NUOVI TEOREMI

SULLA POSSIBILITA' DELL' EQUAZIONE $x^2 - Ay^2 = \pm 1$, E RICERCA DEL NUMERO DE' TERMINI DEL PERIODO DELLA RADICE QUADRA DI UN NUMERO NON QUADRATO, SVILUPPATA IN FRAZIONE CONTINUA

MEMORIA

Del Sig. Francesco Pezzi

Ricevuta il dì 7 Agosto 1806.

La risoluzione dell'equazione $x^2 - Ay^2 = \pm 1$, A non essendo un numero quadrato, dipende come è noto, dallo sviluppo di $\sqrt{A}$ in Frazione continua. *Eulero* e la *Grange* si sono più volte occupati di questa materia, e *le Gendre* l'ha trattata con molta sagacità nell' eccellente sua opera, intitolata *Essai sur la théorie des nombres*. In virtù de' lavori di questi grandi Geometri, m'è sembrato che questa dottrina potesse ancora essere portata ad un maggiore grado di perfezione; ho trovato delle formole generali e semplici, da cui per via di soli artifizj analitici, ho dedotte tutte le proprietà di tale sviluppo. *Le Gendre* assegna la legge per cui essendo dato un quoto completo qualunque, viene ad essere determinato il quoto completo seguente; io ho ottenuta l'espressione generale di simile quoto sotto la forma la più semplice ed indipendentemente da quoti antecedenti, ed una formola che fornisce tutti i termini della frazione continua e periodica, senza che altri sia obbligato di eseguire successivamente lo sviluppo della radice dimandata. Un problema poi difficile in questa parte interessante dell'Algebra, e che a mia cognizione non è mai stato proposto da alcuno Geometra, è quello in cui si cercasse generalmente il numero de' termini del periodo simmetrico, che ripetuto all'infinito, rappresenta la mentovata radice:

ce : ne ho affrontata la soluzione con determinare primieramente la forma pari o dispari di questo numero in tutti i casi , meno tre che sin ora mi sono rimasti dubbj , ed ho dato in secondo luogo una regola , la quale col soccorso di quattro teoremi , da me dimostrati intorno alla possibilità della mentovata equazione , fa trovare questo numero , senz' essere costretto di calcolare più quoti , di quelli che si avrebbero a calcolare , se ne fosse noto il valore preventivamente .

I. Premetterò brevemente alcune formole relative allo sviluppo di una quantità x , razionale o irrazionale , in frazione continua : si ha

$$x=a+\frac{1}{x1}=a+\frac{1}{a1+\frac{1}{x2}}=a+\frac{1}{a1+\frac{1}{a2+\frac{1}{x3}}}=\text{ec.} \qquad (1)$$

$x1$, $x2$, $x3$, ec. sono i quoti completi della frazione continua , e a , $a1$, $a2$, $a3$, ec. ne sono i termini , ossia semplicemente i quoti , e sono i più grandi intieri contenuti rispettivamente in x, $x1$, $x2$, $x3$, ec.

$$x(n)=a(n)+\frac{1}{x(n+1)} \qquad (2)$$

Si faccia

$$\left.\begin{aligned}
\frac{M0}{N0}&=\frac{1}{0}\\
\frac{M1}{N1}&=\frac{a}{1}\\
\frac{M2}{N2}&=a+\frac{1}{a1}\\
&\vdots\\
\frac{M(n+1)}{N(n+1)}&=a+\frac{1}{a1+\frac{1}{a2+\vdots+\frac{1}{a(n)}}}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Si ha

$$\begin{aligned}M(n+1)&=a(n)M(n)+M(n-1)\\ N(n+1)&=a(n)\,N(n)+N(n-1)\end{aligned} \qquad (4)$$

Ponendo nell' espressione della frazione convergente $\frac{M(n+1)}{N(n+1)}$ in-

invece di n il quoto completo $x(n)$, si avrà il valore esatto di x, cioè

$$x = \frac{x(n)M(n) + M(n-1)}{x(n)N(n) + N(n-1)} \qquad (5)$$

D' onde

$$x(n) = \frac{M(n-1) - xN(n-1)}{xN(n) - M(n)} \qquad (6)$$

$$x - \frac{M(n)}{N(n)} = \frac{-(-1)^n}{N(n)(N(n)x(n) + N(n-1))} \qquad (7)$$

Essendo

$$M(n)N(n-1) - N(n)M(n-1) = (-1)^n \qquad (8)$$

II. Ciò posto, si debba ora convertire $\sqrt{A}$ in frazione continua; sia a^2 il più grande quadrato contenuto in A; si farà

$$x = \sqrt{A} = a + \frac{\sqrt{A} - a}{1}$$

$$x1 = \frac{1}{\sqrt{A} - a} = \frac{\sqrt{A} + a}{A - a^2} = a1 + \frac{\sqrt{A} + a - a1(A - a^2)}{A - a^2}$$

$$x2 = \frac{A - a^2}{\sqrt{A} + a - a1(A - a^2)} = \frac{\sqrt{A} - a + a1(A - a^2)}{1 + 2a\,a1 - a1^2(A - a^2)} = a2 + \text{ec.}$$

Ma continuando questo calcolo, non si verrebbe in cognizione, che molto difficilmente della legge generale, che regna ne'quoti completi $x1$, $x2$, ec. per il gran numero de' termini, cui presto si arriva, i quali compongono il numeratore ed il denominatore delle Frazioni eguali a tali quoti; perciò mi valgo dell' espressione (6) del quoto qualunque $x(n)$; si avrà dunque in questo caso

$$x(n) = \frac{M(n-1) - N(n-1)\sqrt{A}}{N(n)\sqrt{A} - M(n)} = \frac{\sqrt{A} + (-1)^n(AN(n-1)N(n) - M(n-1)M(n))}{(-1)^n(M(n)^2 - AN(n)^2)} \qquad (9)$$

$M(n)$ e $N(n)$ sono dati immediatamente in a, $a1$, $a2$, ... $a(n-1)$. Vedi M. della Soc. It. Tom. XI pag. 410.

III. Sia per abbreviare

$$b(n) = (-1)^n[AN(n)N(n-1) - M(n)M(n-1)] \qquad (10)$$

$$c(n) = (-1)^n[M(n)^2 - AN(n)^2] \qquad (11)$$

Egli è evidente che $b(n)$ e $c(n)$ sono necessariamente numeri intieri, poichè son Funzioni intiere di $M(n)$, $N(n)$, $M(n-1)$, $N(n-1)$ che sono tali

Si

Si avrà

$$x(n)=\frac{\sqrt{A}+b(n)}{c(n)} \qquad (12)$$

D' onde

$$x(n+1)=\frac{\sqrt{A}+b(n+1)}{c(n+1)} \qquad (13)$$

Sostituito questo valore nella formola (2), si avrà

$$x(n)=a(n)+\frac{c(n+1)}{\sqrt{A}+b(n+1)} \qquad (14)$$

Ma in seguito del calcolo del N° II, si avrebbe

$$x(n)=\frac{\sqrt{A}+b(n)}{c(n)}=a(n)+\frac{\sqrt{A}+b(n)-a(n)c(n)}{c(n)} \qquad (15)$$

Dunque

$$\frac{c(n+1)}{\sqrt{A}+b(n+1)}=\frac{\sqrt{A}+b(n)-a(n)c(n)}{c(n)} \qquad (16)$$

