DELLA RISOLUZIONE DE' PROBLEMI DI MASSIMO O MINIMO, QUANDO LA QUANTITÀ, CHE VUOLSI MASSIMA O MINIMA, È DATA.

Del Sig. Sebastiano Canterzani.

Ricevuta li 10 *Ottobre* 1808.

Sono certe questioni di massimo o minimo, alle quali non è, almeno immediatamente, applicabile la regola generale, che prescrive che mettasi eguale a zero il differenziale della quantità, che si vuole massima o minima. Tali sono certamente quelle, che il sommo Geometra *Lodovico De la Grange* insegnò di sciorre dipendentemente dalla teorìa delle frazioni continue. Tali pure sono quelle, che il grande *Eulero* insegnò di sciorre col calcolo delle variazioni da lui inventato, e ridotto poscia a singolare semplicità dal non mai abbastanza lodato Sig. *De la Grange*.

A prima vista sembran pure tali quelle questioni, in cui la quantità, che vuolsi massima o minima, è data; perchè essendo data, e quindi costante, non ammette differenziale.

Il celebre *Gabriel Manfredi* trattava questi problemi nella seguente maniera. Inverteva il problema così che fosse dato quel che era incognito, e incognito quel che era dato: in tal modo la quantità, che volevasi massima o minima, diveniva variabile. Scioglieva dunque il problema inverso; indi nell' equazione, a cui giungeva, sostituiva in luogo delle quantità in essa contenute i valori, che loro competevano nel problema diretto. Recava per esempio il problema: data la retta AB (*Fig.* 1) e dato in essa il punto C, trovare l'angolo ADB, in cui la retta AB resta inscritta in modo che sia la minima delle rette, che gli si possono inscrivere per il punto C.

Inverteva egli il problema così: dato l'angolo ADB, e nel di lui piano il punto C, trovare la AB minima delle rette, che inscriver gli si possono per il punto C. Tirata per C la retta EF perpendicolare all' uno de' cruri DA dell' angolo, e fatta $DE = f$, $EF = g$, $EC = h$, $EA = x$; condotta in oltre CO parallela ad AD, trovava

$$AB = \frac{(fg + gx)\sqrt{hh + xx}}{gx + fh}$$

di cui il differenziale, presa x variabile, posto eguale a zero somministra l'equazione $gx^3 + 2fhx^2 + f^2hx + fh^3 - fgh^2 = 0$.

Ma il problema da prima proposto porta che sia data la retta AB col punto in essa C, onde uno de' segmenti sia $AC = a$, l'altro $CB = b$, e dimanda che si trovi l'angolo ADB, il quale dovendo co' suoi cruri passare per li punti estremi della data retta resta solo che rispetto a questa retta si determini il punto D, dove aver dee il suo apice. Chiamava egli pertanto la distanza DS di tal punto dalla retta $AB = y$, e la porzione AS, che in questa retta taglia la perpendicolare DS, chiamava $= z$. Aveva così $DA = \sqrt{zz + yy}$. Essendo $AD : DS :: AC : CE$, cioè $\sqrt{zz + yy} : y :: a : h$, otteneva $h = \frac{ay}{\sqrt{zz + yy}}$; ed essendo pure $AS : DS :: AE : EC$, cioè $z : y :: x : \frac{ay}{\sqrt{zz + yy}}$ otteneva $x = \frac{az}{\sqrt{zz + yy}}$; e quindi $DE = f = \sqrt{zz + yy} - \frac{az}{\sqrt{zz + yy}}$. Per ultimo condotta da C la CT parallela a DB, essendo $AB : AD :: AC : AT$, cioè $a + b : \sqrt{zz + yy} :: a : AT$ ricavava $AT = \frac{a\sqrt{zz + yy}}{a + b}$, e quindi $ET = AT - AE = \frac{a\sqrt{zz + yy}}{a + b} - \frac{az}{\sqrt{zz + yy}} = \frac{az^2 + ay^2 - a^2z - abz}{(a + b)\sqrt{zz + yy}}$: ma $ET : EC :: DE : EF$, cioè

$$\frac{az^2 + ay^2 - a^2z - abz}{(a + b)\sqrt{zz + yy}} : \frac{ay}{\sqrt{zz + yy}} :: \frac{zz + yy - az}{\sqrt{zz + yy}} : g;$$ dunque $$g = \frac{(a^2y + aby)(zz + yy - az)}{(az^2 + ay^2 - a^2z - abz)\sqrt{zz + yy}}.$$

Ricavati questi valori di f, g, h, x li sostituiva nell'equazione ritrovata, e così finalmente arrivava ad ottenere $z = b$: il che mostra, che prendendo su la data retta AB la $AS = CB$, e condotta ad essa la perpendicolare SD, ogni punto di questa perpendicolare indefinitamente prodotta, essendo sparita la y, può essere l'apice dell'angolo cercato.

