, e maggiore dell' angolo CEN, non può la potenza equivalente alle due NC, Cr essere eguale, o maggiore di quella, che equivale alle due CN, CE; epperò non può essere espressa da una tangente eguale a NE, o maggiore di questa. Dee pertanto essere Nr la tangente richiesta.

Essendo dimostrato, che alla potenza espressa dalla prima secante Cr corrisponde una potenza espressa dalla tangente Nr, si dimostrerà nello stesso modo, che alle due potenze espresse dal raggio CN, e dalla seconda secante Ct non può equivalere una potenza espressa da una tangente eguale, o maggiore di quella che equivale alle due CN, Cr; e che perciò la potenza equivalente alle due CN, Ct deve essere espressa dalla tangente Nt. Una simile dimostrazione vale per la terza e per le altre successive secanti. Onde è da conchiudere, che le tre potenze espresse dal raggio CN, da una secante qualunque CA, e dalla corrispondente tangente NA sono tra loro in equilibrio: il che vale dentro i limiti del raggio NC, e della secante CE. Ma poichè l' angolo NCE è di 60 gradi, cioè maggiore di un semiretto, perciò i triangoli rettangoli formati dentro quei limiti conterranno tutte le possibili diversità di triangoli rettangoli per rapporto ai loro angoli, e conseguentemente ai loro lati. Per lo che le tre potenze espresse dai lati di qualunque triangolo rettangolo sono in equilibrio, cioè una qualunque di esse equivale alle altre due.

26. Che alle potenze espresse dal raggio CN, e da una tangente qualunque Nr sia equivalente la potenza espressa dalla corrispondente secante Cr si può dimostrare dal principio esposto al n.° 13 ed applicato al caso dimostrato nel n.° 17. Quindi in un rettangolo la diagonale, ed i due lati contigui esprimono tre potenze, ognuna delle quali equivale all' altre due.

27. In un paralellogrammo qualunque ciascuna delle due diagonali esprime una potenza equivalente alle due espresse

dai lati ad essa contigui (Fig. 4). Per provare primamente la proposizione per rapporto alla diagonale AC, che passa per gli angoli acuti del paralellogrammo FAHC, si costruisca su di essa come diagonale il rettangolo ADCB, e sul lato AF come diagonale il rettangolo ADFG. Sarà primamente AC⊏AD, AB (n.° 26), ossia AC⊏AD, AH, HB; ed essendo HB, AG eguali, ed agenti nello stesso senso, cioè verso B, sarà AC⊏AD, AH, AG. Ma è AF⊏AD, AG. Dunque, sostituendo, si avrà AC⊏AF, AH.

28. Per la diagonale AC, che passa per gli angoli ottusi del paralellogrammo FAHC (Fig. 5), si costruisca su di essa il rettangolo ADCB, e sul lato AF come diagonale il rettangolo GADF. Supponendo, che AC agisca da C verso A, le due AH, AF agiranno da A verso i punti F, H; ed allora le due GA, AD, che sono equivalenti ad AF, agiranno dai punti G, D verso A. Ora essendo DABC un rettangolo, sarà AC⊏AB, AD; ed essendo le tre potenze GA, AD, AF in equilibrio, sarà AD⊏FA, AG, (n.° 26), ovvero conducendo DG' paralella ad AF sarà AD⊏FA, AG'. Onde si avrà AC⊏AB, G'A, AF. Ma le due G'A, BH sono eguali ed agenti nella stessa direzione: onde sarà AC⊏AB, BH, AF, ossia AC⊏AH, AF.

Così dunque dalla prima forma d'equilibrio è dimostrato l'equilibrio di tre potenze nei varj casi, che occorrono nella Meccanica. Rimane ora, che io soggiunga alcune riflessioni su di alcuni principj, che da' Meccanici si sogliono assumere: il che richiede, che primamente io dichiari, come il principio da me assunto abbia una vera ragione di principio.

29. L'equilibrio costituito da tre potenze eguali, ed agenti con direzioni equidistanti tra loro è la prima forma d'equilibrio, e vuolsi chiamare equilibrio primo; e ciò per più motivi: primamente perchè presenta una verità per sè manifesta alla ragione, poichè per essere assunta come certa, non ha bisogno di essere riconosciuta per mezzo dei sensi, siccome quella, che è derivante immediatamente dalla ragione prima d'eguaglianza: dippoi perchè da quel principio deriva l'idea, e la dimostrazione dell'equilibrio nelle potenze meccaniche, come appare dalle cose esposte.