Riducendo allo stesso denominatore, ed eguagliando le quantità razionali alle razionali, e le irrazionali alle irrazionali, si ha

$$c(n)c(n+1)=A+b(n+1)[b(n)-a(n)c(n)]$$
$$b(n+1)=a(n)c(n)-b(n) \qquad (17)$$

D' onde segue, che

$$c(n)c(n+1)=A-b(n+1)^2$$

ovvero

$$c(n-1)c(n)=A-b(n)^2 \qquad (18)$$

Fatta la stessa sostituzione nell' equazione (15) si ha

$$x(n)=a(n)+\frac{\sqrt{A}-b(n+1)}{c(n)} \qquad (19)$$

Dunque

$$x(n+1)=\frac{c(n)}{\sqrt{A}-b(n+1)},$$

ovvero ponendovi $n-1$ invece di n

$$x(n)=\frac{c(n-1)}{\sqrt{A}-b(n)} \qquad (20)$$

Quindi raccogliendo le diverse espressioni (12), (19) e (20) di $x(n)$, si ha finalmente

$$x(n)=\frac{\sqrt{A}+b(n)}{c(n)}=a(n)+\frac{\sqrt{A}-b(n+1)}{c(n)}=\frac{c(n-1)}{\sqrt{A}-b(n)} \qquad (21)$$

IV. I numeri $b(n)$ e $c(n)$ sono sempre positivi: in fatti $b(n)$

lo sarà, se nell' equazione (10), n essendo pari, si avrà $AN(n-1)N(n)>M(n-1)M(n)$, ovvero $A>\frac{M(n-1)}{N(n-1)}\cdot\frac{M(n)}{N(n)}$; invece se n è dispari, dovrà essere $\frac{M(n-1)}{N(n-1)}\cdot\frac{M(n)}{N(n)}>A$.

In fatti pongasi per abbreviare P per $N(n)[N(n)x(n)+N(n-1)]$ nell' equazione (7), si avrà $x-\frac{M(n)}{N(n)}=-\frac{(-1)^n}{P}$, ovvero $\frac{M(n)}{N(n)}=\sqrt{A}+\frac{(-1)^n}{P}$, d' onde $\frac{M(n-1)}{N(n-1)}=\sqrt{A}-\frac{(-1)^n}{Q}$, Q essendo ciò che diventa P, n cangiandosi in $n-1$; e si ha $P>Q$, cioè $N(n)^2x(n)+N(n)N(n-1)>N(n-1)^2x(n-1)+N(n-1)N(n-2)$; si sostituisca a $x(n-1)$ il suo valore $a(n-1)+\frac{1}{x(n)}$, dico che $N(n)^2x(n)+N(n)N(n-1)>(a(n-1)N(n-1)+N(n-2))N(n-1)+\frac{N(n-1)^2}{x(n)}$, ovvero per la 2ª delle equazioni (4) $N(n)^2x(n)+N(n)N(n-1)>N(n)N(n-1)+\frac{N(n-1)^2}{x(n)}$, cioè $N(n)x(n)>N(n-1)$; ciò ch' è evidente: dunque $P>Q$.

Ora $\frac{M(n)}{N(n)}\cdot\frac{M(n-1)}{N(n-1)}=A+(-1)^n\sqrt{A}\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{Q}\right)-\frac{1}{PQ}$

Sia in primo luogo n pari; egli è evidente che $\frac{\sqrt{A}}{Q}+\frac{1}{PQ}>\frac{\sqrt{A}}{P}$; dunque in questo caso $A>\frac{M(n)}{N(n)}\cdot\frac{M(n-1)}{N(n-1)}$. Sia n dispari; si avrà $\frac{\sqrt{A}}{P}+\frac{1}{PQ}<\frac{\sqrt{A}}{Q}$, ovvero $1<(P-Q)\sqrt{A}$, ciò ch' è chiaro, e che si potrebbe anche dimostrare molto facilmente, ma ne sopprimo il calcolo per brevità; dunque $A<\frac{M(n)}{N(n)}\cdot\frac{M(n-1)}{N(n-1)}$. $c(n)$ sarà similmente un numero sempre positivo, perchè si avrà nell' equazione (11) $M(n)^2>$ ovvero $<AN(n)^2$, cioè $\frac{M(n)}{N(n)}>$ ovvero $<\sqrt{A}$, secondo che n sarà pari ovvero dispari, conformemente alla dottrina delle Frazioni continue.

V. Le equazioni (17) e (18) ci faranno conoscere i valori, che $b(n)$ e $c(n)$ non potranno eccedere; dalla seconda si ha $b(n)$

<

$<\sqrt{A}$, e quindi la prima $a(n)c(n) = b(n) + b(n+1)$ ci dimostra, che tanto $a(n)$, quanto $c(n)$, non potranno mai eccedere in particolare $2a$.

VI. Ora poichè $b(n)$ e $c(n)$ hanno de' valori determinati, che non possono mai sorpassare, e che la Frazione continua, rappresentando una quantità irrazionale, deve andare all' infinito, egli è chiaro che lo stesso valore di $b(n)$ s' incontrerà un' infinità di volte, collo stesso valore di $c(n)$; allora i quoti o termini seguenti della Frazione continua, devon essere gli stessi, e nello stesso ordine disposti, che quelli già trovati; dunque la Frazione continua, ch' esprime $\sqrt{A}$, sarà composta, almeno dopo alcuni termini, di un periodo costante il quale si ripeterà all' infinito.

VII. Per trovare il primo termine del periodo, suppongo per esempio, che tale primo termine segua immediatamente il termine $a(n)$, e quindi ch' Egli sia $a(n+1)$, e l' ultimo per es. $a(n+m)$, dopo il quale, il primo $a(n+1)$ ritornerà. Rappresento, come segue, la serie de' termini della Frazione continua, delle frazioni convergenti e de' quoti completi

Quoti	$a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a(n);\ a(n+1),\ a(n+2),\ \ldots\ a(n+m);\ a(n+m+1);$ ec.
Frazioni convergenti	$\frac{M_0}{N_0},\ \frac{M_1}{N_1},\ \frac{M_2}{N_2},\ \ldots\ \frac{M(n)}{N(n)};\ \frac{M(n+1)}{N(n+1)},\ \frac{M(n+2)}{N(n+2)},\ \ldots\ \frac{M(n+m)}{N(n+m)};\ \frac{M(n+m+1)}{N(n+m+1)}$ ec.
Quoti completi	$\frac{\sqrt{A}}{1},\ \frac{\sqrt{A}+b_1}{c_1},\ \frac{\sqrt{A}+b_2}{c_2},\ \ldots\ \frac{\sqrt{A}+b(n)}{c(n)};\ \frac{\sqrt{A}+b(n+1)}{c(n+1)},\ \frac{\sqrt{A}+b(n+2)}{c(n+2)},\ \ldots\ \frac{\sqrt{A}+b(n+m)}{c(n+m)};\ \frac{\sqrt{A}+b(n+m+1)}{c(n+m+1)}$ ec.

Si avrà per l' ipotesi $b(n+m+1) = b(n+1)$, $c(n+m+1) = c(n+1)$, ovvero $b(n+m) = b(n)$, e $c(n+m) = c(m)$; d' onde segue $\frac{\sqrt{A}+b(n+m)}{c(n+m)} = \frac{\sqrt{A}+b(n)}{c(n)}$; dunque anche $a(n+m) = a(n)$, e $a(m+1) = a_1$; ora cangiando n in m, nulla si cangia ne' termini delle tre serie precedenti, dunque anche $a(n+1) = a_1$; dunque a_1 è il quoto che incomincia il periodo, e che ritorna sempre per il primo, ed in conseguenza il quoto a è fuori del periodo.

