SULLE OSCILLAZIONI DI UN CORPO PENDENTE DA UN FILO ESTENDIBILE.

MEMORIA

Del Sig. Pietro Paoli.

Ricevuta li 6 *Febbrajo* 1809.

Il problema, in cui si cercano le oscillazioni di un corpo attaccato ad un punto fisso col mezzo di un filo soggetto a distendersi e scorciarsi, è affatto simile all'altro problema già da lungo tempo trattato dai Geometri, nel quale si ricerca il moto di un corpo attratto verso due punti fissi, e non ammette perciò una soluzione rigorosa. Ma se le oscillazioni si fanno per piccoli archi, ed il filo è poco estendibile, queste condizioni somministrano il mezzo d' integrare per approssimazione l'equazioni differenziali, che determinano il moto del pendolo. Il celebre Sig. *Poisson* in una Memoria di recente pubblicata nel decimoquarto volumetto del Giornale della Scuola Politecnica ha risoluto per la prima volta il problema sotto questo aspetto, ed ha trovato che le oscillazioni di un pendolo estendibile seguono le medesime leggi, che quelle di un pendolo di lunghezza invariabile, e solo l'estendibilità del filo introduce una leggiera correzione nella durata delle oscillazioni, e nella lunghezza del pendolo, il quale compie le sue oscillazioni nell'unità di tempo. Ma siccome nell'analisi del Sig. *Poisson* è incorso qualch'errore, il quale potrebbe rendere incerti i resultati ottenuti da Lui, ho stimato bene di rinnuovare una tale ricerca, sembrandomi interessante che si conosca con accuratezza, quale influenza può avere l'estendibilità del filo sulla durata delle vibrazioni.

Sia r la lunghezza variabile del filo, o sia la distanza del centro di oscillazione dal punto di sospensione, θ l'angolo formato dal filo e dalla verticale, t il tempo scorso dal principio del moto, x ed y le coordinate ortogonali del centro di oscillazione, prese dal punto di sospensione, la prima verticale, la seconda orizzontale, in modo che sia $x = r\cos.\theta$, $y = r\,\text{sen}.\theta$, g la gravità, e ponghiamo eguale all'unità la massa del pendolo concentrata nel centro di oscillazione. Seguitando il Sig. *Poisson* facciamo l'elasticità del filo eguale ad una funzione di r, che chiameremo $F.r$, e riguardiamola come una forza applicata al centro di oscillazione. Ciò posto, secondo i principj della incomparabile Meccanica analitica avremo l'equazione

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - g + \frac{x}{r} F.r\right)\delta x + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{y}{r} F.r\right)\delta y = 0 .$$

Ora $\delta x = \delta r \cos.\theta - r\delta\theta \operatorname{sen}.\theta$, $\delta y = \delta r \operatorname{sen}.\theta + r\delta\theta\cos.\theta$; sostituendo questi valori, e ponendo separatamente $=0$ i coefficienti delle variazioni δr e $\delta\theta$, perchè tra loro indipendenti, otterremo per la determinazione del moto del centro di oscillazione le due equazioni

$$\cos.\theta \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \operatorname{sen}.\theta \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - g\cos.\theta + F.r = 0$$

$$\cos.\theta \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \operatorname{sen}.\theta \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + g \operatorname{sen}.\theta = 0 .$$

Sostituendovi in luogo di x ed y i loro valori in r e θ esse si cangeranno nelle seguenti

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - r\frac{\partial\theta^2}{\partial t^2} - g\cos.\theta + F.r = 0$$

$$2\frac{\partial r}{\partial t}.\frac{\partial\theta}{\partial t} + r\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + g\operatorname{sen}.\theta = 0 .$$

La seconda di quest'equazioni è simile a quella del Sig. *Poisson*, ma la prima è assai diversa, essendo stato tralasciato da lui il termine $-r\frac{\partial\theta^2}{\partial t^2}$, il quale è dovuto alla forza centrifuga. Fa tanto maggior sorpresa una tale omissione, in quanto che il Sig. *Poisson* ha egli pure osservato, che il problema è analogo a quello di un corpo attratto verso due centri, nell'equazioni del quale ha luogo certamente il termine $-r\frac{\partial\theta^2}{\partial t^2}$.