Il metodo è ingegnoso; ma pare che il calcolo, che occorre fare, possa, almeno in molti casi, riuscir più comodo, se nel formare la formola, il cui differenziale nel problema inverso dee porsi eguale a zero, si abbia l'avvertenza di farvi

entrare

entrare le quantità, che servono a determinar quella, che cercasi nel problema diretto; poichè così si ottengono immediatamente due equazioni, l'una delle quali è la formola suddetta posta eguale alla quantità data, che vuolsi massima o minima; l'altra è il differenziale della formola stessa posto eguale a zero. Col mezzo di queste due equazioni ottiensi senz'altro il valore delle quantità, che sciolgono il problema diretto.

Per non dipartirci dall'esempio proposto, fatta $AC = a$, $CB = b$, prendasi $AS = z$, $SD = y$, che sono le linee, che servono a trovare l'angolo cercato nel problema, le quali linee nel problema inverso sono costanti. Supposta ora la EF una retta qualunque inscritta all'angolo pel punto C, da E tirisi EG perpendicolare a SD, e pongasi $SG = m$, e sarà m variabile nel problema inverso. Essendo CT parallela a DB, sarà $AB : AD :: AC : AT$, cioè $a+b : \sqrt{zz+yy} :: a : AT$, onde $AT = \frac{a\sqrt{zz+yy}}{a+b}$, e $AB:AD::CB:TD$, cioè $a+b:\sqrt{zz+yy}::b:TD$, onde $TD = \frac{b\sqrt{zz+yy}}{a+b}$. Ma $DS : DA :: SG : AE$, cioè $y:\sqrt{zz+yy} :: m : AE$, e però $AE = \frac{m\sqrt{zz+yy}}{y}$. Sarà pertanto $ET = AT - AE = \frac{(ay-am-bm)\sqrt{zz+yy}}{(a+b)y}$. Ora condotta da E la perpendicolare ER ad AB si avrà $DS : AS :: ER : AR$, cioè $y : z :: m : AR = \frac{mz}{y}$, e però $RC = a - \frac{mz}{y}$, e $CE = \sqrt{m^2+(a-\frac{mz}{y})^2}$. Finalmente posta la CO parallela a DA, sarà $CO = TD$, e si avrà $ET : EC :: CO : CF$, cioè $\frac{(ay-am-bm)\sqrt{zz+yy}}{(a+b)y} : \sqrt{m^2+(a-\frac{mz}{y})^2} :: \frac{b\sqrt{zz+yy}}{a+b} : CF$, e quindi $CF = \frac{by\sqrt{m^2+(a-\frac{mz}{y})^2}}{ay-am-bm}$. Dunque $EF = CE + CF = \frac{(a+b)(y-m)\sqrt{m^2+(a-\frac{mz}{y})^2}}{ay-am-bm}$.

Questa è la formola, che deve riuscir eguale ad $a+b$, e che nel medesimo tempo aver deve eguale a zero il suo differenziale preso nel supposto di m variabile. Ecco dunque le due equazioni

$$\frac{(a+b)(y-m)\sqrt{m^2+\left(a-\frac{mz}{y}\right)^2}}{ay-am-bm}=a+b$$

$$\frac{\left(-\vartheta m\sqrt{m^2+\left(a-\frac{mz}{y}\right)^2}+\frac{(y-m)\left(m\vartheta m-\frac{z\vartheta m}{y}\left(a-\frac{mz}{y}\right)\right)}{\sqrt{m^2+\left(a-\frac{mz}{y}\right)^2}}\right)(ay-am-bm)+\vartheta m(a+b)(y-m)\sqrt{m^2+\left(a-\frac{mz}{y}\right)^2}}{(ay-am-bm)^2}=0$$