30. Nell'equilibrio primo essendo le tre potenze R, S, T tra loro eguali, ciascuna può essere espressa per uno, cioè per l'unità aritmetica, ossia per 1, e poichè una qualunque di esse, come R equivale alle altre due S, T, ciascuna delle quali è

parimenti uno nello stesso senso, perciò R equivalerà ad S con T; ma non si potrà dire, che equivalga alla loro somma, poichè allora 1 equivalerebbe ad 1 + 1, cioè a 2. Solo potrà dirsi, che 1 equivale ad 1 in 1, poichè 1 in 1 anche dai Matematici si riguarda come la potenza di 1, il cui valore è 1. Nè solo si può, ma deesi necessariamente ciascuna potenza nell' equilibrio primo nominare *uno*, affinchè si possa con verità esprimere qual è nel suo complemento. A dichiarazione della qual cosa vuolsi distinguere l'equilibrio come da compiersi, e come compiuto. L'equilibrio come da compiersi è la disposizione di tre potenze supposte, le quali noi rendiamo sensibili, esprimendole per tre rette dirette ad uno stesso punto; e questa disposizione come supposta è dalla potenza nostra d'intendere, e di sentire; onde presenta l'equilibrio soltanto come possibile, poichè le rette assunte non sono potenze. Quindi, affinchè l'equilibrio sia reale, conviene alle tre rette supporre applicate potenze reali, le quali abbiano la condizione richiesta per essere in equilibrio; ed allorchè hanno tal condizione, si ha il complemento dell'equilibrio. Questo però non è da potenza nostra, ma dalla costituzione naturale delle potenze meccaniche; e nel complemento, che interviene in quel punto, in cui concorrono le direzioni delle potenze, queste convengono in una, e svanisce ogni direzione lineare, e tutto ciò, che nell'equilibrio come da compiersi era sensibile. Da che intendesi, come nell'equilibrio primo il valore di ciascuna delle tre potenze eguali debba essere espresso per 1, affinchè si possa con verità esprimere qual è nel suo complemento. E veramente, se il valore di ciascuna si esprimesse con un altro nome numerico, per esempio per 2, ovvero per una quantità indeterminata, come n, il complemento dell'equilibrio primo in vece di presentare nella sua espressione una verità per sè manifesta, presenterebbe una manifesta contraddizione. In fatti, se ciascuna di esse si chiamasse 2, non potrebbe una riguardarsi come equivalente nè alla somma delle altre, la quale sarebbe 4, nè al loro prodotto, che sarebbe parimenti 4, nè al loro quoziente, che sarebbe 1, nè alla differenza loro, che sarebbe zero. Lo stesso sarebbe, se ognuna delle potenze si esprimesse per una frazione, o per qualunque funzione di una quantità. Per lo che l'equilibrio primo come compiuto, ossia il suo complemento non può esprimersi con

verità, se non dicendo, ch' esso è uno costituito da tre potenze, ciascuna delle quali è uno per nominazione propria di uno; onde in esso ognuna delle tre potenze è *uno*, due sono *uno*, e tre insieme sono *uno*. Ed è da osservare, che quando si dice che nell' equilibrio primo ciascuna potenza è uno equivalente ad uno in uno, ovvero che uno è uno in uno, per la particella *in* non può intendersi nè moltiplicazione, nè divisione: perciocchè la moltiplicazione, e la divisione sono operazioni della potenza nostra d' intendere relative a quantità, che per sè non hanno funzione veruna; ma nell' equilibrio primo interviene al suo complemento una funzione delle potenze, che non è da potenza nostra, e che è superiore all' intelligenza umana: la qual funzione noi non possiamo esprimere se non dicendo, che ognuna delle tre potenze dà alle altre due quello, che da esse riceve. Quindi è, che la legge dell' equilibrio, quantunque sia dimostrata, pure è riguardata anche dai Matematici come un paradosso, o anzi come un mistero, poichè nel suo complemento presenta una verità, che sembra contraria alla ragione.

31. Per intendere come da tre potenze possa risultare l' equilibrio alcuni suppongono, che v' intervenga una opposizione o distruzione di forze. Ma nell' equilibrio primo questa supposizione non può certamente aver luogo. Il sospetto di tale distruzione ha origine da alcune meno che esatte espressioni usate dai Meccanici. Essi nell' equilibrio costituito da tre forze o potenze chiamano *Risultante* quella, che è espressa dalla diagonale di un paralellogrammo, e *Componenti* le due espresse dai lati contigui alla medesima, e quindi asseriscono, che nell' equilibrio interviene *Composizione e Risoluzione* di forze, riguardando la risoluzione come opposta alla composizione, e la risultante come opposta alle componenti. Ma non può con verità dirsi che la risoluzione sia contraria alla composizione delle forze. Imperocchè la risoluzione della forza riguardata come *risultante* è la simultanea posizione delle forze componenti *con* la forza stessa risultante, affine di costituire l' equilibrio: onde la risoluzione è nella composizione sì dalle forze componenti, come dalla risultante stessa. E veramente la risultante, sebbene non sia una delle forze chiamate arbitrariamente *componenti*, è però una delle componenti, o anzi *costituenti* l' equilibrio, in quanto che essa pure interviene nella

