PROBLEMA GRAFICO

Del Sig. Giuseppe Tramontini

Presentato dal Sig. Antonio Cagnoli *il dì* 27 *Febbrajo* 1806.

In parecchi opuscoli dedicati all' istruzione dei giovani coltivatori del Disegno trovai con vario metodo, ma egualmente inesatto, esposta la risoluzione di quel problema, in cui si tratta di descrivere la figura dell' ombra che, esponendo una nicchia ai raggi del sole, si produce nella superficie concava della sua volta.

L' uso frequentissimo di tal problema ne' Disegni architettonici, l'attinenza sua co' principj della stereotomia, mi parvero sufficienti motivi per offrire agli studiosi una risoluzione esatta, ed inoltre estesa a tutti i casi ne'quali la superficie della Volta sia di quelle che si generano per la rotazione di una curva conica d' intorno al proprio asse.

Per ridurre il quesito a puri termini geometrici, è d'uopo osservare che essendo dato un emisferio concavo esposto a' raggi del sole, tutti quelli che passano per la circonferenza del circolo, che forma l' orlo dell' emisferio, supponendosi fisicamente paralleli fra di loro, sono costituiti in una medesima superficie cilindrica, la cui base è la mentovata circonferenza, ed il cui lato generatore è una retta parallela a qualunque de' supposti raggi solari. Adunque tutti i raggi che passano per l' orlo, ed incontrano la superficie dell' emisferio, la incontrano appunto in quella linea che è la scambievole intersezione delle due superficie cilindrica, ed emisferica, e quella linea stessa determina il contorno dell' ombra.

Ora in luogo dell' emisferio, sostituiscasi la metà della superficie generata per la rotazione d' una curva conica d' intorno al proprio asse, e tal metà sia quella che nasce dividendo la super-

fi-

ficie intera con un piano che passi per l' asse. Si chiami cilindrica quella superficie, dove sono costituiti tutti i raggi solari che passano pel perimetro della supposta sezione per l' asse, e tutti incontreranno la proposta superficie concava in quella linea che è comune intersezione fra la superficie stessa, e la superficie cilindrica. Per tanto il problema considerato in quest' aspetto si presenta ne' seguenti termini.

Determinare l' intersezione scambievole tra la superficie generata dalla rotazione d' una curva conica intorno al proprio asse, ed una superficie cilindrica di cui sia base la stessa curva generatrice della superficie di rotazione.

L'esame di questo problema conduce a conoscere che la cercata intersezione è sempre una curva conica della medesima specie che la generatrice della superficie di rotazione.

Tale è il risultato delle seguenti proposizioni che formano la prima parte del presente ragionamento. La seconda parte conterrà le applicazioni alla pratica del disegno.

P A R T E I.

§. 1. Se in una sezion conica GAD (Fig. 1) siano quante corde si voglia GH, EF fra di loro parallele, e segate da altre AB, CD pure fra di loro parallele; i rettangoli contenuti dai segamenti corrispondenti delle prime, e delle seconde sono proporzionali.

Siano I, L, K, M i punti delle intersezioni; dico essere il rettangolo AIB al rettangolo CLD come il rettangolo EIF al rettangolo ELF. e così il rettangolo AIB al rettangolo CKD, come il rettangolo EIF al rettangolo GKH, e similmente si dica degli altri contenuti dai segamenti che si formano intorno a due altri dei dati punti I, L, M, K. (a)

§. 2.

(a) Apoll. Con. Lib. III. pr. XVII.
Grandi Con. pr. XVII.
Cagnoli Con. pr. (XXVI, LXX. cor. VI, CVI cor. V).

§. 2. Se quante corde si vogliano AB, CD nella parabola, fra loro parallele siano segate da diametri FN, HP in O, R, N, P, i rettangoli AOB, ARB, AND, APD che si formano dai segamenti delle corde sono proporzionali ai corrispondenti segamenti, FO, HR, FN, HP dei diametri intercetti fra la curva e le corde segate. (*b*)

§. 3. Se nell' iperbole PNQ (Fig. 2) siano quante corde si voglia RS, PQ fra di loro parallele e segate da una retta TZ parallela ad un assintoto dell' iperbole, le parti TV, TZ della secante intercette fra la curva, e le corde segate, sono proporzionali ai rettangoli RVS, PZQ contenuti dai corrispondenti segamenti delle corde stesse.

Pel centro C s' intenda condotto il diametro CN, che tagli per mezzo col suo prolungamento in G ed X le corde proposte. Per T sia condotta una retta TO parallela a CN, e prodotta fino ad incontrare in O l' iperbole opposta, ed in L, K le date corde. Per N sia condotta fino ad incontrare in M l' assintoto CM la NM parallela alle corde stesse. Saranno simili i triangoli CNM, TLV, TKZ. E perchè il rettangolo TLO al rettangolo RLS (*c*) sta come il quadrato dalla CN a quello dalla MN, o come quello dalla TL a quello dalla LV, sarà permutando, e dividendo, il rettangolo OTL al quadrato dalla TL come l' eccesso del rettangolo RLS sopra il quadrato della LV allo stesso quadrato. Permutando di nuovo sarà il rettangolo OTL all' eccesso del rettangolo RLS sopra il quadrato dalla LV come il quadrato dalla TL a quello dalla LV, cioè come il quadrato dalla TK a quello dalla KZ. Ma nella medesima ragione si dimostra similmente essere il rettangolo OTK all' eccesso del rettangolo PKQ sopra il quadrato dalla KZ; dunque il rettangolo OTL al rettangolo OTK, cioè la TL alla TK sta come l' eccesso del rettangolo RLS sopra il quadrato dalla LV all' eccesso del rettangolo PKQ sopra il quadrato dalla KZ, ovvero come il rettangolo RVS con insieme il doppio rettangolo VLG

(*b*) Grandi Con. pr. XI e coroll.

(*c*) Apoll. Con. lib. III pr. XXII.

VLG al rettangolo PZQ con insieme il doppio rettangolo ZKX. Di più, il doppio rettangolo VLG al doppio rettangolo ZKX sta come VL a ZK, cioè come TL a TK. Adunque il rettangolo RVS con insieme il doppio rettangolo VLG sta al rettangolo PZQ con insieme il doppio rettangolo ZKX come il doppio rettangolo VLG al doppio rettangolo ZKX, e quindi come il solo rettangolo RVS al solo rettangolo PZQ, cioè il primo di questi rettangoli sta al secondo come TL a TK o come TV a TZ.

§. 4. Nell' iperbole PNQ (Fig. 2) siano quante rette si voglia TZ, △I parallele ad un assintoto CM, segate da una corda PQ in Z, I, e dai punti T, △ dove le date rette parallele incontrano la curva, sian condotte parallele all' altro assintoto CD le TB, △A fino ad incontrare l'assintoto CM. Il rettangolo contenuto da una delle date rette parallele TZ, e dalla corrispondente TB, intercetta fra la stessa TZ, e l' assintoto CM, sta al rettangolo contenuto da un' altra △I e dalla corrispondente △A intercetta fra la stessa △I e l'assintoto CM, come il rettangolo PZQ che si comprende dai segamenti della corda corrispondenti alla prima TZ al rettangolo PIQ contenuto dai segamenti corrispondenti alla seconda △I.

Pongasi condotta per I la IY parallela all' assintoto CD fino ad incontrare in Y l' assintoto CM, segando in E la curva, ed in V la TZ. Per V sia condotta la corda RS parallela alla PQ. Saranno eguali le △A, YI, le BY, TV, le AY, △I, le TB, YV. In oltre per essere la CY alla CA come la A△ o pure la IY alla EY (*d*), sarà la CY alla AY come la IY alla EI, e perciò il rettangolo dalle CY, EI eguaglierà il rettangolo dalle AY, YI, cioè quello dalle △I, △A.

Similmente si dimostrerà essere il rettangolo dalle CY, EV eguale a quello dalle BY, VY, cioè a quello dalle TV, TB. Adun-

(*d*) Apoll. lib. II pr. XII.
Grandi pr. XL.
Cagnoli pr. CVIII cor. VI.

que il rettangolo dalle TV, TB al rettangolo dalle ΔI, ΔA sta come il rettangolo dalle CY, EV a quello dalle CY, EI, cioè come la EV alla EI. Ma il rettangolo dalle TZ, TB a quello dalle TV, TB sta come TZ a TV; dunque il rettangolo dalle TZ, TB a quello dalle ΔI, ΔA sta nella ragione composta dalle ragioni di TZ a TV e di EV ad EI.

Ora per le cose dimostrate nel n.° precedente, il rettangolo PZQ al rettangolo RVS sta come TZ a TV, e il rettangolo RVS al rettangolo PIQ sta come EV ad EI. Adunque il rettangolo PZQ al rettangolo PIQ sta nella ragione composta dalle ragioni di TZ a TV e di EV ad EI, cioè come il rettangolo dalle TZ, TB a quello dalle ΔI, ΔA.

§. 5. Siano quante ellissi, o iperbole si voglia NH, F*h* (Fig. 3 e 2), simili, concentriche in C, poste cogli assi omologhi N*n*, F*f* nella medesima retta N*n*. Se dalle estremità degli assi omologhi partano altrettante rette fra di loro parallele, le quali seghino le curve corrispondenti in H, *h*, H', *h*' tutti questi punti d' intersezione sono in una medesima retta, che passa pel centro comune C di tutte le proposte ellissi, o pure iperbole.

