ALCUNE PROPRIETA' GENERALI DELLE FUNZIONI

MEMORIA

Del Sig. Paolo Ruffini

Ricevuta il dì 27 Giugno 1806.

A tutti i Matematici è noto appartenere alle radici della Unità certe affezioni, le quali annunziansi, e si dimostrano loro proprie: ora io dico, che queste affezioni medesime, queste medesime proprietà hanno un' estensione molto più generale. Se, data una quantità, si pratichi su di essa un'operazione di calcolo, qualunque siasi, algebrica o trascendentale, capace di somministrare più valori tra loro diversi, io dico, che su di questi valori paragonati fra loro, verificansi sempre certe proprietà generali analoghe affatto alle sovraindicate riguardanti le radici della Unità, di cui queste per conseguenza non sono, che un caso particolare. La determinazione di simili proprietà formerà il soggetto della presente Memoria.

Il dottissimo ed illustre Matematico Sig. Cavaliere Brunacci ha nella sua Analisi derivata mostrato, come da uno stesso principio di Derivazione vengano comprese tutte le operazioni del calcolo. Noi quivi vedremo, che una medesima legge generale regna sempre fra i risultati molteplici, i quali ottengonsi da una quantità data, qualunque siasi l' operazione, che li produce. Unendo così queste alle osservazioni del Chiarissimo Professor di Pavia, apparirà, mi lusingo, viemaggiormente quel rapporto generale, e quel legame, che esiste fra tutte le operazioni del Calcolo, e fra le quantità diverse, che da simili operazioni vengon prodotte.

SE-

SEZIONE I.

Alcune Proprietà generali delle funzioni semplici.

1. Espressa con la lettera P una quantità qualunque di valore indeterminato, supponghiamo di eseguire su di essa una sola, qualunque siasi, operazione di calcolo, e supponghiamo, che quindi se ne ottenga un risultato molteplice di grado n, il cui valore chiamerò in generale y. Indicata con la lettera Ψ da anteporsi alla P simile operazione, ed espressi con le y', y'', y''', ec. $y^{(n)}$ gli n diversi valori della y, che dipendono dalla supposta moltiplicità, e con gli apici istessi da sovrapporsi alla Ψ espressi i corrispondenti risultati, che procedono dalla operazione supposta, avremo generalmente

$$y = \Psi\,(P)$$

e quindi

(I) $$y' = \Psi'(P), y'' = \Psi''(P), y''' = \Psi'''(P), \text{ ec. } y^{(n)} = \Psi^{(n)}(P).$$

I. Se la operazione da praticarsi sulla P è l'estrazione di una radice, per esempio della 5.ª, onde $n = 5$; il segno Ψ corrisponderà all' altro $\sqrt[5]{}$, e chiamata α una delle radici 5ᵉ immaginarie della unità, ne verrà $y = \Psi(P) = \alpha^q \sqrt[5]{P}$, esprimendosi dalla q uno dei numeri 0, 1, 2, 3, 4, onde avremo

$$y' = \Psi'(P) = \sqrt[5]{P},\ y'' = \Psi''(P) = \alpha\sqrt[5]{P},\ y''' = \Psi'''(P) = \alpha^2\sqrt[5]{P},$$
$$y^{iv} = \Psi^{iv}(P) = \alpha^3\sqrt[5]{P},\ y^{v} = \Psi^{v}(P) = \alpha^4\sqrt[5]{P}.$$

II. In un circolo, il cui raggio sia espresso dalla r, denominato π il quadrante, μ quell' arco non $> \pi$, che ha la quantità P per Cosseno, e ρ quell' arco qualunque, il cui Coseno uguaglia la stessa P, venga richiesto di determinare il Coseno dell' Arco $\frac{\rho}{m}$, essendo m un dato numero intero. Poichè chiamato q un interotero qualunque, abbiamo Cos. $\mu = \cos.(4q\pi \pm \mu)$, e per conseguenza avendosi $P = \text{Cos.}(4q\pi \pm \mu)$, e $\rho = 4q\pi \pm \mu$, risulterà in generale

$y = \Psi(P) = \text{Cos.}\left(\frac{4q\pi \pm \mu}{m}\right)$, e attribuendo alla q successivamente i valori 0, 1, 2, 3, ec. $m-1$, e dei due segni anteposti alla μ tenendo conto del solo $+$, avremo per la y gli m valori $y' = \Psi'(P) = \text{Cos.}\frac{\mu}{m}$, $y'' = \Psi''(P) = \text{Cos.}\left(\frac{4\pi+\mu}{m}\right)$, $y''' = \Psi'''(P) = \text{Cos.}\left(\frac{8\pi+\mu}{m}\right)$, $y^{\text{IV}} = \Psi^{\text{IV}}(P) = \text{Cos.}\left(\frac{12\pi+\mu}{m}\right)$, ec. $y^{(m)} = \Psi^{(m)}(P) = \text{Cos.}\left(\frac{4(m-1)\pi+\mu}{m}\right)$.

III. Che se sia domandato il logaritmo della solita quantità P in un sistema, in cui il protonumero sia 1; otterremo generalmente $y = \Psi(P) = \log.P + 4q\pi\sqrt{-1}$, chiamato log.P il logaritmo reale della supposta P, e ponendo successivamente $q = 0, 1, 2, 3$, ec., ne verrà $y' = \Psi'(P) = \log.P$, $y'' = \Psi''(P) = \log.P + 4\pi\sqrt{-1}$ $y''' = \Psi'''(P) = \log.P + 8\pi\sqrt{-1}$, $y^{\text{IV}} = \Psi^{\text{IV}}(P) = \log.P + 12\pi\sqrt{-1}$, ec. avendosi quivi il numero n di valore infinito.

2. Chiamasi *Funzione semplice* della P quella espressione, nella quale non viene su di questa P indicata che una sola operazione di calcolo: saranno perciò sue funzioni semplici le espressioni P^m, $\sqrt[n]{P}$, sen.P, log.P. Che se vengono su della P accennate più operazioni, allora la funzione, che ne risulta, si denomina *Funzione composta*: quindi saranno tante sue funzioni composte tutte le espressioni $\sqrt[m]{P + \sqrt[n]{P \cdot \sqrt[5]{P^3}}}$, $\frac{\log.(\text{sen.}P)}{\cos.P}$.

I. Ciascuna funzione composta è chiaro essere funzione semplice di altra, o di altre funzioni della P meno composte; così queste seconde sono esse pure funzioni semplici di altre anche meno composte, e così di seguito, finchè si giunge sempre a delle funzioni della sola P semplici. Negli esempj sovraesposti le espressioni $\sqrt[m]{P + \sqrt[n]{P}}$, $\sqrt[5]{P^3}$ sono funzioni semplici, la seconda della quantità P^3, la prima delle due $\sqrt[m]{P}$, $\sqrt[n]{P}$, e tutte que-

queste P^3, $\sqrt[m]{P}$, $\sqrt[n]{P}$ sono poi funzioni semplici della P sola. La espressione $\frac{\log.(\text{sen}.P)}{\cos.P}$ è una funzione semplice delle quantità log.(sen.P), cos.P; di queste la seconda è tosto una funzione semplice della P, e la prima è tale della sen P; finalmente la sen. P è funzione semplice della sola P.

II. Tra le funzioni della P altre ve ne hanno, le quali sono essenzialmente semplici, altre che sono composte essenzialmente, ed altre infine, le quali presentate come semplici possono divenire composte, e viceversa. L' espressione a cagion d' esempio $\sqrt[6]{P}$ è per la definizione data una funzione semplice; potendosi però ridurre all' altra $\sqrt[3]{\sqrt{P}}$, potrà con tal riduzione diventare composta: le espressioni poi $\sqrt[5]{P}$, $\sqrt[7]{P^3}$, non ammettendo ulterior riduzione, sono due funzioni della P, la prima necessariamente semplice, la seconda essenzialmente composta.

III. Tanto una funzione semplice, come una composta possono avere più valori dipendentemente dalla moltiplicità della funzione medesima; un numero 5 ne ha la funzione semplice $\sqrt[5]{P}$, ed un numero mn la composta $\sqrt[m]{P+\sqrt[n]{P}}$.

3. Rappresentata con la lettera Π l'operazione di calcolo inversa a quella, che nel (n.° 1) abbiam supposto di esprimere con la Ψ, vedesi, che, se abbiamo $y = \Psi(P)$, dovrà essere viceversa $\Pi(y) = P$. Ma tutti i valori y', y'', y''', ec. $y^{(n)}$ nati sono dalla medesima P in conseguenza della stessa operazione accennata dalla Ψ. Dunque dovrà essere

(II) $$\Pi(y') = \Pi(y'') = \Pi(y''') = \text{ec.} = \Pi(y^{(n)}) = P, \text{ ossia}$$
$$\Pi(\Psi'(P)) = \Pi(\Psi''(P)) = \Pi(\Psi'''(P)) = \text{ec.} = \Pi(\Psi^{(n)}(P)) = P.$$

I. Nel primo degli esempj del (n.° 1) poichè la Ψ indica l' estrazione di una radice 5ª. la Π indicherà l'elevazione alla 5ª potenza, e sarà in questo caso

$\Pi(y)$

$\Pi(y) = y^5 = \Pi(\Psi(P)) = (\alpha^1 \sqrt[5]{P})^5 = P$.

II. Nell' esempio secondo, in cui si è supposto $P = \cos.\rho$, indicandosi dalla Ψ la determinazione del coseno spettante alla *mesima* parte dell' arco ρ, cosicchè $y = \Psi(P) = \cos.\frac{\rho}{m}$; fatto viceversa $\frac{\rho}{m} = \sigma$, onde $y = \Psi(P) = \cos.\sigma$, verrà dalla Π ad indicarsi la determinazione del coseno, che appartiene all'arco σ ripetuto m volte, cioè all' arco ρ; e per conseguenza avremo $\Psi(y) = \cos.m\sigma = \cos.\rho = P$.

III. In egual modo rappresentandosi nell' esempio terzo dalla Π la determinazione del numero, il cui logaritmo è y, espressa con la lettera e la base del sistema logaritmico, ne verrà $\Pi(y) = e^y = P$.

4. Dalla seconda delle linee (II) apparisce, che mentre sopra uno qualunque dei risultati $\Psi'(P)$, $\Psi''(P)$, $\Psi'''(P)$, ec. vuolsi attualmente eseguire l' operazione accennata dalla Π, non avremo, che da togliere il rispettivo segno Ψ', Ψ'', Ψ''', ec.

5. *Teor.* 1.° Uno qualunque de' valori y', y'', y''', ec. $y^{(n)}$ della $y = \Psi(P)$ (n.° 1) uguaglia sempre una funzione di un altro qualunque de' medesimi; cosicchè espressa con la lettera f la parola funzione, si avrà per esempio il valore $y'' = f(y')$.

Pel (n.° 3) abbiamo $\Pi(y'') = \Pi(y') = P$, e pel (n.° 1) abbiamo $y'' = \Psi''(P)$: ma essendo le due quantità $\Pi(y')$, P tra loro uguali, coll'eseguirsi su dell' una e dell'altra una medesima operazione, i risultati corrispondenti, che ne vengono, deggiono essere uguali fra loro. Dunque sarà $\Psi''(P) = \Psi''(\Pi(y'))$, e per conseguenza, avendosi $y'' = \Psi''(\Pi(y'))$, se invece di effettuare, indicheremo con i rispettivi segni i risultati delle operazioni espresse dalle Π, Ψ'', ne verrà y'' uguale ad una funzione della y', e però $y'' = f(y')$. Dunque ec.

Espressi in generale con le lettere $y^{(a)}$, $y^{(b)}$ due qualsivogliono dei valori della y, cosicchè $y^{(a)} = \Psi^{(a)}(P)$, $y^{(b)} = \Psi^{(b)}(P)$ (n.° 1), con un discorso perfettamente uguale al precedente troveveveremo essere $y^{(a)} = \Psi^{(a)}(\Pi(y^{(b)}))$, e per conseguenza $y^{(a)}$ uguale ad una funzione della $y^{(b)}$.

Poichè nel primo dei sovraesposti esempj l' esponente 5 corrisponde al segno Π(n.° 3), e la $\alpha\sqrt[5]{}$ al segno Ψ'' (n.° 1), ne verrà $y'' = \Psi''(\Pi(y')) = \alpha\sqrt[5]{(y')^5}$, e però $y'' = \alpha y'$. Nell' esempio terzo avendosi $\Pi(y') = e^{y'}$ (n.° 3), risulterà $y'' = \Psi''(\Pi(y')) = \log.(e^{y'}) + 4\pi\sqrt{-1} = y' + 4\pi\sqrt{-1}$. Nell'esempio secondo finalmente poichè, denominato 1.° arc. quello, il quale, mentre è non $> \pi$ (II. n.° 1), ha poi per Cosseno una quantità data, dall' Equazione $y' = \cos.\frac{\mu}{m}$ pel citato (art. II. n.° 1) ricavasi $\frac{\mu}{m} =$ 1.° Arc. Cos.y', ne verrà $\Pi(y') = \mathrm{Cos}.\mu = \mathrm{Cos}.m$ (1.° Arc. Cos.y'), ed essendo $y'' = \mathrm{Cos}.\left(\frac{4\pi+\mu}{m}\right)$, otterremo il valor di $y'' = \Psi(\Pi(y')) = \mathrm{Cos}.\left(\frac{4\pi}{m} + 1.^\circ\ \mathrm{Arc.\ Cos.}y'\right)$.

6. *Teor.* 2.° Supposto ora che la f significhi, non una funzione in generale, ma bensì quella determinata funzione, da cui venendo affetto il valore y', l'altro ne risulta y'' diverso dal primo, onde si ha $y'' = f(y')$ (n.° 5); io dico, che, rappresentatosi con la $y^{(a)}$ un valore della y qualunque, dovrà ancora la $f(y^{(a)})$ esprimere un valore della y diverso da $y^{(a)}$.

Poichè abbiamo $y'' = \Psi''(\Pi(y'))$ (n.° prec.), e però $f(y') = \Psi''(\Pi(y'))$; la f non farà che denotare il risultato, che ottiensi col praticare successivamente sulla y' prima l'operazione indicata dalla Π, e poscia l'altra espressa dalla Ψ'', indipendentemente dal valore della y' medesima; dunque posto invece della y' un altro valore qualunque, per esempio il valore $y^{(a)}$, dovrà essere ancora $f(y^{(a)}) = \Psi''(\Pi(y^{(a)}))$. Chiamato ora t il valore della $f(y^{(a)})$, onde $t = \Psi''(\Pi(y^{(a)}))$, si pratichi sopra l' uno, e l' altro membro di questa Equazione l' operazione accennata dalla Π; dal membro secondo non avremo perciò, che da togliere il segno Ψ'' (n.° 4), e avre-

avremo quindi $\Pi(t)=\Pi(y^{(a)})$; ma essendo $y^{(a)}$ uno dei valori della y, abbiam $\Pi(y^{(a)}) = P$ (n.° 3). Dunque, risultando $\Pi(t) = P$; pei (n. 1, 3) la t altro non sarà che uno dei valori della $y = \Psi(P)$; come dovea dimostrarsi.

7. I. Ritenuta la precedente supposizione di $y'' = f(y')$, facciasi $f(y'') = u, f(u) = v, f(v) = z$, e così di seguito. Tutti questi risultati u, v, z, ec. saranno pel (n. prec.) non meno che y', ed y'', tanti valori della $y = \Psi(P)$.

II. Sostituiscansi nelle supposte successive funzioni il valore delle quantità y'', u, v, z, ec. espresso per la $f(y')$, ci risulterà $y''=f(y'), u=f(f(y')), v=f(f(f(y'))), z=f(f(f(f(y'))))$, ec.; ma in questi risultati la f rappresenta sempre una medesima determinata funzione (n.° 6). Dunque per indicare simili risultati, invece di ripetere la f, servendoci di numeri sovrapposti a tal lettera, avremo $y''=f(y'), u=f^2(y'), v=f^3(y'), z=f^4(y')$, ec.; ma questa serie di funzioni può pel (prec. I) protraersi all' infinito, e i termini, che ne vengono sono sempre valori della y. Dunque formata la serie infinita.