Ciò posto le tre serie precedenti divengono

 Quo-

Quoti	a,	$a1$,	$a2$,		$a(n)$;	$a(n+1)\ (=a1)$;	ec.
Frazioni convergenti	$\frac{M0}{N0}$,	$\frac{M1}{N1}$;	$\frac{M2}{N2}$	…	$\frac{M(n)}{N(n)}$;	$\frac{M(n+1)}{N(n+1)}$,	ec.
Quoti completi	$\frac{\sqrt{A}}{1}$,	$\frac{\sqrt{A}+b1}{c1}$,	$\frac{\sqrt{A}+b2}{c2}$	…	$\frac{\sqrt{A}+b(n)}{c(n)}$;	$\frac{\sqrt{A}+b(n+1)}{c(n+1)}\left(=\frac{\sqrt{A}+b1}{c1}\right)$,	ec.
Ovvero	x,	$x1$,	$x2$,	…	$x(n)$;	$x(n+1)\ (=x1)$,	ec.

Ma $x(n) = a(n) + \frac{1}{x(n+1)} = a(n) + \frac{1}{x1} = a(n) + \frac{\sqrt{A}-b1}{c0}$ in virtù dell' ultima delle espressioni (20) ; dalle equazioni (10) e (11) si ha, $b1 = a$, $c0 = 1$, dunque $x(n) = a(n) + \frac{\sqrt{A}-a}{1}$, ma anche $x(n) = \frac{\sqrt{A}+b(n)}{c(n)}$; dunque $b(n) = a(n) - a$, $c(n) = 1$; le stesse equazioni danno

$$\left.\begin{array}{l} N(n)b(n) + N(n-1)c(n) = M(n) \\ M(n)b(n) + M(n-1)c(n) = AN(n) \end{array}\right\} \quad (22)$$

Sostituendo nella prima di queste due equazioni a $b(n)$ e $c(n)$, i valori di sopra trovati, si ha $N(n)(a(n)-a) + N(n-1) = M(n)$, ovvero $a(n) - a + \frac{N(n-1)}{N(n)} = \frac{M(n)}{N(n)}$; ma $\frac{N(n-1)}{M(n-1)} < 1$; dunque $a(n) - a$ è eguale al più grande intiero contenuto in $\frac{M(n)}{N(n)}$; ma tale intiero è $= a$ (3) : dunque $a(n) - a = a$; dunque i valori di $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$, che appartengono all' ultimo quoto sono,

$$a(n) = 2a \quad (23)$$

$$b(n) = a \quad (24)$$

$$c(n) = 1 \quad (25)$$

Dunque $x(n) = \frac{\sqrt{A}+a(n)-a}{1} = \frac{\sqrt{A}+a}{1} = \frac{\sqrt{A}+b1}{c0}$ (26)

Inoltre l' equazione (18) dà nel caso di $c(n) = 1$

$$c(n-1) = A - a^2 \quad (27)$$

Osservo che i numeratori de' rotti appartenenti al penultimo ed ultimo quoto del periodo, sono eguali, perchè dalle equazioni (21) e (17), si ha

$$x(n) = a(n) + \frac{\sqrt{A}-b(n+1)}{c(n)} = 2a + \frac{\sqrt{A}-b(n+1)}{1} = 2a + \frac{\sqrt{A}-a}{1}$$

Dun-

Dunque $b(n+1)=a$; ora $x(n-1)=a(n-1)+\frac{\sqrt{A}-b(n)}{c(n-1)}$; dunque $b(n)=b(n+1)=a=b1$.

VIII. Dalle ultime delle equazioni (3) e (4) si ha

$$\frac{M(n)}{N(n)}-a=\cfrac{1}{a1+\cfrac{1}{a2+\cfrac{1}{a3+\vdots+\cfrac{1}{a(n-1)}}}}$$

$$\frac{N(n-1)}{N(n)}=\frac{N(n-1)}{a(n-1)N(n-1)+N(n-2)}=\frac{1}{a(n-1)+\frac{N(n-2)}{N(n-1)}}$$

Si ponga in questa equazione per $\frac{N(n-2)}{N(n-1)}$ il suo valore tratto da essa stessa, e si continui tale sviluppo, n diventando $n-1$, $n-2$, $n-3$, . . . 2, si avrà

$$\frac{N(n-1)}{N(n)}=\cfrac{1}{a(n-1)+\cfrac{1}{a(n-2)+\cfrac{1}{a(n-3)+\vdots+\cfrac{1}{a1}}}}$$

Dunque se si ha $\cfrac{1}{a1+\cfrac{1}{a2+\vdots+\cfrac{1}{a(n-1)}}}=\cfrac{1}{a(n-1)+\cfrac{1}{a(n-2)+\vdots+\cfrac{1}{a1}}}$,

vale a dire se $\frac{M(n)}{N(n)}-a=\frac{N(n-1)}{N(n)}$, ovvero $M(n)=aN(n)+N(n-1)$ ch' è appunto la 2ª delle equazioni (22), ove a $b(n)$ e $c(n)$ siansi sostituiti i loro valori (24) e (25), la serie è simmetrica, ed il periodo, $a1, a2, \ldots a(n-1)$ dovrà essere identico col suo inverso $a(n-1)$, $a(n-2), \ldots a1$, e perciò i quoti procedenti dallo sviluppo di $\sqrt{A}$ in Frazione continua, andranno secondo questa legge,

$$\begin{array}{llllll} a: & a1, & a2, & a3, & a(n-2), & a(n-1); \quad a(n). \\ \text{O}\ (a: & a(n-1), & a(n-2), & a(n-3), \ldots & a2, & a1; \quad 2a. \\ \phantom{\text{O}}\ (a: & a1, & a2, & a3, \ldots & a2, & a1; \quad 2a. \end{array}$$

$$\frac{\sqrt{A}}{1},\ \frac{\sqrt{A}+b1}{c1},\ \frac{\sqrt{A}+b2}{c2},\ \frac{\sqrt{A}+b3}{c3},\ldots\frac{\sqrt{A}+b(n-2)}{c(n-2)},\ \frac{\sqrt{A}+b(n-1)}{c(n-1)},\ \frac{\sqrt{A}+b(n)}{c(n)}.$$

Il primo quoto a è fuori del periodo; gli altri dall'ultimo infuori ne formano uno simmetrico.

IX.

IX. Si ha finalmente $x(n-1) = a(n-1) + \frac{1}{x(n)} = a(n-1) + \frac{c0}{\sqrt{a}+b1} = a(n-1) + \frac{c0(\sqrt{A}-b1)}{c0c1} = a(n-1) + \frac{\sqrt{a}-b1}{c1} = \frac{\sqrt{A}+b2}{c1}$; Ma $x(n-1) = \frac{\sqrt{(A}+b(n-1))}{c(n-1)}$; dunque $b(n-1) = b2$, $c(n-1) = c1$; E $x(n-2) = a(n-2) + \frac{1}{x(n-1)} = a(n-2) + \frac{c1}{\sqrt{A}+b2} = a(n-2) + \frac{c1(\sqrt{A}-b2)}{c1c2} = \frac{\sqrt{A}+a(n-2)c2-b2}{c2} = \frac{\sqrt{A}-b3}{c2}$; Ma $x(n-2) = \frac{\sqrt{A}+b(n-2)}{c(n-2)}$; dunque $b(n-2) = b3$, $c(n-2) = c2$, ed in generale

$$b(n-m) = b(m+1) \qquad (28)$$

$$c(n-m) = c(m) \qquad (29)$$

X. Dopo di avere dimostrate le proprietà dello sviluppo di $\sqrt{A}$ in frazione continua, non mi resta per terminare la prima parte della presente Memoria, che a trovare una formola, in virtù della quale si possano determinare immediatamente tutti i quoti, ossia termini $a1$, $a2$, $a3$, ec. A tale fine, osservo che il 2° de' valori (21), c' indica $a(n)$ essere il più grande intiero contenuto in $\frac{\sqrt{A}+b(n)}{c(n)}$; ora il più grande intiero contenuto in $\sqrt{A}$ è a; quindi un termine o quoto qualunque è

$$a(n) = \frac{a+b(n)}{c(n)} \qquad (30)$$

essendo successivamente $n = 1, 2, 3$, ec.