Per determinare la forma della funzione $F.r$ noi dietro alle traccie del Sig. *Poisson* osserveremo, che siccome r varia pochissimo in tutto il tempo del moto, se chiamiamo a il suo valore all'origine, e generalmente facciamo $r = a - u$, u sarà una piccolissima quantità, di cui potremo trascurare le potenze superiori alla prima. Sarà dunque $F.r = F.a - \frac{\partial F.a}{\partial a} u$, essendo $F.a$ e $\frac{\partial F.a}{\partial a}$ due costanti da determinarsi coll'esperienza. Per trovarne il valore sia b la lunghezza del filo, prima che abbia sofferto alcuno allungamento, ed ω quello che acquista quando vi si attacca il peso del pendolo, in modo che sia $b + \omega = \text{a}$. Dovrà dunque essere $F.\text{a} - \frac{\partial F.\text{a}}{\partial \text{a}} u = 0$ quando $u = \omega$, e $F.\text{a} - \frac{\partial F.\text{a}}{\partial \text{a}} u =$ alla gravità g, quando $u = 0$, e perciò $F.\text{a} = \text{g}$, $\frac{\partial F.\text{a}}{\partial \text{a}} = \frac{\text{g}}{\omega}$, e $F.r = \text{g} - \frac{\text{g}}{\text{a}} u$. Posti in luogo di r e di $F.r$ questi valori l'equazioni trovate diventeranno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\text{g}}{\omega} u + (\text{a} - u) \frac{\partial \theta^2}{\partial t^2} - \text{g}(1 - \cos.\theta) = 0 \qquad (1)$$

$$(\text{a} - u) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{g} \,\text{sen.}\, \theta = 0. \qquad (2)$$

Per integrare quest'equazioni per approssimazione incominciamo dal trascurare nella (2) i termini di due dimensioni per rapporto a θ ed u, ed avremo

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\text{g}}{\text{a}} \theta = 0,$$

di cui l'integrale completo è

$$\theta = h \,\text{sen.}\, t \sqrt{\frac{\text{g}}{\text{a}}} + h' \cos.\, t \sqrt{\frac{\text{g}}{\text{a}}}.$$

Supponendo che all'origine del moto il pendolo fosse fermo nella situazione verticale avremo $\theta = 0$ quando $t = 0$, e quindi $h' = 0$, e

$$\theta = h \,\text{sen.}\, t \sqrt{\frac{\text{g}}{\text{a}}}.$$

Di qui si ricava $\frac{\partial \theta}{\partial t} = h \sqrt{\frac{\text{g}}{\text{a}}}$ allorchè $t = 0$, e questa ponghiamo essere la velocità iniziale, che è stata comunicata al centro di oscillazione nell'atto di rimuovere il pendolo dalla posizione verticale.

Sostituiamo il valore trovato di θ nella equazione (1), e conservando solamente i termini di due dimensioni per rapporto a θ ed u avremo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\text{g}}{\omega} u - \frac{h^2 \text{g}}{2} \,\text{sen.}^2 t \sqrt{\frac{\text{g}}{\text{a}}} + h^2 \text{g} \cos.^2 t \sqrt{\frac{\text{g}}{\text{a}}} = 0,$$

o sia ponendo in luogo di $\text{sen.}^2 t \sqrt{\frac{\text{g}}{\text{a}}}$, e $\cos.^2 t \sqrt{\frac{\text{g}}{\text{a}}}$ i loro valori $\frac{1-\cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}}}{2}$, ed $\frac{1+\cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}}}{2}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{g}{\omega}\,u+\frac{gh^2}{4}\left(1+3\cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)=0.$$

L'integrale completo di questa equazione è

$$u=C\,\text{sen}.t\sqrt{\frac{g}{\omega}}+C'\cos.t\sqrt{\frac{g}{\omega}}-\frac{\omega h^2}{4}\left[1+\frac{3}{1-\frac{4\omega}{a}}\cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right],$$

ove, siccome ω è una quantità piccolissima e possiamo trascurarne le potenze superiori alla prima, scriveremo 3 in luogo della frazione $\frac{3}{1-\frac{4\omega}{a}}$, che è già moltiplicata per ω. Per determinare le costanti arbitrarie C e C' si osservi che all'origine del moto abbiamo supposto il pendolo essere in quiete, ed il filo perciò giunto al maggiore allungamento $=a$. Pertanto dovrà essere $u=0$, e $\frac{\partial u}{\partial t}=0$, allorchè $t=0$, alle quali condizioni soddisfaremo con porre $C=0$, e $C'=\omega h^2$; sarà dunque

$$u=\omega h^2\left[\cos.t\sqrt{\frac{g}{\omega}}-\frac{1}{4}\left(1+3\cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)\right]. \quad (3)$$

