RIFLESSIONI

SOPRA ALCUNE FORMULE, CHE ESPRIMONO I TRE LATI DEI TRIANGOLI RETTILINEI RETTANGOLI

Del Sig. Giuseppe Slop

Ricevute il dì 25 Giugno 1806.

Avendomi tenuto discorso il celebre P. Pagnini mio pregiatissimo Collega nella Pisana Università di più e varie serie numeriche con molto ingegno da lui ritrovate, le quali danno in numeri intieri i lati dei triangoli rettilinei rettangoli, mi si presentò l' idea di cercare, se potevansi esprimere con delle formole generali i tre lati d' ogni qualunque triangolo rettilineo rettangolo.

Per far ciò, sia uno dei due cateti $=2p+1$, il secondo $=x$, e l' ipotenusa $=x+1$, dal che noi avremo $2p^2+2p=x$, ed i tre lati del triangolo $2p+1$ . . $2p^2+2p$ . . $2p^2+2p+1$, ciascuno dei quali moltiplicato per q ci darà una formola generale $2pq+q$ . . $2p^2q+2pq$ . . $2p^2q+2pq+q$, in cui la somma dei quadrati dei due primi termini sarà sempre uguale al quadrato del terzo termine.

Se poi si faccia il 1° cateto $=2n$, il secondo $=x$, e l' ipotenusa $=x+2$, si avrà $x=n^2-1$, ed i tre lati del triangolo $2n$ . . n^2-1 . . n^2+1, che moltiplicati per m daranno una seconda formula generale $2nm$ . . n^2m-m . . n^2m+m, in cui si avrà parimente la somma dei quadrati dei primi due termini eguale al quadrato del terzo.

In questa seconda formula facendo $2nm=2xy$, è chiaro che potranno variarsi in infinito i valori d' x e di y, in modo che il loro prodotto resti sempre uguale a nm, quali valori sostituiti nella formula ad n e ad m daranno un infinito numero di triangoli rettangoli, che avranno comune il cateto $2nm$.

Fa-

Facendo lo stesso nella prima formula avremo $2pq+q=2xy+y$, $x=\frac{2pq+q-y}{2y}$, e $y=\frac{2pq+q}{2x+1}$, onde apparisce che potendosi variare in infinito i valori d' x e d' y in modo che $2x+y$ resti sempre uguale a $2pq+q$, se nella prima formula generale si sostituiscan questi ai valori dati di p e di q, si avrà come nella seconda formula un numero infinito di triangoli rettangoli, che avranno comune il cateto $2pq+q$. È inutile l' avvertire che per p e q, e per n ed m in ambedue le surriferite formule si potranno assumere numeri qualunque frazionarj ed anco radicali.

Rimane ora a considerarsi il caso in cui i valori di p e q, di n ed m volendosi in numeri intieri, si avranno espressi in numeri intieri anco i tre lati d' ogni triangolo, o almeno l' ipotenusa ed uno dei due cateti, quando questo confondendosi coll' ipotenusa, l' altro diventa $=0$, come si ha nella prima formula, nella quale posto $p=0$, i tre lati sono $q\ldots 0\ldots q$, e nella seconda, in cui fatto $n=1$, si hanno i tre lati $2m\ldots 0\ldots 2m$.

Se nella prima formula sia $p=1$, i tre lati d' ogni triangolo saranno 3..4..5, 6..8..10, 9..12..15, o sia $3q\ldots 4q\ldots 5q$, cioè in progressione aritmetica colla differenza $=q$.

Riguardo all' uso delle descritte formule si conoscerà chiaramente per mezzo di esempj. Dato il cateto 13 sia proposto di trovare dalla prima formula, a cui questo appartiene, i triangoli rettangoli che se ne possono dedurre, e che hanno quel numero per minor cateto. Presa l' espressione di questo $2pq+q=13$, si avrà $p=\frac{13-q}{2q}$, e $q=\frac{13}{2p+1}$, quali non possono aversi in numeri intieri, che facendo $p=6$, $q=1$ onde la formula non darà che un sol triangolo i di cui lati sono 13..84..85. Se sia il minor cateto $2pq+q=21$, si avrà $p=\frac{21-q}{2q}$, e $q=\frac{21}{2p+1}$, quali ci danno per p i valori 10..3..1, e per q, 1..3..7, che sostituiti nella formula a p e q danno i tre triangoli 21..220..221, 21..72..75, 21..28..35, così $2pq+q=15$ dà $p=\frac{15-q}{2q}$,