Cioè $a(n)$ è eguale al più grande intiero contenuto in $\frac{a+b(n)}{c(n)}$; ed è sempre in questo senso che si deve interpretare la formola precedente; $b(n)$ e $c(n)$ sono dati dalle formole (10) e (11), le quali non sono funzioni del quoto attualmente cercato, ma soltanto de' quoti antecedenti $a(n-1)$, $a(n-2)$, ec. : ne faremo a suo luogo qualche applicazione.

XI. In virtù della simmetria del periodo, non farebbe d' uopo di calcolarne li $n-1$ termini incogniti, se si potesse conoscere preventivamente il loro numero, poichè non si avrebbero a calcolare che $\frac{n}{2}$, ovvero $\frac{n-1}{2}$ termini, secondo che n è pari, ovvero ro dispari; ora n non influisce nelle formole trovate, che come un esponente di forma indeterminata, la quale lascia l'ambiguità de' segni $\pm$; quindi ho tentato un modo di trovare generalmente questo numero, servendosi de' calcoli fatti nella ricerca de' quoti successivi, cioè non calcolando che $\frac{n}{2}$ ovvero $\frac{n-1}{2}$ quoti, che sono necessarj a conoscersi per formare il periodo in questione, i quali si dovrebbero calcolare egualmente anche nel caso che fosse noto da principio il numero n.

XII. Bisogna in primo luogo determinare i valori di $M(n)$ e di $N(n)$ in funzioni solamente de' quoti $a, a1, a2, a3, \ldots a\left(\frac{n}{2}\right)$ ovvero $a\left(\frac{n-1}{2}\right)$; giacchè l'espressione generale di essi, ne contiene un numero n; (Vedi la Mem. cit.).

Quando n è pari, tali quoti formano il seguente periodo

$$a1, a2, a3, \ldots a\left(\frac{n}{2}\right), a\left(\frac{n}{2}+1\right), a\left(\frac{n}{2}+2\right), \ldots a(n-3), a(n-2), a(n-1), a(n).$$

$$\text{Ovvero } a1, a2, a3, \ldots a\left(\frac{n}{2}\right), a\left(\frac{n}{2}-1\right), a\left(\frac{n}{2}-2\right), \ldots \quad a3, \quad a2, \quad a1, \quad 2a.$$

Quelli che si corrispondono verticalmente in ciascuna di queste serie orizzontali sono eguali fra di loro per la simmetria del periodo.

Quindi

$$\begin{aligned} M(n) &= a(n-1)M(n-1)+M(n-2)=a1\,[a2M(n-2)+M(n-3)]+ \\ & M(n-2) = (a1a2+1)M(n-2)+a1M(n-3)=N3M(n-2)+ \\ & N2M(n-3) = N3[a3M(n-3)+M(n-4)]+N2M(n-3) = \\ & (a3N3+N2)M(n-3)+N3M(n-4)=N4M(n-3)+N3M(n-4) \\ & =N5M(n-4)+N4M(n-5) = \ldots\ldots = N(m')M(n-m'+1) \\ & + N(m'-1)M(n-m'). \end{aligned}$$

Ora, affinchè $M(n-m'+1)$ non contenga altro quoto, oltre l'ultimo diverso $a\left(\frac{n}{2}\right)$, Egli è chiaro che bisogna fare $m'=\frac{n}{2}$, dunque

$$M(n) = N\left(\frac{n}{2}\right)M\left(\frac{n}{2}+1\right)+N\left(\frac{n}{2}-1\right)M\left(\frac{n}{2}\right) \qquad (31)$$

Pon-

Pongasi in questa equazione per $M\left(\frac{n}{2}+1\right)$, il suo valore $a\left(\frac{n}{2}\right)M\left(\frac{n}{2}\right)+M\left(\frac{n}{2}-1\right)$ e ricordandosi che $N\left(\frac{n}{2}-1\right)M\left(\frac{n}{2}\right)-M\left(\frac{n}{2}-1\right)N\left(\frac{n}{2}\right)=(-1)^{\frac{n}{2}}$, si avrà

$$M(n)=N\left(\frac{n}{2}\right)\left[a\left(\frac{n}{2}\right)M\left(\frac{n}{2}\right)+2M\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]+(-1)^{\frac{n}{2}} \qquad (32)$$

Quando n è pari.

Nel caso di n dispari, il periodo, invece di contenere un sol termine medio $a\left(\frac{n}{2}\right)$, ne contiene due eguali fra di loro, $a\left(\frac{n-1}{2}\right)$, $a\left(\frac{n-1}{2}\right)$, e affinchè l' equazione $M(n) = N(m')M(n-m'+1)+N(m'-1)M(n-m')$, non inchiuda, altro quoto oltre l'ultimo diverso $a\left(\frac{n-1}{2}\right)$, basterà supporre $n-m'=\frac{n-1}{2}$, d' onde $m'=\frac{n+1}{2}$; Dunque

$$M(n)=N\left(\frac{n+1}{2}\right)M\left(\frac{n+1}{2}\right)+N\left(\frac{n-1}{2}\right)M\left(\frac{n-1}{2}\right) \qquad (33)$$

Quando n è dispari.

L' espressione di $N(n)=a(n-1)\,N(n-1)+N(n-2)$ è la stessa che quella di $M(n)=a(n-1)\,M(n-1)+M(n-2)$, cangiandovi N in M; dunque l' equazione (31) si cangierà similmente, riducendo, in

$$N(n)=a\left(\frac{n}{2}\right)N\left(\frac{n}{2}\right)^2+2N\left(\frac{n}{2}-1\right)N\left(\frac{n}{2}\right) \qquad (34)$$

Quando n è pari

E la formola (33) dà

$$N(n)=N\left(\frac{n+1}{2}\right)^2+N\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \qquad (35)$$

Quando n è dispari

XIII. I due termini (32) e (34), quando n è pari, e li (33) e (35), quando n è dispari, della frazione $\frac{M(n)}{N(n)}$ corrispondono all'ultimo quoto $a(n)=2a$ nel primo periodo. Ma quali saranno i valori de' ter-

termini della frazione convergente $\frac{M(n'n)}{N(n'n)}$, che corrisponde in ogni periodo, all' ultimo quoto $a(n'n) = 2a$? se si suppone successivamente $n' = 1, 2, 3, 4$, cc., si avranno le frazioni $\frac{M(n)}{N(n)}$, $\frac{M(2n)}{N(2n)}$, $\frac{M(3n)}{N(3n)}$, $\frac{M(4n)}{N(4n)}$, ec., corrispondenti al quoto $2a$, nel 1°, 2°, 3°, 4°, ec. periodo.