Siano condotte pei punti H, *h* le H*x*, *h*X semiordinate agli assi rispettivi. Saranno simili i triangoli NH*x*, F*h*X. Siano M', N', *m*', *n*' gli assi conjugati delle proposte curve, i quali per ipotesi saranno in una medesima retta M' N' perpendicolare in C alla N*n*.

Poichè il rettangolo N*xn* al quadrato dalla H*x* sta come il quadrato dalla NC a quello dalla CM (§. 1), o pure come il quadrato dalla FC a quello dalla C*m*' e quindi come il rettangolo FX*f* al quadrato dalla *h*X, sarà il rettangolo N*xn* al rettangolo FX*f* come il quadrato dalla H*x* al quadrato dalla *h*X, cioè come il quadrato dalla *x*N a quello dalla XF. Perciò sarà il rettangolo N*xn* al quadrato dalla N*x* come il rettangolo FX*f* al quadrato dalla FX, e quindi la N*x* alla *xn* come la FX alla X*f*, e per conseguenza la metà dell' eccesso di *xn* sopra *x*N sta ad *x*N come la metà dell' eccesso di X*f* sopra XF sta ad XF, cioè C*x* sta ad *x*N come CX ad XF. Permutando adunque, sta C*x* a CX come *x*N ad XF, cioè come H*x* ad *h*X, e perciò i punti H, *h*, C sono

in

in una medesima retta, nella quale similmente si dimostrerà che debbono giacere i punti H', *h'* che sono negli altri rami delle elissi proposte (Fig. 3), o nelle opposte iperbole (Fig. 2).

§. 6. La projezione d' un' iperbole è un' iperbole, quella d' una parabola è una parabola, quella d' un' elisse è un' elisse o un circolo, e parimenti quella d' un circolo è un circolo o un' elisse.

Prescindendo dal caso, in cui sia perpendicolare il piano della data curva obbjettiva a quello della projezione, nel qual caso la projezione è una retta linea, egli è evidente che se il piano della data curva obbiettiva sia parallelo al piano della projezione, questa è una curva eguale e simile alla obbjettiva proposta. Ora siano scambievolmente fra loro inclinati i due piani. Si concepisca quella retta, nella quale essi piani si tagliano, ed assumasi come asse delle ascisse comune alla obbiettiva, ed alla sua projezione. Se intendansi condotte delle ordinate alla obbiettiva, e descritte le corrispondenti loro projezioni, queste saranno ordinate della curva che è projezione dell' obbiettiva proposta. In oltre tutte le ordinate della obbiettiva alle corrispondenti ordinate della projezione avranno una ragione costante, la quale dipende dall' angolo d' inclinazione che forman fra loro i due piani. Adunque essendo comune l' asse delle ascisse per la curva obbiettiva, e per la sua projezione, le ordinate della prima sono proporzionali alle ordinate corrispondenti della seconda. Applicato questo principio a ciascun caso particolare, l'enunciato teorema diviene evidente.

§. 7. Sono tanti circoli, che hanno l' asse comune, quelle sezioni che nascono tagliando con piani fra di loro paralleli un solido generato per la rotazione d' una sezion conica d' intorno al proprio asse, quando questo sia perpendicolare a' piani secanti.

La proposizione è per se stessa evidente.

§. 8. Sono tante elissi tutte fra loro simili quelle sezioni che nascono tagliando una sferoide con piani fra loro paralleli, ed obbliqui all' asse dell' elisse, per la cui rotazione si genera la sferoi-

de, ed in un medesimo diametro della stessa elissi generatrice giacciono i centri di tutte le sezioni (*f*).

§. 9. Sono tante ellissi, tutte simili fra di loro, le sezioni che nascono tagliando con piani fra lor paralleli una conoide parabolica, o iperbolica, purchè i piani secanti siano obbliqui all' asse della stessa conoide, e se questa sia iperbolica, il cono assintotico sia segato tutto dalla medesima parte del vertice, cioè da quella, dov' è costituita la conoide (*g*).

§. 10. Sono tutte parabole di egual parametro quelle sezioni che nascono tagliando una conoide parabolica con piani paralleli ad uno che passa per l' asse della conoide (*h*).

§. 11. Sono tante iperbole, tutte simili fra loro quelle sezioni che nascono tagliando una conoide iperbolica con piani paralleli ad uno, che passi per un diametro dell' iperbole per la rotazione della quale si genera la conoide. I centri poi di tutte le sezioni sono nella medesima retta, in cui giace il diametro conjugato di quello, per cui passa il piano parallelo a tutti i piani secanti.

S' intenda condotto per l' asse un piano PNQ (Fig. 4) perpendicolare a tutti i piani secanti. La sezion fatta da questo piano nella superficie della conoide sia l' iperbole PNQ, e le sezioni fatte dal piano stesso ne' piani secanti saranno altrettante rette come RA*a* parallele ad un diametro, che supporremo essere *o*CO, posto in C il centro dell' iperbole PNQ. All' asse N*n* della medesima s' intendano condotte perpendicolari le corde KL, PQ, le quali seghino in M, R la AR, e per esse corde passino altrettanti piani perpendicolari al piano PNQ, e secanti la conoide.

Le sezioni per KL, PQ sono circoli, ed i loro diametri corrispondenti sono le stesse KL, PQ, le quali divideranno per mezzo qualunque corda dei circoli stessi, che sia perpendicolare al piano

(*f*) Archim. de Conoid. et Sphæroid. pr. XV.
(*g*) Iv. pr. XIII, XIV, XV.
(*h*) Iv. Torelli in Comm. pr. XII

no PNQ. Ora le intersezioni dei piani secanti per KL, PQ, con quello per AR, passano l'una per M, l'altra per R, ed ivi sono perpendicolari al piano PNQ. Perciò le loro porzioni intercette fra le circonferenze de' rispettivi circoli sono divise per mezzo in M, R. Ma quelle rette stesse sono doppie ordinate comuni alle sezioni per KL, PQ, ed alla sezione per AR: dunque nella AR è l'asse della sezione fatta nella conoide dal piano secante per la stessa AR. Accada in *a* l'incontro della AR coll' iperbole opposta, e sarà il rettangolo AM*a* al rettangolo AR*a* come il rettangolo KML al rettangolo PRQ (*i*), cioè come il quadrato della semiordinata in M a quello della semiordinata in R. Adunque la sezione per AR è un' iperbole, e così potrà conchiudersi d' ogn' altra sezione ad essa parallela. L' intercetta poi A*a* fra le iperbole opposte è l' asse traverso della sezione per AR, e conducendo per C il diametro conjugato di O*o*, considerato questo come diametro dell' iperbole PNQ, quel diametro conjugato, se prolunghisi indefinitamente, dividerà per mezzo la A*a*, e così pure ogn' altra ad essa parallela che sia l'asse d' una sezione parallela a quella per A*a*. Adunque una medesima retta linea, in cui giace il diametro conjugato corrispondente al diametro traverso O*o* dell' iperbole PNQ, passa per tutti i centri delle sezioni parallele a quella per O*o* o per AR.

Finalmente sia la PQ tagliata in S dal prolungamento della O*o*. Per la testè citata proposizione il rettangolo OS*o* al rettangolo PSQ sta come il rettangolo AR*a* al rettangolo PRQ. Quindi considerate le O*o*, A*a* come assi delle sezioni fatte nella conoide dai piani per OS, ed AR, sarà il rettangolo OS*o* al quadrato della semiordinata in S come il rettangolo AR*a* al quadrato della semiordinata in R, e per essere iperbole le sezioni per OS, AR, sta il rettangolo OS*o* al quadrato della semiordinata in S come il quadrato della O*o* considerata come asse della sezione per OS al quadrato del suo asse conjugato. Nella stessa ragione, per le cose

(*i*) Apoll. Con. lib. III p. XII.

se precedentemente dimostrate si prova essere il quadrato della *Aa* considerata come asse della sezione per AR al quadrato del suo asse conjugato. Adunque le sezioni per OS, AR, ed altre ad esse parallele hanno gli assi omologhi proporzionali, e però quelle sezioni sono tutte simili fra loro.

§. 12. Se una conoide iperbolica sia tagliata da piani paralleli ad uno che tocchi il cono assintotico, le sezioni sono tante parabole, i parametri delle quali sono proporzionali alle distanze de' loro piani da quello che tocca il cono assintotico.

Segando la conoide con un piano per l'asse, e perpendicolare ai piani seganti, sia l'iperbole PNQ (Fig. 2) la sezione che nasce nella superficie della conoide. Siano le rette CD, CM le sezioni che nascono nella superficie del cono assintotico, le quali per conseguenza saranno assintoti dell' iperbola PNQ. Le ΔI, TZ parallele alla CM siano le intersezioni dei piani secanti col piano PNQ, e la CM sarà l'intersezione del piano stesso col piano tangente il cono assintotico. Dico primieramente essere parabole tutte le sezioni fatte nella conoide dai piani condotti per le TZ, ΔI, e perpendicolari al piano PNQ; in secondo luogo essere i parametri di tali sezioni proporzionali alle distanze de' piani stessi da quello che passa per la CM ed ivi tocca il cono assintotico, le quali distanze eguagliano quelle delle TZ, ΔI dalla CM.