composizione, o anzi *costituzione* o *condizione* dell' equilibrio: e quelle due, che sono riguardate come componenti, non sono componenti della potenza risultante: perciocchè essa, come è manifesto nell' equilibrio primo, non è da quelle composta, non risultando essa dalla loro addizione, o somma.

32. Che la denominazione di potenze componenti, e di risultante sia arbitraria, cioè non abbia un senso determinato, appare massimamente nell' equilibrio primo. Imperocchè essendo questo costituito simultaneamente da tre potenze eguali agenti tra loro in direzioni equidistanti, non avvi ragione, per cui una si abbia a chiamare risultante, o componente; onde tutte e tre devonsi chiamare costituenti l' equilibrio primo. Allora solo interviene, che si possa introdurre il nome di una risultante, e di due componenti, quando una di esse si suppone la diagonale di un Rombo equilatero, ed agente in senso diverso da quello, che richiedesi per la prima forma d' equilibrio. Ma siccome una qualunque delle tre potenze che sono in equilibrio, può essere espressa dalla diagonale di un parallellogrammo (n.° 14), i cui due lati ad essa contigui esprimano le altre due, perciò quei nomi non hanno un senso preciso o esclusivo, e solo valgono per facilità di espressione.

33. Una sola funzione pertanto è quella, che si ha nell' equilibrio sì dalla composizione, che dalla risoluzione delle forze; epperò nell' equilibrio primo non può supporsi opposizione di potenze, o delle loro direzioni. Quindi è, che nell' equilibrio primo, allorchè si riduce al meccanico col supporre una delle tre potenze per diagonale di un rombo, si può bensì in qualche senso supporre una composizione di forze, ma non forza composta (n.° 31); interviene pure numero di potenze, senza che però veruna di esse, quando si enuncia qual è nel complemento, possa essere espressa per un numero (n.° 30).

Per un solo riguardo l' equilibrio primo si può dire un composto, cioè in quanto che ogni potenza da noi al principio si riguarda come una quantità, e come tale ognuna non è uno, che sia semplice per ragion prima. Svanisce però l' idea di quantità, e di qualunque oggetto esteso, e sensibile nel complemento dell' equilibrio, poichè per esprimerlo conviene supporre *uno* ciascuna potenza, ed *uno* tutte e tre insieme: e nel complemento intendesi, che il denominare ciascuna delle tre potenze equivalente alle altre due presenta una verità mani-

festa, ed assoluta, ma non il dirla risultante: perciocchè una potenza come risultante, è conseguente alle due, da cui risulta, le quali sono ad essa antecedenti, e non può quell'una, che è conseguente, essere anche antecedente nello stesso complemento.

34. Che nell'equilibrio primo non intervenga opposizione, nè distruzione di forze si può confermare nel seguente modo. L'opposizione di due forze si ha, quando esse agiscono sulla stessa retta, o direzione, ma in senso contrario. Ora una qualunque delle tre potenze costituenti l'equilibrio primo non agisce sulla stessa direzione con un'altra. Per lo che non può esservi opposizione nè conseguentemente veruna diminuzione di forze.

Replicherà forse taluno concedendo bensì, che non avvi opposizione totale, ma pretendendo, che siavi opposizione parziale in proporzione dell'angolo, che le direzioni delle potenze formano tra loro. A che rispondo primamente, che tutti i Meccanici convengono non esservi opposizione veruna tra due forze, le cui direzioni sieno ad angolo retto: onde dall'angolo che formano le direzioni di due potenze non può dedursi, che tra esse sia opposizione. In secondo luogo se nelle tre potenze costituenti l'equilibrio primo fosse qualche opposizione, e conseguentemente qualche diminuzione di forza, tale diminuzione interverrebbe in ragione d'eguaglianza, giacchè le potenze e gli angoli formati dalle loro direzioni sono supposte eguali. Per lo che anche i residui delle potenze, o forze medesime sarebbero eguali tra loro; epperò sarebbero esprimibili ciascuno per l'unità, costituirebbero l'equilibrio come se nissuna opposizione, o diminuzione di forze fosse intervenuta.