Senza aver bisogno di sviluppare i diversi valori, che competono all'incognita m nella prima equazione, egli è certo che quello convien tra essi scegliere, il quale fa che non solo sia la prima parte di quell'equazione eguale alla seconda, ma porta in oltre che i due segmenti CE, CF sieno il primo al secondo come AC:CB, cioè sia $\sqrt{m^2+\left(a-\frac{mz}{y}\right)^2} : \frac{by\sqrt{m^2+\left(a-\frac{mz}{y}\right)^2}}{ay-am-bm} :: a:b$, la qual analogìa ne presenta l'equazione $aby-abm-b^2m=aby$, che ci dà $m=0$: e questo è il valore, che non solo soddisfa alla prima equazione, ma che messo nella seconda ci dee dare la soluzione del problema. Ora l'altra equazione, ove sia $m=0$, diventa $(-a\vartheta m-z\vartheta m)ay+ay\vartheta m(a+b)=0$, la quale divisa per $ay\vartheta m$ riesce $-a-z+a+b=0$, che, appunto come prima, dà $z=b$.

Stando le cose in questi termini, quando la quantità, che dev'essere massima o minima, è data, può dirsi, che senza pensar a invertere il problema basta trovare la formola, che dipendentemente da una qualche variabile esprima in generale la quantità, che esser dee massima o minima. Poichè mettendo questa formola eguale alla quantità medesima data si ha un'equazione, e mettendone eguale a zero il differenziale si ha un'altra equazione, e da queste due equazioni si cava senz' altro quella, che direttamente scioglie il problema. Quantunque ciò venga comprovato nella condotta tenutasi ultimamente per la soluzione del problema Manfrediano, pure giova recarne anche un altro, e sia il seguente.

Data la durata del crepuscolo trovare la latitudine terrestre, sotto la quale il crepuscolo minimo è della durata data. Sia (*Fig.* 2) Z il vertice, HO l'orizzonte, RS il circolo finitore del crepuscolo, P il polo settentrionale, EN la declinazione australe del Sole, e NI il parallelo descritto dal Sole, il quale tagli l'orizzonte in L, e il circolo RS in I. Condotti i due orarj PL, PI l'angolo IPL è proporzionale alla durata del crepuscolo, e però dove questa è minima, minimo è pure quest' angolo, e quindi anche il seno della sua metà. L'arco ZE corrispondente alla latitudine terrestre cercata mettasi $= z$, la declinazione del sole $EN = b$, l'arco di meridiano $HR = OS = c$. La durata data del crepuscolo sia $= h$ esprimendo h ore e parti di ora. Facendo $24 : h :: 360$ al quarto, si avrà in questo quarto proporzionale il numero de' gradi corrispondenti al tempo h, cioè si avrà la misura dell'angolo IPL, che perciò sarà di gradi $15h$.

Nel triangolo sferico IPZ abbiamo il lato $PZ = 90^\circ - z$, il lato $PI = 90^\circ + b$, e il lato $ZI = 90^\circ + c$; onde sarà $\text{sen.}\frac{IPZ}{2} = \sqrt{\frac{\cos.z\,.\cos.b - \text{sen.}z\,.\,\text{sen.}b + \text{sen.}c}{2\,.\cos.z\,.\cos.b}}$. Nel triangolo poi LPZ oltre il lato $PL = PI = 90^\circ + b$, e il lato $PZ = 90^\circ - z$ abbiamo il lato $ZL = 90^\circ$; onde sarà $\text{sen.}\frac{LPZ}{2} = \sqrt{\frac{\cos.z\,.\cos.b - \text{sen.}z\,.\,\text{sen.}b}{2\,.\cos.z\,.\cos.b}}$. I coseni per tanto di questi due angoli saranno

