CONSIDERAZIONI

SU

DI UN PROBLEMA MECCANICO

Del Sig. Gioachino Pessuti

Ricevute il dì 9 Giugno 1806.

L'amicizia che sin dai più teneri anni, per analogia di studj, avea contratta col fu celebre Professor di Pavia e nostro Socio *P. D. Gregorio Fontana* delle Scuole Pie, di cui sarà sempre per me luttuosa la perdita, seguendo il lodevole stile de' sommi Geometri della passata età, era tra noi in distanza principalmente alimentata con frequenti problemi, che a vicenda ci proponevamo. Per pagare un tributo alla memoria di quell' impareggiabile Amico, voglio ora tra i molti scegliere, e riprodurre un antico *problema meccanico*, che egli mi propose, e che non mi sembra indegno dell' attenzione della Società nostra, tanto per se medesimo, quanto per l' estensione, che mi riuscì di dargli, e per i riflessi analitici, pe' quali mi porse occasione. Il Problema del P. *Fontana* fu questo:

In un Circolo, (Fig.ª 1ª) *il di cui piano sia normale all' orizzonte, avendo condotto il Diametro verticale* AD, *determinare partendo dal punto infimo* A, *l' arco* AEF, *la di cui corda* FA *potrebbe esser percorsa da un Grave, che per essa scendesse nello stesso tempo, che le due corde eguali* FE, EA *sottendenti le due metà dell' arco*.

Eccone la soluzione, che subito ne trovai, ed immediatamente comunicai al Proponente. Condotte le orizzontali EB, FC, e la verticale EG, e prolungate le CF, AE sinchè s' incontrino in H, facciasi il raggio del circolo $=1$, ed AB seno verso di AE

AE chiamisi x. Sarà $OB=\cos.AE=1-x$, $BE=\text{sen}.AE=\sqrt{2x-x^2}$; e quindi $OC=\cos 2AE=\cos.\overline{AE}^2-\text{sen}.\overline{AE}^2=1-4x+2x^2$; $AC=4x-2x^2$, e $BC=EG=3x-2x^2$. Si avrà inoltre $AE=EF=\sqrt{2x}$, ed . . . $AF=\sqrt{8x-4x^2}$.

Ora essendo il tempo della discesa di un Grave per un piano inclinato al tempo della caduta verticale per la sua altezza, come la lunghezza all'altezza del piano; se si esprimerà, siccome è permesso, il tempo della caduta verticale da una qualunque altezza colla radice quadrata di quest' altezza, il tempo della discesa per un qualunque piano inclinato sarà espresso dalla lunghezza del piano divisa per la radice quadrata dell' altezza di esso.

Indicando adunque per brevità colla lettera t il tempo della caduta di un Grave per una qualunque linea verticale, o inclinata, si avrà

$$\text{I.° } \ldots t.FE=\frac{FE}{\sqrt{EG}}=\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{3x-2x^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-2x}}$$

Ed allo stesso modo sarà $t.EA=\frac{EA}{\sqrt{AB}}=\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x}}=\sqrt{2}$

Ora dalle leggi Galileane si ha

$$\sqrt{EA}:\sqrt{HA}=\sqrt{AB}:\sqrt{AC}=\sqrt{x}:\sqrt{4x-2x^2}=1:\sqrt{4-2x}=t.EA:t.HA=\sqrt{2}:t.HA$$

$$\sqrt{EA}:\sqrt{HE}=\sqrt{AB}:\sqrt{BC}=\sqrt{x}:\sqrt{3x-2x^2}=1:\sqrt{3-2x}=t.EA:t.HE=\sqrt{2}:t.HE$$