XIV. Se si pon mente che tutti i quoti $a(n \pm m)$, $a(n'n \pm m)$ sono eguali fra di loro, eguali ciascuno ad $a(m)$, perchè posti ad eguale distanza degli estremi $a1$, $a1$, si vedrà che le formole (32), (34), (33), (35), in cui n diventi $n'n$, restano sempre vere, qualunque sia il periodo, cui esse appartengano; dunque i valori de' termini della frazione convergente, che corrisponde all' ultimo quoto $2a$, in un periodo qualunque n'^{mo}, saranno

$$M(n'n) = N\left(\frac{n'n}{2}\right)\left[a\left(\frac{n'n}{2}\right)M\left(\frac{n'n}{2}\right) + 2M\left(\frac{n'n}{2} - 1\right)\right] + (-1)^{\frac{n'n}{2}} \quad (36)$$

$$N(n'n) = a\left(\frac{n'n}{2}\right)N\left(\frac{n'n}{2}\right)^2 + 2N\left(\frac{n'n}{2} - 1\right)N\left(\frac{n'n}{2}\right) \quad (37)$$

Quando $n'n$ è un numero pari.

$$\text{E } M(n'n) = N\left(\frac{n'n+1}{2}\right)M\left(\frac{n'n+1}{2}\right) + N\left(\frac{n'n-1}{2}\right)M\left(\frac{n'n-1}{2}\right) \quad (38)$$

$$N(n'n) = N\left(\frac{n'n+1}{2}\right)^2 + N\left(\frac{n'n-1}{2}\right)^2 \quad (39)$$

Quando $n'n$ è un numero dispari.

XV. Dopo di avere trovate queste formole generali e semplicissime, e quelle che danno il valore di $M(m)$, $N(m)$. (Ved. la Mem. citata) si vedrà con piacere, mi lusingo, presentata in due teoremi la risoluzione in numeri intieri dell'equazione $x^2 - Ay^2 = \pm 1$, A non essendo un numero quadrato, in tutti que' casi, in cui essa è possibile.

XVI. Si osservi che ogni frazione convergente $\frac{M(n'n)}{N(n'n)}$, che corrisponde in ogni periodo all'ultimo quoto $a(n'n) = 2a$ è tale che

$$M(n'n)^2 - AN(n'n)^2 = (-1)^{n'n} \quad (40)$$

Per-

Perchè $x(n'n) = a(n'n) + \frac{1}{x(n'n+1)} = 2a + \frac{1}{x1} = \frac{\sqrt{A}+a}{1}$; ma $x(n'n) = \frac{\sqrt{A}+b(n'n)}{c(n'n)}$; dunque $b(n'n) = a$ e $c(n'n) = 1$; dunque le formole (10) e (11) divengono

$$(-1)^{n'n}(AN(n'n-1)N(n'n) - M(n'n-1)M(n'n)) = a \qquad (41)$$
$$M(n'n)^2 - AN(n'n)^2 = (-1)^{n'n}$$

Si sviluppi $\sqrt{A}$ in frazione continua, a essendo il più grande intiero contenuto in $\sqrt{A}$, e $\frac{M(n'n)}{N(n'n)}$ la frazione convergente che corrisponde, come s' è già veduto, all' ultimo quoto $2a$ in ogni periodo.

Teorema I. *L' equazione $x^2 - Ay^2 = +1$ è sempre risolubile in numeri intieri di un' infinità di maniere.*

Perchè 1°, se nello sviluppo di $\sqrt{A}$, si trova n pari, si avrà sempre $M(n'n)^2 - AN(n'n)^2 = (-1)^{n'n} = +1$; quindi si farà $x = M(n'n)$, $y = N(n'n)$, essendo successivamente $n' = 1, 2, 3$, ec.

2.° Se si trova n dispari, si prenda n' pari, e si avrà $M(n'n)^2 - AN(n'n)^2 = (-1)^{n'n} = +1$, allora $x = M(n'n)$, $y = N(n'n)$, essendo n' un numero qualunque pari.

Vale a dire che la proposta sarà sciolta in questo caso da i termini di tutte le frazioni convergenti $\frac{M(n'n)}{N(n'n)}$, corrispondenti al quoto $2a$ in tutti i periodi di rango pari.

Teorema II. *L'equazione $x^2 - Ay^2 = -1$ è risolubile in numeri intieri di un' infinità di maniere, se* n *è dispari; essa sarà impossibile, se* n *è pari.*

Perche 1°, n essendo dispari, si prenda n' dispari, e si avrà $M(n'n)^2 - AN(n'n)^2 = (-1)^{n'n} = -1$, quindi $x = M(n'n)$, $y = N(n'n)$, n' essendo un numero qualunque dispari.

Vale a dire che la proposta sarà sciolta dai termini di tutte le frazioni convergenti $\frac{M(n'n)}{N(n'n)}$, corrispondenti al quoto $2a$, in tutti i periodi di rango dispari.

2.° Se n è pari, si avrà sempre $M(n'n)^2 - AN(n'n)^2 = (-1)^{n'n} = +1$,

$= +1$, quindi non esiste in questo caso alcun valore $M(n'n)$ di x, e $N(n'n)$ di y, atto a soddisfare la proposta.

XVII. Sull' esempio di *Eulero* e di *La Grange*, *Le Gendre* ha calcolato nell' opera citata, una tavola più estesa ed utilissima delle più semplici frazioni $\frac{m}{n}$ che soddisfanno all'equazione $m^2 - An^2 = \pm 1$ per ogni numero non quadrato A da $A = 2$ sino ad $A = 1003$; e questo Illustre Geometra osserva, che dalla sola inspezione delle cifre che terminano i numeri m e n, si scorgerà quale de' due segni $\pm$ abbia luogo nell'accennata equazione, ma trovo che non è necessario per quest' oggetto di conoscere i numeri m e n, ma solamente la forma pari o dispari di uno di essi, vale a dire, che supponendo nota la forma pari o dispari di $N(n)$ per es. nell' equazione $M(n)^2 - AN(n)^2 = (-1)^n$ (42) con pochi teoremi determinerò quella di n; cognizione importante, che mi condurrà per una assai breve strada alla soluzione del Problema che mi sono proposto.

XVIII. Sia pari $A = 2m$ e pari $N(n) = 2m'$, $M(n)$ sarà necessariamente dispari per l' irriducibilità della frazione $\frac{M(n)}{N(n)}$; quindi $M(n) = 2m'' + 1$; pongansi questi valori nell' equazione (42), si avrà

$$2mm'^2 = m''^2 + m'' + \frac{1-(-1)^n}{4}.$$

Ora $\frac{1-(-1)^n}{4}$ non può essere intiero, cioè 0, se non quando $n = 0$, ovvero $=$ ad un numero pari; non v' ha che il secondo caso che faccia al nostro oggetto, quindi si ha il seguente

Teorema I°. *Se* A *e* N(n) *sono numeri pari,* M(n) *sarà necessariamente dispari, e* n *pari*.

È $A = 2m = \frac{m''(m''+1)}{m'^2}$

$$N(n) = 2m' = N\left(\tfrac{n}{2}\right)\left(a\left(\tfrac{n}{2}\right)N\left(\tfrac{n}{2}\right) + 2N\left(\tfrac{n}{2}-1\right)\right)$$

$$M(n) = 2m'' + 1 = N\left(\tfrac{n}{2}\right)\left(a\left(\tfrac{n}{2}\right)M\left(\tfrac{n}{2}\right) + 2M\left(\tfrac{n}{2}-1\right)\right) + (-1)^{\frac{n}{2}}$$

 Dun-

Dunque 1°, Se $N\left(\frac{n}{2}\right)$ è pari, $M\left(\frac{n}{2}\right)$ sarà dispari, e $a\left(\frac{n}{2}\right)$ può essere pari o dispari.