$\cos.\frac{IPZ}{2} = \sqrt{\frac{\cos.z\,.\cos.b + \text{sen.}z\,.\,\text{sen.}b - \text{sen.}c}{2\,.\cos.z\,.\cos.b}}$, e $\cos.\frac{LPZ}{2} = \sqrt{\frac{\cos.z\,.\cos.b + \text{sen.}z\,.\,\text{sen.}b}{2\,.\cos.z\,.\cos.b}}$. Alla differenza di questi due angoli è eguale l'angolo $\frac{IPL}{2}$, e per conseguenza si avrà

$$\text{sen.}\frac{IPL}{2} = \frac{\sqrt{\cos.z\,.\cos.b - \text{sen.}z\,.\,\text{sen.}b + \text{sen.}c}\sqrt{\cos.z\,.\cos.b + \text{sen.}z\,.\,\text{sen.}b}}{2\,.\cos.z\,.\cos.b}$$
$$- \frac{\sqrt{\cos.z\,.\cos.b + \text{sen.}z\,.\,\text{sen.}b - \text{sen.}c}\sqrt{\cos.z\,.\cos.b - \text{sen.}z\,.\,\text{sen.}b}}{2\,.\cos.z\,.\cos.b}.$$

Ed ecco trovata la formola, che dee porsi $= \text{sen.}\frac{15h}{2}$, e insieme avere il suo differenziale $= 0$.

Essendo la formola similmente data per z, e per b è indifferente prendere nel differenziarla per variabile l'una o l'altra di queste due quantità. Fattone il differenziale, e postolo $= 0$, nasce un'equazione, che maneggiata con un po d'arte riesce in ultimo $(\text{sen.}b)^3 - \left(\frac{\text{sen.}z}{\text{sen.}\frac{c}{2}\,.\cos.\frac{c}{2}} + \frac{\text{sen.}\frac{c}{2}\,.\cos.\frac{c}{2}}{\text{sen.}z}\right)(\text{sen.}b)^2 +$

$\left(1+(\text{sen.}z)^2\right)\text{sen.}b-\text{sen.}z\,\text{sen.}\frac{c}{2}\,.\,\cos.\frac{c}{2}=0$ dove sen. b ha tre valori, cioè

$$\text{sen.}b=\frac{\text{sen.}z\,.\,\text{sen.}\frac{c}{2}}{\cos.\frac{c}{2}},\quad \text{sen.}\,b=\frac{\text{sen.}z\,.\,\cos.\frac{c}{2}}{\text{sen.}\frac{c}{2}},\quad \text{sen.}\,b=\frac{\text{sen.}\frac{c}{2}\,.\,\cos.\frac{c}{2}}{\text{sen.}z}.$$

Qui osservisi, che supposto $z=0$, cioè preso il luogo terrestre sotto l'equatore, dee essere anche $b=0$, essendo chiaro, che nella sfera retta il minimo crepuscolo ha luogo que' giorni, ne' quali il sole descrive l'equatore. Ciò posto si conchiude che il terzo valore non appartiene al problema proposto, ma ad un problema analogo. Lo stesso dir si deve del secondo valore; perchè essendo l'arco $\frac{c}{2}$ assai piccolo, il suo seno dev'essere minore del suo coseno, e perciò questo valore porterebbe che anche il seno della latitudine terrestre z fosse sempre minore del seno della declinazione del sole b; il che non può sempre verificarsi.

Al presente problema dunque non serve che il primo valore sen. $b=\dfrac{\text{sen.}z\,.\,\text{sen.}c}{\cos.\frac{c}{2}}$, o sia sen. $b=$ sen. z . tang. $\frac{c}{2}$. E questo è in fatti il risultato della soluzione sintetica, che il Marchese *De l'Hôpital* ha data del problema, in cui cercasi la declinazione australe del sole, posta la quale la durata del crepuscolo sotto una data latitudine settentrionale terrestre è minima.

Ora liberando l'altra equazione da radicali, e facendo varie riduzioni, e specialmente quella di sostituire $1-(\text{sen.}\,b)^2$ a $(\cos.\,b)^2$ si arriva ad avere

$$\frac{\left(\text{sen.}\frac{15h}{2}\right)^2\left(\cos.\frac{15h}{2}\right)^2-\left(\text{sen.}\frac{c}{2}\right)^2\left(\cos.\frac{c}{2}\right)^2}{\left(\text{sen.}\frac{15h}{2}\right)^2}=\left(\text{sen.}b\right)^2\left(\cos.\frac{15h}{2}\right)^2+\left(\text{sen.}z\right)^2\left(\cos.\frac{15h}{2}\right)^2$$

$$+\left(\text{sen.}z\right)^2\left(\text{sen.}b\right)^2\left(\text{sen.}\frac{15h}{2}\right)^2-2\,.\text{sen.}z\,.\text{sen.}b\,.\text{sen.}\frac{c}{2}\,.\cos.\frac{c}{2},$$