Sarà dunque $t.HA=\sqrt{8-4x}$, e $t.HE=\sqrt{6-4x}$. Ora la differenza di $t.HA$, e $t.HE$ esprime appunto il tempo, che impiegherebbe un Grave a percorrere il piano EA, incominciando a discendervi dal punto E colla velocità acquistata per HE, ossia, il che è lo stesso, per FE. Indicando adunque questo secondo tempo sottoposto a questa condizione colla lettera t', avremo

$$\text{II.° } t'.EA=t.HA-t.HE=\sqrt{8-4x}-\sqrt{6-4x}.$$

Finalmente si avrà allo stesso modo

$$\text{III.° } t.FA=\frac{FA}{\sqrt{AC}}=\frac{\sqrt{8x-4x^2}}{\sqrt{4x-2x^2}}=\sqrt{2}.$$

Ma per condizione del Problema dev' essere

$$t.FA=t.FE+t'.EA$$

Si avrà dunque l' equazione

$\sqrt{2}$

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-2x}} + \sqrt{8-4x} - \sqrt{6-4x}$$

ovvero

$$\sqrt{3-2x} = \sqrt{12-14x+4x^2} - 2 + 2x$$

ovvero innalzando al quadrato , e riducendo

$$20x - 8x^2 - 13 = (4x-4) \cdot \sqrt{12-14x+4x^2}$$

d' onde innalzando di nuovo al quadrato, e fatte le debite riduzioni , se ne otterrà l' equazione cubica .

$$32x^3 - 96x^2 + 88x - 23 = 0$$

la quale dividendo per 4, e fatta $2x = z$, si convertirà nell' altra

$$z^3 - 6z^2 + 11z - \frac{23}{4} = 0$$

e tolto il secondo termine col fare $z = u + 2$, in quest' altra

$$u^3 - u + 0,25 = 0$$

Le radici di quest' equazione sono tutte tre reali, due positive , ed una negativa , le quali con una prima sufficiente approssimazione si trovano essere 0,8374, 0,2698 , — 1,1072 . Quindi $x = \frac{u+2}{2} =$ AB, cioè il seno verso della metà dell' arco cercato AEF avrà anche tre valori, i quali prossimamente saranno 1,4187, 1,1349, 0,5536, ai quali prossimamente corrispondono gli archi di 114° 45', 97° 45', 56° 23'. Saranno dunque gli archi cercati AEF (*Fig.* 2.ª 3.ª 4.ª) di 229° 30', 195° 30', 112° 46', cioè un Grave, nella posizione verticale del circolo, e del suo diametro AD , potrà percorrere le loro corde FA nel medesimo tempo , che la somma delle corde delle loro metà FE, EA. Siccome però le corde FE della prima metà s' inclinano dalla parte opposta delle seconde EA, perchè il Problema potesse avere il suo effetto, bisognerebbe supporre un tubo aperto da ambe le parti nella situazione FE , lungo il quale scorresse il Grave per quindi sboccare nel piano inclinato EA .

Soddisfeci così al Problema del P. *Fontana* , non soddisfeci però ancora a me stesso . E primieramente vidi , che il Problema doveva, e poteva esser generalizzato , portandolo a cercare quell' arco,

arco, la di cui corda AF nella posizione verticale del Circolo, e del diametro AD potesse esser percorsa da un Grave nello stesso tempo, che la somma delle corde sottendenti le parti n^{sime} dell' arco stesso. Trovai diffatti, che il mio metodo era facilmente suscettibile di questa generalizzazione, che comunicai tosto al P. *Fontana*, il quale ne rimase altamente maravigliato, non credendola quasi possibile, forse perchè il metodo, che Egli avea seguito, non così agevolmente vi si potea adattare. Per vedere la possibilità di questa generalizzazione, seguendo il mio metodo, basterà risolvere col medesimo il caso dell' arco diviso in tre parti eguali, che si presenta dopo quello proposto dal P. *Fontana*, poichè da questo si renderà sempre più manifesto il modo di passare alla risoluzione di tutti gli altri casi. Sia dunque il problema:

Nella solita posizione verticale del circolo, e del suo diametro AD (Fig.ª 5.ª) *determinare quell' arco* AEFG, *la di cui corda* IA *potrebbe esser percorsa da un Grave discendente per essa nel medesimo tempo, che la somma delle tre corde* IF, FE, EA, *sottendenti ciascuna la terza parte del detto arco.*

Supposta la costruzione, che la figura bastantemente manifesta, facciasi come prima il raggio del circolo $=1$, AB seno verso di AE$=x$; si avrà come nell'antecedente problema OB $=$ cos. AE $= 1 - x$, BE $=$ sen. AE . . . $= \sqrt{2x - x^2}$; AC $= 4x - 2x^2$, BC $=$ EG $= 3x - 2x^2$, ed AE $=$ EF $=$ FI $= \sqrt{2x}$. Quindi OC $=$ cos. 2AE $= 1 - 4x + 2x^2$, CF $=$ sen. 2AE $=$ 2sen. AE . cos. AE . . . . $= (2 - 2x) \cdot \sqrt{2x - x^2}$, OK $=$ cos. 3AE $=$ cos. 2AE . cos AE $-$ sen. 2AE $\times$ sen. AE . . . $= 1 - 9x + 12x^2 - 4x^3$; d'onde AK sen. verso 3AE $= 9x - 12x^2 + 4x^3$, BK . . . $=$ EL $=$ AK $-$ AB $= 8x - 12x^2 + 4x^3$, e CK $=$ FM $=$ AK $-$ AC $=$ . . . $5x - 10x^2 + 4x^3$. Seguiteremo poi ad indicare colla lettera t il tempo impiegato da un Grave per discendere per un qualunque piano, o da una qualunque altezza partendo dalla quiete; colla lettera t' il tempo impiegato nella discesa per FE, per cui il Grave abbia incominciato a muoversi colla velocità acquistata per IF, ovvero per NF, ed ado-

adopereremo inoltre la lettera t'' per contrassegnare il tempo impiegato nella discesa per il piano EA incominciando a descrivere questo piano il Grave colla velocità acquistata nella discesa per HE, ovvero per NE, ovvero per IFE. Ciò presupposto avremo

$$\text{I.}^\circ\ t.\mathrm{IF} = \frac{\mathrm{IF}}{\sqrt{\mathrm{FM}}} = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{5x-10x^2+4x^3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-10x+4x^2}}.$$

Ed allo stesso modo sarà $t.\mathrm{FE} = \frac{\mathrm{FE}}{\sqrt{\mathrm{EG}}} = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{3x-2x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-2x}}$.

Ma deve stare

$$\sqrt{\mathrm{FE}}:\sqrt{\mathrm{NE}}=\sqrt{\mathrm{BC}}:\sqrt{\mathrm{BK}}=\sqrt{3x-2x^2}:\sqrt{8x-12x^2+4x^3}=\sqrt{3-2x}$$
$$:\sqrt{8-12x+4x^2}=t.\mathrm{FE}:t.\mathrm{NE}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-2x}}:t.\mathrm{NE};$$ e similmente

$$\sqrt{\mathrm{FE}}:\sqrt{\mathrm{NF}}=\sqrt{\mathrm{BC}}:\sqrt{\mathrm{CK}}=\sqrt{3x-2x^2}:\sqrt{5x-10x^2+4x^3}=\sqrt{3-2x}$$
$$:\sqrt{5-10x+4x^2}=t.\mathrm{FE}:t.\mathrm{NF}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-2x}}:t.\mathrm{NF}$$

Dunque

$$t.\mathrm{NE} = \frac{\sqrt{16-24x+8x^2}}{3-2x};\ t.\mathrm{NF} = \frac{\sqrt{10-20x+8x^2}}{3-2x}$$

epperò $t.\mathrm{NE}-t.\mathrm{NF}$, cioè

$$\text{II.}^\circ\ t'.\mathrm{FE} = \frac{\sqrt{16-24x+8x^2}-\sqrt{10-20x+8x^2}}{3-2x}$$