35. Quello, che ho detto dell'equilibrio primo, era da dirsi per confermare l'esattezza delle dimostrazioni da me arrecate nelle varie forme d'equilibrio, e per potere con ragioni dimostrative rilevare l'inesattezza di alcuni principj, che da altri a tale oggetto si sogliono assumere. Tra quelli uno è, che *due forze eguali, ed opposte sono in equilibrio:* il che si assume come principio per sè evidente senza avere primamente dichiarato quello, che deve intendersi col nome d'equilibrio: onde quella asserzione non può riguardarsi come per sè evidente. Che se intendesi, che l'equilibrio sia per l'appunto costituito dall'opposizione e distruzione di due forze eguali,

ciò è manifestamente falso per più ragioni. E primamente supponesi, che nell' opposizione di due forze non intervenga una terza, quando che questa vi si deve necessariamente supporre. Imperocchè due forze affinchè sieno opposte, e si distruggano, devono essere applicate a due linee supposte inflessibili, che sono le loro direzioni, ovvero agenti in due punti materiali, ed inflessibili, che si urtino in senso opposto. Ora l' inflessibilità richiede una forza resistente distinta da quelle, che si suppongono opporsi tra loro. Non può dunque derivarsi l' idea d' equilibrio da due sole forze in opposizione; e tanto più, in quanto che nell' equilibrio primo nissuna opposizione interviene. Oltre di che l' equilibrio, che dai Meccanici si suole estimare, è costituito da tre forze applicate a tre diverse direzioni, e questo è ben diverso dall' opposizione di due forze eguali, nè quello da queste si può derivare.

36. Due forze pertanto eguali ed opposte non sono da dirsi in equilibrio. E veramente se per l' opposizione si distruggono, come possono supporsi sussistenti in equilibrio? Che se pure per brevità così si vogliono chiamare, dovrassi in esse intendere un equilibrio diverso dal primo, e dal meccanico; cioè un equilibrio negativo, in quanto che da tali forze non segue moto nel punto, su cui agiscono, ovvero in quanto che non turbano l' equilibrio di tre altre potenze, che realmente lo costituiscono: ed intanto non segue moto dalle due eguali ed opposte, in quanto che per tal opposizione una vicendevolmente toglie all' altra quello, che questa tende a dare, o a fare. Ma la quiete, che risulta in un corpo soggetto a due forze eguali ed opposte non basta per dare l' idea di vero equilibrio. Perciocchè anche un corpo sottoposto a nissuna forza motrice non si move; nissuno però lo dirà in equilibrio, se non chi confonda questo colla quiete.

37. A sostenere la denominazione di equilibrio in due forze eguali, ed opposte dirà forse taluno, che allora si sogliono riguardare come in equilibrio tre forze, quando si possono ridurre a due eguali ed opposte. A che rispondo, che questa riduzione può bensì farsi, ma dappoichè sia dimostrato, che le tre sono in equilibrio. Altronde la dimostrazione prima dell' equilibrio di tre non dipende da equilibrio di due; poichè l' equilibrio primo costituito da tre potenze è manifesto per sè indipendentemente dall' opposizione di due. La riduzione dell'

equilibrio

equilibrio primo a due forze eguali, ed opposte si fa, conducendo la diagonale del rombo equilatero, e riguardandola come rappresentante una potenza equivalente alle due espresse dai lati contigui. Ma in tal modo mutasi la forma prima d'equilibrio: perciocchè in questa le direzioni delle tre potenze sono egualmente distanti tra loro; laddove esprimendo una direzione colla diagonale, le tre potenze non hanno le direzioni egualmente distanti tra loro. Nulladimeno si ha ancora l'equilibrio tra la potenza espressa dalla diagonale, e le due espresse dai lati contigui; ma in virtù della prima condizione dipendente dall'eguaglianza delle tre potenze, e delle distanze delle loro direzioni. In fatti se si assumesse per esempio, che in un rombo equilatero la potenza espressa dalla diagonale è in equilibrio colle due espresse dai lati contigui, ciò non sarebbe per sè manifesto; ma converrebbe dimostrarlo, e la dimostrazione dipenderebbe dalla prima forma d'equilibrio. La riduzione pertanto dell'equilibrio primo a due forze eguali ed opposte non può farsi se non introducendo arbitrariamente una quarta forza, qual è l'espressa dalla diagonale del rombo, dalla quale però non dipende in verun modo l'equilibrio delle tre.