e $q=$

e $q=\frac{15}{2p+1}$, cioè per p, 7 . . 2 . . 1, e per q, 1 . . 3 . . 5, ed i triangoli 15 . . 112 . . 113, 15 . . 36 . . 39, 15 . . 20 . . 25. V'è un quarto triangolo che ha l'istesso cateto cioè 15 . . 8 . . 17 quale non può aversi da $2pq+q$ che è l'espressione del minor cateto. Si dedurrà questo dalla seconda formula, facendo $2nm=8$, la quale preso $n=4$ ed $m=1$ si trasforma in quella di $2n$ . . n^2-1 . . n^2+1, che ci dimostra doversi dare simil caso, ogni volta che essendo n numero pari, si ha $2pq+q=n^2-1$.

Nella seconda formula presi per n tutti i divisori di nm, esclusane l'unità che dà i lati $2m$ . . 0 . . $2m$, e per m i quozienti, e sostituiti ad n ed m, si avranno tutti i triangoli d'un dato cateto che possono da quella dedursi: così da $2nm=4$, si avrà $nm=2$, che ha il solo divisore $2=n$, il quoziente $1=m$, ed il triangolo 4 . . 3 . . 5; da $2nm=6$, si ha $nm=3$, il divisore $3=n$, il quoziente $1=m$; ed il triangolo 6 . . 8 . . 10. Se $2nm=12$, si ha $nm=6$, i divisori o sia gli n, 6 . . 3 . . 2, i quozienti o sia gli m, 1 . . 2 . . 3, ed i triangoli 12 . . 35 . . 37, 12 . . 16 . . 20, 12 . . 9 . . 15.

Se nella prima formula sia $q=2c$, $2pc+c=nm$, si avrà $2pq+q=2mn$, cioè la prima formula prenderà la forma della seconda, alla quale dovrà esser ridotta, riserbando la prima per quando q è un numero dispari. La formula così ridotta nel caso di q numero pari sarà più semplice della prima, e conterrà rari triangoli, oltre a tutti quelli che si avevano prima della riduzione, come mostrano i seguenti esempj: sia $2pq+q=40$, si avrà $p=\frac{40-q}{20}=2$, $q=\frac{40}{2p+1}=8$, ed il solo triangolo 40 . . 96 . . 104. Ridotta la stessa formula alla forma della seconda avremo $2nm=40$, ed $nm=20$, i cui divisori 2 . . 4 . . 5 . . 10 sono altrettanti valori di n, ed i quozienti 10 . . 5 . . 4 . . 2 i valori di m, che danno i quattro triangoli 40 . . 30 . . 50, 40 . . 75 . . 85, 40 . . 96 . . 104, 40 . . 198 . . 202.

Sia $2pq+q=36$, si avrà $p=\frac{36-q}{2q}$, e $q=\frac{36}{2p+1}$, cioè i due va-

valori di p, $1 \, . \, . \, 4$, e di q, $12 \, . \, . \, 4$ ed i due triangoli $36 \, . \, . \, 48 \, . \, . \, 60$, $36 \, . \, . \, 160 \, . \, . \, 164$.

Nella seconda formula sarà $2nm=36$, $nm=18$, i divisori $2 \, . \, . \, 3 \, . \, . \, 6 \, . \, . \, 9$, ed i quozienti $9 \, . \, . \, 6 \, . \, . \, 3 \, . \, . \, 2$, ed i triangoli $36 \, . \, . \, 27 \, . \, . \, 45$, $36 \, . \, . \, 48 \, . \, . \, 60$, $36 \, . \, . \, 105 \, . \, . \, 111$, $36 \, . \, . \, 160 \, . \, . \, 164$.

Per trovare se oltre ai triangoli che si hanno da quelle formule ve ne siano altri, che abbiano il dato cateto, sia questo $=r$, il secondo $=x$, ed $x+q$ l' ipotenusa, si avrà $x=\frac{r^2-q^2}{2q}$, onde il numero dei triangoli rettangoli, che avranno il cateto r, sarà determinato dal numero dei valori, che potranno assegnarsi a q per avere x in numero intiero.