All' istesso modo sarà $t.\mathrm{EA} = \frac{\mathrm{AE}}{\sqrt{\mathrm{AB}}} = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{2}$; e dovrà poi stare

$$\sqrt{\mathrm{EA}}:\sqrt{\mathrm{HA}}=\sqrt{\mathrm{AB}}:\sqrt{\mathrm{AK}}=\sqrt{x}:\sqrt{9x-12x^2+4x^3}=1:\sqrt{9-12x+4x^2}$$
$$=t.\mathrm{EA}:t.\mathrm{HA}=\sqrt{2}:t.\mathrm{HA};$$

e similmente

$$\sqrt{\mathrm{EA}}:\sqrt{\mathrm{HE}}=\sqrt{\mathrm{AB}}:\sqrt{\mathrm{BK}}=\sqrt{x}:\sqrt{8x-12x^2+4x^3}=1:\sqrt{8-12x+4x^2}$$
$$=t.\mathrm{EA}:t.\mathrm{HE}=\sqrt{2}:t.\mathrm{HE}$$

Dunque $t.\mathrm{HA}=\sqrt{18-24x+8x^2}$; $t.\mathrm{HE}=\sqrt{16-24x+8x^2}$; epperò $t.\mathrm{HA}-t.\mathrm{HE}$, cioè

$$\text{III.}^\circ\ t''.\mathrm{EA}=\sqrt{18-24x+8x^2}-\sqrt{16-24x+8x^2}.$$

Finalmente si avrà allo stesso modo

IV.° $t.\mathrm{IA} = \frac{\mathrm{IA}}{\sqrt{\mathrm{AK}}} = \frac{\sqrt{2.\mathrm{AK}}}{\sqrt{\mathrm{AK}}} = \sqrt{2}$.

Ma dev' essere per condizione del problema

$$t.\mathrm{IA} = t.\mathrm{IF} + t'.\mathrm{FE} + t''.\mathrm{EA}$$

Si avrà dunque l' equazione

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-10x+4x^2}} + \frac{\sqrt{16-24x+8x^2} - \sqrt{10-20x+8x^2}}{3-2x} + \sqrt{18-24x+8x^2}$$
$$-\sqrt{16-24x+8x^2}$$

ovvero dividendo per $\sqrt{2}$, e togliendo le frazioni, e' riducendo $(3-2x).\sqrt{5-10x+4x^2} = -2+8x-4x^2+(3-2x).\sqrt{5-10x+4x^2}.\times$ $\sqrt{9-12x+4x^2} - (2-2x).\sqrt{8-12x+4x^2}.\sqrt{5-10x+4x^2}$. cioè mettendo $3-2x$ in luogo di $\sqrt{9-12x+4x^2}$, e di nuovo riducendo, $2-8x+4x^2 = (6-10x+4x^2).\sqrt{5-10x+4x^2} -$ $(2-2x).\sqrt{16x^4-88x^3+172x^2-140x+40}$.

Da quest' equazione liberata dai radicali se ne otterrà una razionale del decimo grado, le di cui radici, perchè soddisfacciano al problema, dovranno essere, com' è evidente, reali, positive, e minori di 2, cioè del diametro AD. Il 2 è diffatti una di queste radici, ed era facile di antivedere, che questo numero, cioè il diametro AD soddisfaceva in qualche modo al problema; dappoichè figurandosi l' arco AFDQAID composto dei tre semicircoli AID, DQA, AID, il tempo della discesa per la corda del secondo Arco AQD, ch' è veramente una salita, dovrà considerarsi come un tempo negativo, onde avrassi in realtà $t.\mathrm{AD} - t.\mathrm{AD}$ $+ t.\mathrm{AD} = t.\mathrm{AD}$, cioè il tempo della discesa per le corde de' tre archi eguali consecutivi DIA, AQD, DIA eguale al tempo della discesa per la corda AD della loro somma DIAQDIA.