38. Qui potrebbe altri oppormi, che anche nell'equilibrio da me chiamato primo conviene supporre le tre potenze applicate a tre direzioni espresse per rette inflessibili, le quali, se sono, come io ho superiormente detto, altrettante forze resistenti, presenteranno l'equilibrio costituito da sei forze, tre delle quali sono agenti, e tre resistenti; onde l'equilibrio chiamato primo non sarà veramente tale, come quello che non sarebbe costituito dal minimo numero di forze o potenze. Per mostrare l'insussistenza di tale opposizione conviene osservare primamente, che una potenza non può intendersi se non con una certa direzione, così che una potenza è uno, in cui la direzione è bensì distinguibile, ma non separabile da essa; e la direzione di ciascuna delle potenze, che sono in equilibrio, è quello spazio rettilineo, ch'essa descriverebbe se fosse solitaria, cioè se non fosse in equilibrio con altre: onde la direzione di ciascuna potenza equilibrata è potenziale, cioè è una retta, che noi possiamo intendere come descrivibile, ma non come realmente descritta dalla potenza, poichè, supponendola descritta, si supporrebbe moto nell'equilibrio, ossia nella quiete. Quindi nell'equilibrio primo non è necessario sup-

porre le direzioni espresse da rette inflessibili, nè le potenze applicate a tali rette. Perciocchè tale supposizione allora soltanto deve farsi, quando si suppone, che le potenze agiscano tra loro in senso diverso, ovvero opposto, e che sieno espresse dalle loro direzioni. Ma nell'equilibrio primo non si può supporre azione delle potenze in senso diverso, od opposto (n.° 31), nè è necessario intender le potenze medesime come espresse da linee rette, poichè in quello l'azione delle potenze è indipendente dalla descrizione di spazio; ed esse stesse in vece di dirle agenti in un punto, in cui concorrono le direzioni lineari, si possono dire agenti tra loro con direzione loro propria. Per lo che nell'equilibrio primo le direzioni lineari delle potenze non devono riguardarsi, se non come un mezzo di trasmissione mutua della loro azione, il quale noi introduciamo per rendere a noi sensibile la costituzione di tre potenze in equilibrio. Così dunque l'equilibrio primo riconoscesi come costituito dal minimo numero di potenze, da cui possa formarsi l'idea di vero equilibrio.

39. Mi rimangono ora a fare alcune osservazioni sulle dimostrazioni dell'equilibrio proposte dal *Bernoullio*. Egli oltre ad altri assiomi comuni, assume primamente come certo, che due potenze eguali ed opposte sono in equilibrio: la qual asserzione a quali eccezioni sia soggetta già fu da me indicato.

40. Dippoi assume, che a tutte le potenze si possono sostituire le loro equivalenti; e per definizione egli chiama *equivalenti* le potenze, che colla stessa forza e colla stessa direzione tirano un punto. Questa definizione però non dà l'idea dell'equivalenza, che si considera in Meccanica. E veramente tal definizione si può applicare anche a due forze, e quando queste sieno eguali, e tirino un punto colla stessa direzione non presentano all'intelligenza se non l'eguaglianza supposta. Che se le due forze eguali suppongonsi opposte, una non può riguardarsi come equivalente all'altra, poichè per l'opposizione distruggendosi, non più sussistono. Per avere nelle potenze l'idea di equivalenza come distinta dall'eguaglianza, conviene necessariamente supporre almeno tre potenze, e queste per rapporto alla loro grandezza, e direzione talmente costituite tra loro, che una qualunque di esse realmente equivalga alle altre due: il che richiede che sieno già in equilibrio; e questo non può esser manifesto per ragion prima se non nelle tre potenze costituenti l'equilibrio primo.

41. In terzo luogo premette alle sue dimostrazioni questo Lemma: se tre potenze (Fig. 5) espresse per DA, DB, DC sono in equilibrio, saranno in equilibrio anche le loro duple, o in qualunque modo multiple Dm, Dn, Dp: e ciò egli dimostra così: se alle potenze Dm, Dn, Dp si sostituiscono queste altre DA + DA, DB + DB, DC + DC, nelle quali è manifesto l'equilibrio, tosto si manifesta la verità della proposizione.

Ma non vedesi, come nelle potenze sostituite sia manifesto l'equilibrio, poichè questo non fu da lui antecedentemente dimostrato, nè proposto come manifesto in verun caso; ma solamente fu supposto nelle tre potenze DA, DB, DC: onde al più dalla sostituzione si può conchiudere, che le tre sostituite saranno evidentemente in equilibrio condizionatamente, cioè quando sia o evidente per sè, o dimostrato, che nelle potenze, le quali sieno per sè evidentemente in equilibrio, ed alle quali si possa far la sostituzione delle loro multiple senza turbar l'equilibrio, conviene assumerle tali, quali sono richieste per l'equilibrio primo; e posto questo, è pure evidente, che sono in equilibrio le loro multiple, e submultiple, come accennai al n.° 3.