Imperciocchè siano le corde RS, PQ perpendicolari all' asse dell' iperbole PNQ, e per esse passino altrettanti piani perpendicolari allo stesso PNQ e secanti la conoide. Le RS, PQ saranno diametri dei circoli che nascono per tali sezioni, e le corde dei circoli stessi che passano per V, Z, I e sono perpendicolari al piano PNQ, saranno divise per mezzo nei medesimi punti, e saranno inoltre doppie ordinate comuni ai circoli dei diametri SR, PQ, ed alle sezioni per ΔI, TZ. Adunque le ΔI, TZ sono assi delle corrispondenti sezioni, i vertici delle quali sono Δ, T. Si è poi dimostrato essere come VZ a TV, così il rettangolo PZQ al rettangolo RVS, cioè il quadrato della semiordinata in Z a quello della semiordinata in V. Adunque la sezione per TZ è parabola,

e si-

e similmente si potrà dimostrare di qualunque altra sezione parallela a quella per TZ.

Ora pei punti Δ, T ove le ΔI, TZ incontrano la curva, sian condotte le Δa, T b normali alla CM in a, e b, e le ΔA, TB parallele all' altro assintoto CD. Saranno le Δa, Tb proporzionali alle ΔA, TB, e però come il rettangolo dalle ΔI, ΔA al rettangolo dalle TZ, TB, così il rettangolo dalle ΔI, Δa al rettangolo dalle TZ, Tb. Ma come il rettangolo dalle ΔI, ΔA al rettangolo dalle TZ, TB, così il rettangolo PIQ al rettangolo PZQ (§. 4) cioè il quadrato della semiordinata in I nella sezione per ΔI al quadrato della semiordinata in Z nella sezione per TZ; e per essere parabole quelle sezioni, il quadrato della semiordinata in I nella prima sezione al quadrato della semiordinata in Z nella seconda sta come il rettangolo dalla ΔI e dal parametro della prima sezione al rettangolo della TZ e dal parametro della seconda. Adunque come il rettangolo dalle ΔI, Δa al rettangolo dalla TZ, Tb, così il rettangolo dalla ΔI e dal parametro della prima sezione al rettangolo dalla TZ e dal parametro della seconda. Laonde si deduce essere i parametri delle sezioni per TZ, ΔI proporzionali alle Tb, Δa.

§. 13. Se in un piano perpendicolare a quella retta che passa pei centri di tutte le sezioni ellittiche, le quali nascono nel modo definito ai §§. 8, 9, siano descritte le projezioni delle sezioni stesse, quelle projezioni se non siano circoli saranno altrettante elissi, concentriche, poste cogli assi omologhi in una medesima retta, e tutte fra loro simili.

Che le projezioni delle ellissi obbiettive siano ellissi, o circoli, ciò apparisce dal §. 6. Ora rappresenti GAD (Fig. 1) la curva che nasce nella superficie del solido, tagliato da un piano GAD per l' asse, e perpendicolare ai piani paralleli che segano il solido stesso. Siano EF, GH le intersezioni di quel piano coi piani secanti il solido, e per conseguenza le EF, GH saranno assi delle corrispondenti sezioni. I punti I, K siano i centri rispettivi. Le projezioni di quei centri cadranno tutte nel punto, ove la retta che passa per I, K incontra il piano di projezione.

ne. Rappresenti C quel punto (Fig. 3). Gli assi primarii delle elissi obbiettive sono tutti nel piano GAD perpendicolare a quello delle projezioni, e perciò le projezioni di tutti quegli assi cadono nella medesima retta ove il piano GAD taglia quello delle projezioni. Rappresenti N*n* quella retta (Fig. 3). Gli assi conjugati corrispondenti agli EF, GH sono perpendicolari, l' uno in I, l' altro in K al piano GAD, ed ivi divisi per mezzo. Adunque sono essi pure costituiti tutti in un medesimo piano che passa per la IK, e perciò nella retta ove il piano che li contiene sega il piano delle projezioni, cadranno tutte le projezioni de' medesimi assi conjugati. Rappresenti M' N' cotal retta che passerà per C (Fig. 3). Perchè poi il piano delle projezioni è perpendicolare tanto al piano degli assi, quanto a quello de' conjugati, e questi due piani sono pure tra loro scambievolmente perpendicolari, le rette N*n*, M' N' si taglieranno ad angoli retti in C. È finalmente manifesto che le projezioni degli assi primarii EF, GH (Fig. 1) le quali possono essere rappresentate dalle F*f*, N*n* (Fig. 3) sono assi delle elissi F*m'f*, N M'*n*, che rappresentano le projezioni delle sezioni per EF, GH: in secondo luogo le F*f*, M*n* (Fig. 3) sono evidentemente proporzionali alle EF, GH (Fig. 1), mentre le projezioni delle ordinate agli assi nelle elissi obbiettive sono parallele ed eguali alle corrispondenti ordinate medesime. Per tanto se M'N', *m'n'* (Fig. 3) rappresentino gli assi conjugati degli N*n* F*f*, saranno M'N', *m'n'* rispettivamente eguali agli assi conjugati delle elissi obbiettive, delle quali gli assi primarii sono projettati negli N*n*, F*f*, ed eguagliano le GH, EF (Fig. 1). Adunque essendo come GH ad EF, così l' asse conjugato nella sezione per GH all' asse conjugato nella sezione per EF, e parimenti essendo come GH ad EF così N*n* ad E*f*, sarà pure N*n* ad F*f* come M'N' ad *m' n'*, e quindi saranno simili le elissi F*m'f*, NM'*n*, e similmente dimostrar si potrà di altre sezioni parallele alle prime fatte per EF, GH.

§. 14. Se le sezioni considerate nel caso precedente siano in vece altrettante iperbole secondo ciò che si propone al §. 11, si potrà dimostrare che le projezioni sono iperbole, simili, con-

cen-

centriche, poste cogli assi omologhi nella medesima retta, senz' altri cangiamenti nella precedente dimostrazione se non che sostituire la Fig. 2 alla Fig. 3, e porre il piano di projezione perpendicolare a quella retta che passa pei centri di tutte le sezioni iperboliche nate nel modo definito al §. 11.

Le loro projezioni saranno rappresentate dalle iperbole NH, F*h*, delle quali gli assi rispettivi saranno N*n*, F*f*, i conjugati corrispondenti M'N', *m'n'*, ed il centro comune C (Fig. 2).

§. 15. Se la superficie d' un solido generato per la rotazione d' una sezion conica d' intorno al proprio asse, sia segata da una superficie cilindrica, la quale abbia per base il perimetro della stessa sezion conica generatrice del solido, l' intersezione delle due superficie sarà una sezion conica della medesima specie che la generatrice del solido.

Rappresenti GAD (Fig. 1) la sezion conica generatrice del solido, ed il suo perimetro sia base d' una superficie cilindrica secante quella del solido stesso. Per una retta parallela alla generatrice della superficie cilindrica s' intenda passare un piano perpendicolare al piano GAD, e paralleli a quel piano siano quanti altri si voglia secanti ad un tempo la superficie cilindrica, e quella del solido. Le sezioni fatte nella prima saranno altrettante rette fra di loro parallele, e le sezioni fatte nella seconda saranno curve, ellittiche, paraboliche, iperboliche, secondo la natura del solido segato, e la posizione dei piani secanti. I punti ne' quali s' incontrano le rette che nascono per le sezioni della superficie cilindrica, e le curve che nascono per le sezioni della superficie del solido, appartengono tutti alla comune intersezione delle due superficie essendo punti comuni all' una, ed all' altra delle superficie medesime.

§. 16. Ora ponghiamo in primo luogo che le sezioni fatte nella superficie del solido siano altrettante ellissi, ed in tal caso le intersezioni dei piani secanti col piano GAD (Fig. 1) siano le EF, GH parallele fra loro e terminate alla curva in E, F, G, H. Le rette stesse saranno assi delle mentovate sezioni, ed i loro estremi ne rappresenteranno i vertici. Le rette nelle quali i pia-

ni secanti tagliano la superficie cilindrica passeranno pei punti E, F, G, H. Sia IK il diametro delle EF, GH considerate come doppie ordinate della curva GAD, e sopra di un piano perpendicolare alla IK si concepiscano descritte le projezioni di quelle rette nelle quali la superficie cilindrica è segata dai supposti piani, e le projezioni delle sezioni elittiche fatte nel solido dai piani medesimi. Tali projezioni saranno nel caso considerato al §. 5. Quelle delle sezioni elittiche potranno essere rappresentate dalle ellissi (Fig. 3) NM'*n*, F*m'f* e quelle delle sezioni rettilinee posson essere rappresentate dalle NH, F*h* tra loro parallele. Quindi i punti H, *h* d'intersezione tra le rette stesse ed i corrispondenti perimetri elittici saranno projezioni d'altrettanti punti che spettano all'intersezione della superficie cilindrica con quella del proposto solido; ma i punti H, *h* giacciono in una medesima retta che passa pel centro C: dunque i punti obbiettivi ad essi corrispondenti giacciono in un medesimo piano eretto per la CH perpendicolare al piano di projezione.

Similmente si dimostrerà che la projezione di qualunque altro punto comune alle due proposte superficie giace nella medesima retta HC o nel suo prolungamento. Adunque tutta l'intersezione delle due superficie proposte giace in un piano perpendicolare al piano NM'*n* e condotto per la retta HC.

Laonde nel caso presentemente considerato l'intersezione delle due superficie è una sezione piana fatta nella superficie del proposto solido per un diametro della sua curva generatrice.

§. 17. È manifesto che se la retta generatrice della superficie cilindrica sia perpendicolare al piano della curva che genera la superficie del proposto solido in quella curva stessa le due superficie invece di tagliarsi saranno scambievolmente a contatto.