dove si porrà in luogo di sen. b il valore trovato di sopra $\dfrac{\text{sen.}z\,.\,\text{sen.}\frac{c}{2}}{\cos.\frac{c}{2}}$, e nascerà un'equazione, che con opportune riduzioni diventa

$$(\text{sen.}\,z)^4 + \frac{\left(\cos.\frac{15h}{2}\right)^2 - 2\left(\text{sen.}\frac{c}{2}\right)^2\left(\cos.\frac{c}{2}\right)^2}{\left(\text{sen.}\frac{c}{2}\right)^2\left(\text{sen.}\frac{15h}{2}\right)^2}\,(\text{sen.}\,z)^2 =$$
$$\frac{\left(\cos.\frac{c}{2}\right)^2\left(\text{sen.}\frac{15h}{2}\right)^2\left(\cos.\frac{15h}{2}\right)^2 - \left(\text{sen.}\frac{c}{2}\right)^2\left(\cos.\frac{c}{2}\right)^4}{\left(\text{sen.}\frac{c}{2}\right)^2\left(\text{sen.}\frac{15h}{2}\right)^4}$$

Quest' equazione trattata alla maniera delle quadratiche affette conduce mediante alcune riduzioni a due valori di $(\text{sen.}\,z)^2$, che si riducono ad essere

$$(\text{sen.}\,z)^2 = \frac{\cos.c - \cos.15h}{1 - \cos.15h},\quad (\text{sen.}\,z)^2 = \frac{\left(\cos.\frac{c}{2}\right)^2\left(-\cos.c - \cos.15h\right)}{2\left(\text{sen.}\frac{c}{2}\right)^2\left(\text{sen.}\frac{15h}{2}\right)^2},$$

il secondo de' quali non può appartenere al nostro problema; poichè posto $15h = c$, il che non può avvenire che ne' punti della terra, che sono sotto l' equatore, dovrebbe riuscir z, e per conseguenza anche $(\text{sen.}\,z)^2 = 0$, e non già $= -\frac{\left(\cos.\frac{c}{2}\right)^2 \cos.c}{(\text{sen.}\,z)^4}$, come porta quel secondo valore. Il solo primo adunque $(\text{sen.}\,z)^2 = \frac{\cos.c - \cos.15h}{1 - \cos.15h}$ scioglie il problema proposto. La latitudine per tanto terrestre, che si cercava, è quella, che ha il suo seno $= \sqrt{\frac{\cos.c - \cos.15h}{1 - \cos.15h}}$.

Chi volesse la declinazione del Sole il giorno della data minima durata del crepuscolo altro non dovrebbe fare che porre $\sqrt{\frac{\cos.c - \cos.15h}{1 - \cos.15h}}$ in luogo di sen. z nel valore già trovato del suo seno $\frac{\text{sen.}\,z\,.\,\text{sen.}\frac{c}{2}}{\cos.\frac{c}{2}}$, o sia sen. z . tang. $\frac{c}{2}$; vale a dire altro non avrebbe a fare che moltiplicare per la tangente della metà dell' arco c il seno della latitudine terrestre, sotto la quale si verifica la data minima durata del crepuscolo. Posto, come usasi, l'arco c di 18°, la tangente della di lui metà è 0.1583844. Se la durata h data del crepuscolo sia, a cagion d' esempio, di ore 1 . 41' . 21", onde si abbia $h = \frac{2027}{1200}$, e $15h = \frac{2027}{80} =$

$25^\circ.20'.15''$, sarà sen. $z = \sqrt{\frac{472538}{961973}} = 0.7008676$, e quindi $z = 44^\circ.29'.48''$, che è vicin vicino la latitudine di Bologna. Sarà poi sen. $b = 0.1583844 \times 0.7008676 = 0.1110065$, e quindi $b = 6^\circ.22'.24''$.

Il caso considerato in questa breve Memoria non è stato, che io sappia, notato da verun Autore; nè forse meritava d'esserlo; nè io ho avuto altro fine nell'avvertirlo, che quello di giovare ai Matematici meno esercitati, persuaso che non possa dar impaccio a chi è già assuefatto ad assoggettar a' suoi calcoli le più intrecciate questioni.