42. È inoltre da osservare, che il nome di multipli, e submultipli nell'equilibrio primo può bensì darsi alle potenze, quando si considerano nell'equilibrio come da compiersi, ossia come noi lo concepiamo per potenza nostra, ma non nell'equilibrio come compiuto. Perciocchè il complemento non può esprimersi qual è (n.° 30), se non nominando *uno* ciascuna potenza: il che mostra, che il principio assunto delle potenze multiple, e submultiple non è una condizione dell'equilibrio per sè manifesta, nè assolutamente vera, siccome quella che tende ad escludere, o almeno ad occultare una verità evidente, cioè che ognuna delle tre potenze nel complemento dell'equilibrio primo deve necessariamente essere espressa per 1, nè può essere espressa per un multiplo, o submultiplo, come sarebbe $1 \times a$, ovvero $\frac{1}{a}$.

43. Della sostituzione di potenze ad altre, ch'egli suppone equivalenti, si serve quindi il Bernoullio per dimostrare l'equilibrio nei varj casi. Ma poichè l'equivalenza non può essere se non di potenze, che già sieno in equilibrio, epperò quella da questo dipende, perciò le sue dimostrazioni sono

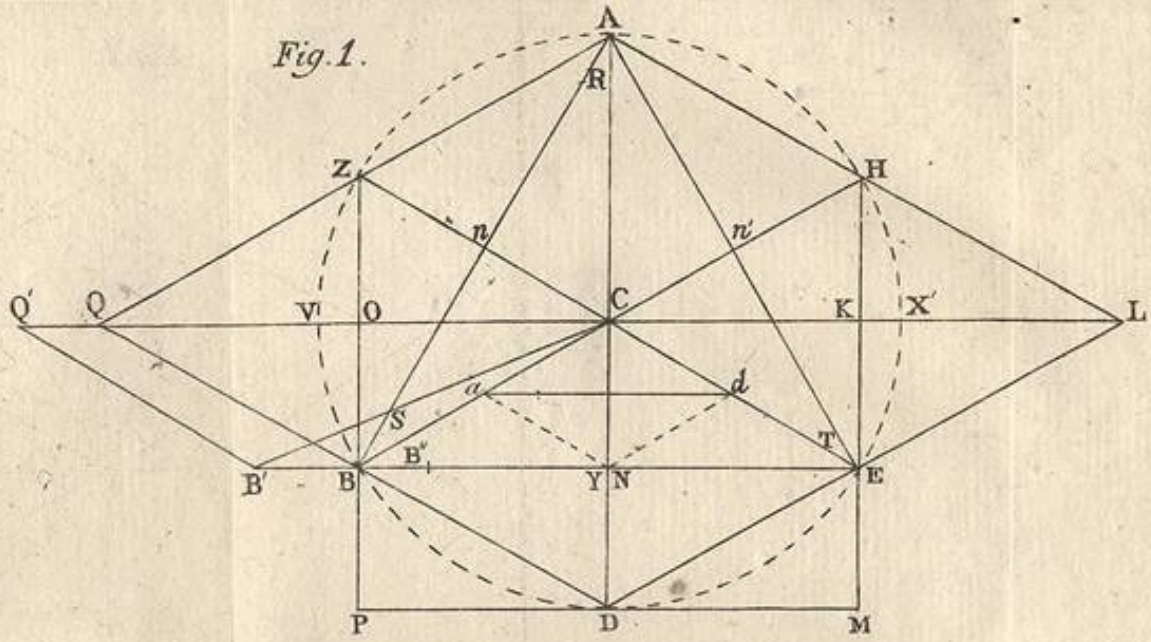
derivate da un principio, che non ha vera ragione di principio: laddove la proposizione di tre potenze eguali agenti tra loro con direzioni tra loro equidistanti presenta un equilibrio evidente e reale; onde il far dipendere da esso, siccome io ho assunto di fare, la dimostrazione dell'equilibrio in tre altre potenze tra loro diverse, e diversamente stimate, è rimontare al vero principio dell'equilibrio, principio derivante dalla ragione prima d'eguaglianza.