Ma oltre di quest' inutile, od illusoria soluzione, considerando l' ultima equazione come l' abbiam riferita, e senza aver l' incomodo di liberarla dall' irrazionalità, con un metodo semplicissimo (*) abbiam trovato, che ad essa prossimamente soddisfa $x = \mathrm{AB}$ =

(*) Intendiam parlare di un metodo dato senza dimostrazione da *Simpson*, e che Noi ci proponghiamo di brevemente dimostrare, e dilucidare nella *Memoria*, che siegue.

$t.A=0,1947$, d'onde deducesi $OB=\cos.AE=0,8053$, $AE=36^\circ\ 22'$, e l' arco cercato $AEFI = 109^\circ\ 6'$ (Fig.ª 6.ª).

Dalla soluzione de' due precedenti problemi risulta intanto evidentemente, che il nostro metodo non si limita solamente al caso proposto dal P. *Fontana*, ma che può generalmente, e facilmente estendersi alla ricerca di un arco, la di cui corda debba percorrersi nello stesso tempo, che la somma delle corde di tutte le parti eguali di qualunque denominazione, in cui si può intender diviso quest' arco. Tolta però questa prima limitazione al problema del P. *Fontana*, un' altra ne rimaneva a togliere, molto più radicale, ed importante. Si assumeva in quel problema, che un Grave nel passare da un piano ad un altro diversamente inclinato, tutta conservasse la velocità acquistata nella discesa pel primo, ciò che credette *Galileo*, ma che dimostrò poi facilmente esser falso il *Varignon*, facendo vedere, che in quel passaggio la velocità acquistata si scema in ragione del raggio al coseno dell' angolo, che fa un piano coll' altro. Ora egli è evidente, che attendendosi questa reale diminuzione di velocità nel passaggio dall' uno all' altro piano, la soluzione de' precedenti problemi sarà molto diversa da quella, che abbiam ritrovata. Intrapresi pertanto di togliere anche questa seconda limitazione, e basterà di esemplificare il metodo, che mi ci condusse nel caso stesso più semplice proposto dal P. *Fontana*, cioè della ricerca dell' arco, la di cui corda si percorre nello stesso tempo, che la somma delle corde delle due sue metà: sia dunque il terzo problema.

Supponendo la solita posizione verticale tanto del Circolo, che del suo diametro AD, (Fig.ª 7.ª) *determinare quell' arco* AEF, *la di cui corda* FA *sarebbe percorsa da un Grave nello stesso tempo, che la somma delle corde delle due sue metà* FE, EA, *avendo riguardo a quella perdita della velocità, che deve fare il Grave nel passare dalla prima di queste corde* FE *nella seconda* EA.

Fatto, come prima, il raggio del Circolo $=1$, ed AB seno verso di $AE=x$, sarà pur come prima OB coseno di $AE=1-x$, $BC=3x-2x^2$, ed $AE=EF=\sqrt{2x}$. Sopra di AE prolungata si con-

conduca ora la normale FG, e da G sopra di EF la normale GH, e per il punto H si faccia passare l' orizzontale IHL, sarà EG $=$ EF.cos.FEG $=$ EF.cos. AE$=(1-x).\sqrt{2x}$, ed EH $=$ EGcos.HEG $=$ EG.cos.AE $=(1-x)^2.\sqrt{2x}$; e siccome

$$EF:EH = BC:BI\text{, cioè}$$

$$\sqrt{2x}:(1-x)^2.\sqrt{2x} = 3x-2x^2:BI$$

sarà perciò BI $=(1-x)^2.(3x-2x^2)$.