(III) $$y', f(y'), f^2(y'), f^3(y'), f^4(y'), f^5(y'), f^6(y'), \text{ ec.}$$

ciascuno de' suoi termini sarà un valore della $\Psi(P)$, ed essi tutti verranno rappresentati dalla formola generale $f^q(y')$, esprimendosi dalla q un intero qualunque positivo.

III. Ripetuto sul valore $y^{(a)}$, e sulla $f(y^{(a)})$ il discorso, che abbiamo ora fatto sulle quantità $y', f(y')$, troveremo in egual modo, che, qualunque siasi il valore $y^{(a)}$ della y, saranno ancora valori della stessa y tutti gl' infiniti termini

(IV) $$y^{(a)}, f(y^{(a)}), f^2(y^{(a)}), f^3(y^{(a)}), f^4(y^{(a)}), f^5(y^{(a)}), f^6(y^{(a)}), \text{ ec.}$$

8. I. Supponghiamo, che il numero n dei valori y', y'', y''', ec. $y^{(n)}$ della y (n.° 1) sia finito, e non < 2, e supponghiamo, che tali n valori siano tutti fra lor disuguali. In questa ipotesi è evidente, che andando la serie (III) all' infinito; i suoi termini non potranno essere tutti disuguali fra loro, e che a cagione dei due $y', y'' = f(y')$ tra lor disuguali (n.° 5) non potranno neppur essere tutti uguali fra loro.

II.

II. Ciò dunque essendo, suppongansi tra loro uguali i due risultati $f^g(y')$, $f^{g+h}(y')$, in cui g, h siano due numeri interi, il primo non < 1, ed il secondo non < 2. Poichè in due quantità uguali effettuando operazioni uguali, i risultati corrispondenti sono uguali; ne segue, che praticando tanto sulla $f^g(y')$, come sulla $f^{g+h}(y')$ per una sola, o più volte l' operazione inversa a quella, che viene espressa dalla f, i risultati corrispondenti dovranno essere tra loro uguali: ma quando eseguisco una sola volta l'operazione indicata dalla f nella $f^g(y)$; per accennarne il risultato, non faccio che aggiugnere una f, ossia che aggiungere un' unità all' indice g (II. n.° prec.), e scrivo $f^{g+1}(y')$. Dunque per esprimere il risultato, che proviene dall' operazione inversa praticata parimenti una volta sola sopra la $f^g(y')$, dovendo dalle f, che sono di numero g toglierne una, scriverò $f^{g-1}(y')$: lo stesso si dice della $f^{g+h}(y')$. Dunque dall' Equazione $f^g(y')=f^{g+h}(y')$ ricaveremo successivamente $f^{g-1}(y')=f^{g+h-1}(y')$, $f^{g-2}(y')=f^{g+h-2}(y')$, $f^{g-3}(y')=f^{g+h-3}(y')$, ec. fino a $f^{g-g}(y')=f^{g+h-g}(y')$; ma $f^{g-g}(y')=f^0(y')=$ evidentemente y'. Dunque avremo $y'=f^h(y')$. Ho nel presente numero supposto h non < 2, perchè difatti se volendosi un tal numero intero, e positivo, si facesse $h=1$; essendo $f(y')=y''$ (n.° 5) ne verrebbe $y''=y'$, il che a cagione di n non < 2 (prec. I.) non può essere. Perciò nei soliti precedenti esempj avremo rispettivamente 1.° $y''=\alpha y'$, $y'''=\alpha y''=\alpha^2 y'$, $y^{\text{iv}}=\alpha y'''=\alpha^3 y'$, ec.; 2.° $y''=\text{Cos.}\left(\frac{4\pi}{m}+1.°\ \text{Arc. Cos.}\, y'\right)$ $y'''=\text{Cos.}\left(\frac{4\pi}{m}+1.°\ \text{Arc. Cos.}\, y''\right)=\text{Cos.}\left(\frac{8\pi}{m}+1.°\ \text{Arc. Cos.}\, y'\right)$, $y^{\text{iv}}=\text{Cos.}\left(\frac{4\pi}{m}+1°.\ \text{Arc. Cos.}\, y'''\right)=\text{Cos.}\left(\frac{12\pi}{m}+1.°\ \text{Arc. Cos.}\, y'\right)$, ec.; 3.° $y''=y'+4\pi\sqrt{-1}$, $y'''=y''+4\pi\sqrt{-1}=y'+8\pi\sqrt{-1}$, $y^{\text{iv}}=y'''+4\pi\sqrt{-1}=y'+12\pi\sqrt{-1}$, ec.

III. Ripeto la medesima operazione inversa nella $y'=f^h(y')$, ossia nella $f^0(y')=f^h(y')$. Proseguendo ad usare della medesima maniera di scrivere, ne verrà $f^{0-1}(y')=f^{h-1}(y')$ ossia $f^{-1}(y')=f^{h-1}(y')$;

$f^{h-1}(y')$; ma essendo h non < 2 (prec. II.) la $f^{h-1}(y')$ è uno dei valori della y (II. n.°6.); dunque sarà tale eziandio la $f^{-1}(y')$. Seguito a far lo stesso nella $f^{-1}(y')=f^{h-1}(y')$; risultandone $f^{-2}(y')=f^{h-2}(y')$, ed essendo $h-1$ non < 1, anche la $f^{-2}(y')$ sarà un valore della y, poichè è tale $f^{h-2}(y')$: tale sarà ancora $f^{-3}(y')$, giacchè abbiamo $f^{-3}(y')=f^{h-3}(y')$, e la $f^{h-3}(y')$ a cagion della $h-2$ non <0 è valor della y; e così in progresso. Dunque la serie (III) potrà estendersi all' infinito eziandio alla sinistra, apponendo alla f indici negativi: lo stesso si dice della serie (IV). Dunque saranno tanti valori della y tutti i seguenti,

(V) $$\text{ec. } f^{-4}(y'), f^{-3}(y'), f^{-2}(y'), f^{-1}(y'), f^{0}(y')=y', f(y'), f^{2}(y'), f^{3}(y'), f^{4}(y'), \text{ ec.}$$
$$\text{ec. } f^{-4}(y^{(a)}), f^{-3}(y^{(a)}), f^{-2}(y^{(a)}), f^{-1}(y^{(a)}), f^{0}(y^{(a)})=y^{(a)}, f(y^{(a)}), f^{2}(y^{(a)}), f^{3}(y^{(a)}), f^{4}(y^{(a)}), \text{ ec.}$$

espressi dalle formole $f^{q}(y')$, $f^{q}(y^{(a)})$, in cui la q rappresenta un intero qualunque positivo, o negativo.

IV. Ripresa l' Equazione $f^{g}(y')=f^{g+h}(y')$ (prec. II), da questa ricavasi $f^{g-g-h}(y')=f^{0}(y')$, e però $f^{-h}(y')=y'$; ma pel cit°. (prec. II) ottiensi ancora $y'=f^{h}(y')$. Dunque avremo $y'=f^{h}(y')=f^{-h}(y')$, e per conseguenza $f(y')=f^{h+1}(y')=f^{-(h-1)}(y')$, $f^{2}(y')=f^{h+2}(y')=f^{-(h-2)}(y')$, $f^{3}(y')=f^{h+3}(y')=f^{-(h-3)}(y')$, ec., e in generale $f^{g}(y')=f^{h+g}(y')=f^{-(h-g)}(y')$.

9. *Teor.* 3.° Poichè fra i termini della serie (III) pel (II. n.° prec.) ne esiste sempre per lo meno uno, cioè il termine $f^{h}(y')$, in cui $h>1$, il quale si uguaglia ad y'; supponghiamo, che questo $f^{h}(y')$ rappresenti il primo degli accennati termini, che nella serie istessa incontrasi $=y'$, ascendendo continuamente. In tale ipotesi io dico, che i termini $f(y')$, $f^{2}(y')$, $f^{3}(y')$, ec. $f^{h-1}(y')$ dovranno essere tutti disuguali fra loro.

Se, ciò negandosi, si volesse $f^{c}(y')=f^{c+e}(y')$, essendo c, e interi positivi, e $c+e<h$, ne verrebbe $f^{c-c}(y')=f^{c+e-c}(y')$, e però

ro $y' = f^e(y')$; ma questo a cagione della $e < h$ è contro la supposizione. Dunque ec.

10. I. Dunque se sia $h = n$, gli n risultati y', $f(y')$, $f^2(y')$, $f^3(y')$, ec. $f^{n-1}(y')$ altro non saranno che tutti gli n valori (I) della y.

II. Non potrà giammai essere $h > n$ (n.° 1).

III. Giacchè abbiamo $y' = f^h(y')$, colloco nella espressione $f^h(y')$ invece della y' il valore $f^h(y')$; pel (II. n.° 7) ne verrà la $y' = f^{2h}(y')$; pongo nuovamente in quest' ultima espressione la $f^h(y')$ invece della y', otterremo $y' = f^{3h}(y')$. Proseguendo nella guisa medesima a sostituire, vedesi, che risulterà $y' = f^h(y') = f^{2h}(y') = f^{3h}(y') = f^{4h}(y') =$ ec., e in generale $y' = f^{ph}(y')$, esprimendosi dalla p un intero qualunque.

IV. Posto il numero $g < h$, e nella serie (I) il termine $y^{(g+1)} = f^g(y')$; colloco invece della y' la espressione $f^{ph}(y')$, e pel (prec. III.) ne verrà $y^{(g+1)} = f^{ph+g}(y')$.

V. Coll' attribuire al numero arbitrario p i successivi valori 0, 1, 2, 3, ec., e all' altro g corrispondentemente a ciascuno dei valori della p tutti parimenti i valori 0, 1, 2, 3, ec., dall' Equazione $y^{(g+1)} = f^{ph+g}(y')$ apparisce, che mentre nella serie (III) sono pel (n.° 9) risultati fra loro disuguali tutti i primi h termini y', $f(y')$, $f^2(y')$, $f^3(y')$, ec. $f^{h-1}(y')$, gli altri h, che succedono immediatamente, cioè i termini $f^h(y')$, $f^{h+1}(y')$, $f^{h+2}(y')$, $f^{h+3}(y')$, ec. $f^{2h-1}(y')$ sono uguali rispettivamente ai precedenti; così i terzi $f^{2h}(y')$, $f^{2h+1}(y')$, $f^{2h+2}(y')$, $f^{2h+3}(y')$, ec. $f^{3h-1}(y')$ uguagliano in corrispondenza i precedenti primi, e secondi, e così di seguito; onde sarà,

$$y' = f^h(y') = f^{2h}(y') = f^{3h}(y') = \text{ec.}$$
$$y'' = f(y') = f^{h+1}(y') = f^{2h+1}(y') = f^{3h+1}(y') = \text{ec.}$$
$$y''' = f^2(y') = f^{h+2}(y') = f^{2h+2}(y') = f^{3h+2}(y') = \text{ec.}$$

$y^{\text{iv}} =$

$$y^{\text{iv}} = f^3(y') = f^{h+3}(y') = f^{2h+3}(y') = f^{3h+3}(y') = \text{ec.}$$

ec. ec.

$$y^{(h)} = f^{h-1}(y') = f^{2h-1}(y') = f^{3h-1}(y') = f^{4h-1}(y') = \text{ec.}$$

VI. Collocando nella Equazione $f^g(y') = f^{-(h-g)}(y')$ (IV. n.° 8) invece della g i successivi valori 0, 1, 2, 3, ec., poichè si ottiene $y' = f^{-h}(y')$, $f(y') = f^{-(h-1)}(y')$, $f^2(y') = f^{-(h-2)}(y')$, $f^3(y') = f^{-(h-3)}(y')$, ec., $f^{h-1}(y') = f^{-1}(y')$; ne segue che nella prima delle serie (V) venendo alla sinistra della y' gli h risultati $f^{-1}(y')$, $f^{-2}(y')$, $f^{-3}(y')$, ec. $f^{-(h-1)}(y')$, $f^{-h}(y')$ uguagliano rispettivamente gli h valori $y^{(h)}$, $y^{(h-1)}$, $y^{(h-2)}$, ec. y'', y'.

Giacchè abbiamo $y' = f^{-h}(y')$ (IV. n.° 8.) col porre invece della y' la espressione $f^{-h}(y')$, risulterà $y' = f^{-2h}(y')$; ripeto la sostituzione medesima nella $f^{-2h}(y')$, e otterremo $y' = f^{-3h}(y')$; e così in progresso. Dunque in generale avremo ancora $y' = f^{-ph}(y')$, e posta questa espressione invece della y' nella $f^{-(h-g)}(y')$ (IV n.° 8) otterrassi $y^{(g+1)} = f^g(y') = f^{-(p+1)h+g}(y')$, onde ripetendo le medesime precedenti supposizioni, vedesi, che nella prima delle serie (V) tutti gl' infiniti termini, che si estendono alla sinistra della y', altro non sono, che i primi h, che scorrono alla destra, cioè i primi y', $f(y')$, $f^2(y')$, $f^3(y')$, ec. $f^{h-1}(y')$ ripetuti successivamente ad h con un ordine sempre costante.

VII. Per la supposta indeterminazione della P (n.° 1.) e quindi per la corrispondente indeterminazione della $y' = \Psi'(P)$ i rapporti delle quantità $f(y')$, $f^2(y')$, $f^3(y')$ ec. con la y' devono unicamente dipendere dalla natura della funzione espressa dalla f (n.° 6). Dunque i rapporti medesimi, che hannosi da queste $f(y')$, $f^2(y')$, $f^3(y')$, ec. con la y', dovendosi rispettivamente avere ancora dalle $f(y^{(a)})$, $f^2(y^{(a)})$, $f^3(y^{(a)})$, ec. con la $y^{(a)}$; ne segue, che essendo $y' = f^{ph}(y')$ (prec. III), dovrà essere ancora $y^{(a)} = f^{ph}(y^{(a)})$, e quindi $y^{(a+g)} = f^{ph+g}(y^{(a)})$ (prec. IV).

VIII.

VIII. Ritenuta la supposizione del (n.° 9), supposizione, che quando non avvertasi il contrario, riterremo costantemente in avvenire, anche nella serie (IV) tutti i primi h termini $y^{(a)}$, $f(y^{(a)})$ $f^2(y^{(a)})$, $f^3(y^{(a)})$, ec. $f^{h-1}(y^{(a)})$ dovranno essere tra loro disuguali.

IX. In conseguenza de' (prec. VII, VIII) vedesi, che ancora sopra la serie (IV.), e sopra la seconda delle (V) si dovrà verificare quanto nei (prec. I, II, ec. VI) abbiam detto della serie (III), e della prima delle (V).

X. Se si ha la quantità $y^{(a)}$ uguale ad uno, qualunque siasi, dei termini della prima delle due serie (V), tutti i termini di queste due serie si uguaglieranno a due a due fra di loro. Imperocchè supposto $y^{(a)}=f^{g}(y')$; avremo ancora $f^{c}(y^{(a)})=f^{c+g}(y')$, qualunque siasi il numero intero c. Ora coll'attribuire a questa c successivamente i valori 0, 1, 2, 3, ec. — 1, — 2, — 3, ec., dalla $f^{c}(y^{(a)})$ tutti si ottengono i risultati della seconda serie, e tutti quelli della prima ottengonsi dalla $f^{c+g}(y')$. Dunque ec.

XI. Che se $y^{(a)}$ è disuguale da ciascuno dei valori della prima serie (V), qualunque valore abbiansi gl' interi c, g, non potrà giammai essere $f^{c}(y^{(a)})=f^{c+g}(y')$; perchè se ciò fosse, ne verrebbe $y^{(a)}=f^{g}(y')$ contro la supposizione.