Sia $r=21$, avremo $x=\frac{(21+q)(21-q)}{2q}$, i valori di q, $1 \, . \, . \, 3 \, . \, . \, 7 \, . \, . \, 9$, quelli di x, $220 \, . \, . \, 72 \, . \, . \, 28 \, . \, . \, 20$, ed i triangoli $21 \, . \, . \, 220 \, . \, . \, 221$, $21 \, . \, . \, 72 \, . \, . \, 75$, $21 \, . \, . \, 28 \, . \, . \, 35$, $21 \, . \, . \, 20 \, . \, . \, 29$. Notisi che quando r è un numero dispari bisognerà che lo sia anche q, perchè x sia un numero intiero.

Questi resultati sono gli stessi, che avevamo poc' anzi dedotti dalla prima formula generale, toltone il quarto che non può aversi da quella nella quale si suppone dato il cateto minore.

Fatto $2nm=20$, la seconda formula ci dà i valori di n, $2 \, . \, . \, 5 \, . \, . \, 10$, quelli di m, $5 \, . \, . \, 2 \, . \, . \, 1$, ed i triangoli $20 \, . \, . \, 15 \, . \, . \, 25$, $20 \, . \, . \, 48 \, . \, . \, 52$, $20 \, . \, . \, 99 \, . \, . \, 101$, il che ci mostra che neppur questa può rappresentare il triangolo $20 \, . \, . \, 21 \, . \, . \, 29$, onde cercheremo se l' istesso possa aversi da qualche altra formula.

Sia questa $ms \, . \, . \, s^2-m \, . \, . \, s^2+m$, la quale facendo $s=5$, ed $m=4$ ci dà quel triangolo che sfuggiva alle altre due formule; resta però a vedere, se anche variando i valori di s ed m, la stessa continui ad esprimere i tre lati d' un triangolo rettangolo; perchè ciò segua, bisognerà avere $m^2s^2=4ms^2$, equazione che non si verifica, se non quando è $m=4$, perciò la ricercata terza formula generale sarà $4s \, . \, . \, s^2-4 \, . \, . \, s^2+4$, quale ci mostra che quan-

quando nella seconda formula sarà $2nm$ divisibile per 4, facendo il quoziente $= 5$, vi sarà sempre un triangolo che avrà i lati $2nm$, o sai $4^5 \,..\, 5^2 - 4 \,..\, 5^2 + 4$.

È da notarsi che se s è un numero pari, il triangolo di questa sarà compreso ancora nella seconda formula, la quale facendo allora $2n = 5$, ed $m = 4$, prenderà la forma della terza.

Sia $r = 39$, si avrà $x = \frac{(39+q)(39-q)}{2q}$, i valori di q, 1 . . 3 . . 9 . . 13, quelli di x, 760 . . 252 . . 80 . . 52, ed i triangoli 39 . . 760 . . 761, 39 . . 252 . . 255, 39 . . 80 . . 89, 39 . . 52 . . 65. La prima formula ci darà gli stessi resultati per i due primi ed il quarto triangolo con i valori di p, 19 . . 6 . . 1, senza però comprendere il terzo triangolo, che avendo il 9 per valore di q non può avere nell' equazione $2pq + q = 39$ un numero intiero che sia eguale a p. Questo terzo triangolo si avrà da una nuova formula $nm - 1 \,..\, 2mn \,..\, 2mn + n - 1$, nella quale perchè i quadrati dei due primi termini sieno uguali al quadrato del terzo, bisogna che sia $n = \frac{2m+2}{4m - m^2 + 1}$, equazione che dà in numeri intieri per n, 2 . . — 3 . . 10, per m, 3 . . 5 . . 4, ed i triangoli 5 . . 12 . . 13, — 16 . . — 30 . . — 34, 39 . . 80 . . 89, dei quali i primi due si hanno ancora dalle due prime formule.

Potranno però servire le prime due formule generali senza bisogno di ricorrere a delle nuove, se non esigendo espressi i valori di p e q, di m ed n ambedue in numeri intieri, ci contenteremo che p ed n siano frazionarj, restando intieri q ed m, purchè diano in numeri intieri i tre lati del triangolo; così nell' esempio di sopra $2pq + q = 21$, fatto $q = 9$ sarà $p = \frac{2}{3}$, che sostituiti nella prima formula danno il triangolo 21 . . 20 . . 29.