Ora per il Teorema di *Varignon* la velocità, che acquista il Grave scendendo per la prima corda FE, allorchè passa nella seconda corda EA, si scema in ragione di EF:EG, ossia in ragione di $\sqrt{EF}:\sqrt{EH}$, cioè in ragione della velocità, che si potrebbe acquistare scendendo per FE a quella, che si acquisterebbe scendendo per HE. Quindi la velocità diminuita, colla quale il Grave dopo di aver percorsa la prima corda FE, incomincia a descriver la seconda EA, è quella, che esso acquisterebbe scendendo per HE, ossia, il ch' è lo stesso, per LE, cioè il Grave descrive la seconda corda EA come se vi giugnesse partendo da L per il piano LEA. Per trovar dunque il tempo, che v' impiega, che seguiteremo a contrassegnare colla lettera t', bisognerà, come prima, determinare la differenza de' tempi impiegati da un Grave nel percorrere i piani LA, ed LE.

Ora t.EA sarà, come ne' due precedenti problemi, $=\sqrt{2}$, e si avrà poi

$$\sqrt{EA}:\sqrt{LA} = \sqrt{AB}:\sqrt{AB+BI} = \sqrt{x}:\sqrt{x+(1-x)^2.(3x-2x^2)} = t.EA:t.LE = \sqrt{2}:t.LE$$

$$\sqrt{EA}:\sqrt{LE} = \sqrt{AB}:\sqrt{BI} = \sqrt{x}:\sqrt{(1-x)^2.(3x-2x^2)} = t.EA:t.LE = \sqrt{2}:t.LE$$

epperò $t.LA = \sqrt{2+(1-x)^2.(6-4x)}$; $t.LE = \sqrt{(1-x)^2.(6-4x)}$.

Quindi $t.LA - t.LE$, cioè

$$t'.EA = \sqrt{2+(1-x)^2.(6-4x)} - \sqrt{(1-x)^2.(6-4x)}.$$

Essendo pertanto, come nel problema primo $t.FE = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-2x}}$, e $t.FA = \sqrt{2}$, e dovendo essere $t.FA = t.FE + t'.EA$, si avrà perciò l' equazione

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-2x}} + \sqrt{2+(1-x)^2.(6-4x)} - \sqrt{(1-x)^2.(6-4x)}.$$

Dividendola per $\sqrt{2}$, liberandola dalle frazioni, e fatte le debite riduzioni, se ne otterrà

$$\sqrt{3-2x}=\sqrt{3-2x+(1-x)^2.(3-2x)^2}-2+5x-2x^2$$

donde innalzando al quadrato, e riducendo, si avrà

$$13-50x+70x^2-40x^3+8x^4= \ldots\ldots$$
$$\ldots\ (4-10x+4x^2).\sqrt{12-32x+37x^2-20x^3+4x^4},$$

ed innalzando di nuovo al quadrato ne risulterà finalmente l' equazione del quinto grado

$$32x^5-192x^4+424x^3-416x^2+172x-23=0$$

ovvero fatta $2x=z$

$$z^5-12z^4+53z^3-104z^2+86z-23=0$$

Nè potranno soddisfare al problema di cui si tratta se non che i valori reali di x, che saranno positivi, e minori di 2, ovvero quei di z minori di 4. Tentando pertanto per z i numeri $1,2,3,4$, si troveranno agevolmente per esso i limiti 0, ed 1, che con egual facilità si ristringeranno a $0,5$, e $0,6$; d' onde poi col metodo, che ho accennato nell' antecedente problema ne ricavo molto prossimamente $z=0,50583$, e quindi $x=\frac{z}{2}=0,25292$.

L' unico arco pertanto AEF, che soddisfa all' attual problema è quello, la di cui metà AE ha per seno verso $AB=x=0,25292$, ossia per coseno $OB=1-x=0,74708$. Sarà dunque prossimamente $AE=41°40'$, ed $AEF=83°20'$; ed è da notarsi, che nell' ipotesi dell' attual problema, ch' è la vera, e quella della natura, le due corde AE, EF risultano inclinate dalla medesima parte, epperò meglio soddisfanno alla letterale enunciazione del problema, di quel che accadesse nella falsa ipotesi de' due problemi precedenti.