44. Aggiugnerò inoltre, che tra le dimostrazioni usate da quell'insigne Matematico trovasene una, la quale è del tutto fallace. La proposizione, a cui ha rapporto tal dimostrazione, è la seguente: Se due potenze eguali BA, BC (Fig. 7) sono equivalenti alla potenza BF, la quale sia tagliata per metà nel punto L dalla retta AC; e se pel punto B si conduce alla retta BF la perpendicolare DE; conducendo dai punti C, A le rette CE, AD perpendicolari a DE, la potenza BA equivalerà alle due BL, BD, e la potenza BC alle due BL, BE. Tale proposizione egli prende a dimostrare nel seguente modo: se si nega, che la potenza BA equivalga alle due BL, BD, suppongasi, che equivalga a due altre B*l*, B*d*: allora per simile ragione la potenza BC equivalerebbe alle potenze B*l*, B*e* = B*d*. Dunque le potenze B*d*, B*l*, B*e*, B*l* equivalerebbero alla potenza BF, ossia 2BL: il che è assurdo. Così il Bernoullio. L'assurdo deve consistere in questo, che 2BL equivalerebbero a 2B*l*, in quanto che le due B*d*, B*e* come eguali ed opposte si distruggono: onde rimarrebbe 2B*l* equivalente a 2BL: il che non può essere, essendo B*l* nella stessa direzione con BL. Ma tale dimostrazione potrebbe valere a provare, che conducendo due altre rette BP, BR equidistanti da BL, la potenza espressa da BP equivalerà alle due BL, BD; e la potenza BC alle due BL, BE. Imperocchè, essendo le due rette BP, BR equidistanti da BL, che per costruzione è perpendicolare ad AC, saranno eguali tra loro, e si potranno le potenze espresse dalle stesse rette BP, BR supporre equivalenti alla potenza espressa da 2BL: onde avranno le condizioni supposte dal Bernoullio nelle due potenze AB, BC; epperò si potrebbe asserire delle due BP, BR quello ch'egli asserisce delle due AB, BC: il che sarebbe falso: perciocchè (n.° 25) la potenza BR è equivalente alle due BL, LR; ed è BP $\sqsupset$ BL, LP.

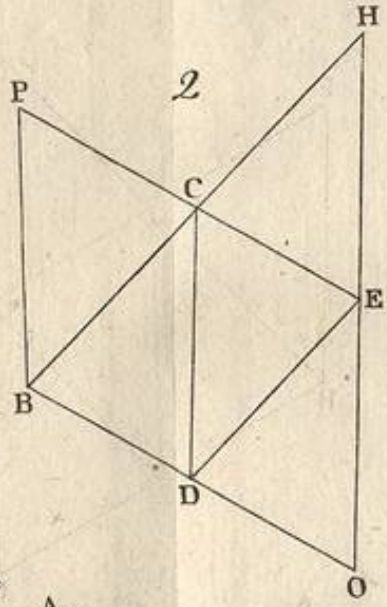
45. Che l'equilibro meccanico non abbia dimostrazione se

non per analogìa all'equilibrio primo, fu già da me accennato: il che gioverà, che io qui alquanto più dichiari, onde veggasi come quello da questo derivi. L'equilibrio primo è costituito da tre potenze eguali agenti tra loro con direzioni equidistanti tra loro. Queste direzioni come espresse da linee rette formano tre angoli ottusi, ciascuno dei quali è di 120°, essendo un terzo di quattro retti, nei quali comprendonsi tutti gli angoli possibili. Ma l'angolo ottuso, cioè maggiore di un retto, non ha seno proprio, poichè il suo seno è quello di un altro angolo, cioè dell'acuto, che è supplemento a due retti: onde il seno dell'angolo ottuso può dirsi razionale, e *mutuato*, in quanto che non può essere espresso se non da una retta, la quale sia seno dell'angolo acuto. Ma per seno di un angolo acuto non può essere una determinata retta, se non quando abbia rapporto a due altre costituenti con essa un triangolo rettangolo, qual è NCE (Fig. 1): onde i seni degli angoli dipendono da un triangolo. Ora quando si assume l'equilibrio primo, in questo è manifesta l'equivalenza di una potenza all'altre due indipendentemente dai seni degli angoli, poichè l'equivalenza è manifesta dall'eguaglianza delle potenze, e delle loro direzioni. Ma quando si deduce l'equilibrio originario dal primo, costituendo una delle tre potenze come diagonale di un rombo, e supponendola agente in senso diverso dalle altre due, allora la direzione della potenza equivalente, che chiamasi risultante, è mutata; e le direzioni, così come il valore delle potenze non può estimarsi se non dai seni degli angoli, che esse formano fra loro (n.° 20). Per lo che la condizione dell'equilibrio originario non può essere espressa se non dipendentemente da un triangolo rettangolo; ed affinchè da questo possa essere espressa tal condizione conviene, che sia non un triangolo rettangolo qualunque, ma quello che abbia in sè manifestamente la condizione sì dell'equilibrio primo, come dell'originario: il che richiede, che sia un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa CE esprima una delle tre potenze equilibrate, ed essa formi con un'altra di queste, cioè con CD, un angolo NCE, che sia supplemento dell'angolo ACE, cioè che sia di 60°. Tale è il triangolo NCE; ed in questo è manifesta la condizione dell'equilibrio originario, cioè che la risultante DC delle due CB, CE sia il doppio coseno dell'angolo NCE. Perciocchè essendo l'angolo NCE di 60°,