XII. Dai (prec. V, ec.) apparisce, che le espressioni $f^{q}(y')$, $f^{q}(y^{(a)})$, qualunque valore intero attribuiscasi alla q, sia esso positivo, o negativo, non potranno mai di valori tra loro diversi somministrarci che rispettivamente gli h.

y', $f(y')$, $f^2(y')$, $f^3(y')$, ec. $f^{h-1}(y')$,

$y^{(a)}$, $f(y^{(a)})$, $f^2(y^{(a)})$, $f^3(y^{(a)})$, ec. $f^{h-1}(y^{(a)})$.

Che se, dato alla q un determinato valore non intero, che dirò h', vogliasi, che risulti ancora $f^{h'}(y')=y'$. Poichè rinnovati quivi i discorsi precedenti ottienesi $y'=f^{ph'}(y')$, $y^{(g+1)}=f^{ph'+g}(y')$, e cane cangiato il valore y' nell' altro $y^{(a)}$ si ha $y^{(a)}=f^{ph'}(y^{(a)}), y^{(g+a)}= f^{ph'+g}(y^{(a)})$, ne segue, che anche i termini, i quali nascono da queste formole, col dare alle p, g dei valori interi, qualsivogliano, altro rispettivamente non sono, che gli h delle due precedenti serie.

11. *Teor.* 4.° Se il numero n (n.° 1.) dei valori tra lor disuguali y', y'', y''', ec. $y^{(n-1)}$ della y sia finito, e sia un numero primo, dovrà essere h (n.° 9) $=n$.

Se ciò si nega; poichè non può essere $h>n$ (II. n.° 10.) supponghiamo, se è possibile, $h<n$, onde oltre gli h valori tra loro diversi (V. n.° 10.)

(VI) $$y', y''=f(y'), y'''=f^2(y'), y^{\text{IV}}=f^3(y'), \text{ ec. } y^{(h)}=f^{h-1}(y'),$$

un altro se ne abbia per lo meno da' loro disuguale, che denominerò $y^{(h+1)}$, e formisi con esso la serie

(VII) $$y^{(h+1)}, f(y^{(h+1)}), f^2(y^{(h+1)}), f^3(y^{(h+1)}), \text{ ec. } f^{h-1}(y^{(h+1)}).$$

Queste serie (VI), (VII) pei (II, III. n.° 7 ° n.° 9, VIII, XI. n. prec.), somministreranno un numero $2h$ di valori della y tutti fra loro differenti; ma, a cagion di h non <2 (II. n.° 8), e di n numero primo, non può essere $2h=n$. Dunque oltre gli accennati (VI), (VII) dovendo esistere per lo meno un altro valore della y da loro diverso; denomino questo y^{2h+1}, e ne formo la serie

(VIII) $$y^{(2h+1)}, f(y^{(2h+1)}), f^2(y^{(2h+1)}), f^3(y^{(2h+1)}), \text{ ec. } f^{h-1}(y^{(2h+1)}).$$

Dovendo ancora tutti i termini (VIII) esprimere pei citati (III. n.° 7., VIII, XI n.° prec.) tanti valori della y tutti disuguali fra loro, e disuguali dai precedenti (VI), (VII), avremo nelle tre serie ora trovate un numero $3h$ di valori della y tutti fra loro diversi; ma il numero n, per essere primo, e pel (II. n. 8), non può neppure uguagliare $3h$. Dunque esistendo necessariamente per lo meno un altro valore della y differente da tutti gli accennati (VI), (VII), (VIII), chiamo esso $y^{(3h+1)}$, e ne faccio la serie

(IX) $$y^{(3h+1)}, f(y^{(3h+1)}), f^2(y^{(3h+1)}), f^3(y^{(3h+1)}), \text{ ec. } f^{h-1}(y^{(3h+1)}).$$

Per le stesse ragioni, che sonosi esposte relativamente alle (VII),

(VIII)

(VIII) avendosi nella (IX) altri h valori tutti diversi fra loro, e dai precedenti; tutte e quattro le serie (VI), (VII), (VIII), (IX) daranno $4h$ valori differenti della y, e non potendo nemmeno essere $n=4h$; dovrà esistere per lo meno un altro valore. Col proseguire lo stesso raziocinio, vedesi agevolmente, che quindi risulterebbero necessariamente per la y infiniti valori tutti disuguali fra loro; ma essendo l'intero lor numero n finito, ciò non può essere. Dunque non potrà neppur essere, che abbiasi $h<n$, e però ec.

12. I. Nella supposizione del (n.° prec.), determinato uno qualunque dei valori della $y=\Psi(P)$, e determinato qual sia la funzione espressa dalla f (n.° 6), potremo adunque agevolmente ritrovar tutti gli altri, col semplice replicare successivamente $n-1$ volte la stessa operazione, che è indicata dalla f sopra i successivi risultati, che se ne ottengono.

II. Se n sia numero composto; allora è facile a vedersi, che non potrà non verificarsi il discorso del (n. prec.), e quindi che potrà non essere $h=n$. In tal caso però dovrà essere h summultiplo di n. Imperciocchè se si volesse n nè uguale, nè multiplo di h, trovato un numero q delle precedenti serie (VI), (VII), (VIII), ec., essendo $g>1$ (il che potrà sempre farsi, giacchè per la ipotesi, e pel (II. n.° 10) deve essere $h<n$) si avrebbe in tali serie un numero gh di valori della y tutti disuguali fra loro (n.° 9. VIII, XI. n.° 10); ma qualunque siasi questo g, non può giammai risultare $gh=n$, perchè allora n sarebbe multiplo di h, contro la supposizione. Dunque proseguendo il discorso del (n.° prec.), troverebbesi qui pure il numero dei valori della y infinito, il che non può essere.

13. I. Volendo addurre alcuni esempj di quanto si è detto in generale dal (n.° 6) fin qui; supponghasi in primo luogo, che la Ψ (n.° 1) indichi l'estrazione di una radice *mesima*, essendo m numero primo, e posto $y'=\Psi'(P)=\sqrt[m]{(P)}$, si esprima con la α una qualunque delle radici *mesime* immaginarie dell'unità. Dicendosi quivi del numero m ciocchè nel (I. n.° 1) si è detto del

5, otterremo, come nel primo esempio del (n.° 5) $y''=f(y')=\alpha y'$, e quindi indicandosi per f la moltiplicazione con la lettera α ne verrà $f^2(y')=\alpha^2(y')$, $f^3(y')=\alpha^3 y'$, ec.; onde pel (II. n.° 7) tutti gl' infiniti termini y', $\alpha y'$, $\alpha^2 y'$, $\alpha^3 y'$, ec. saranno tanti valori della y, e però tante radici *mesime* della quantità P, e verranno questi tutti rappresentati dalla $\alpha^q y'$, potendo il numero q pel (III. n. 8) essere un intero qualunque tanto positivo, come negativo. Dal (n.° 11) poi si vede, che i primi m termini, che ottengonsi dalla $\alpha^q y'$, col supporre successsivamente $q=0, 1, 2, 3,$ ec., $m-1$, sono, a cagione di m numero primo, tutte esattamente le m radici della equazione $y^m=$ P; e queste, allorchè si progredisca a supporre $q=m$, $m+1$, $m+2$, $m+3$, ec., ed allorchè si ponga successivamente $q=-1, -2, -3, -4,$ ec. non fanno pei (V, VI. n.° 10) che ripetersi ad m ad m continuamente.

II. Prendiamo in secondo luogo l' esempio del (II. n.° 1); in cui si ha $y'=\Psi'(\mathrm{P})=\mathrm{Cos.}\frac{\mu}{m}$, ed in cui pel (n.° 5) avendosi $y''=\mathrm{Cos.}\left(\frac{4\pi}{m}+\frac{\mu}{m}\right)=\mathrm{Cos.}\left(\frac{4\pi}{m}+1.^\circ\ \mathrm{Arc.\ Cos.}y'\right)$, la lettera f indica l' addizione alla quantità $\frac{\mu}{m}=$ 1.° Arc. Cos. y' dell' altra $\frac{4\pi}{m}$. In conseguenza di ciò la serie infinita $\mathrm{Cos.}\frac{\mu}{m}$, $\mathrm{Cos.}\left(\frac{4\pi+\mu}{m}\right)$, $\mathrm{Cos.}\left(\frac{8\pi+\mu}{m}\right)$, ec. il cui termine generale è $\mathrm{Cos.}\left(\frac{4q\pi+\mu}{m}\right)$, somministrerà in tutti i suoi termini tanti valori della y (II. n.° 7), potendo l' intero q essere tanto positivo, che negativo (III. n.° 8), ed avuti dalle prime supposizioni della $q=0, 1, 2, 3,$ ec. $m-1$ gli m valori fra lor differenti della y (n.° 11), gli altri non saranno, che questi stessi successivamente ripetuti (V, VI. n.° 10).

Dalle proprietà delle quantità circolari sappiamo essere $\mathrm{Cos.}\left(\frac{4q\pi-\mu}{m}\right)=\mathrm{Cos.}\left(\frac{-4q\pi+\mu}{m}\right)$; ma per quanto si è detto nel (VI. n.° 10) gli stessi valori della y, che risultano dalla espressione $\mathrm{Cos.}\left(\frac{-4q\pi+\mu}{m}\right)$, risultano ancora dalla $\mathrm{Cos.}\left(\frac{4q\pi+\mu}{m}\right)$; dunque i va-

valori medesimi si otterranno eziandio dalla Cos. $\left(\frac{4q\pi-\mu}{m}\right)$; ed ecco il perchè nella Cos. $\left(\frac{4q\pi\pm\mu}{m}\right)$ ottenuta nel (II. n.° 1.) può trascurarsi , come abbiam fatto in realtà il segno inferiore .

III. Nel terzo degli esempj (III. n.° 1) , ove la Ψ indica logaritmo , ed ove pel (n.° 5) si ha $y''=f(y')=y'+4\pi\sqrt{-1}$, essendo $y'=\Psi'(\mathrm{P})=\log.\mathrm{P}$, la f esprimerà l'addizione della quantità $4\pi\sqrt{-1}$ all' altra y', e per conseguenza gl' infiniti termini, che producansi dalla espressione $y'+4q\pi\sqrt{-1}$ ci esprimeranno ancor quivi tanti valori della y (II. n.° 7., III. n.° 8) . In questo caso però non può aver luogo quanto si è detto nel (n.° 11) , e nei (V, VI. n.° 10) , perchè il numero dei valori tra loro diversi della y è infinito .

Tutte queste proprietà , che sonosi accennate nei (prec. I , II , III) , e che sono già note ai Matematici vedesi , che infine dipendono da un principio medesimo , principio il quale , come apparisce da quanto abbiam detto , è comune a tutte le funzioni semplici (n.° 2) di una data quantità P .

IV. Data l' Equazione $x^3-3b^2x-2c=0$, nella quale abbiasi b^3 non $<c$, con un raggio , il cui valore sia b^3 descrivasi un circolo , e in questo chiamato come nel (II. n.° 1) π il valore del quadrante, e μ il valore di quell' arco, il quale essendo non $>\pi$, ha per coseno la quantità c, vogliasi $\mathrm{P}=\mathrm{Cos}.\mu+\mathrm{Sen}.\mu\sqrt{-1}$, ed $y=\Psi'(\mathrm{P})=\mathrm{Cos}.\frac{\mu}{3}+\mathrm{Sen}.\frac{\mu}{3}\sqrt{-1}$.

Cercando primieramente di determinare qual funzione delle x', x'', x''' (così chiamate le tre radici della Equazione data) sia nella ipotesi presente la quantità data P, e quale la y ; osservo , che per le supposizioni fatte abbiamo $\mathrm{Cos}.\mu=c=\frac{x'x''x'''}{2}$; $\mathrm{Sen}.\mu=\sqrt{(b^6-c^2)}=\sqrt{\left(-\frac{(x'x''+x'x'''+x''x''')^3}{27}-\frac{(x'x''x''')^2}{4}\right)}$; ma per la mancanza del secondo termine nella data Equazione si ha $x'=-x''-x'''$. Dunque con la sostituzione risultando

$\mathrm{Cos}.\,\mu = -\frac{x''^2 x''' - x'' x'''^2}{2}$, $\mathrm{Sen}.\,\mu = \sqrt{\left(\frac{(x''^2 + x'' x''' + x'''^2)^3}{27} - \frac{(x''^2 x''' + x'' x'''^2)}{4}\right)}$, e quindi eseguite le accennate elevazioni a potenza, e la susseguente estrazione della radice 2.^{a}, ottenendosi $\mathrm{Sen}.\,\mu = \frac{2x''^3 + 3x''^2 x''' - 3x'' x'''^2 - 2x'''^3}{2 \cdot 3\sqrt{3}}$, ne verrà

$$\mathrm{P} = \mathrm{Cos}\,\mu + \mathrm{Sen}.\,\mu\sqrt{-1} = \frac{-x''^2 x''' - x'' x'''^2}{2} + \frac{(2x''^3 + 3x''^2 x''' - 3x'' x'''^2 - 2x'''^3)\sqrt{-3}}{2 \cdot 9}$$

$$= \frac{3\sqrt{-3}}{27} x''^3 - 3\left(\frac{9 - 3\sqrt{-3}}{2 \cdot 27}\right) x''^2 x''' - 3\left(\frac{9 + 3\sqrt{-3}}{2 \cdot 27}\right) x'' x'''^2 - \frac{3\sqrt{-3}}{27} x'''^3$$

$$= \tfrac{1}{27}\left(\frac{-3 + \sqrt{-3}}{2} x'' + \frac{-3 - \sqrt{-3}}{2} x'''\right)^3 = \tfrac{1}{27}\left(-x'' - x''' + \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} x'' + \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} x'''\right)^3 = \tfrac{1}{27}\left(x' + \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} x'' + \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} x'''\right)^3,$$

e supposto $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \beta$, onde $\beta^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$, $\beta^3 = 1$, avremo

$$\mathrm{P} = \mathrm{Cos}.\,\mu + \mathrm{Sen}\,\mu\sqrt{-1} = \tfrac{1}{27}(x' + \beta x'' + \beta^2 x''')^3;$$

ma essendo b^3 il raggio, abbiamo

$$\left(\mathrm{Cos}.\tfrac{\mu}{3} + \mathrm{Sen}\,\tfrac{\mu}{3}\sqrt{-1}\right)^3 = b^6\,(\mathrm{Cos}.\,\mu + \mathrm{Sen}.\,\mu\sqrt{-1}),$$ e però

$$\mathrm{Cos}.\,\tfrac{\mu}{3} + \mathrm{Sen}.\tfrac{\mu}{3}\sqrt{-1} = b^2\left(\mathrm{Cos}.\mu + \mathrm{Sen}.\mu\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}} = b^2\sqrt[3]{\mathrm{P}}$$

Dunque uno dei valori della supposta $y = \mathrm{Cos}.\tfrac{\mu}{3} + \mathrm{Sen}.\tfrac{\mu}{3}\sqrt{-1}$ sarà $= \frac{b^2}{3}(x' + \beta x'' + \beta^2 x''')$. Chiamato pertanto y' un tal valore, sarà $y' = \Psi'(\mathrm{P}) = \frac{b^2}{3}(x' + \beta x'' + \beta^2 x''') = b^2\sqrt[3]{\mathrm{P}}$; e per conseguenza nella ipotesi presente corrispondendo la Ψ' all' estrazione di una radice cubica dalla P, ed alla moltiplicazione di questa per la quantità cognita b^2, saranno pel (prec. I) valori della y ancora le quantità $\beta y'$, $\beta^2 y'$, che quindi chiamerò y'', y''' (n.° 1), e tali non saranno che queste sole y', y'', y''', risultando

y'

$y' = \frac{b^2}{3}(x' + \beta x'' + \beta^2 x''')$, $y'' = \frac{b^2}{3}(x''' + \beta x' + \beta^2 x'')$,

$y''' = \frac{b^2}{3}(x'' + \beta x''' + \beta^2 x')$.