Adesso è facile il vedere, che continuando l'approssimazione potremo convertire i valori di u e θ in serie ordinate per le potenze di h della forma

$$u=\omega h^2\left[\cos.t\sqrt{\frac{g}{\omega}}-\frac{1}{4}\left(1+3\cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)\right]+u'h^4+u''h^6+\text{ec.}$$

$$\theta=h\,\text{sen}.t\sqrt{\frac{g}{a}}+\theta'h^3+\theta''h^5+\text{ec.}$$

Ma noi non portando il calcolo al di là della terza potenza di h ci contenteremo del valore precedente di u, e ponendo nella equazione (2) $\theta=h\,\text{sen}.t\sqrt{\frac{g}{a}}+h^3\theta'$ avremo

$$\frac{\partial^2\theta'}{\partial t^2}+\frac{g}{a}\,\theta'-\frac{g}{6a}\,\text{sen}.^3t\sqrt{\frac{g}{a}}$$
$$-\frac{g\omega}{4a^2}\text{sen}.t\sqrt{\frac{g}{a}}\left(1+3\cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)-\frac{3g\omega}{a^2}\,\text{sen}.2t\sqrt{\frac{g}{a}}\,.\,\cos.t\sqrt{\frac{g}{a}}$$
$$+\frac{g\omega}{a^2}\text{sen}.t\sqrt{\frac{g}{a}}\,.\,\cos.t\sqrt{\frac{g}{\omega}}+\frac{2g\sqrt{\omega}}{a\sqrt{a}}\cos.t\sqrt{\frac{g}{a}}\,.\,\text{sen}.t\sqrt{\frac{g}{\omega}}=0,$$

o sia convertendo le potenze ed i prodotti di seni e coseni in seni e coseni di archi multipli

$$\frac{\partial^2\theta'}{\partial t^2}+\frac{g}{a}\,\theta'-\frac{g}{8a}\left[\left(1+\frac{11\varpi}{a}\right)\text{sen.}\,t\sqrt{\frac{g}{a}}-\left(\frac{1}{3}-\frac{15\varpi}{a}\right)\text{sen.}\,3t\sqrt{\frac{g}{a}}\right]$$
$$+\frac{g\varpi}{2a^2}\left(1+2\sqrt{\frac{a}{\varpi}}\right)\text{sen.}\,t\left(\sqrt{\frac{g}{\varpi}}+\sqrt{\frac{g}{a}}\right)-\frac{g\varpi}{2a^2}\left(1-2\sqrt{\frac{a}{\varpi}}\right)\text{sen.}\,t\left(\sqrt{\frac{g}{\varpi}}-\sqrt{\frac{g}{a}}\right)=0.$$

L'integrale completo di questa equazione è

$$\theta'=C\,\text{sen.}\,t\sqrt{\frac{g}{a}}+C'\cos.\,t\sqrt{\frac{g}{a}}$$
$$-\frac{1}{16}\left[\left(1+\frac{11\varpi}{a}\right)t\sqrt{\frac{g}{a}}\,.\cos.\,t\sqrt{\frac{g}{a}}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{15\varpi}{a}\right)\text{sen.}\,3t\sqrt{\frac{g}{a}}\right]$$
$$+\frac{\varpi\sqrt{\varpi}}{a\sqrt{a}}\,.\,\frac{2\sqrt{a}+\sqrt{\varpi}}{2\sqrt{a}+4\sqrt{\varpi}}\,\text{sen.}\,t\left(\sqrt{\frac{g}{\varpi}}+\sqrt{\frac{g}{a}}\right)$$
$$+\frac{\varpi\sqrt{\varpi}}{a\sqrt{a}}\,.\,\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{\varpi}}{2\sqrt{a}-4\sqrt{\varpi}}\,\text{sen.}\,t\left(\sqrt{\frac{g}{\varpi}}-\sqrt{\frac{g}{a}}\right),$$

ove possiamo scrivere l'unità in luogo delle frazioni $\frac{2\sqrt{a}+\sqrt{\varpi}}{2\sqrt{a}+4\sqrt{\varpi}}$, $\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{\varpi}}{2\sqrt{a}-4\sqrt{\varpi}}$, le quali sono già moltiplicate per $\varpi\sqrt{\varpi}$.