Deve osservarsi, che quando si ammette il valore di p frazionario, $2pq + q$ può essere l' espressione tanto del minore che del maggior cateto. Lo stesso si avrà nell' equazione $2pq + q = 39$. Preso $q = 9$, avremo $p = \frac{5}{3}$, che sostituiti nella formula prima danno come sopra il triangolo 39 . . 80 . . 89.

Lo stesso segue nella seconda formula, come apparisce dai seguenti esempj. Se si faccia $2nm=44$, si avrà $x=\frac{(44+t)(44-t)}{2t}$, dove per avere x numero intiero, bisognerà che t sia numero pari. Dai valori di t, 2 . . 4 . . 8 . . 22 avremo quelli di x, 483 . . 240 . . 117 . . 33, ed i triangoli 44 . . 483 . . 485, 44 . . 240 . . 244, 44 . . 117 . . 125, 44 . . 33 . . 55, i due primi ed il quarto dei quali avevamo già dedotti dalla seconda, ed il terzo dalla formula terza; quale si avrà ancora direttamente dalla seconda, facendo $m=4$ ed $n=\frac{22}{4}$. Così preso $2nm=20$, si ha $x=\frac{(20+t)(20-t)}{2t}$, i valori di t, 2 . . 4 . . 8 . . 10, quelli d' x, 99 . . 48 . . 21 . . 15, ed i triangoli 20 . . 99 . . 101, 20 . . 48 . . 52, 20 . . 21 . . 29, 20 . . 15 . . 25, che avevamo sopra dedotti, tre dalla seconda ed uno dalla terza formula, quale si avrà parimente dalla seconda facendo $m=4$ ed $n=\frac{5}{2}$, dal che rilevasi che essendo il minor cateto di numero dispari e l' altro pari, si avrà lo stesso triangolo da ambe le formule, il che potrà darsi ancora nel caso inverso, purchè allora il valore di n sia frazionario.

Da quanto abbiamo osservato finora risulta, che per trovare tutti i triangoli, che oltre al dato cateto hanno anche l' altro e l' ipotenusa esprimibili in numeri intieri, dedotti che siensi dalle due prime formule tutti i triangoli che ne vengono dai valori intieri di p e q, m ed n, bisognerà cercare quelli che ne derivano dai valori frazionarj di p ed m, quali se oltre al dato cateto, a cui il primo termine di ciascuna formula rimane sempre uguale, danno anche l' altro cateto in numeri intieri, daranno in numeri intieri ancora l' ipotenusa: così per il cateto $2pq+q=21$ dopo aver trovati tutti i valori di p in numeri intieri 10 . . 3 . . 1, quelli di q, 1 . . 3 . . 7, ed i tre triangoli, qualunque altro valore intiero di q dovrà dare quello di p frazionario; facendo perciò $q=9$, sarà $p=\frac{21-q}{2q}=\frac{2}{3}$, che sostituiti nell' espressione del secondo cateto, ci daranno $2p^2q+2pq=20$, e l' ipotenusa $=29$.

Si

Si vede inoltre dalle premesse formule, che qualora un dato numero è suscettibile della forma n^2m-m, o di quella s^2-4, fra i triangoli di cui farà cateto vi è quello di $2nm$ .. n^2m-m .. n^2m+m se prende la prima, e quello di $4s$ .. s^2-4 .. s^2+4 se prende la seconda forma, e che se un dato numero pari può esprimersi sotto la forma $2p^2q+2pq$, fra i triangoli di cui è un cateto vi è quello di $2pq+q$ .. $2p^2q+2pq$ .. $2p^2q+2pq+q$.

È chiaro ugualmente, che se un dato numero è suscettibile d' una delle tre forme $2p^2q+2pq+q$, n^2m+m, s^2+4, sarà esso l'ipotenusa del triangolo i di cui cateti sono $2pq+q, 2p^2q+2pq$ se ha la prima, $2nm$, n^2m-m se la seconda, $4s$, s^2-4 se prende la terza forma. Sia dato il numero 65, preso $p=2$, e $q=5$ si avrà $2p^2q+2pq+q=65$ che è l'ipotenusa del triangolo, i di cui cateti $2pq+q$, $2p^2q+pq$ sono 25 e 60. Se si fa $n=8$, $m=1$ avremo $n^2m+m=65$, cioè l' ipotenusa d' un altro triangolo, i di cui cateti $2nm$, n^2m-m saranno 16 e 63.