Ciò posto, poichè abbiamo

$y'' = \beta y' = \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) y'$, $y''' = \beta^2 y' = \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) y'$, e poichè nel circolo avente il raggio b^3 abbiamo $-\frac{b^3}{2} = \text{Cos.}\frac{4\pi}{3} = \text{Cos.}\frac{8\pi}{3}$, e $\text{Sen.}\frac{4\pi}{3} = \frac{b^3\sqrt{3}}{2}$, $\text{Sen.}\frac{8\pi}{3} = -\frac{b^3\sqrt{3}}{2}$, ne verrà

$y'' = \frac{1}{b^3}\left(\text{Cos.}\frac{4\pi}{3} + \text{Sen.}\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}\right)y'$, $y''' = \frac{1}{b^3}\left(\text{Cos.}\frac{8\pi}{3} + \text{Sen.}\frac{8\pi}{3}\sqrt{-1}\right)y'$;

ma essendo $\beta = \frac{1}{b^3}\left(\text{Cos.}\frac{4\pi}{3} + \text{Sen.}\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}\right)$, ne viene

$\beta^q = \frac{1}{b^{3q}}\left(\text{Cos.}\frac{4\pi}{3} + \text{Sen.}\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}\right)^q = \frac{b^{3(q-1)}}{b^{3q}}\left(\text{Cos.}\frac{4q\pi}{3} + \text{Sen.}\frac{4q\pi}{3}\sqrt{-1}\right)$.

Dunque ancora l' espressione $\frac{1}{b^3}\left(\text{Cos.}\frac{4q\pi}{3} + \text{Sen.}\frac{4q\pi}{3}\sqrt{-1}\right)y'$; siccome l' altra $\beta^q y'$ (prec. I) coll' attribuirsi alla q i successivi valori 0, 1, 2, 3, ec. -1, -2, -3, ec., tutti e solamente ci somministrerà i tre valori y', y'', y''', esprimendosi quivi dalla f (n. 6) la moltiplicazione per $\frac{1}{b^3}\left(\text{Cos.}\frac{4\pi}{3} + \text{Sen.}\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}\right)$.

Collocando ora invece della y' il suo valore $\text{Cos.}\frac{\mu}{3} + \text{Sen.}\frac{\mu}{3}\sqrt{-1}$, ci risulta $y = \frac{1}{b^3}\left(\text{Cos.}\frac{4q\pi}{3} + \text{Sen.}\frac{4q\pi}{3}\sqrt{-1}\right)\left(\text{Cos.}\frac{\mu}{3} + \text{Sen.}\frac{\mu}{3}\sqrt{-1}\right)$, e però

$$y = \frac{1}{b^3}\left[\left(\text{Cos.}\frac{4q\pi}{3}\,\text{Cos.}\frac{\mu}{3} - \text{Sen.}\frac{4q\pi}{3}\,\text{Sen.}\frac{\mu}{3}\right) + \left(\text{Cos.}\frac{4q\pi}{3}\,\text{Sen.}\frac{\mu}{3} + \text{Sen.}\frac{4q\pi}{3}\,\text{Cos.}\frac{\mu}{3}\right)\sqrt{-1}\right].$$

Dunque sarà ancora $y = \text{Cos.}\frac{4q\pi+\mu}{3} + \text{Sen.}\frac{4q\pi+\mu}{3}\sqrt{-1}$ espressione, dalla quale, facendo successivamente $q = 3p$, $3p+1$, $3p+2$, rappresentato con la p un intero qualunque, si avrà

y'

$$y' = \text{Cos.}\,\frac{4.3p\pi+\mu}{3} + \text{Sen.}\,\frac{4.3p\pi+\mu}{3}\sqrt{-1}\,,$$

$$y''= \text{Cos.}\,\frac{4(3p+1)\pi+\mu}{3} + \text{Sen.}\,\frac{4(3p+1)\pi+\mu}{3}\sqrt{-1}\,,$$

$$y'''= \text{Cos.}\,\frac{4(3p+2)\pi+\mu}{3} + \text{Sen.}\,\frac{4(3p+2)\pi+\mu}{3}\sqrt{-1}\,.$$

Se invece di porre $P = \text{Cos.}\mu + \text{Sen.}\mu\sqrt{-1}$, fatto si fosse $P = \text{Cos.}\mu - \text{Sen.}\mu\sqrt{-1}$, e la corrispondente quantità $\text{Cos.}\frac{\mu}{3} - \text{Sen.}\frac{\mu}{3}\sqrt{-1}$ si fosse chiamata u: con lo stesso precedente discorso, sarebbesi ritrovato

$$u'=\frac{b^2}{3}(x'+\beta x'''+\beta^2 x'') = \text{Cos.}\frac{4.3p\pi+\mu}{3} - \text{Sen.}\frac{4.3p\pi+\mu}{3}\sqrt{-1}\,,$$

$$u''=\beta^2 u'=\frac{b^2}{3}(x'''+\beta x''+\beta^2 x') = \text{Cos.}\frac{4(3p+1)\pi+\mu}{3} - \text{Sen.}\frac{4(3p+1)\pi+\mu}{3}\sqrt{-1}\,,$$

$$u'''=\beta u'=\frac{b^2}{3}(x''+\beta x'+\beta^2 x''') = \text{Cos.}\frac{4(3p+2)\pi+\mu}{3} - \text{Sen.}\frac{4(3p+2)\pi+\mu}{3}\sqrt{-1}\,.$$

Mediante poi i precedenti valori delle y, u potremo agevolmente determinare le note espressioni circolari prive d' immaginarii, a cui eguagliansi le radici x', x'', x''', che a cagione di b^3 non $< c$ sappiamo essere tutte e tre reali. Imperocchè avendosi

$$x'+\beta x''+\beta^2 x'''=\frac{3y'}{b^2},\; x'''+\beta x'+\beta^2 x''=\frac{3y''}{b^2},\; x''+\beta x'''+\beta^2 x'=\frac{3y'''}{b^2},$$

$$x'+\beta^2 x''+\beta x'''=\frac{3u'}{b^2},\; x'''+\beta^2 x'+\beta x''=\frac{3u''}{b^2},\; x''+\beta^2 x'''+\beta x'=\frac{3u'''}{b^2},$$

col sommare queste Equazioni prese corrispondentemente a due a due con la medesima $x'+x''+x'''=0$, otterremo

$x'=\frac{y'+u'}{b^2}$, $x'''=\frac{y''+u''}{b^2}$, $x''=\frac{y'''+u'''}{b^2}$, e però

$$x'=\frac{2}{b^2}\,\text{Cos.}\frac{4.3p\pi+\mu}{3}$$

$$x'''=\frac{2}{b^2}\,\text{Cos.}\frac{4(3p+1)\pi+\mu}{3}$$

$$x''=\frac{2}{b^2}\,\text{Cos.}\frac{4(3p+2)\pi+\mu}{3}$$

e in generale

$$x=\frac{2}{b^2}\,\text{Cos.}\frac{4q\pi+\mu}{3}\,.$$

SE-

SEZIONE II.

Alcune Proprietà generali delle Funzioni composte .

14. I. Supponghiamo il numero n dei valori tutti fra lor disuguali della y (n.° 1) finito, e composto; e ritengasi costantemente la supposizione del (n.° 9) onde dipendentemente dalla funzione rappresentata dalla f (n. 6), ripetuta quanto si vuole, abbiansi pei (V, VI. n.° 10) i soli h valori della serie (VI). In conseguenza di ciò dovendo il numero n essere uguale o multiplo di h, suppongasi multiplo, e sia $n=hb$, avendosi tanto l' intero h, come l' altro $b>1$. A cagion di quest' ipotesi il termine $y^{(h+1)}$ della serie (VII) (n.° 11), essendo disuguale da tutti i valori (VI), non può pel (V. n.° 10) uguagliare alcuno dei termini della prima delle serie (V); ma questo $y^{(h+1)}$ deve essere funzione della y' (n.° 5). Dunque essendone una funzione diversa da quella, che abbiamo indicata con la f (n.° 6) replicata quante volte esatte sì vuole; supporrò $y^{(h+1)}=\varphi(y')$.

II. Siano di numero $g>1$ tutti i risultati fra loro diversi, che producونsi dalla y', col ripetere su di essa quanto si vuole l' operazione rappresentata dalla φ (V, VI. n.° 10), ed abbiasi perciò $\varphi^g(y')=y'$. Si scrivano quì sotto tali risultati in una colonna verticale, e replicando su ciascuno di essi l' operazione espressa dalla f, si formi la tavola (X).

$$
(\mathrm{X})\quad
\begin{array}{lll}
y',\ f(y'),\ f^2(y'),\ f^3(y'),\ \text{ec.} & & \\
\quad f^r(y'),\ f^{r+1}(y'),\ f^{r+2}(y'),\ \text{ec.} & & f^{h-1}(y'), \\
\varphi(y'),\ f\varphi(y'),\ f^2\varphi(y'),\ f^3\varphi(y'),\ \text{ec.} & & \\
\quad f^r\varphi(y'),\ f^{r+1}\varphi(y'),\ f^{r+2}\varphi(y'),\ \text{ec.} & & f^{h-1}\varphi(y'), \\
\varphi^2(y'),\ f\varphi^2(y'),\ f^2\varphi^2(y'),\ f^3\varphi^2(y'),\ \text{ec.} & & \\
\quad f^r\varphi^2(y'),\ f^{r+1}\varphi^2(y'),\ f^{r+2}\varphi^2(y'),\ \text{ec.} & & f^{h-1}\varphi^2(y'), \\
\varphi^3(y'),\ f\varphi^3(y'),\ f^2\varphi^3(y'),\ f^3\varphi^3(y'),\ \text{ec.} & & \\
\quad f^r\varphi^3(y'),\ f^{r+1}\varphi^3(y'),\ f^{r+2}\varphi^3(y'),\ \text{ec.} & & f^{h-1}\varphi^3(y'), \\
\qquad\qquad \text{ec.} & &
\end{array}
$$

φ^*

$$\begin{array}{ll}
& \varphi^{k}(y'),\ f\varphi^{k}(y'),\ f^{2}\varphi^{k}(y'),\ f^{3}\varphi^{k}(y'),\ \text{ec.} \\
& \quad f^{c}\varphi^{k}(y'),\ f^{c+1}\varphi^{k}(y'),\ f^{c+2}\varphi^{k}(y'),\ \text{ec.} \qquad f^{h-1}\varphi^{k}(y'), \\
& \varphi^{k+1}(y'),\ f\varphi^{k+1}(y'),\ f^{2}\varphi^{k+1}(y'),\ f^{3}\varphi^{k+1}(y'),\ \text{ec.} \\
& \quad f^{c}\varphi^{k+1}(y'),\ f^{c+1}\varphi^{k+1}(y'),\ f^{c+2}\varphi^{k+1}(y'),\ \text{ec.} \quad f^{h-1}\varphi^{k+1}(y'), \\
(\mathrm{X}) & \varphi^{k+2}(y'),\ f\varphi^{k+2}(y'),\ f^{2}\varphi^{k+2}(y'),\ f^{3}\varphi^{k+2}(y'),\ \text{ec.} \\
& \quad f^{c}\varphi^{k+2}(y'),\ f^{c+1}\varphi^{k+2}(y'),\ f^{c+2}\varphi^{k+2}(y'),\ \text{ec.}\ f^{h-1}\varphi^{k+2}(y'), \\
& \qquad\qquad \text{ec.} \\
& \varphi^{g-1}(y'),\ f\varphi^{g-1}(y'),\ f^{2}\varphi^{g-1}(y'),\ f^{3}\varphi^{g-1}(y'),\ \text{ec.} \\
& \quad f^{c}\varphi^{g-1}(y'),\ f^{c+1}\varphi^{g-1}(y'),\ f^{c+2}\varphi^{g-1}(y'),\ \text{ec.} \quad f^{h-1}\varphi^{g-1}(y').
\end{array}$$

15. I. Osservando questa tavola, veggo in primo luogo, che tutti i suoi termini, eccettuatine quelli della prima fila orizzontale, e quelli della prima colonna verticale, rappresentano tante funzioni della y' composte (n.° 2).

II. Essendo tutti fra lor disuguali i termini della prima fila orizzontale, e così disuguali fra loro tutti quelli della prima colonna verticale (n.° 9), tali per lo (VIII. n.° 10) saranno fra loro ancora tutti i termini di ciascheduna riga, e tali fra loro tutti quelli di ciascuna colonna. Non potendo però dirsi lo stesso fra i termini posti in file, ed in colonne diverse, suppongansi uguali fra loro i due termini $f^{c}\varphi^{i}(y')$, $f^{d}\varphi^{l}(y')$, ne' quali siano c, $d<h$; i, $l<g$: in questi non potrà essere $c=d$, mentre i sia disuguale da l, nè potrà essere $i=l$, mentre c sia disuguale da d.

III. Dalla precedente Equazione $f^{c}\varphi^{i}(y')=f^{d}\varphi^{l}(y')$ ritraendosi $f^{c}\varphi^{i}(y')=f^{d}\varphi^{l-i}\varphi^{i}(y')$, osservo, che essendo tanto y' come $\varphi^{i}(y')$ valori della y, potrò per la ragione addotta nel (VII. n.° 10) porre y' invece di $\varphi^{i}(y')$, e ne verrà $f^{c}(y')=f^{d}\varphi^{l-i}(y')$; ma da quest' ultima ottienesi pur anche $f^{c-d}(y')=\varphi^{l-i}(y')$. Dunque rappresentandosi dalla $f^{c-d}(y')$ un termine della prima riga, e dalla $\varphi^{l-i}(y')$ uno della prima colonna; ne segue, che, se due qualsivogliono dei termini (X) uguagliansi fra di loro; dovranno dipendentemente da ciò uguagliarsi fra loro un termine della prima fila con uno della colonna prima.

IV.

IV. Se nella $f^{c-d}(y') = \varphi^{l-i}(y')$ (prec. III) gl' indici $c - d$, $l - i$ sono positivi, chiamo il primo di essi e, il secondo k; che se uno di loro, od amendue voglionsi negativi, chiamo rispettivamente e, k gl' indici di que' termini, che sono in corrispondenza uguali ai due $f^{c-d}(y')$, $\varphi^{l-i}(y')$, e che pel (VI. n.° 10) deggiono esistere in (X) nelle prime due linee orizzontale, e verticale. Il numero k poi deve essere > 1, perchè se fosse $k = 0$, oppure $= 1$, ne verrebbe nel primo caso $y' = f^{e}(y')$, e nel secondo $\varphi(y') = y^{(h+1)} = f^{e}(y')$, il che per le supposizioni fatte (n.° 14, prec. II, III) non può essere.

V. Ponendo invece della y' nel primo membro della $f^{e}(y') = \varphi^{k}(y')$ la quantità $f^{e}(y')$, e nel secondo la $\varphi^{k}(y')$, ne verrà $f^{2e}(y') = \varphi^{2k}(y')$; ripeto in quest' ultima Equazione la sostituzione medesima, e otterremo $f^{3e}(y') = \varphi^{3k}(y')$; proseguo l' operazione istessa, e ci risulterà successivamente $f^{4e}(y') = \varphi^{4k}(y')$, $f^{5e}(y') = \varphi^{5k}(y')$, ec. Dunque in generale avremo $f^{re}(y') = \varphi^{rk}(y')$, essendo r un intero qualunque. Ora per la ragione stessa, che si è addotta nel (I. n.° 8), tra i risultati y', $\varphi^{k}(y')$, $\varphi^{2k}(y')$, $\varphi^{3k}(y')$, ec. ne deggiono esistere degli uguali fra loro; supposto adunque $\varphi^{rk}(y') = \varphi^{(r+s)k}(y')$, ne verrà $\varphi^{sk}(y') = y'$; e per conseguenza la serie y', $\varphi^{k}(y')$, $\varphi^{2k}(y')$, $\varphi^{3k}(y')$, ec. è tale che dovrà in essa proseguendo riprodursi il primo termine y'. Supposto pertanto, che $\varphi^{sk}(y')$ sia il primo termine della serie, che ritorna $= y'$, onde tutti i termini

(XI) $$y',\ \varphi^{k}(y'),\ \varphi^{2k}(y'),\ \varphi^{3k}(y'),\ \text{ec.}\ \varphi^{(s-1)k}(y')$$

siano pel (n.° 9) disuguali fra loro; gli altri termini, che si otterrebbero successivamente, altro non sarebbero, che questi stessi continuatamente replicati (V, VI. n.° 10.). Lo stesso si dice dei termini y', $f^{e}(y')$, $f^{2e}(y')$, $f^{3e}(y')$, ec. Dunque a cagione di $f^{se}(y') = \varphi^{sk}(y')$, e di $\varphi^{sk}(y') = y'$, avremo ancor l' altra serie

(XII) $$y',\ f^{e}(y'),\ f^{2e}(y'),\ f^{3e}(y'),\ \text{ec.}\ f^{(s-1)e}(y'),$$

la quale sarà dotata delle proprietà medesime dell' altra (XI), e i termini sì dell' una, che dell'altra saranno di numero s, ed in corrispondenza uguali fra loro.