Mi si permetta ancora un' ultima considerazione su di questo problema, già forse divenuto soverchiamente lungo per la sua poca, o niuna reale importanza. Più sarà grande il numero delle parti, in cui dovrà dividersi l' arco cercato, più la somma delle corde di queste parti sembra, che dovrà accostarsi ad eguagliare la lunghezza dell' arco medesimo, cioè sembra, che

che quest' arco dovrà sempre più accostarsi a quell' arco, che sarebbe percorso nel medesimo tempo, che la sua corda, e che sarà in certo modo il *limite* degli archi corrispondenti alle successive divisioni in un numero di parti sempre più, e più grande. Parrebbe adunque a primo aspetto, che dovesse esservi un arco, che potrebbe esser percorso da un Grave nel medesimo tempo, che la sua corda. Diciamo *parrebbe a primo aspetto*, perchè il discorso potrebbe esser fallace, attesa l' indole *rivolutiva* del circolo, la quale permette di concepire un arco quanto si sia grande compreso tra due estremi, e diviso in un qualunque grandissimo numero di parti di grandezza finita, e la somma delle di cui corde in conseguenza è ben lontana dall' eguagliare la lunghezza dell' arco.

Diffatti, siccome si dimostrò per il caso della divisione dell' arco in tre parti, così potrà generalmente dimostrarsi per la divisione in un qualunque, e quanto si voglia grande numero impari $2n+1$ di parti, che al problema dovrà soddisfare l' aggregato di $2n+1$ semicircoli essendo ciascuno di essi una delle parti, in cui tutto l' arco rimane diviso, dappoichè, come per il caso di tre parti, si avrà anche per $2n+1$ parti $t.AD-t.AD+t.AD-t.AD+$ ec.... $.+t.AD=t.AD$. E siccome anche le altre soluzioni del problema, egualmente che questa, potranno pur dare archi finiti per i valori delle parti dell' arco cercato, non si potrà però assumere, che la somma delle corde di queste parti sempre più si accosti ad eguagliar l' arco cercato; onde vacilla la dimostrazione su di quest' ipotesi fondata dell' esistenza di un arco circolare, che potrà da un Grave percorrersi nello stesso tempo, che la sua corda. E quando anche la dimostrazione reggesse, come si potrebbe poi determinare quest' arco?

Per compire adunque questa dimostrazione, e giugnere alla risoluzione dell' enunciato problema, fa duopo ricordarsi, ch' essendo x il seno verso AB di un arco AE, 1 il raggio, π la mezza circonferenza, e denotando, come prima, il tempo della caduta verticale da un' altezza qualunque per la radice quadrata di quest' altezza, il tempo della discesa per il detto arco AE viene espresso da questa formola

$$t.AE = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{x}{2} + \frac{1.3^2}{2^2.4^2} \cdot \frac{x^2}{2^2} + \frac{1.3^2.5^2}{1^2.4^2.6^2} \cdot \frac{x^3}{2^3} + \text{ec.} \right)$$

Ora questa formola ci manifesta. 1° Che il tempo della discesa per un qualunque arco circolare è tanto maggiore, quanto è più grande il suo seno verso x, ossia l' arco stesso. 2°. Ch' essendo il tempo della discesa per il diametro verticale, e per qualunque corda $= \sqrt{2}$, sarà il tempo della discesa per un qualunque arco a quello della discesa per la sua corda come

$1 + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{x}{2} + \frac{1.3^2}{2^2.4^2} \cdot \frac{x^2}{2^2} + \frac{1.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} \cdot \frac{x^3}{2^3} + \text{ec. a } \frac{4}{\pi}$, cioè prossimamente ad 1,2732. 3°. Ch' essendo o, e 2 i limiti di x corrispondenti all' arco evanescente, e all' arco semicircolare, il tempo della discesa per il primo a quello della discesa per la sua corda, o per il diametro, sarà prossimamente come 1 : 1,2732, cioè il tempo della discesa per un piccolissimo arco sarà minore di quello per la sua corda prossimamente nell' anzidetta ragione; mentre il tempo della discesa per un arco, cioè per un tubo semicircolare starà a quello della discesa per il diametro come