Sostituendo questo valore in quello di θ avremo

$$\theta=h\,\text{sen.}\,t\sqrt{\frac{g}{a}}+h^3C\,\text{sen.}\,t\sqrt{\frac{g}{a}}+h^3C'\cos.\,t\sqrt{\frac{g}{a}}$$
$$-\frac{h^3}{16}\left[\left(1+\frac{11\varpi}{a}\right)t\sqrt{\frac{g}{a}}\,.\cos.\,t\sqrt{\frac{g}{a}}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{15\varpi}{a}\right)\text{sen.}\,3t\sqrt{\frac{g}{a}}\right]$$
$$+\frac{2h^3\varpi\sqrt{\varpi}}{a\sqrt{a}}\,\text{sen.}\,t\sqrt{\frac{g}{\varpi}}\,.\cos.\,t\sqrt{\frac{g}{a}},$$

ove bisogna ritenere l'ultimo termine, quantunque dell'ordine $h^3\varpi\sqrt{\varpi}$, perchè il medesimo termine ne dà uno dell'ordine $h^3\varpi$ nel valore di $\frac{\partial\theta}{\partial t}$. E siccome all'origine del moto è insieme $t=0$, $\theta=0$, e $\frac{\partial\theta}{\partial t}=h\sqrt{\frac{g}{a}}$, dovrà essere

$C=\frac{1}{16}\left(1+\frac{11\varpi}{a}\right)-\frac{3}{16.4}\left(\frac{1}{3}-\frac{15\varpi}{a}\right)-\frac{2\varpi}{a}$, e $C'=0$; sostituiti i quali valori quello di θ diventerà

$$\theta=h\,\text{sen.}\,t\sqrt{\frac{g}{a}}+\frac{h^3}{16}\left(1+\frac{11\varpi}{a}\right)\left[\text{sen.}\,t\sqrt{\frac{g}{a}}-t\sqrt{\frac{g}{a}}\cos.\,t\sqrt{\frac{g}{a}}\right] \quad (4)$$
$$+\frac{h^3}{16.4}\left(\frac{1}{3}-\frac{15\varpi}{a}\right)\left[\text{sen.}\,3t\sqrt{\frac{g}{a}}-3\,\text{sen.}\,t\sqrt{\frac{g}{a}}\right]$$
$$-\frac{2h^3\varpi}{a}\,\text{sen.}\,t\sqrt{\frac{g}{a}}+\frac{2h^3\varpi\sqrt{\varpi}}{a\sqrt{a}}\,\text{sen.}\,t\sqrt{\frac{g}{\varpi}}\,.\cos.\,t\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

A fine di trovare il tempo impiegato dal pendolo per ritornare nella situazione verticale dovremo porre nella equazione precedente $\theta = 0$. Ora tralasciando da principio i termini moltiplicati per h^3 avremo sen. $t\sqrt{\frac{g}{a}} = 0$, cioè $t\sqrt{\frac{g}{a}} = \pi$, essendo 2π la circonferenza del cerchio, che ha l'unità per raggio. Per accostarci di più al vero valore di questo tempo ponghiamo $t\sqrt{\frac{g}{a}} = \pi + h^2 t'$, e trascurando i termini moltiplicati per potenze superiori ad h^3 troveremo

$$0 = -t' + \frac{1}{16}\left(1 + \frac{110\omega}{a}\right)\pi\sqrt{\frac{g}{a}} - \frac{2\omega\sqrt{\omega}}{a\sqrt{a}}\,\text{sen.}\,\pi\sqrt{\frac{a}{\omega}},$$

e non tenendo conto del termine moltiplicato per $\omega\sqrt{\omega}$ avremo il tempo cercato, che chiameremo T, così espresso

$$T\sqrt{\frac{g}{a}} = \pi\left[1 + \frac{h^2}{16}\left(1 + \frac{110\omega}{a}\right)\sqrt{\frac{g}{a}}\right].$$