VI. Poichè si è supposto $k < g$ (prec. II, III, IV.); sia $\phi^k(y')$ il primo termine, che nella prima colonna verticale della (X) incontrasi uguale ad uno dei termini della prima fila orizzontale, e sia $=f^e(y')$. In tale ipotesi io dico che $\phi^{2k}(y')$ dovrà nella prima colonna verticale essere il termine secondo, che trovasi uguale ad un altro della prima riga. Imperciocchè se, ciò negandosi, si volesse $\phi^{k+i}(y') = f^l(y')$, in cui $i < k$; risultandone $\phi^i\, \phi^k(y') = f^{l-e} f^e(y')$, e quindi $\phi^i\, \phi^k(y') = f^{l-e}\, \phi^k(y')$; posta la y' invece della $\phi^k(y')$, ne verrebbe $\phi^i(y') = f^{l-e}(y')$, e però a cagione di $i < k$, $\phi^i(y')$ non sarebbe più il primo termine, che nella prima colonna trovasi uguale ad uno di quelli della linea prima, contro la supposizione. Avendosi poi $\phi^{2k}(y') = f^{2e}(y')$, $\phi^{3k}(y') = f^{3e}(y')$, ec. (prec. V.), con lo stesso precedente discorso, troveremo, che $\phi^{3k}(y)$, $\phi^{4k}(y)$, ec. sono i successivi termini terzo, quarto, ec. che nella prima colonna incontransi uguali a dei termini della prima linea orizzontale. Dunque nella ipotesi del (prec. IV.) dovranno esistere nella prima colonna della tavola (X) gli s termini della serie (XI) uguali agli s della (XII); ma i termini di quest' ultima serie esistono tutti nella prima riga. Dunque pel (X. n.° 10) nella tavola (X) esisteranno $s - 1$ linee orizzontali oltre la prima, cioè le linee $k + 1$ *esima*, $2k + 1$ *esima*, $3k + 1$ *esima* ec., ciascuna delle quali avrà i suoi termini uguali ai termini della prima.

VII. In egual modo si vede, che le $e + 1$ *esima*, $2e + 1$ *esima*, $3e + 1$ *esima* ec. colonne verticali della (X) hanno i suoi termini uguali a quelli della colonna prima. Siccome poi a cagione di $s(k-1) < g$ (prec. VI), di $s(e-1) < h$, e di $\phi^{sk}(y') = y' = f^{se}(y')$ (prec. V.), il numero sk non può essere nè maggiore nè minore di g (II. n.° 14), nè l' altro se di h; ne segue che sarà $sk = g$, $se = h$, e per conseguenza che nella ipotesi del (prec. II), cioè

cioè allorquando esistono nella (X) due termini fra loro uguali, i due numeri g, h dovranno essere necessariamente composti fra loro, ed avranno per comun divisore il numero s. Se adunque g, h sono primi fra loro, i termini della tavola (X) saranno tutti fra lor disuguali.

VIII. Giacchè ciascun termine della serie (XI) uguaglia ciascuno della (XII) (prec. V.), ponendo $\varphi(y')$ invece della y', sarà $\varphi^{k+1}(y')=f^{e}\varphi(y')$, $\varphi^{2k+1}(y')=f^{2e}\varphi(y')$, $\varphi^{3k+1}(y')=f^{3e}\varphi(y')$, ec. $\varphi^{(s-1)k+1}(y')=f^{(s-1)e}\varphi(y')$; ma i secondi membri di queste Equazioni non sono che tanti termini della seconda fila orizzontale nella (X) e i membri primi tanti termini della prima colonna verticale, i quali non solamente sono tutti disuguali fra loro, perchè nati con una medesima sostituzione da' termini, cioè dagli (XI), già tra lor differenti (prec. V); ma son disuguali eziandio da tutti gli (XI) medesimi, perchè se si volesse $\varphi^{rk+1}(y')=\varphi^{tk}(y')$, ne verrebbe $\varphi^{(r-t)k+1}(y')=y'$, e quindi a cagione di $\varphi^{sk}(y')=y'$ (prec. V.) dovendo essere $(r-t)k+1=psk$ (III. n.° 10), ne verrebbe $k=\frac{1}{ps-r+t}$, e per conseguenza k non maggiore dell' unità contro del (prec. IV). Dunque a cagion delle precedenti Equazioni $\varphi^{k+1}(y')=f^{e}\varphi(y')$, $\varphi^{2k+1}(y')=f^{2e}\varphi(y')$, $\varphi^{3k+1}(y)=f^{3e}\varphi(y')$, ec. dovranno pel (X. n.° 10) esistere nella tavola (X) altre $s-1$ righe oltre le s accennate nel (prec. VI), ed oltre la seconda, in ciascheduna delle quali i termini si uguaglieranno ai termini della seconda medesima.

IX. Sia $k>2$: per l' uguaglianza delle serie (XI), (XII), col porre $\varphi^{2}(y')$ in vece della y', otterrassi $\varphi^{k+2}(y')=f^{e}\varphi^{2}(y')$, $\varphi^{2k+2}(y')$ $=f^{2e}\varphi^{2}(y')$, $\varphi^{3k+2}(y')=f^{3e}\varphi^{2}(y')$, ec.; ma tutti i termini $\varphi^{k+2}(y')$, $\varphi^{2k+2}(y')$, $\varphi^{3k+2}(y')$, ec. sono disuguali fra loro, e disuguali tanto dai termini (XI), come dai precedenti $\varphi^{k+1}(y')$, $\varphi^{2k+1}(y')$, $\varphi^{3k+1}(y')$, ec., il che si dimostra, come nel (prec. VIII). Dunque rinnova-

to

to il discorso del citato (prec. VIII) vedremo esistere nella (X) oltre le accennate nei (prec. VI, VII), ed oltre la terza, altre $s - 1$ file, ciascuna delle quali uguagliasi alla terza.

Posto $k > 3$, poichè dalle (XI), (XII) si ha $\varphi^{k+3}(y') = f^{e}\varphi^{3}(y')$, $\varphi^{2k+3}(y') = f^{2e}\varphi^{3}(y')$, $\varphi^{3k+3}(y') = f^{3e}\varphi^{3}(y')$, ec.; replicato il precedente discorso, si troverà dover esistere nella (X) oltre le sovraccennate altre s righe, compresavi la quarta, ciascheduna delle quali è uguale ne' suoi termini alla quarta medesima. Ora lo stesso proseguesi sempre a dire, finchè si formano le Equazioni $\varphi^{2k-1}(y') = f^{e}\varphi^{k-1}(y')$, $\varphi^{3k-1}(y') = f^{2e}\varphi^{k-1}(y')$, $\varphi^{4k-1}(y') = f^{3e}\varphi^{k-1}(y')$, ec.. Dunque nella ipotesi de' (prec. II, IV) le prime k linee orizzontali della tavola (X) uguaglieranno corrispondentemente le seconde k, le terze k, ec. sino alle $s - 1$ *esima* k.

16. *Teor.* 5.° Se abbiasi l' Equazione $f^{\alpha}(y') = \varphi^{\beta}(y')$, in cui α, e β siano due numeri interi qualsivogliono; io dico, che deve esistere sempre un intero p, ed un determinato numero h' (XII. n.° 10) tale, che abbiasi $\varphi(y') = f^{\frac{ph'+\alpha}{\beta}}(y')$, essendo pel citato (XII. n.° 10) $f^{h'}(y') = y'$.

Pongasi $\varphi(y') = f^{x}(y')$. Collocando in questa Equazione invece della y' nel primo membro la $\varphi(y')$, e nel secondo la $f^{x}(y')$, ne verrà $\varphi^{2}(y') = f^{2x}(y')$; replico questa sostituzione, ed avremo $\varphi^{3}(y') = f^{3x}(y')$; proseguo ad eseguirla, finchè l' indice della φ divenga β, e per ultimo risultato otterremo $\varphi^{\beta}(y') = f^{\beta x}(y')$; ma per la ipotesi si ha $\varphi^{\beta}(y') = f^{\alpha}(y')$; dunque sarà ancora $f^{\beta x}(y') = f^{\alpha}(y')$. Ora tutte le espressioni aventi la forma $f^{q}(y')$, e di valore $= f^{\alpha}(y')$ dipendono dalla espression generale $f^{ph'+\alpha}(y')$ (XII. n.° 10), mentre all' intero p, ed alla h' si attribuiscono gli opportuni valori. Dunque dalla stessa $f^{ph'+\alpha}(y')$ dipendendo ancora la $f^{\beta x}(y')$, dovrà potersi dare tanto alla h', come all' intero p dei valori tali, che rendano $\beta x = ph' + \alpha$, e quindi $x = \frac{ph'+\alpha}{\beta}$. Dunque ec.

Can-

Cangiato il valore y' nell'altro $y^{(a)}$, dall'Equazione $f^{\alpha}(y^{(a)}) = \varphi^{\beta}(y^{(a)})$, che ne viene, ritrarremo egualmente $\varphi(y^{(a)}) = f^{\frac{ph'+\alpha}{\beta}}(y^{(a)})$.

17. *Teor.* 6.° Qualunque siansi i numeri interi α, β, e qualunque il valore $y^{(a)}$ della y dovrà essere $f^{\alpha}\varphi^{\beta}(y^{(a)}) = \varphi^{\beta}f^{\alpha}(y^{(a)})$.

Avendosi $\varphi^{g}(y^{(a)}) = y^{(a)} = f^{h}(y^{(a)})$ (I, II. n.° 14), ne verrà $\varphi(y^{(a)}) = f^{\frac{ph'+h}{g}}(y^{(a)})$ (n.° prec.), e però $\varphi^{\beta}(y^{(a)}) = f^{\frac{(ph'+h)\beta}{g}}(y^{(a)})$, e quindi $f^{\alpha}\varphi^{\beta}(y^{(a)}) = f^{\alpha}f^{\frac{(ph'+h)\beta}{g}} = f^{\frac{g\alpha+(ph'+h)\beta}{g}}(y^{(a)})$; ma dalla stessa $\varphi^{\beta}(y^{(a)}) = f^{\frac{(ph'+h)\beta}{g}}(y^{(a)})$, col porre invece di $y^{(a)}$ la $f^{\alpha}(y^{(a)})$, ritraesi ancora $\varphi^{\beta}f^{\alpha}(y^{(a)}) = f^{\frac{(ph'+h)\beta+g\alpha}{g}}(y^{(a)})$. Dunque sarà $f^{\alpha}\varphi^{\beta}(y^{(a)}) = \varphi^{\beta}f^{\alpha}(y^{(a)})$.

18. I. Sopra uno dei valori della y diverso da y', sopra $y^{(a)}$, eseguiscansi quelle operazioni, per cui dalla quantità y' sonosi prodotti tutti i termini della tavola (X), e i risultati, che ne vengono, suppongansi scritti con la stessa regola in un' altra tavola. Questa seconda altro non sarà che la prima (X) cambiata la y' nella $y^{(a)}$; e per conseguenza verificandosi su di essa le proprietà, che abbiam veduto nel (n.° 15) appartenere all' altra; ne viene che ancora in questa, se i numeri g, h sono primi fra loro, tutti i gh termini, che la compongono, saranno diversi fra loro.

II. Se uno qualsivoglia dei termini della seconda ora indicata tavola si uguaglia ad uno di quelli della tavola (X); io dico, che ancora tutti gli altri termini di quella dovranno in corrispondenza essere uguali con tutti i termini di questa. Diffatti supposti tra loro uguali i due termini $f^{\alpha}\varphi^{\beta}(y')$, $f^{\gamma}\varphi^{\delta}(y^{(a)})$; osservo, che per una tale uguaglianza tutti i termini della $\beta + 1$ *esima* fila orizzontale della (X) sono già pel (X. n.° 10.) uguali rispettivamente a tutti i termini della $\delta + 1$ *esima* fila orizzontale della tavola se-

seconda. Ora pel (n.° 17.) abbiamo $f^\alpha\varphi^\beta(y') = \varphi^\beta f^\alpha(y')$, $f^\gamma\varphi^\delta(y^{(a)}) = \varphi^\delta f^\gamma(y^{(a)})$; dunque sarà $\varphi^\beta f^\alpha(y') = \varphi^\delta f^\gamma(y^{(a)})$, e però $\varphi^{\beta+1} f^\alpha(y') = \varphi^{\delta+1} f^\gamma(y^{(a)})$, $\varphi^{\beta+2} f^\alpha(y') = \varphi^{\delta+2} f^\gamma(y^{(a)})$, $\varphi^{\beta+3} f^\alpha(y') = \varphi^{\delta+3} f^\gamma(y^{(a)})$ ec., onde pel citato (n.° 17.) avendosi $f^\alpha\varphi^{\beta+1}(y') = f^\gamma\varphi^{\delta+1}(y^{(a)})$, $f^\alpha\varphi^{\beta+2}(y') = f^\gamma\varphi^{\delta+2}(y^{(a)})$, $f^\alpha\varphi^{\beta+3}(y') = f^\gamma\varphi^{\delta+3}(y^{(a)})$, ec. tutti i termini nella tavola (X) delle righe $\beta+2$ *esima*, $\beta+3$ *esima*, $\beta+4$ *esima*, ec. saranno in corrispondenza uguali ai termini nella tavola seconda delle righe $\delta+2$ *esima*, $\delta+3$ *esima*, $\delta+4$ *esima*, ec. Dunque tutte le linee orizzontali di una delle due tavole risultando nella correspettività ora accennata uguali alle linee dell' altra, ne segue, che ec.

III. Dunque se il valore $y^{(a)}$ è diverso da tutti i termini (X), ninno dei termini della seconda tavola potrà uguagliarsi ad alcuno di quelli della tavola prima.

19. *Teor.* 7.° Supposto il numero n dei valori tutti fra loro diversi della y, come nel (I. n.° 14), $= hb$; se sia b numero primo, io dico, che nella tavola (X) dovrà essere $g = b$.

I. Cominciam dal supporre, che tutti i gh valori della (X) siano disuguali fra loro, non potrà essere $g > b$. Se dunque si nega, che sia $g = b$, pongasi, se è possibile, $g < b$. Esistendo in questa supposizione degli altri valori della y, oltre i gh contenuti nella tavola (X), sia $y^{(gh+1)}$ uno di tali valori, e con esso si formi, come si è indicato nel (I. n.° 18), un' altra tavola simile alla precedente. Poichè $y^{(gh+1)}$ è un valore diverso da tutti gli esistenti nella (X); tutti i gh termini della tavola seconda saranno pei (II, III. n.° 18) disuguali da tutti i termini della prima, e disuguali fra loro: dunque unendo gli uni con gli altri, avremo così $2gh$ valori della y tutti tra lor disuguali. Ora essendo $g > 1$ (II. n.° 14), non può essere $2gh = bh$, poichè ne verrebbe $2g = b$, e quindi b non sarebbe più numero primo, contro la supposizione. Dunque oltre gli accennati $2gh$ valori qualche altro ne dovrà esistere da lor differente: chiamato pertanto $y^{(2gh+1)}$ uno di questi ultimi, for-

mi-

misi con esso una terza tavola simile alle due precedenti. Dovendo pei citati (I, III. n.° 18) contenersi anche in questa terza gh valori della y disuguali tra loro, e diversi da tutti quelli, che li precedono, abbiamo così $3gh$ valori differenti tra loro; ma per la stessa sovraccennata ragione non può neppur essere $3gh = bh$. Dunque dovranno nuovamente esistere dei valori ulteriori, onde con uno di essi, che dirò $y^{(3gh+1)}$, potrò formare una quarta tavola, ed avere in tal modo $4gh$ valori della y tutti fra lor disuguali; ma non potendo, per quanto si è detto di sopra, nemmeno essere $4gh = bh$, nè essere $5gh$, $6gh$, $7gh$, ec. $= bh$; deggiono esistere ancora altri valori della y, con cui si può costruire una quinta tavola, una sesta, una settima, ec. all' infinito. Dunque mentre si voglia $g < b$, il numero dei valori tra loro diversi della y risulta infinito; ma avendosi $n = hb$ numero finito, ciò non può essere. Dunque ec.