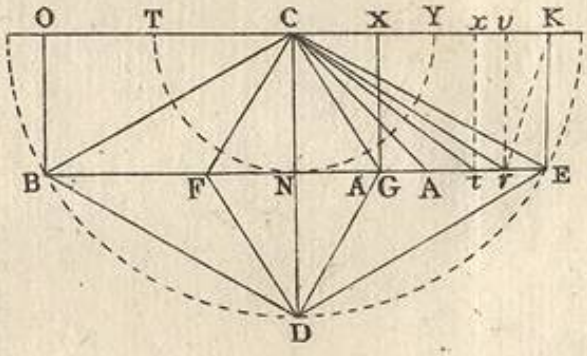
Fig. 1.


A
R
Z
H
n
n'
Q'
Q
V
O
C
K
X'
L
a
d
S
T
B'
B
B''
Y
N
E
P
D
M

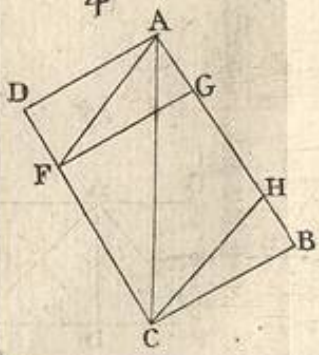
2


H
P
C
E
B
D
O

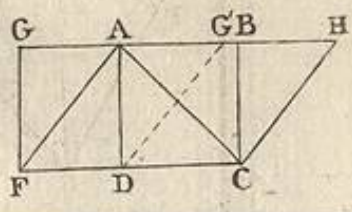
3


O
T
C
X
Y
x
v
K
B
F
N
A
G
A
t
r
E
D

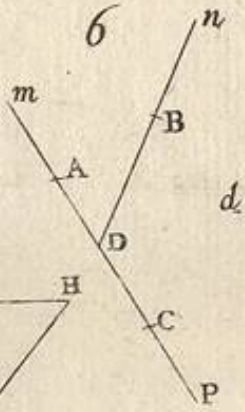
4


A
D
G
F
H
B
C

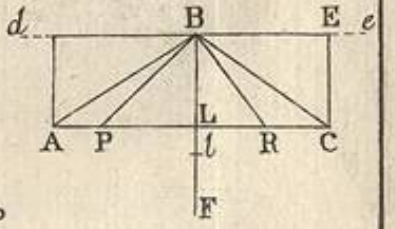
5


G
A
GB
H
F
D
C

6


n
m
B
A
D
C
P

7


d
B
E
e
A
P
L
l
R
C
F

l'ipotenusa CE, che è = CD, è eguale al doppio coseno dell' angolo NCE. Da che vedesi, che l'equivalenza di una potenza a due altre deriva primamente dall'eguaglianza, che il seno totale espresso dall'ipotenusa ha col doppio coseno dell' angolo di 60°, supplemento dell'angolo BCE primario di 120°.

46. Poichè nel triangolo rettangolo originario è manifesta la condizione dell'equilibrio originario, perciò conviene, che in quello, cioè nei suoi lati, che sono i seni stessi degli angoli opposti ai lati medesimi, sia primamente la condizione, che devono avere tre potenze per esser in equilibrio, la qual condizione è, che esse sieno espresse dai lati, ossia dai seni degli angoli di tale triangolo. Posta la quale verità, si dimostra quindi, che la stessa condizione d'equilibrio hanno anche le potenze espresse dai lati di qualunque triangolo rettangolo, e quindi i lati di un triangolo qualunque.

47. Così dunque la condizione generale dell'equilibrio di tre potenze è, che ognuna sia espressa dal seno dell'angolo, che formano tra loro le direzioni delle altre due: la quale condizione è analoga all'equilibrio originario; e questo intanto sussiste in quanto che è analogo all'equilibrio primo, la cui costituzione è per sè manifesta.