Differenziando il valore (4) di θ otterremo

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial t} &= h\sqrt{\frac{g}{a}}\cos.t\sqrt{\frac{g}{a}} + \frac{h^3}{16}\left(1 + \frac{110\omega}{a}\right)\frac{gt}{a}\,\text{sen.}\,t\sqrt{\frac{g}{a}} \qquad (5)\\ &+ \frac{h^3}{16.4}\left(\frac{1}{3} - \frac{150\omega}{a}\right)\sqrt{\frac{g}{a}}\left[3\cos.3t\sqrt{\frac{g}{a}} - 3\cos.t\sqrt{\frac{g}{a}}\right]\\ &- \frac{2h^3\omega}{a}\sqrt{\frac{g}{a}}\cos.t\sqrt{\frac{g}{a}} + \frac{2h^3\omega}{a}\sqrt{\frac{g}{a}}\cos.t\sqrt{\frac{g}{\omega}}\,.\cos.t\sqrt{\frac{g}{a}}\\ &- \frac{2h^3\omega\sqrt{\omega}}{a\sqrt{a}}\sqrt{\frac{g}{a}}\,\text{sen.}\,t\sqrt{\frac{g}{\omega}}\,.\,\text{sen.}\,t\sqrt{\frac{g}{a}},\end{aligned}$$

e sostituendo in questa equazione e nella (3) il valore di T, avremo nel momento, in cui il pendolo si trova di nuovo nella sittuazione verticale,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial t} &= -h\sqrt{\frac{g}{a}} + \frac{2h^3\omega}{a}\sqrt{\frac{g}{a}}\left(1 - \cos.\pi\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right)\\ u &= -\omega h^2\left(1 - \cos.\pi\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right)\\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\omega h^2\sqrt{\frac{g}{\omega}}\,\text{sen.}\,\pi\sqrt{\frac{a}{\omega}}.\end{aligned}$$

I valori di u e di $\frac{\partial u}{\partial t}$ sono negativi, e per conseguenza la lunghezza del filo $>$ a: e così dev' essere, perchè ad allungare il filo concorre adesso con la gravità anche la forza centrifuga.

Dall' osservare, che il pendolo disceso di nuovo nella situazione verticale, allorchè va a salire dalla parte opposta, è in circostanze così diverse da quelle, nelle quali trovavasi all'origine del moto, saremo a prima vista tentati a giudicare, che le oscillazioni del pendolo non riesciranno di eguale durata. Eppure se ritorneremo a calcolare i valori di u e θ per questa seconda ascesa e discesa determinandone in modo le costanti arbitrarie, che soddisfacciano ai nuovi valori iniziali di u, $\frac{\partial u}{\partial t}$, e $\frac{\partial \theta}{\partial t}$, troveremo che il tempo impiegato dal pendolo per ritornare dalla seconda stazione verticale alla terza sarà quel medesimo T di prima. Ma anche senza rifare questo calcolo potremo più brevemente assicurarci di ciò nel modo seguente.

Se nella equazione (5) ponghiamo $\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$, essa ci darà i diversi tempi impiegati dal pendolo per giungere alla massima altezza tanto da una parte che dall'altra. Tralasciamo per una prima approssimazione i termini moltiplicati per h^3, ed avremo $\cos . t\sqrt{\frac{g}{a}} = 0$, cioè $t\sqrt{\frac{g}{a}} = \frac{2n+1}{2}\pi$, ove $n = 0, 2, 4$, ec. per gli archi percorsi dalla parte, verso cui è incominciato il moto, ed $n = 1, 3, 5$, ec. per gli archi percorsi dalla parte opposta. Adesso facciamo $t\sqrt{\frac{g}{a}} = \frac{2n+1}{2}\pi + h^2 t'$, e sostituendo avremo

$$0 = \mp t' \pm \frac{1}{16}\left(1 + \frac{11\varpi}{a}\right)\frac{2n+1}{2}\pi\sqrt{\frac{g}{a}} \mp \frac{2\varpi\sqrt{\varpi}}{a\sqrt{a}}\sqrt{\frac{g}{a}}\,\mathrm{sen.}\frac{2n+1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{\varpi}},$$

e tralasciando il termine moltiplicato per $\varpi\sqrt{\varpi}$ ne dedurremo i tempi richiesti

$$t\sqrt{\frac{g}{a}} = \frac{2n+1}{2}\pi\left[1 + \frac{h^2}{16}\left(1 + \frac{11\varpi}{a}\right)\sqrt{\frac{g}{a}}\right].$$