II. Vogliasi in secondo luogo che due dei valori della tavola (X) siano uguali fra loro, e però che si abbia $f^{\epsilon}(y') = \varphi^{t}(y')$ (II, ec. V. n.° 15.). In questa ipotesi i valori tra loro diversi della y nella tavola (X) riduconsi ai soli hk delle prime k file orizzontali (VIII, IX. n.° 15); nella stessa maniera si riducono a soli hk i valori tra loro diversi della tavola seconda, così quelli della terza, della quarta, ec., e frattanto pel (IV. n.° 15.) esser deve $k > 1$. Dunque replicandosi quivi col numero hk il discorso stesso, che si è fatto precedentemente con l' altro gh, verremo alla medesima conseguenza, e però ec.

III. È facile a vedersi, che, come nel (II. n.° 12.) il teorema medesimo si verifica eziandio, allorquando sia b numero composto, purchè questo b non sia multiplo di g (prec. I), o di k (prec. II); onde b dovrà essere sempre uguale, o multiplo rispettivamente di g, o di k, e però il numero $n = hb$ sarà sempre uguale, o multiplo di hg, o di hk.

20. *Teor.* 8. Siano nella tavola (X) i due numeri g, h primi tra loro, e preso in essa un termine $f^{\alpha}\varphi^{\beta}(y')$ che dirò $y^{(b)}$ diverso da tutti quelli della prima linea orizzontale, e da quelli del-

della prima colonna verticale, onde i numeri α, β siano amendue > 0, ed il primo di essi $< h$, il secondo $< g$, sia in conseguenza del (n.° 5) $y^{(b)} = \mathrm{F}(y')$. Ciò fatto, io dico che dalla espressione $\mathrm{F}^{q}(y')$, coll'attribuire alla q i successivi valori $0, 1, 2, 3$, ec. $gh - 1$, tutti si ottengono i gh valori della (X); e questi valori col porre ulteriormente $q = gh, gh + 1, gh + 2$, ec. non fanno, che successivamente, e continuatamente ripetersi.

Poichè essendo tanto $\mathrm{F}(y')$ come $f^{\alpha}\varphi^{\beta}(y') = y^{(b)}$, abbiamo $\mathrm{F}(y') = f^{\alpha}\varphi^{\beta}(y')$, posto invece della y' nel primo membro di questa Equazione la $\mathrm{F}(y')$, e nel secondo la $f^{\alpha}\varphi^{\beta}(y')$, ne verrà $\mathrm{F}^{2}(y') = f^{\alpha}\varphi^{6}f^{\alpha}\varphi^{\beta}(y')$; ma supposto $\varphi^{\beta}(y') = y^{(a)}$, pel (n.° 17.) abbiamo $\varphi^{\beta}f^{\alpha}(y^{(a)}) = f^{\alpha}\varphi^{\beta}(y^{(a)})$; dunque collocato nuovamente invece della $y^{(a)}$ il suo valore $\varphi^{\beta}(y')$, ci verrà $\varphi^{\beta}f^{\alpha}\varphi^{\beta}(y') = f^{\alpha}\varphi^{2\beta}(y')$, e però $\mathrm{F}^{2}(y') = f^{2\alpha}\varphi^{2\beta}(y')$; nella stessa maniera si truova essere $\mathrm{F}^{3}(y') = f^{3\alpha}\varphi^{3\beta}(y')$; $\mathrm{F}^{4}(y') = f^{4\alpha}\varphi^{4\beta}(y')$, ec., e in generale $\mathrm{F}^{q}(y') = f^{q\alpha}\varphi^{q\beta}(y')$. Ora supponghiamo, che di numero l siano i valori fra loro diversi, che provengono dalla $\mathrm{F}^{q}(y')$, e sia $\mathrm{F}^{i}(y')$ uno di questi. Pel (V. n.° 10) $\mathrm{F}^{l+i}(y')$ sarà fra i termini della serie y', $\mathrm{F}(y')$, $\mathrm{F}^{2}(y')$, $\mathrm{F}^{3}(y')$, ec. il primo che ritorna $= \mathrm{F}^{i}(y')$, e tale per conseguenza sarà il termine $f^{\alpha(l+i)}\varphi^{\beta(l+i)}(y')$; ma essendo i due numeri g, h per la ipotesi primi fra loro, i termini della tavola (X) sono tutti fra loro disuguali (VII. n.° 15); e però il numero intero da aggiungersi nella $f^{\alpha i}\varphi^{\beta i}(y')$ all'indice αi, e l'altro da aggiungersi all'indice βi, onde ottenere un altro termine $= f^{\alpha i}\varphi^{\beta i}(y')$, deggiono essere, il primo multiplo di h, ed il secondo di g (IV, V, n.° 10, I, II, n.° 14); e frattanto per le condizioni supposte l'indice della f deve essere sempre multiplo di α, e quello della φ sempre multiplo di β. Dunque, dovendo il precedente termine $\mathrm{F}^{l+i}(y') = f^{\alpha(l+i)}\varphi^{\beta(l+i)}(y')$ uguagliarne uno della forma $f^{\alpha(ph+i)}\varphi^{\beta(rg+i)}(y')$, ove p, r siano due numeri interi opportuni all'intento, avremo $\alpha(l+i)$

=

$= \alpha(ph+i), \beta(l+i) = \beta(rg+i)$, e però $l = ph = rg$, e quindi $\frac{p}{r} = \frac{g}{h}$. Ora essendo g, h numeri primi tra loro, l' Equazione $\frac{p}{r} = \frac{g}{h}$ ci dice che i due p, r non possono essere, che uguali, o equimultipli degli stessi g, h; ma essendo per la ipotesi $F^{l+i}(y')$ il primo termine, che nella serie proveniente dalla $F^{q}(y)$ ottienesi, ascendendo, $= F^{i}(y')$; alle due lettere p, r deve attribuirsi il valore intero minimo capace di rendere $\frac{p}{r} = \frac{g}{h}$: dunque dovrà essere $p = g$, $r = h$, e per conseguenza avremo $l = gh$. Dunque tutti i valori, che risultano dalla $F^{q}(y')$ col porre successivamente $q = i, i+1, i+2, i+3$, ec. $i + gh - 1$ sono fra loro disuguali; ma essi sono di numero gh, sono tutti valori della y, ed i può essere a piacimento $= 0, 1, 2, 3, 4$, ec. Dunque ec.

21. Sia nella tavola (X) il numero g composto con h, e sia come precedentemente $g = ks$, $h = es$, essendo s il loro massimo comun divisore, ed essendo s primo con k. Preso in questa supposizione il termine $\varphi^{s}(y')$ nella prima colonna della (X), faccio $\varphi^{s} = \pi$; ne verrà $\varphi^{s}(y') = \pi(y')$, $\varphi^{2s}(y') = \pi^{2}(y')$, $\varphi^{3s}(y') = \pi^{3}(y')$, ec. $\varphi^{(k-1)s}(y') = \pi^{k-1}(y')$, $\varphi^{ks}(y') = \pi^{k}(y')$, ma tutti i primi membri di queste Equazioni sono disuguali fra loro (II. n.° 14), ed avendosi $\varphi^{ks}(y') = \varphi^{g}(y') = y'$, risulta $\pi^{k}(y') = y'$. Dunque essendo $\pi(y')$ un valore della y tale, che col ripetersi, quanto si vuole, della funzione espressa dalla π, ottengonsi solamente i k valori tra loro diversi

(XIII) $$y',\quad \pi(y'),\quad \pi^{2}(y'),\quad \pi^{3}(y'),\ \text{ec.}\ \pi^{k-1}(y'),$$

ed a cagione di s primo con k, e massimo divisor comune dei due h, g, essendo k primo con h; ne segue pel (n.° prec.) che se prenderò un termine $f^{\alpha}\pi^{\beta}(y')$, in cui abbiasi $\alpha > 0$, e $< h$; $\beta > 0$, e $< k$, e lo farò $= F(y')$, ne segue, dissi, che l'espressione $F^{q}(y)$, coll' attribuire successivamente alla q i valori $0, 1, 2, 3$, ec. $hk - 1$, tutti ci darà gli hk valori tra loro diversi (VII. n.° 15) della y, che ottengonsi combinando, come nella tavola (X), tutti i valori dipendenti dalla $f^q(y')$ con quei tutti, che dipendono dalla $\pi^q(y')$.

22. *Teor.* 9.° Supposto n, ossia il numero totale dei valori della y fra loro diversi $= abcde \ldots$, in cui a, b, c, d, e, ec. siano tanti numeri maggiori dell' unità, primi, e fra lor disuguali, io dico, che esiste sempre un valore della y funzione della y', che esprimerò per $F(y')$, dipendentemente dal quale tutti si otterranno i valori della y coll' attribuire nella $F^q(y')$ all' indice q successivamente i valori $0, 1, 2, 3$, ec. $n - 1$.

I. Preso uno qualunque dei valori della y diverso da y', per esempio y'', pel (n.° 6) $= f(y')$, osservo, se il numero h (n.° 9, V, VI. n.° 10) dei risultati (VI) è, o non è $= n$. Se lo è, allora pel (I. n.° 10) la $f^q(y')$ ci somministrerà nell'indicata maniera tutti i diversi valori della y, e quindi essa $f^q(y')$ altro non sarà in questo caso, che la precedente $F^q(y')$.

II. Che se non abbiamo $h = n$; dovendo inallora il numero h pel (II. n.° 12) essere summultiplo dell'altro n, e dovendo perciò essere uguale ad uno, o al prodotto di due, ovvero di tre, o di più de' fattori a, b, c, d, e, ec., porrò $h = ab$. In questa supposizione poichè risulta $h < n$, prendasi un altro valore della y diverso da quei tutti, che dipendono dalla $f^q(y')$, per esempio il valore $y^{(h+1)} = \phi(y')$ (I. n.° 14), e determinato il numero g (II. n.° 14) de' valori provenienti dalla $\phi^q(y')$, osservo se sia $g =$, oppure $< n$. Se trovasi $g = n$, allora questa $\phi^q(y')$, coincidendo con la $F^q(y')$, farà verificare l' accennato Teorema.

III. Se poi abbiamo $g < n$, osservo, se alcuno dei valori provenienti dalla $\phi^q(y')$, mentre q sia > 1, e $< g$, uguagliasi ad alcuno dei valori provenienti dalla $f^q(y')$, in cui abbiasi $q > 0$, e $< h$, o non si uguaglia. Nel caso, in cui succeda una tale uguaglianza, posto per esempio $f^e(y') = \phi^k(y')$, in cui il numero e superi lo zero, e sia $< h$, e l'altro k superi l' unità, e sia $< g$; pel (VII. n.° 15) dovranno i due numeri $h\ g$ avere un divisor comune, e chiamato questo s (V. n.° 15), dovrà essere $h = es$, $g = ks$. Ora per le ipotesi fatte, abbiamo $h = ab$, ed a, b sono numeri

pri-

primi ; dunque dovendo risultare $s = a$, oppure $= b$, oppure $= ab$, e dovendo pel (III. n.° 19.) essere k un divisore esatto del quoto $\frac{n}{h} = cde \ldots$, dovrà esso k uguagliare uno, o il prodotto di due, o più dei fattori c, d, e, ec. Supposto pertanto $k = c$, e però $g = cs$, facciasi $\varphi^s = \pi$; risultando da ciò $\varphi^s(y') = \pi(y')$, $\varphi^{2s}(y') = \pi^2(y')$, $\varphi^{3s}(y') = \pi^3(y')$, ec. $\varphi^{cs}(y') = y' = \pi^c(y')$, la funzione $\pi^q(y')$, col dare a q i successivi valori o, 1, 2, 3, ec. ci somministrerà c valori diversi. Prendo ora un termine $f^\alpha \pi^\beta(y')$, in cui $\alpha > o$, $e < h$; $\beta > o$, $e < c$, e pongo $f^\alpha \pi^\beta = \psi$, onde $f^\alpha \pi^\beta(y') = \psi(y')$. Essendo h, ossia ab, ed il numero c primi, per la ipotesi, fra di loro, la $\psi^q(y')$ pel (n.° 20) ci darà un numero $hc = abc$ di valori tutti fra lor differenti, mentre facciasi successivamente $q = o$, 1, 2, 3, ec. $abc - 1$.

IV. Suppongasi ora, che non accada la uguaglianza precedentemente supposta tra i due valori provenienti dalle $f^q(y')$, $\varphi^q(y')$. In questa ipotesi dovendo pel (III. n.° 19.) essere g un divisore esatto di $\frac{n}{h} = cde \ldots$, porrò esso $g = c$; e fatto quindi, come poc' anzi, $f^\alpha \varphi^\beta = \psi$, onde $f^\alpha\, \varphi^\beta(y') = \psi(y')$; come poc' anzi vedremo, che anche nel caso presente la $\psi^q(y')$ ci somministra un numero $hc = abc$ di valori della y fra loro diversi.

V. Se nel caso del (prec. III) k, e nell' altro del (prec. IV.) g in vece di essere $= c$ fossero stati $= d$, oppure $= cd$, oppure $= cde$, oppure, ec., la $\psi^q(y')$ ci avrebbe in corrispondenza somministrati abd, ovvero $abcd$, ovvero $abcde$, ec. valori della y; ma per quanto abbiam detto nel primo caso k, e nel secondo g devono necessariamente uguagliare uno, o il prodotto di due, o più dei fattori c, d, e, ec. Dunque il numero, nel caso primo hk, nel secondo hg de' valori provenienti dalla $\psi^q(y')$ supererà, e sarà multiplo del numero h dei valori provenienti dalla $f^q(y')$, e sarà insieme uguale, o summultiplo del numero totale n.

VI. Ritenuto, che $hc = abc$ (prec. IV) sia il numero dei risultati, che provengono dalla $\psi^q(y')$, poichè avendosi

$abc < n$, esistono degli ulteriori valori della y, prendasene uno di questi ultimi, che chiamerò $y^{(hc+1)}$, e pel (n.° 5) porrò $= \rho(y')$, denotandosi dalla ρ la funzione corrispondente, e sia i il numero dei risultati diversi, che nascono dalla $\rho(y')$. Come nei (prec. III, IV) g relativamente ad $\frac{n}{h}$, così in questo luogo il numero i vedremo, che deve sempre essere o divisore esatto di $\frac{n}{hc} = de\ldots$, od avere con questo prodotto $de\ldots$ un fattor comune > 1. Supposto pertanto nel primo di questi due casi $i=d$, e nel secondo $i=td$, faccio in questo secondo $\rho^t = \sigma$, e poscia, supposto al solito $\alpha > 0$, $< hc$, $\beta > 0$, $< d$, pongo nel caso primo $\psi^\alpha \rho^\beta$, e nel secondo $\psi^\alpha \sigma^\beta = \tau$, e la funzione $\tau^1(y')$ pel (n.° 20) ci somministrerà $hcd = abcd$ valori diversi della y.

Ora rifletto, che potremo sempre, finchè rimangono dei valori ulteriori della y, proseguire il precedente discorso, e le operazioni accennate: ma i numeri ab, abc, $abcd$, ec. dei valori, che ottengonsi dalle corrispondenti funzioni $f^1(y')$, $\psi^1(y')$, $\tau^1(y')$, ec. vanno sempre crescendo, e sono sempre divisori esatti di n (prec. V). Dunque dovremo sempre giungere finalmente ad una di tali funzioni, la quale, coll'attribuire alla q i successivi valori $0, 1, 2, 3$, ec. $n-1$ tutti somministrandoci gli n valori della y, altro non sarà che la sovraccennata $F^1(y')$. Dunque ec.

