SULL' INTEGRAZIONE DI UN NUOVO CANONE D'EQUAZIONI DIFFERENZIALI D'ORDINE ALTO

MEMORIA

DEL SIG. FRANCESCO CARDINALI

Presentata il dì 27 Giugno 1806

DAL SIG. CANONICO GIROLAMO SALADINI.

Quella parte di calcolo integrale, che si aggira sulla integrazione e costruzione delle equazioni differenziali, comechè promossa e trattata con infaticabile zelo e con profonda sagacità dai Bernoulli (1), Manfredi (2), Fagnani (3), Ermanno, Goldbac, Eulero, Lagrange (4), Riccati (5), Saladini (6), trasandata poi per alcun tempo, ha lasciato desiderio di sè per la immensità delle cose che restano a farsi dai suoi coltivatori, onde scortarla a qualche grado di avanzamento. Gravi ostacoli a vero dire, si affacciano nella separazione delle indeterminate, nello scoprire l' opportuno moltiplicatore, e nello scegliere le curve algebraiche di facile descrizione, le cui aree, o i loro archi rappresentino gl' integrali ricercati. Non veggo però che per sì fatte difficoltà si debba lasciare in non cale un ramo di analisi, nel quale i passi che si danno sono indivisibilmente diretti dalla certezza, dall' evidenza, dall' eleganza, lo che non so se possa dirsi, con buo-

(1) Vedi Opere di Giacomo, e Giovanni Bernoulli.

(2) Manfredi *De constructione equat. differentialium primi gradus*.

(3) Fagnani, Produzioni Matematiche.

(4) Comm. di Pietroburgo, Memorie di Berlino, e Miscell. di Torino.

(5) Opere di Giacomo, e Vincenzo Riccati.

(6) Comm. dell' Istituto di Bologna.

buona fede accadere quando senza altra guida c' innoltriamo in un pelago di calcoli affidati al solo barlume di una sempre vacillante, ed inferma metafisica. Reputo supervacaneo il tesser quì storie comprobanti una verità troppo di per sè manifesta, tanto più che a ciò non mira la presente Memoria, il cui scopo uno si è quello di esporre certa nuova classe di equazioni differenziali d' ordine alto che compiutamente vengano integrate mediante la separazione delle variabili (7). Se ad altro non recherà giovamento questo esiguo lavoro, servirà s' io mal non m' appongo, a corredare di nuovi casi le Tavole dell' equazioni integrate, Tavole che pur dovrebbonsi compilare ad incremento, ed onore delle scienze esatte, giusta la sentenza, e il consiglio dell' esimio filosofo Condorcet, consegnato alla parte seconda del suo Calcolo integrale alla sezione seconda nelle seguenti parole „ *la construction de ces Tables poussées même assez loin exigeroit plus de connoissances que celle des Tables des Logarithmes, mais moins de travail, seroit incomparablement plus utile, & feroit infiniment plus d' honneur à ceux qui exécuteroient ce projet*.

Sia primieramente l' equazione di terz' ordine della forma $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + M \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + M' \frac{\partial y}{\partial x} = 0$, nella quale M esprime una funzione qualunque della x, ed M' la derivata di questa funzione. Facciamo $\frac{\partial y}{\partial x} = u$, ed avremo sostituendo $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + M \frac{\partial u}{\partial x} + M' u = 0$, equazione lineare di second' ordine per rapporto alla variabile u. Per integrare quest' equazione faccio al solito $\frac{\partial u}{\partial x} = p$, $\frac{\partial \partial u}{\partial x^2} = q$; fat-

(7) Si consulti l' eccellente Opera: Instituzioni Analitiche di Vincenzo Riccati, e Girolamo Saladini, (Tomo II Vol. 3 pag. 6>4): dove si scorgerà che un tal ramo di equazioni non era stato al tempo loro da alcuno generalmente integrato. Per quant i Autori poi io m' abbia riscontrati che trattarono in seguito di tali materie non mi è venuto fatto di rinvenir traccia di ciò che mi propongo in questa Memoria.

fatte le sostituzioni avremo, dopo d'aver diviso per ∂x^2, $q+\mathrm{M}p+\mathrm{M}'u=0$. Ponghiamo $pu=uz$, e $q=ut$, si avrà sostituendo in luogo di p, e q questi valori, $t+\mathrm{M}z+\mathrm{M}'=0$: ma $\partial u=p\partial x=uz\partial x$, e $\partial p=u\partial z+z\partial u=ut\partial x$; dunque si ricava $\frac{\partial u}{u}=\frac{t\partial x-\partial z}{z}=z\partial x$, e $\partial t+z^2\partial x=t\partial x$. Sostituendo in quest' equazione il valore di $t=-\mathrm{M}z-\mathrm{M}'$, otterremo il quadrinomio differenziale di prim' ordine $\partial z+z^2\partial x+z\mathrm{M}\partial x+\mathrm{M}'\partial x=0$.