§. 18. È del pari evidente che tutte le cose dimostrate supponendo ellittiche le sezioni del solido dai piani per EF, GH (Fig. 1), convengon pure al caso in cui le stesse EF, GH siano perpendicolari all'asse della curva GAD, e quindi le sezioni siano circolari.

§. 19. Rimangono da considerare i casi, ne' quali le sezioni fat-

fatte nel solido come si prescrive dal §. 15 riescano paraboliche ovvero iperboliche. L'uno e l'altro dei due casi può intervenire segando la conoide iperbolica. Al secondo di questi casi si applica evidentemente tutto ciò che fu detto nel §. 16, sol che riferiscasi quel discorso alla Fig. 2, considerando le iperbole NH, F*h*, invece delle ellissi indicate dalle medesime lettere nella Fig. 3.

§. 20. Che se nella conoide iperbolica le mentovate sezioni riescano parabole, i parametri di esse sono dimostrati proporzionali alle distanze dei piani delle sezioni dal piano ad esse parallelo, tangente il cono assintotico.

Rappresenti la Fig. 2 tutto ciò che fu indicato nel §. 12, e si concepiscano inoltre le rette, nelle quali i piani secanti per TZ, △I tagliano la proposta superficie cilindrica. Queste rette passano per △, I ed incontrano in altri punti diversi dai punti △, T i perimetri delle corrispondenti sezioni fatte nella superficie del solido dai piani per △I, TZ. Ponghiamo che da quei punti dove le sezioni rettilinee della superficie cilindrica incontrano le sezioni paraboliche della superficie conoidale siano condotte le semiordinate agli assi corrispondenti △I, TZ delle sezioni stesse, e l'ordinata nella sezione per TZ incontri il suo asse in V, quella della sezione per △I incontri il suo asse in I. È manifesto che essendo parallele fra loro le sezioni rettilinee fatte nella superficie cilindrica, riesciranno proporzionali le semiordinate in I e V alle corrispondenti ascisse △I, TV.

S'immagini ora un piano perpendicolare all'asintoto CM, e sopra quel piano siano descritte le projezioni delle sezioni paraboliche fatte nella superficie della conoide, e delle sezioni rettilinee fatte nella superficie cilindrica. I piani che contengono queste sezioni essendo tutti paralleli ad uno che passa per la CM, e questa perpendicolare al piano di projezione, saranno tutti normali a questo piano medesimo, e perciò le projezioni delle sezioni paraboliche, e delle cilindriche saranno in quelle rette medesime nelle quali i piani delle dette sezioni incontrano il piano delle loro projezioni. Siano queste rette rappresentate dalle

TX,

T'X, △'Y, (Fig. 5) le quali esser debbono fra di loro parallele.

Perchè il piano PNQ (Fig. 2) è perpendicolare a quello che tocca in CM il cono assintotico, sarà normale ancora a tutti i piani delle sezioni per TZ, △I. Il piano poi delle projezioni è normale tanto al piano PNQ quanto ai piani delle sezioni: dunque l' intersezione del piano PNQ col piano delle projezioni sarà perpendicolare alle projezioni stesse T'X, △'Y (Fig. 5), e passerà per la projezione di CM cioè per quel punto dove la stessa CM incontra il piano delle projezioni. Sia quel punto rappresentato in C' (Fig. 5) e la retta C'T'△' rappresenti l' intersezione del piano PNQ con quello delle projezioni.

Ciò posto sarà T' (Fig. 5) la projezione della retta TZ (Fig. 2) che è l' asse della sezione per TZ, e similmente △' sarà projezione della △I (Fig. 2) che è l' asse della sezione per △I, quindi C'T' eguaglierà T*b* e C'△' eguaglierà △*a* (Fig. 2).

Finalmente delle ordinate agli assi TZ, △I nelle sezioni corrispondenti (Fig. 2) avendo ciascheduna tutti i suoi punti equidistanti dal piano delle projezioni, ed essendo divisa per mezzo dal piano PNQ, le loro projezioni saranno ad esse uguali, e divise per mezzo dalla retta C'T'△'. Perciò se T'X, △'Y rappresentino le projezioni delle semiordinate in V ed I (Fig. 2), sarà T'X eguale alla stessa semiordinata in V, e △'Y eguale alla semiordinata in I.

Pertanto (Fig. 2) il quadrato della semiordinata in I nella sezione per △I al quadrato della semiordinata in V nella sezione per TZ sta come il rettangolo dall' ascissa △I e dal parametro della prima sezione al rettangolo dalla ascissa TV e dal parametro della seconda sezione. Ma si è veduto essere la semiordinata in I alla semiordinata in V come l' ascissa △I all' ascissa TV. Dunque il quadrato dalla ascissa △I a quello dalla ascissa TV sta come il quadrato dalla semiordinata in I al quadrato dalla semiordinata in V, cioè come il rettangolo dalla △I e dal parametro della prima sezione, al rettangolo dalla TV e dal parametro della seconda. Adunque sarà △I a TV come il parametro della sezione per △I al parametro della sezione per TV, cioè come △*a* a T*b*.

Ma

Ma come ΔI a TV, così la semiordinata in I alla semiordinata in V: dunque sarà quella a questa come Δa a Tb.

Ora passando alla Fig. 5 si conchiuderà essere Δ'Y a T'X come Δ'C' a T'C'; e quindi i punti Y, X, C' essere in una medesima retta C'Y. I punti poi Y, X sono projezioni di punti comuni alle due superficie proposte, perciò questi esistono in un piano eretto per la C'Y perpendicolare al piano di projezione. In simil guisa si potrà dimostrare che qualsivoglia altro punto comune alle due proposte superficie ha la sua projezione nella medesima retta C'Y prolungata indefinitamente, e per conseguenza l'intersezione delle due superficie sarà tutta in un medesimo piano eretto per la C'Y perpendicolare al piano di projezione.

Laonde se nella conoide iperbolica le sezioni fatte come si prescrive dal §. 15 riescano iperbole, l'intersezione tra la superficie cilindrica, e quella della conoide sarà una sezion piana fatta nella superficie del solido per un diametro conjugato della sua iperbole generatrice (§. 19). Se poi le sezioni riescano parabole, l'intersezione sopraccennata è pure una sezion piana fatta nella superficie della conoide per un assintoto della sua iperbole generatrice.

§. 21. Nella conoide parabolica le sezioni fatte secondo il §. 15 possono essere o circolari, o elittiche, o paraboliche. Ai primi due casi fu data la conveniente dimostrazione nei §§. 16, 18; quanto all'ultimo, rappresenti GAD (Fig. 1) una sezion piana per l'asse della conoide, e perciò GAD sarà la stessa parabola generatrice della conoide. Le FN, HP, diametri della curva stessa rappresentino le intersezioni del piano GHD coi piani secanti e la conoide, e la superficie cilindrica. Le sezioni della superficie cilindrica passano pei punti H, ed F e vanno ad incontrare le corrispondenti sezioni della superficie conoidale in punti diversi dagli H, F. Da quei punti d'incontro si concepiscano condotte le semiordinate agli assi FN, HP, e pongasi che la semiordinata nella sezione per NF incontri il suo asse NF in N, e la semiordinata nella sezione per HP incontri il suo asse HP in Q. Con un ragionamento simile a quello che fu adoperato nel §. precedente si giungerà a conchiudere che la semiordinata in N alla semiordi-

dinata in Q sta come il parametro della sezione per NF a quello della sezione per HP. Ma questi parametri sono eguali: dunque eguali pur sono quelle semiordinate, e da ciò si deduce che i punti comuni alle due proposte superficie sono tutti egualmente distanti dal piano GHD, e perciò la intersezione delle medesime, giace in un piano parallelo ad un piano GHD che passa per l' asse della conoide.

§. 22. Raccogliendo ora ciò che fu dimostrato, si conchiude dai §§. 16, 17, 21, che l' intersezione tra la superficie d' una conoide parabolica, ed una superficie cilindrica, della quale sia base la parabola generatrice della superficie conoidale è sempre una parabola il cui parametro eguaglia quello della stessa generatrice, ed il cui piano è parallelo ad uno che passa per l' asse della conoide. Dai §§. 16, 17 apparisce che l' intersezione tra la superficie d' una sferoide, ed una superficie cilindrica, di cui sia base l' ellisse generatrice della superficie sferoidale è sempre un' ellisse concentrica alla stessa generatrice. Le citate dimostrazioni sono pure applicabili al caso in cui sia sostituita una sfera alla considerata sferoide, ed è facile vedere che la mentovata intersezione è un circolo massimo della supposta sfera.

Finalmente dai §§. 16, 19, 20 è manifesto che l' intersezione tra la superficie d' una conoide iperbolica con una superficie cilindrica della quale sia base l' iperbole generatrice della superficie conoidale è sempre un' iperbole concentrica alla stessa generatrice.

PARTE II.

§. 23. Dato un emisferio concavo di cui sia projezione verticale il circolo AMN e projezione orizzontale il semicircolo *pqr* posto col suo diametro *pr* parallelo alla comune sezione XZ dei due piani coordinati, rappresentare il contorno dell' ombra che si produce nella superficie concava dell' emisferio supposto illuminato da' raggi paralleli ad una retta, le cui projezioni siano XY, XV.

