

SULL' ESPERIMENTO POLENIANO DELLA CADUTA  
DE' GRAVI IN MATERIE CEDEVOLI

M E M O R I A

DEL SIG. AB. ANGELO ZENDRINI

Presentata dal Sig. ANTONIO CAGNOLI

Il dì 16 Giugno 1806.

**S**e il noto sperimento esposto dal Poleni nel suo Trattato delle Pescaje o Cataratte n.º 101, e ripetuto posteriormente con diverso successo, è indifferente, com'è dimostrato, all' oggetto di definire la disputa per cui si volle inventare, può peraltro essere argomento, mi sembra, di una che io sappia non ancor fatta e non inutile ricerca, atta a recare lume a chiunque piacesse di ripetere quell' esperimento medesimo. La ricerca è la seguente

Dati due corpi di volume uguali e simili, ma di masse in ragione reciproca delle altezze, dalle quali cadono su una materia molle e omogenea in tutte le sue parti, si dimanda se le cavità, che produrranno, saranno uguali.

Che in qualunque ipotesi di resistenza comunque variabile gli effetti prodotti da certi corpi, e che rappresentati vengono dalle resistenze pegli spazj percorsi, sieno uguali, è cosa dimostrata, come lo è pure (*V. Mem. sulla inutilità della Questione intorno alla misura delle forze vive: Zendrini*) che nel caso in cui la resistenza sia costante, non solo gli effetti totali, ma le sole cavità ancora serbano tra loro ragione di uguaglianza.

Ma il caso ipotetico della forza di resistenza costante è egli quello della natura?

Sebbene la teorìa della resistenza de' fluidi malgrado gli studj di molti celebri Matematici non sia giunta per anco alla sua

perfezione, ciò non toglie per altro che si conoscano le cause, per cui un corpo che si muove in un fluido, incontrar deve una resistenza. Sono queste, la coesione delle parti del fluido, e la sua inerzia. La resistenza proveniente dalla prima di queste due cause si sa essere proporzionale alla semplice velocità; siccome quella che proviene dalla seconda è in ragione del quadrato della velocità del corpo che per entro il fluido si muove.

Quantunque i Fisici qualora trattano della resistenza de' mezzi si restringano a considerare soltanto i fluidi propriamente tali, siccome quelli de' quali più interessa conoscere le affezioni, non essendovi, moto in natura, che non venga se non da altro ritardato da un mezzo ch'è fluido; egli è però indubitato che le stesse cause di resistenza agir devono pure nelle particelle di un qualunque altro corpo, se non fluido, molle, e tale che considerato venga come uno spazio materiale per cui trapassa un corpo movendosi, ossia come un mezzo per entro cui esso si muove. Imperciocchè nessuno negherà certamente che movendosi un corpo in una materia molle, vincer deve la coesione per cui le particelle di essa aderiscono tra loro: e parimenti mi sembra non esservi dubbio che la inerzia delle particelle della materia suddetta, le quali il corpo avanzandosi in essa percuote successivamente, produr deve una resistenza crescente in proporzione del numero delle particelle che vengono urtate in ugual tempo; inoltre questa resistenza crescer deve ancora in proporzione della forza con cui le particelle vengono urtate dal corpo, la qual forza, restando il corpo lo stesso, cresce in ragione della di lui velocità. Quindi la resistenza totale che proviene dalla inerzia della materia molle dee essere proporzionale al quadrato della velocità del corpo che si muove per essa, locchè è appunto ciò che i Fisici dimostrano accadere ne' fluidi propriamente detti. Posto pertanto il principio che la resistenza la quale opponesi da un mezzo qualunque si sia, non è mai una forza costante, dovendo per ciò che si è detto essere in parte proporzionale alla semplice velocità, con cui si muove il corpo che penetra in esso mezzo, ed in parte proporzionale al quadrato della velocità, entriamo nell' esame del proposto quesito.

H h 2

Per

Per ritrovare il rapporto tra i due spazj, ossia tra le due cavità formate dalle due palle nel quesito enunziate, converrebbe introdurre nelle note formule pei moti ritardati la legge delle resistenze esposta. Egli è ben vero che trattandosi di moti rapidi, che si eseguiscano ne' fluidi, si suole trascurare la resistenza che nasce dalla coesione delle parti, la quale diviene poco sensibile in confronto dell' altra ch'è proporzionale al quadrato della velocità. Questo per altro non può aver luogo essendo piccola la velocità del corpo, come avviene negli esperimenti che danno occasione al quesito. Di più, alla tenacità delle parti della materia, in cui si fanno gli esperimenti, è da aggiungersi l'azione dell' attrito delle particelle tra di loro, e di esse col corpo che vi s' immerge, dal che rilevasi dover succedere alterazioni sensibili nel rapporto della legge di resistenza proporzionale al quadrato della velocità.