Il metodo per integrare simil sorta di quadrinomj già l'abbiamo dato in un Opuscolo intitolato „ Metodo di separazione nell' equazioni differenziali di prim' ordine ec. „ stampato l'anno scorso in Bologna. Consiste questo in fare $z=\log.\alpha+\log.\beta$, essendo α, e β due nuove indeterminate da determinarsi. Fatte le sostituzioni si troverà $\frac{\partial\alpha}{\alpha}+\frac{\partial\beta}{\beta}+(\log.\alpha+\log.\beta)^2\partial x+(\log.\alpha+\log.\beta)\mathrm{M}\partial x+\mathrm{M}'\partial x=0$, equazione che si spezza nelle due $\frac{\partial\beta}{\beta}=-\mathrm{M}'\partial x$, e $\frac{\partial\alpha}{\alpha}+(\log.\alpha+\log.\beta)^2\partial x+(\log.\alpha+\log.\beta)\mathrm{M}\partial x=0$; dalla prima si ricava $\log.\beta=-\int\mathrm{M}'\partial x=-\mathrm{M}$, essendo $\mathrm{M}'\partial x$ la differenziale di M, sostituito questo valore nella seconda si avrà $\frac{\partial\alpha}{\alpha}+(\log.\alpha)^2\partial x=\mathrm{M}\log.\alpha\partial x$, equazione che si integra fatto $\log.\alpha=\frac{\pi}{\log.\theta}$, π e θ sono due nuove indeterminate da determinarsi. Sostituendo invece di $\log.\alpha$, e $\frac{\partial\alpha}{\alpha}$ i suoi valori si vedrà che l'equazione si può spezzare in due mediante le quali si determineranno π, e θ in funzione di x; e si troverà poi, che l'integrale dell' equazione sarà $\log.\alpha=\frac{e^{\int\mathrm{M}\partial x}}{\int e^{\int\mathrm{M}\partial x}\cdot\partial x}$. Ma si è supposto $z=\log.\alpha+\log.\beta$, dunque sostituendo avremo

$$z=\frac{e^{\int\mathrm{M}\partial x}}{\int e^{\int\mathrm{M}\partial x}\cdot\partial x}-\mathrm{M}+\mathrm{A},$$

che sarà l'integrale completo del qua-

quadrinomio cercato. Chiamando per più semplicità W il valore trovato di z, si avrà, fatte le sostituzioni $u = Be^{\int W \partial x}$ per integrale dell' equazione di second' ordine, e infine sarà l' integrale dell' equazione di terzo ordine $y = \int Be^{\int W \partial x} . \partial x + C$. Le quantità A, B, e C sono le tre costanti introdotte dall' integrazioni.

Vediamo un caso particolare, e prendiamo l' equazione finale $n \partial y \partial x + nx \partial \partial y + y \partial x^2 = 0$, a cui Daniele Bernoulli nella Memoria (8) *de oscillationibus corporum filo flexili connexorum, & catenae verticaliter suspensae*, giunge senza poterne cavare l' integrale finito. Se si suppone n funzione di x, ed eguale a $-\frac{x}{2}$, allora in tale ipotesi si potrà avere l' integrale dell' equazione. Infatti differenziando e riducendo avremo l'equazione $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{3 \partial \partial y}{x \partial x^2} - \frac{3 \partial y}{x^2 \partial x} = 0$ che è della forma stessa della già trattata. Posto $M = \frac{3}{x}$, ed $M' = -\frac{3}{x^2}$, avremo $z = \frac{x^4 - 12A}{x(x^4 + 4A)}$; e quindi l' integrale dell' equazione di second' ordine sarà

$$u = Be^{\int \frac{(x^4 - 12A)}{x(x^4 + 4A)} \partial x},$$

e quello dell' equazione di terzo ordine

$$y = \int Be^{\int \frac{(x^4 - 12A)}{x(x^4 + 4A)} \partial x} . \partial x + C.$$

Sia in secondo luogo l' equazione di quart' ordine della forma $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + M \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + M' \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, essendo M ed M' come sopra. Fatto $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u$, avremo sostituendo l' equazione di second'ordine $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + M \frac{\partial u}{\partial x} + M' u = 0$, che già sappiamo integrare. Preso l' inte-

(8) Primi Comm. di Pietroburgo Tomo VII.

tegrale, e sostituito si avrà $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = Be^{\int W \partial x}$, ed integrando $\frac{\partial y}{\partial x} = \int Be^{\int W \partial x}.\, \partial x + C$; finalmente $y = \int \partial x \int Bx^{\int W \partial x}.\, \partial x + Cx + D$, integrale finito della proposta.