Pel

Pel centro C del circolo AMN si conduca un diametro AB parallelo alla XY ed un altro MN perpendicolare al primo. Pel punto A calata una perpendicolare alla comune sezione XZ in *d* ed alla *pr* in *a*, si tiri *ab* parallela ad XV, e si produca ad incontrare in *b* la XZ. S' innalzi perpendicolare alla XZ la *b*G, che incontri in G la AB, prolungata se fa d'uopo. Pongasi GD perpendicolare ad AB ed eguale alla *ad*, e si tiri AD che segherà in un punto K la circonferenza AMN. Per K si conduca KO perpendicolare ad AB in O, e descrivasi la semiellisse MON col semiasse primario CM e col secondario CO. Sarà la curva MON projezione del contorno dell' ombra.

Poichè il contorno dell' ombra è nella semiperiferia d' un circolo massimo, del quale MN è un diametro (§. 22) la sua projezione verticale sarà nel semiperimetro d'un'ellisse (§. 6) che passa per M, N, ed ha il centro in C. Adunque MN sarà il massimo suo diametro, cioè l' asse, e per conseguenza l' asse secondario si troverà nella AB. Ora si concepisca per O condotta una retta perpendicolare al piano verticale di projezione, e prodotta ad incontrare la superficie dell' emisferio. La porzione di essa retta che giace tra la base, e la superficie dell' emisferio, sarà manifestamente eguale alla KO.

S' immagini un' altra retta la quale congiunga quel punto d' incontro col punto dell' orlo emisferico che corrisponde alle projezioni A, *a*. Questa retta sarà in un piano che passa per AB ed è perpendicolare al piano verticale di projezione. In oltre la retta stessa formerà col piano della base emisferica un angolo d' inclinazione eguale all' angolo BAD nel punto corrispondente alle projezioni A, *a*. Ma tale è pur l'angolo d'inclinazione che forma col piano stesso ed in quel punto medesimo il raggio projettato nelle AB, *ab* (*p*). Dunque tal raggio coincide con quella retta, ed il punto dov' esso incontra la superficie emisferica è projettato in O, e quindi per O passerà la projezione del contorno dell'

(*p*) La Croix. Essais sur les plans. §. 11.

dell' ombra . Adunque CO sarà un semidiametro, e per essere normale all' asse MN sarà il semiasse secondario dell' ellisse cercata .

§. 24. È manifesto che se ciascuna delle rette XY , XV formi colla XZ angolo semiretto, come per l' ordinario si suppone dagli Artisti , allora per ottener l' angolo BAD basterà porre scambievolmente normali, e fra loro eguali due rette *nm*, *mr*, tirata la *nr* condurre ad essa perpendicolare in *r* la *tr* e farla eguale alla *mr*, indi tirare *nt* che farà l' angolo *rnt* eguale al cercato .

§. 25. Innanzi di passare ad altro, torna in acconcio considerare due risoluzioni diverse del medesimo problema , le quali sono comunemente adottate come geometriche dagli Artisti .

In esse le projezioni de' raggi si pongono nell' inclinazione precedentemente indicata (§. 24) per rispetto alla comune sezione XZ .

§. 26. *Risol.* 1. Poste le projezioni dell' emisferio come superiormente (Fig. 7) siano AB , *aq* le projezioni di un raggio che passa per un punto della circonferenza, la quale costituisce l' orlo dell' emisferio.

Dal punto *q* dove la *aq* incontra la circonferenza *pqr* s' innalzi una perpendicolare alla XZ che incontri in O la AB , e per O conducasi parallela alla XZ la IO1 che incontri in 1 la circonferenza AMBN . Per 1 s' intenda calata la 12 normale ad XZ, e prodotta a segare in 3 la *cr* . Col centro *c* e col semidiametro *c*3 si descriva una circonferenza che seghi in *u* la *a q*. Se da *u* si innalzi una perpendicolare ad XZ , e si produca a segare la AB in K si afferma essere K un punto del cercato contorno , e lo stesso metodo viene prescritto per determinare qualunque altro punto del contorno stesso (= *Leçons elementaires des ombres* = par Mr. De la Gardette . Paris 1797 . = Regole del chiaro-scuro: di Carlo Amati . Milano 1802).

§. 27. È facile discoprire come le parti della esposta costruzione si contradicono a vicenda nel loro significato . Diffatti assumendo per la costruzione medesima che il punto *u* sia projezio-

zione orizzontale d'un punto esistente nella superficie emisferica, ne segue ch'esso punto si troverà in una semicirconferenza circolare che è nella stessa superficie emisferica, ha il suo piano orizzontale, ed il suo diametro eguale alla corda I1 del circolo AMBN. Ora nel dato emisferio due sole semicirconferenze esistono in tali condizioni, ed una di esse è projettata verticalmente nella corda I1, l'altra in un'altra corda eguale e parallela alla I1 e posta dall'altra parte del centro C. Adunque la projezione verticale di quel punto che si vuole projettato orizzontalmente in *u* deve ritrovarsi in una delle mentovate corde. Ma ciò si oppone appunto all' ultima parte della costruzione, ove si assegna il punto K come projezione verticale corrispondente all' orizzontale *u*: dunque la costruzione è contradittoria.

§. 28. *Risol.* 2. Si conduca il diametro MN perpendicolare alla AB, e l'altro A'B' ad essa parallelo. Intendasi eretta una ZR normale ad XZ e condotta parallela alla stessa XZ la retta CP che incontri in P la ZR. Col centro P e col semidiametro PR eguale a CM si descriva una semicirconferenza RTS. Conducasi una retta A'E parallela a CP e pel punto E dove incontra ZR si conduca EL che formi con ZR l'angolo ZEL semiretto e seghi in L la semicirconferenza RLS. Si conduca per L una retta LV parallela ad XZ che incontri in V la A'B'; si conclude essere V il punto dove la projezione del cercato contorno incontra la A'B' (*Saggio Teorico-pratico intorno alla determinazione dell' ombre*. Firenze 1805).

§. 29. Per dimostrare che ciò non sussiste, concepiscasi un piano condotto per A'B' perpendicolare alla base dell' emisferio ed al piano verticale di projezione. Se quel piano condotto per A'B' seghi la superficie emisferica nasce una semicirconferenza circolare, il cui semidiametro è uguale e parallelo a CA'. Il punto poi dove quella circonferenza s' incontra col raggio rappresentato dalla projezione sua A'B' è un punto del contorno, del quale si vuol descrivere la projezione. Ora s' immagini condotto per RZ un piano perpendicolare alla XL, e sopra di esso concepiscansi descritte le projezioni della semicirconferenza che

nasce tagliando l' emisferio col piano supposto per A'B', e del raggio projettato nella stessa A'B'. È manifesto che la projezione del raggio sarà una retta come EL la qual forma in E colla ZR un angolo semiretto, e la projezione della semicirconferenza sarà il semiperimetro d' un' ellisse come ETS', di cui PT è il semiasse maggiore, e PE il minore. Il punto G, dove supporremo tagliarsi il perimetro ellittico e la retta EL, rappresenterà la projezione di quel punto ove s' incontrano la semicirconferenza projettata in ETS', ed il raggio projettato in EL. Ma il punto G sarà sempre più distante dalla retta XZ che il punto L: dunque ancora la projezione verticale del punto ove la superficie emisferica è incontrata dal raggio la cui projezione è A'B' dev' essere più distante dalla XZ di quello che il punto V, e perciò V non puot' essere nella projezione del contorno dell' ombra.

§. 30. Per trovare altri punti della projezione cercata secondo l' insegnamento del citato opuscolo, si fa CΔ eguale a CV, ed eretta $\Delta\Gamma$ normale ad MN sicchè incontri in Γ la circonferenza AMNA si prende l' arco $\Gamma\pi$ eguale all' arco A'Γ, e per π si conduce una normale $\pi\varepsilon$ ad MN. Presa $\Delta\omega$ eguale a $\Delta\varepsilon$ si afferma esser ω un punto spettante alla projezione del contorno dell' ombra, e similmente si determinano altri punti successivi.

Se tutto ciò potesse sussistere converrebbe che le CV, $\Delta\omega$ fossero semiordinate d' un' ellisse, il cui semiasse primario sia CM, ed il secondario CV (§. 27), ponendo la determinazione di CV esente dal difetto superiormente dimostrato. Ciò posto ne seguirebbe la proporzione A'C : $\Gamma\Delta$: : CV : $\Delta\omega$, e quindi nominato ρ l' arco A'Γ, ed r il semidiametro A'C ne viene r : cos.ρ : : sen.ρ : sen.2ρ — sen.ρ, d' onde, sostituito il valore di sen. 2ρ espresso da 2 sen.ρcos.ρ, e fatto r=1 si ottiene l' equazione sen.ρ= sen.ρcos.ρ, risultato impossibile se l' arco A'Γ non è nullo.

§. 31. (Fig. 8) Data un' emisferoide concava, di cui sia projezione verticale l' ellisse AMBN, e projezione orizzontale il semicircolo *pqr*, posto col suo diametro *pr* parallelo alla XZ, rappresentare il contorno dell' ombra che si produce nella concava

su-

superficie della emisferoide supposta illuminata da raggi tutti fra di loro paralleli, d' uno de' quali sian date le projezioni.