23. I. Ritenuto $n = abcde\ldots$ (n.° 22.), e trovata la precedente $F^1(y')$, i risultati

$$y',\ F(y'),\ F^2(y'),\ F^3(y'),\ \text{ec. } F^{n-1}(y')$$

altro non saranno che tutti gli n valori della y. Chiamato ora i uno dei divisori esatti di n, e supposto perciò $n = il$, essendo i, ed l numeri interi, facciasi $F^i = \pi$. Risultando da questa ipotesi $F^i(y') = \pi(y')$, $F^{2i}(y') = \pi^2(y')$, $F^{3i}(y') = \pi^3(y')$, ec. $F^{il}(y') = (y')$ $= \pi^l(y') = y'$; la funzione $\pi^1(y')$ somministrerà un numero l di valori della y.

II.

II. Supponghiamo $i = bcde \ldots$, ne verrà $l = a$; se si fosse supposto $i = acde \ldots$, oppure $= abde \ldots$, oppure ec., sarebbesi in corrispondenza ottenuto $l = b$, c, ec. Dunque corrispondentemente a ciascuno dei fattori dell'indice n è sempre determinabile una funzione della y', la quale ci somministri esattamente tanti valori tra loro diversi, quante unità si contengono nel fattore medesimo.

III. Vogliasi per esempio $y = \sqrt[30]{P}$. Essendo in quest'esempio $n = 30 = 2.3.5$, e però $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$; chiamata α una delle radici quinte, β una delle radici terze, e γ una delle seconde della unità diverse dall' unità medesima, le espressioni $\alpha^q y'$, $\beta^q y'$, $\gamma^q y'$ ci daranno la prima cinque, la seconda tre, e la terza due valori della y. Preso poi nella $\alpha^q y'$ per q un valore > 0, e < 5 per esempio il valore 3, nella $\beta^q y'$ preso un valore > 0, e < 2, per esempio il valore 1. e supposto il prodotto $\alpha^3\beta = \varepsilon$, la funzione $\varepsilon^q y'$ ci darà pel (n.° 20) $5.3 = 15$ valori tra lor disuguali della y. Preso finalmente nella $\gamma^q y'$ per q un valore > 0, e < 2, cioè 1, e nella $\varepsilon^q y'$ un valore > 0, e < 15, per esempio 10, e fatto $\varepsilon^{10}\gamma = \zeta$, la $\zeta^q(y')$ tutti somministrerà i 30 valori della $y = \sqrt[30]{P}$ (n.° prec.), tali essendo i seguenti, y', $\zeta y'$, $\zeta^2 y'$, $\zeta^3 y'$ ec. $\zeta^{29} y'$.

IV. Nell' esempio del (II. n.° 1) vogliasi $m = ab$, essendo a, b numeri primi (prec. n.°). Saranno evidentemente valori della y ivi determinata tanto gli a che provengono dalla espressione Cos. $\left(\frac{4q\pi}{a} + \frac{\mu}{ab}\right)$, come i b, che nascono dalla Cos. $\left(\frac{4q\pi}{b} + \frac{\mu}{ab}\right)$. Dato poi nella prima di queste espressioni alla q un valore > 0, e $< a$, che chiamerò i, e nella seconda dato alla q un valore > 0, e $< b$, che chiamerò l, formo la funzione Cos. $\left[\left(\frac{4i\pi}{a} + \frac{4l\pi}{b}\right) q + \frac{\mu}{ab}\right]$, e questa esibirà, col dare alla q i successivi valori 0, 1, 2, 3, ec. $ab - 1$ tutti gli ab valori della y (n.° 20, prec.). Per meglio ciò riconoscere riducasi tale espressione alla Cos. $\left[4q\pi\left(\frac{bi + al}{ab}\right)\right.$

+

$+ \frac{\mu}{ab} \Big]$. Ora il numeratore $bi + al$ io dico essere primo col denominatore ab: perchè se non fosse tale, non potrebbe avere con lui altro divisor comune, che la quantità a, o l'altra b, o tutto l'intero prodotto ab; ma a dividendo al, e non già bi, e b dividendo bi, e non già al, non ponno nè l' uno, nè l'altro esattamente dividere $bi + al$: dunque questo numeratore non potrebbe essere divisibile che per ab. Supposto pertanto $bi + al = abr$, riduco questa Equazione alla $bi = a\,(br - l)$; ma da essa io veggo, che bi dovrebbe contenere esattamente a. Dunque non potendo ciò essere, non potrà neppur essere ab divisore esatto di $bi + al$. In conseguenza di ciò tutti gli ab valori, che acquista la espressione Cos. $\left(\frac{4(bi+al)q\pi+\mu}{ab}\right)$, mentre si faccia $q = 0, 1, 2, 3$, ec. $ab - 1$ saranno disuguali fra loro. Dunque tutti pei (V, VI. n.° 10) uguagliando gli ab valori della Cos. $\left(\frac{4q\pi+\mu}{ab}\right)$ saranno appunto tutti gli $ab = n$ valori della y.

24. I. Chiamato $F^p(y')$ uno qualunque degli n valori della y (n.° 5), avremo $F^{pn}(y') = y'$. Scritta questa Equazione, come segue $(F^p)^n(y') = y'$, pongo $F^p = Z$, ne verrà $(Z)^n(y') = y'$. Ora qualunque dei risultati, che vengono espressi dalla F^p, si collochi in luogo della Z, la $(Z)^n(y') = y'$ si verifica sempre. Dunque chiamato *radice* di una Equazione tutto ciò, sia valore, o sia indice di operazione, che posto invece della incognita la fa verificare, gli esposti risultati saranno tante radici della Equazione in Z ora trovata.

II. Abbiasi $n = abcde \ldots$, e si supponga, che la funzione $\pi^q(y')$ somministri un numero a di valori della y diversi fra loro, che la $\psi^q(y')$ ne somministri un numero b, la $\rho^q(y')$ un numero c, e così di seguito, onde sia $\pi^a(y') = y'$, $\psi^b(y') = y'$, $\rho^c(y') = y'$, ec. Chiamati p', p'', p''', ec. degl' interi qualsivogliono, avendosi $\pi^{p'a}(y') = y'$, $\psi^{p''b}(y') = y'$, $\rho^{p'''c}(y') = y'$, ec., ritenuta la precedente maniera di scrivere, e supposto $\pi^{p'} = t$, $\psi^{p''} = u$, $\rho^{p'''} = v$,

ec.,

ec. , otterremo $(t)^a(y')=y'$, $(u)^b(y')=y'$, $(v)^c(y')=y'$, ec. Equazioni, la prima delle quali avrà per radici le π, π^2, π^3, ec. π^{a-1}, π^a, la seconda ψ, ψ^2, ψ^3, ec. ψ^{b-1}, ψ^b, la terza le ρ, ρ^2, ρ^3, ec. ρ^{c-1}, ρ^c, ec.

Se sia $y=\sqrt[30]{P}$, conservate le supposizioni fatte nel (III. n.° 23) rapporto al valore delle α , β , γ , pongo $\alpha^q=t$, $\beta^q=u$; $\gamma^q=v$, e chiamata Z una delle radici trentesime della unità, corrispondentemente alle precedenti si otterranno le Equazioni $Z^{30}y'=y'$, $t^5y'=y'$, $u^3y'=y'$, $v^2y'=y'$, la prima delle quali avrà per radici tutte le trentesime radici della unità , la seconda avrà per radici le $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5=1$, la terza le $\beta, \beta^2, \beta^3=1$, e l' ultima le $\gamma, \gamma^2=1$.

Che se si abbia $y'=\text{Cos.}\frac{\mu}{abc}$, e però $y=\text{Cos}\left(\frac{4q\pi+\mu}{abc}\right)$ (II. n.° 1), faccio $\frac{4q\pi}{abc}=Z$, e nelle quantità $\text{Cos.}\left(\frac{4q\pi}{a}+\frac{\mu}{abc}\right)$, $\text{Cos.}\left(\frac{4q\pi}{b}+\frac{\mu}{abc}\right)$, $\text{Cos.}\left(\frac{4q\pi}{c}+\frac{\mu}{abc}\right)$ (IV. n.° 23) faccio $\frac{4q\pi}{a}=t$, $\frac{4q\pi}{b}=u$, $\frac{4q\pi}{c}=v$, e le espressioni precedenti $(Z)^n$, $(t)^a$, $(u)^b$, $(v)^c$ equivalendo nel caso presente alle $abcZ$, at, bu, cv, ec. verranno le Equazioni $\text{Cos.}\left(abcZ+\frac{\mu}{abc}\right)=y'$, $\text{Cos.}\left(at+\frac{\mu}{abc}\right)=y'$, $\text{Cos.}\left(bu+\frac{\mu}{abc}\right)=y'$, $\text{Cos.}\left(cv+\frac{\mu}{abc}\right)=y'$, la prima delle quali ha per radici gli abc risultati $\frac{4\pi}{abc}$, $\frac{8\pi}{abc}$, $\frac{12\pi}{abc}$, ec. $\frac{4abc\pi}{abc}=4\pi$, la seconda i risultati $\frac{4\pi}{a}$, $\frac{8\pi}{a}$, $\frac{12\pi}{a}$, ec. $\frac{4(a-1)\pi}{a}$, $\frac{4a\pi}{a}=4\pi$, la terza gli altri $\frac{4\pi}{b}$, $\frac{8\pi}{b}$, $\frac{12\pi}{b}$, ec. $\frac{4(b-1)\pi}{b}$, $\frac{4b\pi}{b}=4\pi$, e così la quarta i $\frac{4\pi}{c}$, $\frac{8\pi}{c}$, $\frac{12\pi}{c}$, ec. $\frac{4(c-1)\pi}{c}$, $\frac{4c\pi}{c}=4\pi$.

III. Per quanto si è osservato nel (VII. n.° 10) l' Equazione ne $(Z)^n(y') = y'$ deve verificarsi qualunque sia il valore della y. Posto adunque in vece di questa y' la quantità $P = \Pi(y')$ (n.° 3), avremo $(Z)^n(\Pi(y')) = P$; ma abbiamo ancora $\Pi(Z(y')) = P$. Dunque risultando $\Pi(Z(y')) = (Z)^n(\Pi(y'))$, ne viene che l' eseguire l' operazione indicata dalla Π sulla $Z(y')$ equivale all' eseguire l'operazione medesima sulla y', ed al ripetere insieme le volte n la funzione rappresentata dalla Z. Nel secondo dei precedenti esempj, avendosi $\Pi(y') = \text{Cos}.\,\mu = P$ (II. n.° 1), preso uno qualunque dei valori della $Z = \frac{4q\pi}{abc}$, per esempio il valore $\frac{8\pi}{abc}$, e ripetuta la somma di questo le volte abc avremo $\Pi\left(\text{Cos}.\left(\frac{8\pi+\mu}{abc}\right)\right) = \text{Cos}.\left(\frac{8abc\pi}{abc}+\mu\right)$ $= \text{Cos}.\,(8\pi+\mu) = \text{Cos}.\,\mu = P$.

IV. Pongasi invece della y' la unità; le Equazioni de' (prec. I, II.) diverranno $(Z)^n(1) = 1$, $(t)^a(1) = 1$, $(u)^b(1) = 1$, $(v)^c(1) = 1$, ec., e nel primo degli esempj apposti avremo $Z^{30} = 1$, $t^5 = 1$, $u^3 = 1$, $v^2 = 1$, e nell' esempio secondo risultando $\mu = 0$; ne verrà $\text{Cos}.\,abcZ = 1$, $\text{Cos}.\,at = 1$, $\text{Cos}.\,bu = 1$, $\text{Cos}.\,cv = 1$. Quindi apparisce, come quelle proprietà, le quali dai Matematici si dimostrano appartenenti alle radici della unità non sono già particolari di queste radici, ma appartengono, generalmente parlando, a tutti i risultati molteplici, che, come si è detto nel (n.° 1), produconsi in conseguenza di una sola qualunque siasi operazione di calcolo algebraica, o trascendentale, e però non riguardano le indicate radici, se non come uno dei molti casi, ne' quali esse si verificano. Ho detto generalmente parlando, perchè mentre l' operazione Ψ produce un numero infinito di valori tra loro diversi, come nell' esempio (III. n.° 1), allora non possono evidentemente aver luogo quelle proprietà, le quali esigono, che l' indicato numero sia finito.

V. Dalle stesse $(Z)^n(1)=1$, $(t)^a(1) = 1$, $(u)^b(1)=1$, $(v)^c(1)=1$, ec. si vede ancora che determinato il valore $y' = \Psi'(P)$ gli altri valori tutti della $y = \Psi(P)$ possonsi dedurre dalla soluzione della $(Z)^n(1) = 1$, perchè conoscendosi da questa tutti i risultati, che so-

sono espressi dalla $Z = F^{p}$ (prec. I) , avremo quindi tutti i valori della $F^{p}(y')$. Per tal modo negli esempj del (n.° 1) possonsi dipendentemente dalla unità determinare attualmente i valori della y'. Imperciocchè nel (I. n.° 1) avendosi $P = 1^{q} \times P$ sarà $y = \Psi(P) = \sqrt[5]{(1^{q} \times P)} = \sqrt[5]{1^{q}} \times \sqrt[5]{P} = \left(\sqrt[5]{1}\right)^{q} \times \sqrt[5]{P} = \alpha^{q}\sqrt[5]{P}$, essendo α una delle radici 5^{e} immaginarie dell' unità. Nel (II. n.° 1) poichè si à $\text{Cos.}\,\mu = 1^{q} \times \text{Cos.}\,\mu$, e $\frac{\text{Cos.}\,4q\pi}{r} = 1$, $\frac{\text{Sen.}\,4q\pi}{r} = 0$, ne verrà $\text{Cos.}\,\mu = \frac{\text{Cos.}\,4q\pi\,\text{Cos.}\,\mu \mp \text{Sen.}\,4q\pi\,\text{Sen.}\,\mu}{r} = \text{Cos.}(4q\pi \pm \mu)$. Finalmente nel (III. n.° 1) essendo $P = 1^{q} \times P$, e $\log.\,1^{q} = 4q\pi\sqrt{-1}$, sarà $\Psi(P) = \log.\,P + 4q\pi\sqrt{-1}$. Mentre poi gl' indici a, b, c, ec. siano disuguali fra loro, e primi; pel (n.° 20) potremo ottenere $a + b + c +$ ec. valori della Z dipendentemente dalla soluzione della $(t)^{a}(1) = 1$, $(u)^{b}(1) = 1$, $(v)^{c}(1) = 1$, ec., e tutti in seguito gli n valori, combinando, come nel (n.° 22) gli a valori della t con i b della v, gli ab così risultati con i c della v , e così di seguito : lo stesso si dice se invece della unità esista nelle precedenti Equazioni la y' .

25. *Teor.* 10.° Oltre la solita supposizione di $f^{h'}(y') = y'$, conservata anche l'altra di $\phi^{g}(y') = y'$ (I, II. n.° 14.) , se sia $g = h$, io dico, che gli h valori, che provengono dalla $f^{r}(y')$, uguagliansi agli h, che nascono dalla $\phi^{r}(y')$.

I. Presa l' espression generale del (XII. n.° 10.) $f^{h'}(y') = y'$, sia primieramente h' numero intero, e però $h' = rh$, essendo r un numero intero . Dall' Equazione $f^{\alpha}(y') = \phi^{\beta}(y')$ del (n.° 16) ricavatasi l' altra $\phi(y') = f^{\frac{ph' + \alpha}{\beta}}(y')$, poichè per la ipotesi abbiamo $\phi^{g}(y') = \phi^{h}(y') = y' = f^{0}(y')$, colloco invece della α , β , h' i valori rispettivi 0, h, rh, e ne verrà $\phi(y') = f^{pr}(y')$, e per conseguenza $\phi(y') = f^{pr}(y')$, $\phi^{2}(y') = f^{2pr}(y')$, $\phi^{3}(y') = f^{3pr}(y')$, ec. $\phi^{h-1}(y') = f^{(h-1)pr}(y')$, $\phi^{h}(y') = f^{hpr}(y') = y'$.