2° Se $N\left(\frac{n}{2}\right)$ è dispari, $a\left(\frac{n}{2}\right)$ sarà pari e $M\left(\frac{n}{2}\right)$ può essere pari o dispari.

XIX. Sia pari $A=2m$, dispari $N(n)=2m'+1$, pari $M(n)=2m''$, si avrà in virtù della stessa equazione (42)

$$m(2m'+1)^2=2m''^2-\frac{(-1)^n}{2}.$$

Ciò ch' è impossibile; dunque se A è pari, e $N(n)$ dispari, $M(n)$ non può essere pari.

XX. Sia perciò pari $A=2m$, dispari $N(n)=2m'+1$, e dispari $M(n)=2m''+1$; e la mentovata equazione darà

$$m(4m'(m'+1)+1)=2m''(m''+1)+\frac{1-(-1)^n}{2}.$$

Se m è pari $\frac{1-(-1)^n}{2}$ dev' essere 0, dunque $n=0$, ovvero $=$ numero pari; se m è dispari, $\frac{1-(-1)^n}{2}$ dev' essere $=1$, cioè $n=$ numero dispari; dunque

Teorema II. *Se* A *è pari e* N(n) *dispari*, M(n) *sarà necessariamente dispari*, *e* n *sarà pari ovvero dispari, secondo che* m *sarà pari ovvero dispari*.

Cioè $A=2m=\frac{(2m''+1)^2-(-1)^n}{(2m'+1)^2}=\frac{(2m''+1)^2-(-1)^m}{(2m'+1)^2}$.

Se m è pari, n sarà pari e

$$N(n)=2m'+1=N\left(\frac{n}{2}\right)\left(a\left(\frac{n}{2}\right)N\left(\frac{n}{2}\right)+2N\left(\frac{n}{2}-1\right)\right)$$

$$M(n)=2m''+1=N\left(\frac{n}{2}\right)\left(a\left(\frac{n}{2}\right)M\left(\frac{n}{2}\right)+2M\left(\frac{n}{2}-1\right)\right)+(-1)^{\frac{n}{2}}$$

$N\left(\frac{n}{2}\right)$ e $a\left(\frac{n}{2}\right)$ devon essere dispari e $M\left(\frac{n}{2}\right)$ pari.

Se m è dispari, n sarà dispari e

$$N(n)=2m'+1=N\left(\frac{n+1}{2}\right)^2+N\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$$

M(n)

$M(n) = 2m'' + 1 = N\left(\frac{n+1}{2}\right) M\left(\frac{n+1}{2}\right) + N\left(\frac{n-1}{2}\right) M\left(\frac{n-1}{2}\right)$

1.° Se $N\left(\frac{n+1}{2}\right)$ è pari, $N\left(\frac{n-1}{2}\right)$ sarà dispari, $M\left(\frac{n+1}{2}\right)$ sarà dispari; e $M\left(\frac{n-1}{2}\right)$ similmente dispari.

2.° Se $N\left(\frac{n+1}{2}\right)$ è dispari, $N\left(\frac{n-1}{2}\right)$ sarà pari e $M\left(\frac{n+1}{2}\right)$ dispari; e $M\left(\frac{n-1}{2}\right)$ similmente dispari.

Sia dispari $A = 2m + 1$, pari $N(n) = 2m'$, sarà necessariamente dispari $M(n) = 2m'' + 1$. Si ha dalla mentovata equazione

$$m'^2(2m+1) = m''(m''+1) + \frac{1-(-1)^n}{4}.$$

Dunque affinchè $\frac{1-(-1)^n}{4}$ sia intiero, cioè o, bisogna che $n =$ o ovvero $=$ numero pari; dunque

Teorema III. *Se* A è *dispari*, N(n) *pari*, M(n) *sarà necessariamente dispari*, *e* n *pari*.

Cioè $A = \frac{m''(m''+1)}{m'^2}$

$N(n) = 2m' = N\left(\frac{n}{2}\right)\left(a\left(\frac{n}{2}\right) N\left(\frac{n}{2}\right) + 2N\left(\frac{n}{2} - 1\right)\right)$

$M(n) = 2m'' + 1 = N\left(\frac{n}{2}\right)\left(a\left(\frac{n}{2}\right) M\left(\frac{n}{2}\right) + 2M\left(\frac{n}{2} - 1\right)\right) + (-1)^{\frac{n}{2}}.$

Le forme di $N\left(\frac{n}{2}\right)$, $M\left(\frac{n}{2}\right)$, $a\left(\frac{n}{2}\right)$ sono le stesse che quelle del Teor. I.

XXI. Sia dispari $A = 2m + 1$, dispari $N(n) = 2m' + 1$; dispari $M(n) = 2m'' + 1$, si avrà

$2m'(m'+1)(2m+1) + m = 2m''(m''+1) - \frac{(-1)^n}{2}$, ciò ch'è impossibile.

Dunque A e $N(n)$ essendo dispari, $M(n)$ non può essere dispari.

XXII. Perciò sia dispari $A = 2m + 1$, dispari $N(n) = 2m' + 1$, pari $M(n) = 2m''$, si avrà

$2m'(m'+1)(2m+1) + m = 2m''^2 - \frac{1+(-1)^n}{2}.$

Ora

Ora $\frac{1+(-1)^n}{2}$ dev' essere intiero e pari, cioè o, quando m è pari, dunque $n =$ numero dispari. E $\frac{1+(-1)^n}{2}$ dev' essere dispari, cioè 1 quando m è dispari, dunque $n = 0$ ovvero $=$ numero pari.

Dunque

Teorema IV. *Se* A(n) *e* N(n) *sono dispari,* M(n) *sarà necessariamente pari; e se* m *è pari ovvero dispari*, n *sarà dispari ovvero pari*.

Cioè $A = 2m+1 = \frac{4m''^2-(-1)^n}{(2m'+1)^2} = \frac{4m''^2-(-1)^{m+1}}{(2m'+1)^2}$.

Se m è pari, n sarà dispari e

$$N(n) = 2m' + 1 = N\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 + N\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$$

$$M(n) = 2m'' = N\left(\frac{n+1}{2}\right) M\left(\frac{n+1}{2}\right) + N\left(\frac{n-1}{2}\right) M\left(\frac{n-1}{2}\right).$$

1.° Se $N\left(\frac{n+1}{2}\right)$ è pari, $N\left(\frac{n-1}{2}\right)$ sarà dispari, e $M\left(\frac{n-1}{2}\right)$ sarà pari e $M\left(\frac{n+1}{2}\right)$ dispari.

2.° Se $N\left(\frac{n+1}{2}\right)$ è dispari, $N\left(\frac{n-1}{2}\right)$ sarà pari e $M\left(\frac{n+1}{2}\right)$ sarà pari e $M\left(\frac{n-1}{2}\right)$ dispari.

Se m è dispari, n sarà pari e

$$N(n) = 2m' + 1 = N\left(\frac{n}{2}\right)\left(a\left(\frac{n}{2}\right) N\left(\frac{n}{2}\right) + 2N\left(\frac{n}{2} - 1\right)\right)$$

$$M(n) = 2m'' = N\left(\frac{n}{2}\right)\left(a\left(\frac{n}{2}\right) M\left(\frac{n}{2}\right) + 2M\left(\frac{n}{2} - 1\right)\right) + (-1)^{\frac{n}{2}}$$

$N\left(\frac{n}{2}\right)$, $M\left(\frac{n}{2}\right)$, $a\left(\frac{n}{2}\right)$ devon essere dispari.