Pel centro C della data ellisse AMBN si conduca un diametro AB parallelo alla projezion verticale del dato raggio. Dal punto A si cali una perpendicolare alla XZ producendola ad incontrare in *a* la *pr*, e per *a* si conduca una retta *aq* parallela alla projezione orizzontale del raggio dato. Saranno AB, *aq* projezioni d' un raggio che passa per un punto dell' orlo della data emisferoide, e le projezioni di tal punto sono A, *a*. Si conduca il diametro MN conjugato di AB e il diametro GD parallelo ad XZ. Si faccia l'angolo BAK eguale all' angolo d' inclinazione che forma col piano verticale il raggio projettato nelle AB, *aq* (§. 23), e trovisi il punto K, dove AK incontra il perimetro d' un' ellisse della quale AB sia l'asse primario, e GD eguale al secondario. Per K si conduca la retta KO perpendicolare in O alla AB, e si descriva la semiellisse MON, della quale MC sia un semidiametro, e CO sia il suo conjugato. La curva ellittica MON rappresenterà il cercato contorno.

Il contorno dell'ombra è nel semiperimetro d' un'ellisse concentrica alla generatrice della sferoide (§. 22). La sua projezione esser deve un semiperimetro ellitico (§. 6), che passa per M, N; ha il centro in C; ed è contenuto nell' ellisse AMBN. Adunque l' ellisse cercata, e la AMBN hanno comune il diametro MN e le tangenti in M, N; quindi il diametro conjugato di MN nella ellisse cercata giace sulla AB. Ora in modo simile a quello che fu adoperato nel §. 23 si dimostrerà essere in O un estremo del diametro conjugato ad MN nell' ellisse cercata. Adunque il semiperimetro ellittico MON è quello che si cerca.

§. 32. (Fig. 9, 10, 11). Data un'emiconoide concava iperbolica, di cui sia projezione verticale l' iperbole GAI, e projezione orizzontale il semicerchio *pqr* posto col diametro *pr* parallelo alla XZ; rappresentare il contorno dell' ombra che si produce nella concava superficie della data emiconoide supposta illuminata da raggi, tutti fra di loro paralleli, d'uno dei quali siano date le pro-

jezioni AB, *a*Q, ed i punti A *a* siano in una medesima perpendicolare alla XZ.

Caso 1.° Abbia la AB (Fig. 9) ambi i suoi termini nella curva GAI.

Si divida per mezzo in D la AB e pel centro dell' iperbole GAI, che pongasi esser in C si tiri la retta CDN, la quale incontri in N la XZ. Si costruisca l' angolo BAK eguale all' angolo d' inclinazione che forma col piano verticale il raggio projettato nelle AB, *aq*, e si trovi il punto K dove la AK taglia il perimetro d' un' elisse, della quale AD sia un semiasse, ed il semiconjugato eguagli la media proporzionale fra i due segamenti GD, DI della GI parallela alla XZ, e terminata da ambe le parti nella curva GAI. Sia condotta KO perpendicolare in O alla AB, e pei punti O, N si tirino due perpendicolari alla XZ e producansi fin che incontrino la *pr*, la prima in *o*, la seconda in *n*. Sulla prima inoltre si pigli *ok* eguale ad OK e si tirino le *ck*, CO. Dal punto E dove CO incontrerà XZ si conduca perpendicolare a questa una retta che tagli in *e* la *ck*, e sia condotta la retta *nef* terminata in *f* alla circonferenza *pqr*. Si faccia *cl* perpendicolare in *l* alla *nf*, e nella *cp* si pigli *c*1 eguale a *cl*. Pei punti 1, *l* si conducano due rette perpendicolari ad XZ in 2 ed L.

Si descrivano le rette 2C, LC, e pel punto 3 dove la 2C taglia la curva GAI si conduca parallela alla XZ la 3Y che incontri in V la LC, e per *f* si conduca una perpendicolare in F alla XZ.

Se descrivasi una curva iperbolica MVOF, nella quale CV sia semidiametro traverso, VL l' ascissa in esso corrispondente all' ordinata LF, la curva MVOF sarà projezione verticale del cercato contorno.

La dimostrazione per provare che il punto O è projezione verticale d' un punto del cercato contorno è simile alla già esposta nel §. 23. Adunque essendo il contorno stesso nel perimetro d'un' iperbole (§. 22) che ha il suo centro projettato verticalmente in C, ed un punto pure verticalmente projettato in O, sarà la projezione verticale di tal contorno un' iperbole, che ha il centro in C e passa per O (§. 6). In oltre il punto che è projettato verti-

cal-

calmente in O avrà la sua projezione orizzontale nella *ok*; e la retta che da quel punto cade perpendicolare sul piano dell' iperbole, la quale costituisce l' orlo della data e niconoide, eguaglia la *Ok*, cioè la *ok*. Adunque il punto *k* è projezione, orizzontale di quello che verticalmente è projettato in O e giace nel contorno dell' ombra. Ma il piano dell' iperbole che forma col suo perimetro il contorno predetto, passa per la retta, di cui sono projezioni le CN, *cn* (§. 19), e pel punto di cui sono projezioni i punti O, *k* : dunque passa ancora per la retta projettata nelle CO, *ck*, e perciò sega il piano orizzontale nella retta *nef*, essendo i punti *n*, *e*, quelli dove le rette che sono projettate nelle *cn*, *ck*, CN, CO incontrano il piano stesso orizzontale (*y*).

Per tanto se immagineremo passare per l'asse della data emiconoide un piano che sia perpendicolare al piano ove giace il contorno dell' ombra, quel piano per l' asse della conoide passerà per *cl*, e la stessa *cl* sarà projezione orizzontale dell' asse di quell' iperbole il perimetro della quale costituisce il detto contorno. Dunque nella retta CL sarà la projezione verticale dell' asse medesimo, e quindi sarà nella CL un diametro dell' iperbole il cui perimetro è projezione verticale del contorno predetto. In oltre la FL è projezione verticale della *fl* e la FL è la metà di quella retta che sarebbe projezion verticale della doppia *fl*, la quale è manifestamente ordinata all' asse del supposto contorno; perciò la retta CL divide per mezzo in L la projezione della doppia *fl*, e parimenti le projezioni di tutte le ordinate all' asse del contorno : quindi LF è semiordinata al diametro CL di quell' iperbole ch' è projezione verticale del contorno dell'ombra. Ora se in quel piano che passa per l'asse della data emiconoide, e per *cl* concepiscansi descritte le sue intersezioni colla superficie della stessa emiconoide e col piano del contorno supposto è chiaro che la prima sarà una curva eguale e simile alla GAI e la seconda è una retta posta nella sezione dell'emiconoide come la 2 3 *c* è posta nel-

(*y*) La Croix Essais sur les plans §. 12.

nella GAI. Adunque l'asse del supposto contorno è segato dalla superficie della data emiconoide in un punto che è distante dal piano orizzontale, quanto il punto 3 è distante dalla XZ, e perciò quel punto che sarà vertice dell'asse del contorno supposto deve avere la sua projezione verticale nella retta 3V parallela alla XZ; ma deve pure averla nella retta CL; dunque sarà in V. Per la qual cosa la projezione del cercato contorno è un' iperbole della quale un semidiametro traverso è CV, ed in esso all' ascissa VL corrisponde la semiordinata LF. Ma tale è l' iperbole MVOF: adunque essa è projezione del cercato contorno, e perciò lo rappresenta.

§. 33. *Caso* 2.° Se la AB (Fig. 10) riesca parallela ad un assintoto CN dell' iperbole AGI, si prolunghi CN fino a segare in N la XZ, ed a questa si conduca per N una perpendicolare, la quale incontri in *n* la *pr*. Si trovi il punto K dove AK incontra il perimetro d'una parabola di cui l' asse è AB, ed in esso all' ascissa AD corrisponde una semiordinata eguale alla media proporzionale tra i segamenti GD, DI della GI, e si tiri la KO perpendicolare in O alla AB. Continuando la costruzione come la precedente si descriva l'iperbole FVS, della quale CV sia un semidiametro traverso, ed in esso all' ascissa LV corrisponda la semiordinata LF, o LS, e sarà FVS la projezione verticale del cercato contorno.

Nel §. 12. è dimostrata la ragione per cui nel supposto caso deve costruirsi sulla AD come asse una parabola, anzi che un' ellisse come si fece di sopra §. 32. È pur dimostrato nel luogo medesimo che il piano dell' iperbole il cui perimetro costituisce il contorno cercato passa per un assintoto dell' iperbole, il perimetro della quale forma l' orlo dell' emiconoide data. È poi manifesto che le CN *cn* sono projezioni di quell' assintoto, essendo AB projezione dell' asse della sezione parabolica. Dunque il piano del cercato contorno sega il piano orizzontale in una retta che passa per *n*, dove il piano stesso orizzontale è incontrato da quella retta che ha per sue projezioni le CN, *cn*. La dimostrazione prosiegue come nell' articolo precedente.

§. 34.

§. 34. *Caso* 3.° Che se finalmente la AB (Fig. 11) passi pel centro C dell' iperbole GAI, all'iperbole stessa conducasi la tangente in A e per C si tiri parallela a quella tangente la CN che incontri in N la XZ, e per N si conduca ad XZ una normale, che tagli in *n* la *pr*. Si trovi il punto K dove AK incontra il perimetro d' un' iperbole, della quale CA è un semidiametro traverso, ed in esso all'ascissa AD corrisponde una semiordinata eguale alla media proporzionale tra i segamenti GD, DI della GI e si compia la costruzione come fu esposto pegli altri due casi.

Riferendo a questo caso ciò che fu indicato nel §. 19, apparirà che il piano del cercato contorno deve passare per quella retta, la quale orizzontalmente è projettata in *cn*, e verticalmente dev' essere projettata nella retta in cui giace il diametro conjugato di CA, e quindi nella CN. Perciò il piano del contorno segherà il piano orizzontale in una retta che passa per *n* dove il piano stesso orizzontale è incontrato da quella retta, la quale ha le sue projezioni CN, *cn*.