Ora a cagione di $g = h$ i primi membri di queste Equazioni sono tutti disuguali fra loro, tali dunque dovranno essere fra loro anche i secondi; ma questi secondi membri essendo di numero h non ponno essere che gli h valori diversi, che nascono dalla $f^{q}(y')$ (V, VI. n.° 10). Dunque in questo primo caso sarà vero, che ec.

II. Vogliasi il numero h' (XII. n.° 10) uguale ad un rotto, e sia perciò $h' = \frac{s}{t}$, in cui s, t siano due numeri interi primi fra loro. Pel citato (XII. n.° 10) avendosi ancora $f^{th'}(y') = y'$, sarà $f^{s}(y') = y'$: ma essendo s numero intero, non può risultare $f^{s}(y')=y'$, quando non sia s uguale, o multiplo di h: posto adunque $s = rh$, sarà $h' = \frac{rh}{t}$, e però $f^{h'}(y') = y'$, diverrà $f^{\frac{rh}{t}}(y')=y'$. Abbiasi ora, come nel (prec. I) $g = h, \alpha = 0, \beta = h$, la $\varphi(y') = f^{\frac{ph'+\alpha}{\beta}}(y')$ del (n.° 16) si cangerà perciò nella $\varphi(y') = f^{\frac{pr}{t}}(y')$, e quindi avendosi $\varphi^{t}(y')=f^{pr}(y')$, sarà $\varphi^{t}(y')=f^{pr}(y')$, $\varphi^{2t}(y') = f^{2pr}(y')$, $\varphi^{3t}(y') = f^{3pr}(y')$, ec. $\varphi^{(h-1)t}(y') = f^{(h-1)pr}(y')$, $\varphi^{ht}(y') = f^{hpr}(y') = y'$.

Essendo il numero t primo con s, è necessariamente primo anche con h. Dunque a cagione di $\varphi^{h}(y') = y'$, tutti i termini $\varphi^{t}(y')$, $\varphi^{2t}(y')$, $\varphi^{3t}(y')$, ec. $\varphi^{(h-1)t}(y')$ saranno diversi da $y' = \varphi^{h}(y')$, e però essendo diversi fra loro, potrò proseguire sopra i membri delle Equazioni ottenute il discorso medesimo, che si è fatto sul fine del (prec. I), e giungendosi quindi ad una medesima conseguenza, ne viene, che ancora in questo secondo caso ec.

III. Che se si voglia h' di valore non razionale. Qualunque esso siasi, avendo un valore determinato, potrà sempre trovarsi una serie di termini razionali, che dirò A, B, C, ec., i quali abbiano la supposta quantità h' come limite. Ora essendo ciascuno di questi termini A, B, C, ec. intero, o fratto, pei (prec. I, II) rifletto, che, se invece di $f^{h'}(y') = y'$, si avesse $f^{A}(y') = y'$. oppupure $f^{B}(y')=y'$, oppure $f^{C}(y')=y'$, oppure ec.; sempre nella ipotesi di $h=g$, i valori provenienti dalla $\varphi^{q}(y')$ risulterebbero uguali a quelli, che nascono dalla $f^{q}(y')$: ma se in una serie A, B, C, ec. una proprietà è comune a ciascuno de' suoi termini, la stessa proprietà deve appartenere ancora al loro limite. Dunque essendo per la ipotesi h' limite dei termini A,B,C, ec., ed essendo attualmente $f^{h'}(y')=y'$, ne viene che anche mentre si voglia h' non razionale, vera sarà la esposta proposizione. Dunque ec.

26. I. Suppongasi nelle $f^{h}(y')=y'$, $\varphi^{g}(y')=y'$ (I, II. n.° 14) $h=se$, $g=sk$, essendo $e, k, s>1$, e facciamo $f^{e}=\pi'$, $\varphi^{k}=\pi''$; le $f^{h}(y')=y'$, $\varphi^{g}(y')=y'$ perciò divenendo $\pi'^{s}(y')=y'$, $\pi''^{s}(y')=y'$ (I. n.° 23), i valori $\pi'(y')$, $\pi'^{2}(y')$. $\pi'^{3}(y')$, ec. $\pi'^{s}(y)$ dipendenti dalla $\pi'^{q}(y')$ saranno pel (n.° 25) uguali ai valori $\pi''(y')$, $\pi''^{2}(y')$, $\pi''^{3}(y')$ ec., $\pi''^{s}(y')$ provenienti dalla $\pi''^{q}(y')$; onde supposto $\pi'(y')=\pi''^{p}(y')$, in cui p sia un intero >0, $<s$, poichè risulta $f^{e}(y')=\varphi^{pk}(y')$, ne viene, che ogniqualvolta i numeri g, h siano fra loro composti, e non sia l' uno multiplo dell' altro, sopra i risultati della tavola (X) si verificherà sempre quanto è stato dimostrato nei (V, VI, VIII, IX. n.° 15) in conseguenza della ipotesi di $f^{e}(y')=\varphi^{k}(y')$.

II. Se sia il precedente numero $s=a$, tanto i valori dipendenti dalla $\pi'^{q}(y')$, come i dipendenti dalla $\pi''^{q}(y')$ si uguaglieranno a quelli, che provengono dalla $\pi^{q}(y')$ (II. n.° 24).

III. Pongasi $k=1$, onde $g=s$, e $\varphi=\pi''$. In questa ipotesi risultando $f^{e}(y')=\varphi^{p}(y')$ (prec. I.), ne segue, che gli $s=g$ valori che nascono dalla $\varphi^{q}(y')$ uguagliansi ai valori $f^{e}(y')$, $f^{2e}(y')$, $f^{3e}(y')$, ec. $f^{se}(y')$; e per conseguenza ogni volta che nelle $f^{h}(y')=y'$, $\varphi^{g}(y')=y'$ uno degl' indici, per esempio l' indice g sia summultiplo, od uguale all' altro h, i valori provenienti dalla $\varphi^{q}(y')$ sono tutti compresi tra i valori, che dipendono dalla $f^{q}(y')$.

27. *Teor.* 11.° Ritenuti i numeri interi a, b, c, d, e, ec. (n.° 22) maggiori dell' unità, primi, e disuguali fra loro, ec.

(n.° 22)

chiamati α, β, γ, δ, ε, ec. degl' interi quali sivogliono positivi, io dico, che anche, allorquando abbiasi $n = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} e^{\varepsilon} \dots$, dovrà esistere, come nel (n.° 22) una funzione $F(y')$ tale, che i successivi risultati $F(y'), F^2(y')$, $F^3(y')$, ec. $F^{n-1}(y'), F^n(y') = y'$ altro non siano, che tutti gli n valori tra loro diversi della y.

Prendasi il valore $y'' = f(y')$ (n.° 6), e si voglia il numero h dei valori $f^r(y')$ diverso da n, poichè se gli fosse uguale, avrebbesi tosto $f(y') = F(y')$, e il teorema sarebbe già dimostrato. Posto pertanto $h < n$, ed $= a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} d^{\delta'} e^{\varepsilon'} \dots$, prendasi il valore $y^{(h+1)} = \varphi(y')$ (I. n.° 14) diverso da tutti i precedenti $f^r(y')$, e sia g (II. n.° 14) $< n$, ed $= a^{\alpha''} b^{\beta''} c^{\gamma''} d^{\delta''} e^{\varepsilon''} \dots$, avendosi ciascuno degli esponenti α', β', γ', δ', ε', ed α'', β'', γ'', δ'', ε'', ec. non < 0, ed intero; pel (III. n.° 26) non potrà essere questo g nè uguale, nè summultiplo di h: potendo però essere con lui composto, e potendo quindi gli esponenti α', β', γ', δ', ε', ec. essere uguali in parte, in parte maggiori, e minori de' corrispondenti α'', β'', γ'', δ'', ε'', ec. suppongo per esempio $\alpha' = \alpha''$, $\beta' < \beta''$, $\gamma' < \gamma''$, $\delta'' < \delta'$, $\varepsilon'' < \varepsilon'$, ec., presi tanto in h, come in g i fattori, che hanno gli esponenti più piccoli, e presi rapporto ad uno solo degl' indici, per esempio rapporto al solo g i fattori, che hanno gli esponenti uguali, pongo $f^{b^{\beta'} c^{\gamma'} \dots} = \pi$, $\varphi^{a^{\alpha''} d^{\delta''} e^{\varepsilon''} \dots} = \psi$. Avendosi quindi $f^{a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} d^{\delta'} e^{\varepsilon'}}(y') = \pi^{a^{\alpha'} d^{\delta'} e^{\varepsilon'} \dots}(y')$, $\varphi^{a^{\alpha''} b^{\beta''} c^{\gamma''} d^{\delta''} e^{\varepsilon''} \dots}(y') = \psi^{b^{\beta''} c^{\gamma''}}(y')$, le due funzioni $\pi^q(y')$, $\psi^q(y')$ somministreranno un numero, la prima $a^{\alpha'} d^{\delta'} e^{\varepsilon'} \dots$, e la seconda $b^{\beta''} c^{\gamma''} \dots$ di valori della y fra loro diversi, e saranno questi due numeri primi fra loro. Ciò dunque essendo faccio $\pi\psi = \rho$, e la $\rho^q(y')$ ci somministrerà pel (n.° 20) un numero $a^{\alpha'} b^{\beta''} c^{\gamma''} d^{\delta'} e^{\varepsilon'} \dots$, che dirò i, di valori tra lor differenti della y; ed a cagione di $\alpha' = \alpha''$, $\beta'' > \beta'$, $\gamma'' > \gamma'$, $\delta' > \delta''$, $\varepsilon' > \varepsilon''$, sarà questo i maggiore tanto di h, come di g. Ora o vuolsi $i = n$, oppure $i < n$: se $i = n$, sarà $\rho(y') = F(y')$, e rimarrà così dimostrata la proposizione: che se $i < n$, preso un altro valo-

re

re della y, che dirò $y^{(i+1)} = \sigma(y')$, diverso da tutti i $\rho^{q}(y')$, proseguo il precedente discorso, e troverò così una nuova funzione, che denominerò $\rho^{\prime q}(y')$, la quale somministrerà un numero, che dirò l, $> i$ di valori della y tra lor disuguali. Se questo l si trova $= n$, avremo $\rho'(y') = F(y')$; che se $l < n$, seguitando innanzi, e ripetendo, quanto occorre, lo stesso precedente raziocinio, poichè gl' indici i, l, ec. vanno necessariamente crescendo sempre di valore, vedesi, che sempre dovremo infine giungere ad una funzione della y', cioè alla $F^{q}(y')$, la quale, al supporsi $q = 0, 1, 2, 3$, ec. $n - 1$, tutti successivamente ci somministri i valori della y. Dunque ec.

28. I. Poichè in tutti i discorsi fatti finora la y' ha sempre rappresentato uno qualunque dei valori della y; ne segue, che qualunque siasi quello fra tali valori, che venga proposto, e qualunque l' intero n esprimente il numero de' valori medesimi (n.° 5), potremo sempre pei (n. 11, 20, 22, 27) determinare una funzione F tale, che y', $F(y')$, $F^{2}(y')$, $F^{3}(y')$, ec. $F^{n-1}(y')$ tutti esprimano gli n valori della y, e ciò qualunque siasi l'operazione indicata dalla Ψ (n.° 1).

II. Formata col risultato $y = \Psi(P)$ (n.° 1), ed una nuova quantità Q una funzione razionale qualunque, che dirò $f(y, Q)$, e porrò $= P'$, si pratichi su questa quantità P' un'altra qualsivoglia operazione di calcolo, che indicherò con $\Psi 1$, e sia $\Psi 1(P) = u$. Supposto che n' esprima il numero dei valori diversi, che dipendentemente dalla operazione $\Psi 1$ può ricevere la u, e che u' sia uno di questi valori, qualunque, pel dimostrato precedentemente, sarà sempre determinabile una funzione, che dirò F' tale che la serie u', $F'(u')$, $F'^{2}(u')$, $F'^{3}(u')$, ec. $F'^{(n-1)}(u')$ tutti contenga gli n' valori della $\Psi 1(P')$. In seguito se con una quantità nuova R, e le precedenti y, u si formi un'altra funzione razionale $f'(y, u, R)$, e chiamata questa P'', eseguiscasi su di essa una terza operazione $\Psi 2$ capace di dare n'' risultati tra loro diversi; posto $\Psi 2(P'') = z$, uno qualunque dei risultati della z chiamato z', qui pure mediante una opportuna funzione F'' sarà determinabile sempre la serie

z',

z', $F''(z')$, $F''^2(z')$, $F''^3(z')$, ec. $F''^{n''-1}(z')$, in cui tutti si contengono i valori della $\Psi 2(P'')$. Potendosi così proseguire quanto si vuole, vedesi, che quando su di una data quantità P (n.° 5.) si faccia una sola operazione Ψ, tutti gli n valori, che ne dipendono, possonsi ottenere dipendentemente da una sola funzione F, e da una sola espressione $F^q(y') = F^q(\Psi'(P))$. Allorchè debbonsi eseguire due operazioni successive Ψ, $\Psi 1$, la prima sopra P, la seconda sopra $P' = f(y,Q)$ basteranno due funzioni F, F' ad ottenere tutti i risultati, che ne dipendono; ed essendo questi di numero nn', verranno tutti compresi nella espressione
$F'^{q'}(u) = F'^{q'}[\Psi'1(f(Q, F^q(\Psi(P))))]$. In egual modo saranno sufficienti tre funzioni F, F', F'', onde avere tutti i valori, che nascono da tre successive operazioni Ψ, $\Psi 1$, $\Psi 2$ praticate la prima sopra P, la seconda sopra $f(y,Q)$, e la terza sopra $f'(y,u,R)$, ed essi di numero $nn'n''$ saranno somministrati tutti dalla
$F''^{q''}(z') = F''^{q''}[\Psi'2(f'(R, F^q(\Psi'(P)), F'^{q'}(\Psi'1(f(Q, F^q(\Psi'(P)))))))]$.
Così in progresso.

III. Allorchè n è numero primo, volendosi esprimere i valori della $\Psi(P)$ col mezzo di una funzione della y'; essi saranno tutti necessariamente compresi nella sola $F^q(y')$ (n.° 11.), e questa sarà sempre una funzione necessariamente semplice (n.° 2). Che se n è numero composto, potranno bensì ottenersi tutti gl' indicati valori della $\Psi(P)$ dipendentemente da una sola funzione $F^q(y')$ (prec. I), ma potranno anche ottenersi in tutto, o in parte col mezzo di funzioni diverse (I, II. n.° 23). Se sia $n = abcde\ldots$, essendo questi fattori, come nel (n.° 26), dal (n.° 19, IV. n.° 24) è facile a vedersi, che tutti si potranno avere gli n valori col mezzo di tante funzioni tra loro diverse, e che queste funzioni saranno semplici in parte, e in parte composte (n.° 2). Che se sia $a = b = c = d = e$ ec., onde $n = a^\alpha$, esprimendosi dalla α il numero delle volte che vien ripetuta la a; allora dai (n. 25, 26) può agevolmente vedersi, che col mezzo di funzioni diverse composte fra di loro, come si voglia, potremo bensì ottenere alcuni dei valori della $\Psi(P)$; ma tutti non si potranno avere, che dalla $F^q(y')$.

$F'(y')$. Allorchè dunque n è numero composto le funzioni della y', che somministrano i valori della $\Psi(P)$ potranno essere, e semplici, e composte (II. n.° 2). Nella ipotesi finalmente di operazioni replicate (prec. II), si dirà su ciascuna delle funzioni corrispondenti quanto abbiam detto finora su quella, o quelle funzioni della y' che somministrano i valori della $\Psi(P)$; e tali funzioni saranno il più delle volte necessariamente composte (II. n.° 2).

DEL-