Queste considerazioni fanno adunque che introdurre conveniva nelle formule pei moti ritardati una espressione generale, la quale soddisfacendo alla indicazione di un rapporto qualunque si sia della resistenza colla velocità, serve a farci risolvere in un modo generale il proposto quesito.

La formula generale pei moti ritardati è  $r\delta s = -m u \delta u$ . Sostituiscasi pertanto ad  $r$ ,  $\varphi u$ , indicando  $\varphi$  quella funzione qualunque della velocità ch' esprime il generale rapporto tra essa e la resistenza. Chiamata  $m$  la massa di una di esse palle,  $u$  la velocità acquistata nella discesa,  $s$  lo spazio ch' essa percorre introducendosi nella materia molle; come pure chiamata  $M$  la massa dell' altra palla,  $V$  la velocità nella discesa acquistata,  $S$  lo spazio da essa percorso nella materia istessa, si avrà per la prima  $\varphi u \delta s = -m u \delta u$ , e per la seconda  $\varphi V \delta S = -M V \delta V$ .

Essendo, come si è posto, le masse in ragione reciproca dei quadrati delle velocità rispettive, si ha  $m u^2 = M V^2$ ; e quindi differenziando  $m u \delta u = M V \delta V$ . Ma  $\varphi u \delta s = -m u \delta u$ , e  $\varphi V \delta S = -M V \delta V$ ; dunque, come si sa,  $\varphi u \delta s = \varphi V \delta S$ . Queste uguali quantità sono il prodotto ciascheduna di due fattori, l'una di  $\varphi u \delta s$ , l' altra di  $\varphi V \delta S$ . Ora perchè un fattore di una di queste quan-

tità fosse uguale al fattore omologo dell' altra, sarebbe mestieri che l' altro fattore parimenti ch' entra a comporre uno de' due prodotti, fosse uguale al fattore corrispondente dell'altro prodotto. Quindi è che se  $\delta_s$  deve essere lo stesso che  $\delta_S$ , ossia  $\int \delta_s = \int \delta_S$ , egli è forza che anco  $\varphi u$  sia uguale a  $\varphi V$ . Ma nel nostro caso  $\varphi u$  e  $\varphi V$  non potranno mai essere uguali essendo funzioni simili di velocità diverse. Dunque neppure  $\int \delta_S$  potrà essere uguale a  $\int \delta_s$ ; ch' è quanto dire le cavità prodotte da due corpi di figura simili, ma di masse in ragione reciproca dei quadrati delle di loro velocità rispettive, cadenti in una materia molle, che si suppone in tutte le sue parti omogenea, non potranno essere uguali.

Corol. 1. Da ciò si deduce che minore dovrà essere la cavità prodotta da quello de' due corpi ch' essendo di massa minore vi cade da maggiore altezza. Poichè essendo in ambedue i casi la resistenza, come una data funzione della velocità del corpo che cade sulla materia molle, crescendo la velocità del corpo, crescerà pure la resistenza che incontra; e siccome poi i prodotti, per ciò ch' è dimostrato, delle resistenze vinte pegli spazj percorsi devono essere uguali, così la maggioranza di resistenza vinta sarà a discapito dello spazio che percorrerà il corpo.

Corol. 2. Dalle cose dette si deduce parimenti che crescendo la differenza della velocità tra i due corpi, conservando essi però sempre tra le masse e le velocità rispettive la proposta ragione, crescer deve la differenza fra le due cavità. Infatti essendo come sopra  $\varphi u \delta_s = \varphi V \delta_S$ , quanto più il valore di  $\varphi V$  sarà maggiore di quello di  $\varphi u$ , tanto minore, fatte le integrazioni, dovrà esser il valor dell' altro fattore del primo prodotto in confronto dell' omologo factor del secondo.

Questi risultati che ottengono si dalla teoria non hanno talvolta esattamente luogo nella pratica. Le circostanze particolari imprevedute o non conoscibili della materia, su cui si fanno gli sperimenti, inducono sensibili alterazioni, le quali per essere spiegate, converrebbe poter mettere a calcolo le differenze delle particolari località. Infatti al Poleni e ad altri Fisici di autorità

gravissima successe di riscontrare la uguaglianza nelle cavità prodotte dalle due palle. Procedo forse questo fenomeno da quelle medesime cause locali, per cui lo stesso corpo cadendo nella stessa materia dalla medesima altezza, non produce le molte volte fossa parimenti profonda. Ciò ch'è cagione di disuguaglianza in questo caso, produce la uguaglianza nell'altro succedendo locali compensi di resistenze.