È pur dimostrata nel §. 11 la ragione per cui si debba descrivere un' iperbole sulla AB come diametro traverso, anzi che un' ellisse come nel §. 32, o una parabola come nel precedente. Il rimanente della dimostrazione è lo stesso che pel Caso 1.°

§. 35. Data un' emiconoide concava parabolica di cui sia projezione verticale, la parabola GAB (Fig. 12, 13), e projezione orizzontale il semicircolo *pqr* posto col diametro *pr* parallelo ad XZ, rappresentare il contorno dell'ombra che si produce nella concava superficie della data emiconoide, supposta illuminata da' raggi fra di loro paralleli, uno de' quali sia projettato nelle AB, *a q*, e siano i punti A *a* nella medesima perpendicolare ad XZ.

Caso 1.° Sia primieramente AB terminata da ambe le parti nella curva GAB.

Divisa per mezzo in D la AB si conduca il diametro MDN della parabola GAB, e si produca ad incontrare in N la XZ ed in *n* la *pr*.

Sia BAK l'angolo che forma col piano verticale il raggio projettato nelle AB, *aq*, e si trovi il punto K, dove la AK incontra il

pe-

perimetro dell'ellisse della quale AB sia l'asse primario, ed il semiasse secondario eguagli la media proporzionale tra i segamenti GD, DI della GI terminata da ambe le parti nella curva GAB, e parallela alla XZ. Condotta KO perpendicolare ad AB in O, per O si cali una retta perpendicolare ad XZ e si produca ad incontrare in *o* la *pr*. Sulla stessa perpendicolare si pigli *ok* eguale alla OK e si tiri la *nk*, prodotta fino alla circonferenza in *f*. Alla *nf* si conduca perpendicolare dal punto *c* la *cl* in *l*. Per *l*, ed *f* si conducano due perpendicolari alla XZ, la prima *l*LV indefinita, la seconda fino ad incontrare la XZ in F. Presa nella *cp* la *c*1 eguale a *cl* ed elevata pel punto 1 la 1 2 3 perpendicolare ad XZ, pel punto 3 dove sega la curva GAB si conduca parallela ad XZ la 3V che incontri in V la LV. Se descrivasi una parabola VMOF, della quale sia l'asse LV, il vertice V, ed FL semiordinata corrispondente al punto L dell'asse, sarà dessa la projezione verticale del contorno dell'ombra.

Dal §. 22 si ricava che il contorno dell'ombra è nel perimetro d'una parabola il cui parametro eguaglia quello della GAM, e che il piano di essa passa per quella retta, la quale orizzontalmente è projettata nel punto *n*, e verticalmente nella retta MN. Col metodo usato nelle dimostrazioni precedenti si proverà essere un punto del suddetto contorno quello che è projettato ne' punti O, *k*, quindi *nf* sarà nell'intersezione del piano orizzontale col piano del contorno, ed il punto *l* sarà projezione orizzontale dell'asse di quella parabola, nel perimetro della quale è costituito il contorno stesso. Perciò la projezione verticale di quell'asse esser deve nella LV. Ora si immagini un piano che passi per l'asse della data emiconoide, e per la *cl*. La sezione fatta da esso piano nella superficie della emiconoide sarà una semiparabola eguale e simile alla GAN, e la sezione fatta nel piano del cercato contorno sarà una retta posta nella sezione della semiconoide come la retta 2 3 è posta nella GAM. Adunque il vertice della parabola, nel cui perimetro è il contorno cercato dev' esser distante dal piano orizzontale quanto il punto 3 è distante dalla retta XZ, e quindi quel vertice sarà projettato nella 3V; e lo è pure nella LV. Dunque

que V sarà la sua projezione verticale. Per la qual cosa la projezione del cercato contorno esser deve una curva parabolica, della quale l' asse è la retta LV, il vertice V, e la semiordinata al punto L dell' asse è la LF. Ma tale è la curva MOF : dunque dessa è projezione del contorno dell' ombra.

§. 36. *Caso* 2.° Se le AB, *aq* (Fig. 13) si trovino ambedue costituite in una medesima retta perpendicolare alla XZ, si condurrà l' asse MN della parabola GAI, e descritta la MK che formi l' angolo KMN eguale all' angolo d' inclinazione che forma un raggio col piano verticale, pel punto K, dove la MK taglia la curva GAI si condurrà parallela ad XZ la KO che incontri in O la MN.

Se descrivasi la parabola SOF coll' asse ON, col vertice O e col parametro eguale a quello della GAI sarà SOF projezione verticale del supposto contorno.

Se per MN si concepisca condotto un piano perpendicolare al piano verticale, e secante la data emiconoide, la sezione fatta nella superficie della medesima sarà una parabola eguale e simile alla GAI, ed il punto dove la superficie della conoide è incontrata dal raggio projettato verticalmente in MN, sarà egualmente distante dal piano orizzontale che il punto K dalla XZ, e perciò la projezione verticale di quel punto sarà in O.

Inoltre il punto stesso sarà distante dal piano della parabola il cui perimetro costituisce l'orlo della data emiconoide quanto il punto K è distante dalla MN. Ma per essere tutte parabole di egual parametro le sezioni parallele per MN, AB &c. e paralleli tutti i raggi projettati verticalmente in MN, AB &c. si potrà conchiudere che ogni altro punto del contorno supposto è distante dal piano dell' orlo della emiconoide come il punto K dalla retta MN. Dunque il piano del contorno è parallelo a quello dell' orlo della data emiconoide e distante da esso quant' è KO, ed inoltre l' asse del contorno stesso sarà nel medesimo piano secante condotto per MN perpendicolare al piano verticale, e quindi la projezione di quell'asse sarà nella MN, e la projezione del vertice sarà in O. Ma il contorno cercato è una curva parabo-

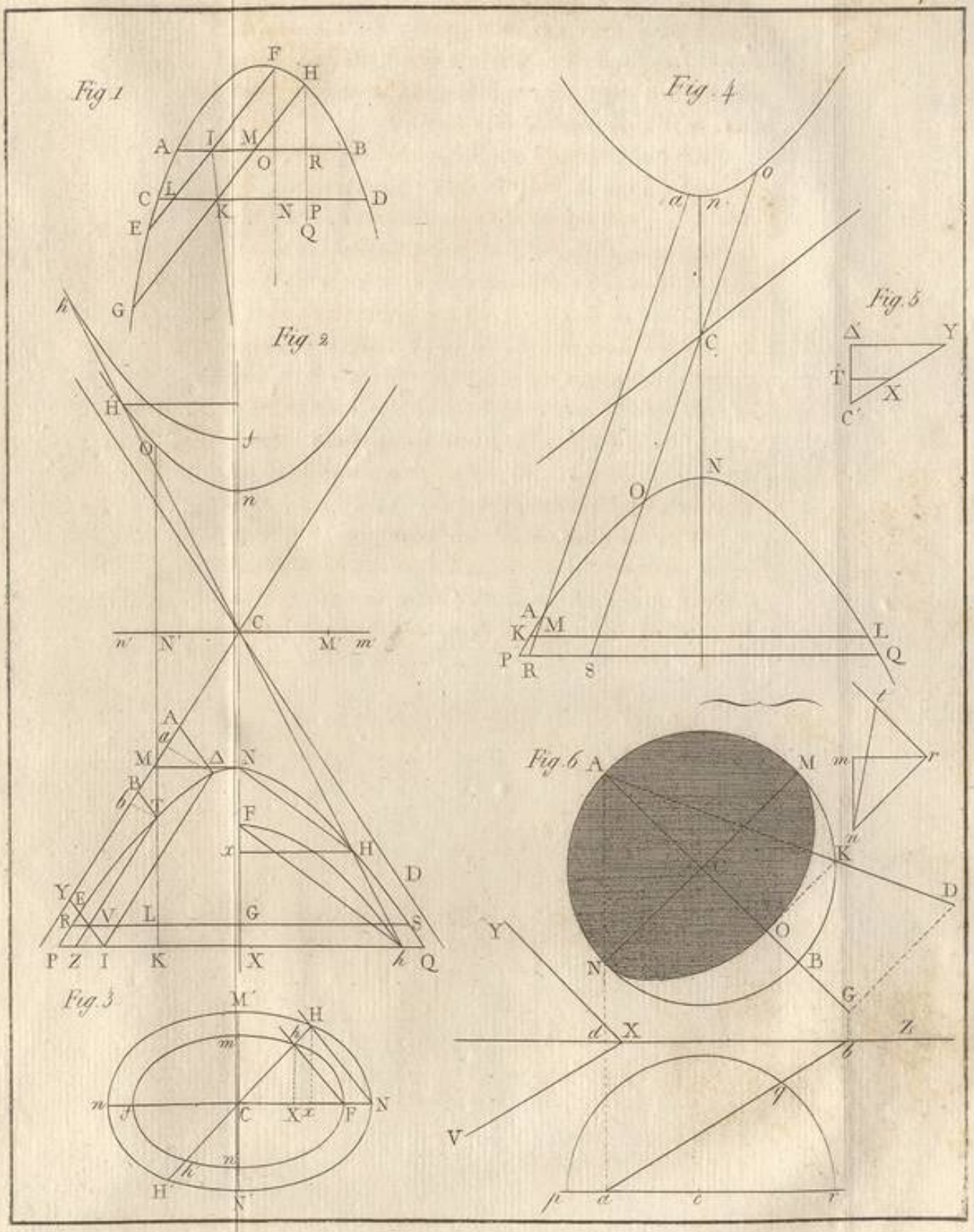
Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6