XXIII. Con questi teoremi si saprà sempre a quale segno appartengano i numeri $M(n)$ e $N(n)$ nell' equazione $M(n)^2 - AN(n)^2 = (-1)^n$, e così tutto resta determinato nella tavola citata del *Le Gendre*; ma si può far di più, e determinare la forma pari ovvero dispari di n nella maggior parte de' casi; perciò ripiglio l' equal' equazione del Teorema I, ove n è pari, ed A similmente pari, cioè

$$A = 2m = \frac{m''(m''+1)}{m'^2}$$

Supposngo in 1.° luogo m dispari $= 2a + 1$; quindi $A = 4a + 2 = \frac{m''(m''+1)}{m'^2}$; sia pari $a = 2b$,

si avrà $(8b + 2)m'^2 = m''(m''+1)$

equazione che sussiste.

Sia dispari $a = 2b+1$, si avrà $(8b+6)m'^2 = m''(m''+1)$, equazione che sussiste.

XXIV. Suppongasi m dispari $= 2a + 1$, nel Teorema II, ove A è pari, e la forma di n eguale a quella di m, si avrà

$$A = 4a + 2 = \frac{4m''(m''+1)+1-(-1)^m}{4m'(m'+1)+1}, \text{ ovvero}$$

$$2m'(m'+1)(2a+1)+a=m''(m''+1)$$

Ora se a è dispari $= 2b + 1$, l' equazione precedente non può sussistere; sussiste invece in questo caso quella del Teorema I; ma se a è pari $= 2b$, essa può aver luogo: dunque

1.° I numeri della forma $A = 8b + 6$ hanno sempre n pari nello sviluppo di $\sqrt{A}$ in frazione continua.

2.° E quelli della forma $A = 8b + 2$ possono avere n pari e dispari.

XXV. Sia ne' stessi teoremi pari $m=2a$, si avrà Teor. I, ove n è pari $A = 4a = \frac{m''(m''+1)}{m'^2}$. 1.° Se pari $a = 2b$, si avrà $8bm'^2 = m''(m''+1)$

2.° Se dispari $a=2b+1$, $(8b+4)m'^2=m''(m''+1)$

Equazioni che sussistono

XXVI. Nel Teorema II, n ha la stessa forma di m, cioè pari in questa ipotesi

$$\text{E } A = 4a = \frac{4m''(m''+1)}{(2m'+1)^2}$$

1.° Se pari $a = 2b$, si avrà $8bm'(m'+1) + 2b = m''(m''+1)$, equazione che sussiste.

2. Se dispari $a = 2b + 1$, si avrà $m'(8b+4)(m'+1)+2b+1 = m''(m''+1)$

Quest'

Quest' equazione non può aver luogo; sussiste invece in questo caso, l' equazione del Teorema I,

$(8b+4)m'^2 = (m''+1)m''$, in cui $N(n)$ è pari $= 2m'$.

Dunque i numeri della forma $8b$ e $8b+4$ hanno sempre n pari.

XXVII. Suppongasi ora A dispari, si ha per il Teorema III, in cui n è pari, e $A = 2m+1 = \frac{m''(m''+1)}{m'^2}$; sia dispari $m=2a+1$, si avrà $(4a+3)m'^2 = m''(m''+1)$

1.° Se pari $a=2b$, si ha $(8b+3)m'^2 = m''(m''+1)$

2.° Se dispari $a=2b+1$, $(8b+7)m'^2 = m''(m''+1)$

Equazioni che possono sussistere.

XXVIII. Nel Teorema IV, la forma di n è eguale a quella di $m+1$; m quì si suppone dispari; quindi n è pari, e si ha

$A = 2m+1 = 4a+3 = \frac{4m'^2-1}{(2m'+1)^2}$ d' onde $m'(m'+1)(4a+3)+a = m''^2-1$

I.° Se pari $a=2b$, si ha $m'(m'+1)(8b+3)+2b = m''^2-1$

II.° Se dispari $a=2b+1$, $m'(m'+1)(8b+7)+2b = m''^2-2$

equazioni che possono sussistere.

Dunque i numeri della forma $8b+3$, $8b+7$ hanno sempre n pari.

XXIX. Pongasi ne' teoremi III e IV, pari $m = 2a$, si avrà Teorema III, in cui n è pari $A = 2m+1 = 4a+1 = \frac{m''(m''+1)}{m'^2}$ e $(4a+1)m'^2 = m''(m''+1)$

I.° Se pari $a=2b$, si ha $(8b+1)m'^2 = m''(m''+1)$

II.° Se dispari $a=2b+1$, $(8b+5)m'^2 = m''(m''+1)$;

equazioni che possono sussistere.

XXX. Si ha nel Teorema IV, in cui n è dispari, poichè $m=2a$

$A = 2m+1 = 4a+1 = \frac{4m'^2+1}{(2m'+1)^2}$, e $m'(m'+1)(4a+1)+a = m''^2$

1.° Se pari $a=2b$, si ha $m'(m'+1)(8b+1)+2b = m''^2$;

2.° Se dispari $a=2b+1$, $m'(m'+1)(8b+5)+2b+1 = m''^2$;

equazioni che possono sussistere. Dunque i numeri della forma $8b+1$, $8b+5$ possono avere n pari e dispari.

XXXI. Dunque raccogliendo tutti questi casi, i numeri della forma

$$A = 8b,$$

$$A = 8b$$
$$8b + 3$$
$$8b + 4$$
$$8b + 6$$
$$8b + 7$$

hanno sempre n pari nello sviluppo di $\sqrt{A}$ in frazione continua.

Ed i numeri della forma $A = 8b + 1$
$$8b + 2$$
$$8b + 5$$

possono avere n pari e dispari.

XXXII. *Le Gendre* ha dimostrato nell' Opera citata §. VII, che a essendo un numero primo della forma $4n+1$, l' equazione $x^2 - ay^2 = -1$ è sempre possibile in numeri intieri; d' onde conchiudo che i numeri primi della forma $8b+1$, $8b+5$ hanno sempre n dispari.

XXXIII. Da tutto ciò che vengo di esporre, traggo, per determinare n, la regola seguente

Si calcolino successivamente, per mezzo della formola (30), *i quoti* a1, a2, a3, *ec. e quando si sarà pervenuto ad un quoto eguale all' antepenultimo, ovvero al penultimo già trovato, si riguardi tale penultimo quoto, come un termine medio, o l' uno de' due termini medj ed eguali del periodo; si ponga nelle espressioni di* N(n) *e* M(n) *prese ne' teoremi relativi alla forma data di* A, *per* n, *il numero doppio di quello che sta nella notazione del penultimo quoto, ovvero questo numero doppio, accresciuto di una unità; quelli valori così trovati, che soddisferanno alle condizioni de' teoremi in questione, ed all' equazione* (42)

$$M(n)^2 = AN(n)^2 + (-1)^n$$

daranno il numero cercato.