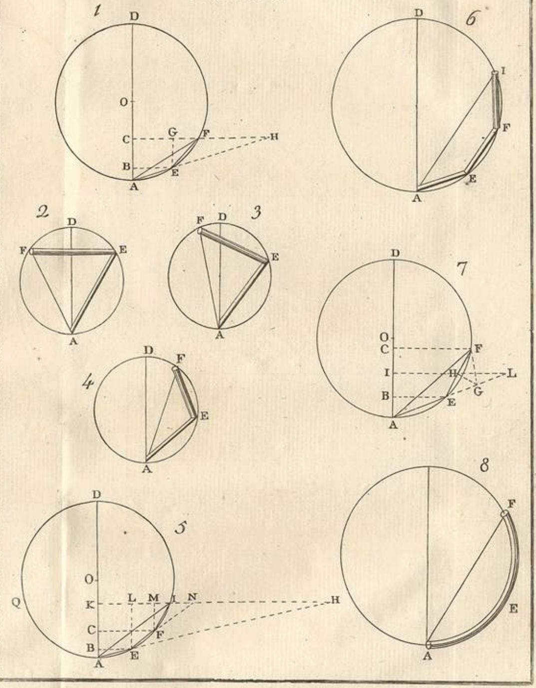
$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1.3^2}{2^2.4^2} + \frac{1.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} + \text{ec. ad } 1,2732$, cioè valutando in decimali i soli termini, che abbiamo scritto, prossimamente come 1,4882 ad 1,2732, vale a dire il tempo della discesa per l' arco semicircolare maggiore di quello per la sua corda.

Essendo pertanto il tempo per l' arco evanescente minore di quello per il diametro, e quello per l' arco, o tubo semicircolare maggiore, e dovendo questo tempo nel passaggio dall' uno all' altro arco divenir sempre più, e più grande, si potrà ora con sicurezza conchiudere, che tra i due uno ve ne dovrà essere, in cui il tempo della discesa di un Grave sarebbe eguale a quello della discesa per il diametro, ossia per la corda di quell' arco. Per determinare quest'arco bisognerà eguagliare tra loro l' espressioni de' due tempi, ossia risolvere l' equazione

$$1 + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{x}{2} + \frac{1.3^2}{2^2.4^2} \cdot \frac{x^2}{2^2} + \frac{1.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} \cdot \frac{x^3}{2^3} + \text{ec.} = \frac{4}{\pi} = 1,2732 \text{ ec.}$$

Siccome i coefficienti de' termini del primo membro divengono sempre più, e più piccoli, e che x dev' esser necessariamente com-

Memoria I.


1
D
O
C G F H
B E
A
2
D
F E
A
3
F D
E
A
4
D F
E
A
5
D
O
Q
K L M I N H
C F
B E
A
6
D
I
F
E
A
7
D
O
C F
I H L
G
B E
A
8
F
E
A

compreso tra i limiti o e 2, potrem contentarci per una prima approssimazione, la quale se piace, si potrà portare quanto si vuole più oltre, di considerare i soli termini, che abbiamo scritti; e valutando in decimali i suddetti coefficienti, si avrà l'equazione cubica

$$0{,}0122x^3 + 0{,}0351x^2 + 0{,}125x - 0{,}2732 = 0$$

Sostituendo 1 e 2 in luogo di x si trovano due risultati di segno contrario, onde il valore di x dovrà esser compreso tra quei due limiti; e difatti usando il metodo di sopra indicato trovo prossimamente $x = 1{,}4352$. Il seno verso adunque dell'arco cercato AEF, il quale si percorrerebbe da un Grave nello stesso tempo, che la sua corda FA, sarà prossimamente $= 1\ 4352$, a cui corrisponde AEF prossimamente $= 115°\ 48'$. (Fig.ª 8.ª)