I valori di θ corrispondenti a questi tempi saranno

$$\pm\theta = h + \frac{h^3}{8}\left(\frac{1}{3} - \frac{3\varpi}{a}\right). \qquad (6)$$

Di qui apparisce, che le massime deviazioni del pendolo dalla verticale da una parte e dall'altra si manterranno sempre eguali, e così pure si compiranno in tempi eguali tutte le oscillazioni, e la durata di ciascuna di esse ci verrà data dall'equazione

$$t\sqrt{\frac{g}{a}} = \pi\left[1 + \frac{h^2}{16}\left(1 + \frac{11\varpi}{a}\right)\sqrt{\frac{g}{a}}\right]. \qquad (7)$$

Se in questa equazione facciamo $t = 1$, ne dedurremo la lunghezza del pendolo, che fa le sue oscillazioni nell'unità di tempo, la quale trascurata la quarta potenza di h sarà

$$\mathrm{a}=\frac{g}{\pi^2}\left[1-\frac{h^2\pi}{8}\left(1+\frac{11\omega}{\mathrm{a}}\right)\right]. \qquad (8)$$

Questi resultati però son veri, quando si trascurano le potenze di h superiori alla terza, e quelle di ω superiori alla prima, poichè abbiamo a queste limitata la nostra approssimazione.

Se nelle formole (6), (7), e (8) facciamo $\omega=0$, esse si ridurranno a quelle, che appartengono al caso del filo non estendibile. Siamo giunti pertanto a quella stessa conclusione, alla quale era stato condotto dalla sua analisi il Sig. *Poisson*; cioè che le piccole oscillazioni di un pendolo estendibile seguono la medesima legge, che quelle di un pendolo non estendibile, e solo l'estendibilità del filo dà luogo ad una leggiera correzione nell'ampiezza delle oscillazioni, nella loro durata, e nella lunghezza del pendolo, il quale fa le sue oscillazioni nell'unità di tempo; e questa correzione diminuisce il coefficiente di h^3 nel valore della prima, ed accresce il coefficiente di h^2 nei valori delle altre senza alterare la forma di questi valori.

L'equazione

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}-g\cos.\theta+F.r=0$$

adottata dal Sig. *Poisson* è quella che usar si dovrebbe, se si volesse determinare la legge, con cui si allunga un filo da un peso attaccato alla sua estremità, ed obbligato a scorrere sopra un piano inclinato alla verticale con l'angolo costante θ. Se facciamo $\theta=0$, ed $r=\mathrm{a}-u$, questa equazione diventerà

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{g}{\omega}u=0,$$

e ci darà la legge, con cui si allunga un filo verticale fermato con l'estremità superiore ad un punto fisso, quando si attacca un peso all'estremità inferiore. L'integrale completo di questa equazione è

$$u=C\,\mathrm{sen}.\,t\sqrt{\frac{g}{\omega}}+C'\cos.\,t\sqrt{\frac{g}{\omega}},$$

e determinate in modo le costanti, che al principio del moto sia $t=0$, $u=\omega$, e $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ diventa $u=\omega\cos.\,t\sqrt{\frac{g}{\omega}}$. Quindi l'estremità inferiore del filo continuamente abbassandosi e sollevandosi anderà percorrendo uno spazio $=2\omega$, e queste divagazioni saranno tutte isocrone, e ciascuna di esse si compirà nel

tempo

tempo $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. Tali piccole oscillazioni non potranno arrestarsi, che fermando l'estremità inferiore del filo nel punto che corrisponde ad $u = o$, cioè ad $r = a$, perchè quivi l'elasticità del filo sarà in equilibrio con la forza di gravità. Se si fermasse in un punto diverso, e poi si lasciasse in libertà, essa continuerebbe a fare nuove oscillazioni meno estese, le quali però si compirebbero nello stesso tempo.

Se ho creduto che la soluzione accennata del Sig. *Poisson* meritasse una qualche correzione, devo però fare il più gran plauso alle altre eccellenti Memorie del medesimo Autore, contenute nello stesso volumetto del Giornale della Scuola Politecnica. Tra queste si trovano alcune ricerche sopra i punti singolari delle curve, dalle quali ho avuto la compiacenza di vedere pienamente confermate le riflessioni da me fatte sullo stesso soggetto, ed inserite nel terzo Tomo de' miei *Elementi d'Algebra* pubblicato sul principio dell'anno 1804.