XXXIV. *Esempio* I. Sia $A = 94 = 2m = 8b + 6$; dunque (30) n è pari, $a = 9$; $m = 47$, $b = 11$; dunque il Teorema II non può aver luogo in questo caso; le formole (4), (10), (11), (30), e (42) daranno successivamente, essendo

$n = 0$, $No = 0$

$Mo = 1$,

 $n = 1$,

$n=1$, $N1=1$, $b1=-94.0.1+1.9=9$

$M1=9$, $c1=-81+94.1=13$ $\qquad 1a=\frac{9+9}{13}=1$

$n=2$, $N2=1$, $b2=94.1.1-9.10=4$

$M2=10$, $c2=10^2-94.1=6$, $\qquad a2=\frac{9+4}{6}=2$

$n=3$, $N3=3$, $b3=-94.1.3+10.29=8$

$M3=29$, $c3=-29^2+94.9=5$, $\qquad a3=\frac{9+8}{5}=3$

$n=4$, $N4=10$, $b4=94.3.10-29.97=9$

$M4=97$, $c4=97^2-94.10^2=9$ $\qquad a4=\frac{9+7}{9}=1$

$n=5$, $N5=13$, $b5=-94.10.13+97.126=2$

$M5=126$, $c5=-126^2+94.13^2=10$, $\qquad a5=\frac{9+2}{10}=1$

$a5$ ed $a4$ non possono quì formare i termini medj ed eguali del periodo, poichè allora n sarebbe dispari $=9$. Sia perciò

$n=6$, $N6=23$, $b6=94.13.23-126.223=8$

$M6=223$, $c6=223^2-94.23^2=3$, $\qquad a6=\frac{9+8}{3}=5$

$n=7$, $N7=128$, $b7=-9.23.128+223.1241=7$

$M7=1241$, $c7=-1241^2+94.128^2=15$, $\qquad a7=\frac{9+7}{15}=1$

Si ha $a5=a7$: per verificare se $a6$ è il termine medio, facciasi (32), $n=12$ nelle espressioni del Teorema I; si avrà $N\left(\frac{n}{2}\right)=N6=23$, $M\left(\frac{n}{2}\right)=M6=223$, $a\left(\frac{n}{2}\right)=a6=5$, che dovrebb' essere pari per le condizioni dello stesso teorema (2°); quindi non può essere $n=12$, perciò sia

$n=8$, $N8=151$, $b8=94.128.151-1241.1464=8$

$M8=1464$, $c8=1464^2-94.151^2=2$, $\qquad a8=\frac{9+8}{2}=8$

$n=9$ $N9=1336$, $b9=-94.151.1336+1464.12953=-8$

$M9=12953$, $c9=-12953^2+94.1336^2=15$, $\qquad a9=\frac{9+8}{15}=1$

Si

Si ha $a7 = a9$; per verificare se $a8$ è il termine medio, suppongasi $n = 16$ nelle espressioni del Teorema I, si avrà $N\left(\frac{n}{2}\right) = N8 = 151$, $M\left(\frac{n}{2}\right) = M8 = 1464$, $a\left(\frac{n}{2}\right) = a8 = 8$; questi valori soddisfanno alle condizioni del Teorema I, 2.°, perciò si calcolino le espressioni di N16, M16 date nello stesso teorema, si avrà

$$N16 = 151(8.151 + 2.128) = 221064$$
$$M16 = 151(8.1464 + 2.1241) + 1 = 2143295$$

Si verifichi l' equazione (42), e si avrà $2143295^2 = 94.221064^2 + 1$, la quale sussistendo, dimostra essere $n = 16$, ed il periodo cercato

9: 1, 2, 3, 1, 1, 5, 1, 8, 1, 5, 1, 1, 3, 2, 1; 18

Ed i più semplici valori di $M(n)$ e $N(n)$ che soddisfanno all' equazione

$$M(n)^2 - 94N(n)^2 = +1,$$ sono
$$M(n) = 2143295,$$
$$N(n) = 221064.$$

XXXV. *Esempio* II. Sia $A = 1005 = 2m + 1 = 8b + 5$; essendo $m = 502$, $b = 125$; ed $a = 31$. La forma di questo numero costituisce uno de' tre casi dubbj (30). Sia

$n = 0$, $N0 = 0$
$M0 = 1$

$n = 1$, $N1 = 1$ $\qquad b1 = 31$
$M1 = 31$ $\qquad c1 = 44$, $\qquad a1 = \frac{31+31}{44} = 1$

$n = 2$, $N2 = 1$, $\qquad b2 = 1005.1.1 - 31.32 = 13$
$M2 = 32$ $\qquad c2 = 32^2 - 1005.1 = 19$, $\qquad a2 = \frac{31+13}{19} = 2$

$n = 3$, $N3 = 3$ $\qquad b3 = -1005.1.3 + 32.95 = 25$
$M3 = 95$, $\qquad c3 = -95^2 + 1005.3^2 = 20$, $\qquad a3 = \frac{31+25}{20} = 2$.

Poichè $a2 = a3 = 2$, si verifichi se $n = 5$; si ricorra perciò al Teorema IV; si avrà $N\left(\frac{n+1}{2}\right) = N3 = 3$, $N\left(\frac{n-1}{2}\right) = N2 = 1$,

 che

che dovrebb' essere pari (II.), come pure $M\left(\frac{n+1}{2}\right) = M3 = 95$;
dunque non può essere $n = 5$: sia perciò

$n = 4$, $N4 = 7$, $b4 = 1005.3.7 - 95.222 = 15$

$M4 = 222$, $c4 = 222^2 - 1005.7^2 = 39$, $a4 = \frac{31+15}{39} = 1$

$n = 5$, $N5 = 10$, $b5 = -1005.7.10 + 222.317 = 24$

$M5 = 317$, $c5 = -317^2 + 1005.10^2 = 11$, $a5 = \frac{31+24}{11} = 5$

$n = 6$, $N6 = 57$, $b6 = 1005.10.57 - 317.1807 = 31$

$M6 = 1807$, $c6 = 1807^2 - 1005.57^2 = 4$ $a6 = \frac{31+31}{4} = 15$

$n = 7$, $N7 = 865$, $b7 = -1005.57.865 + 1807.27422 = 29$

$M7 = 27422$, $c7 = -27422^2 + 1005.865^2 = 41$ $a7 = \frac{31+29}{41} = 1$

$n = 8$, $N8 = 922$, $b8 = 1005.865.922 - 27422.29229 = 12$

$M8 = 29229$, $c8 = 29229^2 - 1005.922^2 = 21$, $a8 = \frac{31+12}{21} = 2$

$n = 9$, $N9 = 2709$, $b9 = -1005.922.2709 + 29229.85880 = 30$

$M9 = 85880$, $c9 = -85880^2 + 1005.2709^2 = 5$ $a9 = \frac{31+30}{5} = 12$

$n = 10$, $N10 = 33430$, $b10 = 1005.2709.33430 - 85880.1059789 = 30$,

$M10 = 1059789$, $c10 = 1059789^2 - 1005.33430^2 = 21$, $a10 = \frac{31+30}{21} = 2$.

Si ha $a8 = a10 = 2$; si verifichi se $a9$ è il termine medio, facendo $n = 18$, si avrà Teorema III, $N\left(\frac{n}{2}\right) = N9 = 2709$, $N\left(\frac{n}{2} - 1\right) = N8 = 922$, $M\left(\frac{n}{2}\right) = M9 = 85880$, $M\left(\frac{n}{2} - 1\right) = M8 = 29229$, $a\left(\frac{n}{2}\right) = a9 = 12$; questi valori soddisfanno alle condizioni del Teorema I 2.° conformemente a quanto si è prescritto nel Teorema III. Perciò

$N18 = 2709(12.2709 + 2.922) = 93059568$

$M18 = 2709(12.85880 + 2.29229) - 1 = 2950149761$

E l' equazione (42)

2950149761^2

$$2950149761^2 = 1005.93059568^2 + 1$$

sussiste. Dunque $n = 18$, ed il periodo cercato è

$$31 : 1, 2, 2, 1, 5, 15, 1, 2, 12, 2, 1, 15, 5, 1, 2, 2, 1 . 62$$