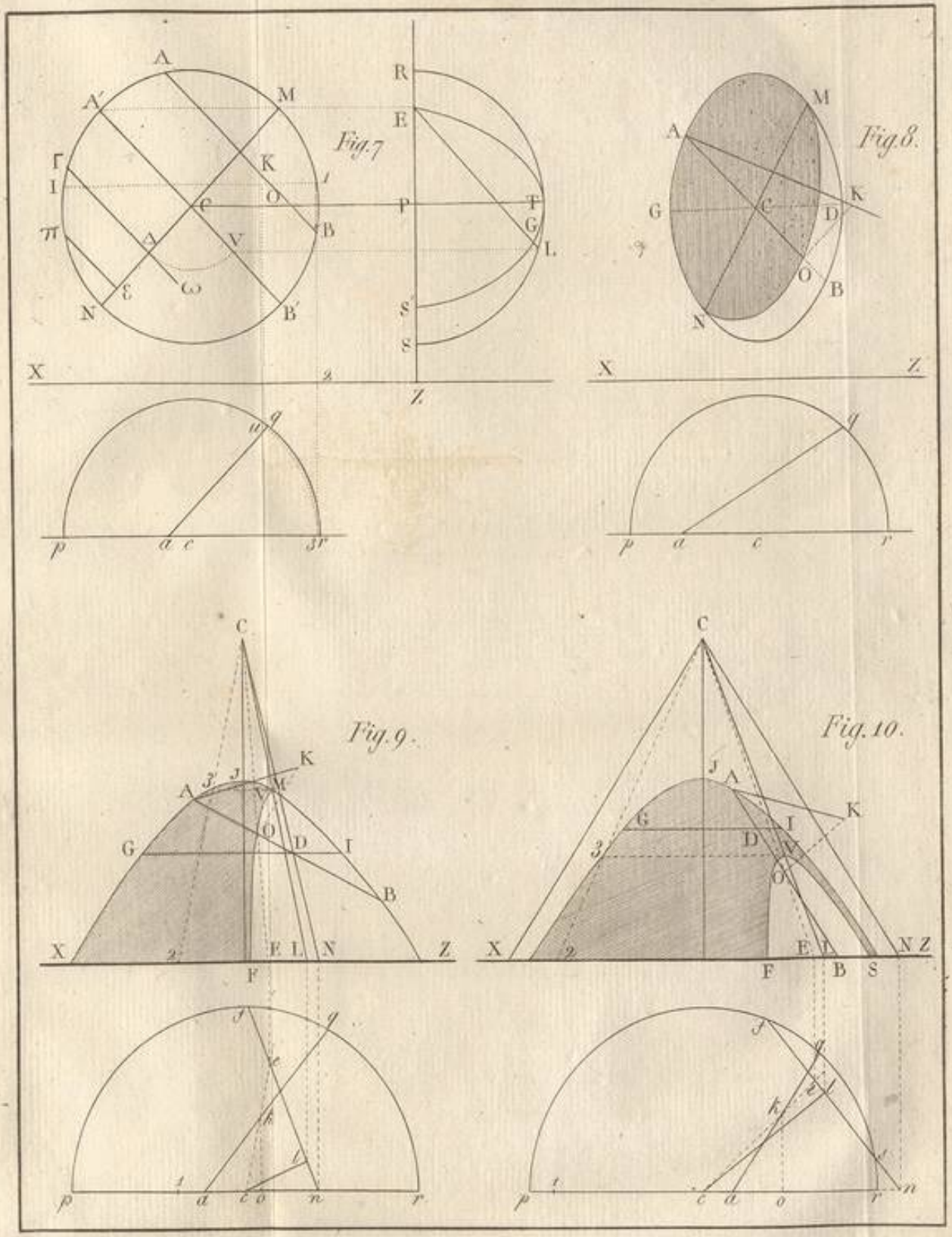
Fig. 7
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.

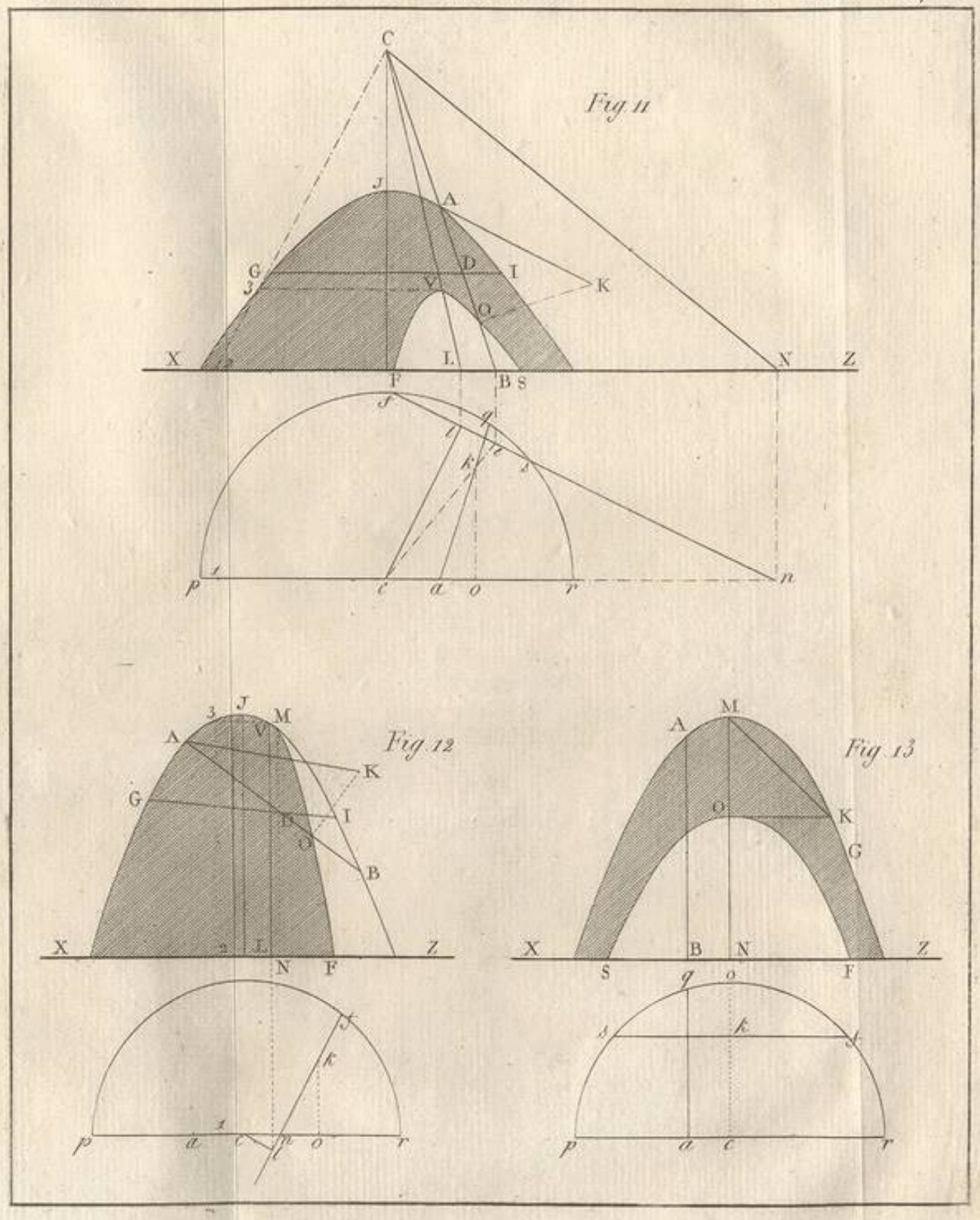
Fig. 11
C
J
A
G
D
I
K
3
V
O
X
2
L
N
Z
F
B S
s
q
l
r
k
t
1
p
c
a
o
r
n
Fig. 12
3
J
M
A
V
K
G
I
E
O
B
X
2
L
N
F
Z
s
k
1
p
a
c
l
o
r
Fig. 13
M
A
O
K
G
X
B
N
Z
S
F
q
o
s
k
t
p
a
c
r

lica di parametro eguale a quello della GAI, e si è dimostrato che il suo piano è parallelo a quello della GAI: dunque il contorno cercato è eguale e simile alla sua projezione e perciò la parabola SOF sarà questa projezione.

Che se vogliasi pure la projezione orizzontale, si prenda nella *co* che è per diritto alla MN la porzione *ck* eguale ad OK, e per *k* si conduca la *skf* parallela alla *pr* terminata alla circonferenza *pqr*, e sarà *sf* la dimandata projezione orizzontale ed ancora la retta, ove il piano del contorno sega il piano orizzontale.

§. 37. Dopo queste cose è facile che nasca in taluno il desiderio di conoscere qual sia la curva che divide la parte illuminata dalla oscura nella superficie convessa d' un solido generato per la rotazione d' una sezion conica d' intorno al proprio asse. Per amore di brevità mi limiterò ad enunciare la risposta, omettendone la dimostrazione che si presenterà facilmente a chi per poco abbia vaghezza di cercarla.

La curva dimandata segue anche in questo caso la natura della proposta superficie, ed è un circolo massimo nella sfera; un circolo o un' ellisse nella sferoide; un' iperbole nella conoide iperbolica; una parabola nella conoide parabolica.

ME-