Sia in terzo luogo l' equazione $\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} + M \frac{\partial^4 y}{\partial x^5} + M' \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$. Posto in quest' equazione $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = u$, e fatte le sostituzioni si troverebbe l' equazione $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + M \frac{\partial u}{\partial x} + M' u = 0$, di cui già sappiamo trovarne l'integrale. Sostituito questo valore si vedrà che l' equazione proposta ha per integrale finito

$$y = \int \partial x \int \partial x \int Be^{\int W \partial x}.\, \partial x + \frac{Cx^2}{2} + Dx + E.$$

In generale si vede che il medesimo artifizio serve per l' equazione $\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + M \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + M' \frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} = 0$, nella quale fatto $\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} = u$, e sostituendo si troverà la solita equazione di second' ordine $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + M \frac{\partial u}{\partial x} + M' u = 0$. Preso l' integrale di questa, e sostituito si avrà $\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} = Be^{\int W \partial x}$. Eseguendo $n-2$ integrazioni si giungerà ad ottenere l' integrale finito dell' equazione dell' ordine n.

Frattanto possiamo osservare che tutte le equazioni trattate di terzo, quarto, quinto, ec. fino all' ordine n si riducono all' equazione lineare di second' ordine $\frac{\partial \partial u}{\partial x^2} + M \frac{\partial u}{\partial x} + M' u = 0$; e che per integrare generalmente questa equazione è necessario che il coefficiente di u sia la funzione derivata del coefficiente di $\frac{\partial u}{\partial x}$, il quale può essere una funzione qualunque dell' altra variabile dell' equazione. Osservazione che mi pare importante, trattandosi che molte volte si incontrano equazioni di tal natura; o che

che facilmente si ponno ridurre ad avere la forma richiesta, previa una qualche operazione.

In fatti la celebre equazione $x^2(a+bx^n)\partial^2 y + x(c+ex^n)\partial y\partial x + (f+gx^n)y\partial x^2 = 0$ tanto trattata dai Geometri; sarà questa integrabile in termini finiti se $\frac{(f+gx^n)\partial x}{x^2(a+bx^n)} = \partial \cdot \frac{1}{x}\left(\frac{c+ex^n}{a+bx^n}\right) = \left[\frac{((n-1)ae-(n+1)bc)x^n - ac - bex^{2n}}{x^2(a+bx^n)^2}\right]\partial x$.

Dunque l' equazione proposta per questo cangiamento diverrà della forma $x^2(a+bx^n)\partial^2 y + x(c+ex^n)\partial y\partial x + \left[\frac{((n-1)ae-(n+1)bc)x^n - ac - bex^{2n}}{a+bx^n}\right]y\partial x^n = 0$, ossia riducendola alla forma della nostra equazione di second' ordine si avrà

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\left(\frac{c+ex^n}{a+bx^n}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left[\frac{((n-1)ae-(n+1)bc)x^n - ac - bex^{2n}}{x^2(a+bx^n)^2}\right]y = 0.$$

Trattata quest' equazione come sopra si giungerà al quadrinomio $\partial z + z^2\partial x + \frac{1}{x}\left(\frac{c+ex^n}{a+bx^n}\right)z\partial x + \left[\frac{((n-1)a-(n+1)be)x^n - ac - bex^{an}}{x^2(a+bx^n)^2}\right]\partial x = 0$, il di cui integrale è $z\int e^{\int\frac{1}{x}\left(\frac{c+ex^n}{a+bx^n}\right)\partial x}\cdot\partial x = e^{\int\frac{1}{x}\left(\frac{c+ex^n}{a+bx^n}\right)\partial x}$

$$-\frac{1}{x}\left(\frac{c+ex^n}{a+bx^n}\right)\int e^{\int\frac{1}{x}\left(\frac{c+ex^n}{a+bx^n}\right)\partial x}\cdot\partial x + A\int e^{\int\frac{1}{x}\left(\frac{c+ex^n}{a+bx^n}\right)\partial x}\cdot\partial x$$

Chiamato il valore di z per più semplicità W avremo per integrale dell' equazione di second' ordine $y = Be^{\int W\partial x}$. Determinando opportunamente le costanti, a, b, c, ed e si troveranno delle belle equazioni non mai fin quì da alcuno integrate; moltissime delle quali servono per isciogliere ancora dei Problemi Geometrici, e Fisici di qualche utilità.

Sia per un caso particolare l'equazione $x^2(1-x^2)\partial^2 y - x(1+x^2)\partial y\partial x + x^2 y\partial x^2 = 0$ portata da Cousin nel suo calcolo differenziale, ed integrale, parte seconda pag. 73. Si avrà confrontando questa con la generale $a=1$, $b=-1$, $c=-1$, $e=-1$, $f=0$, $g=1$, $n=2$; e l' integrale del quadrinomio si ridurrà a

z

$$z\int e^{-\int\frac{1}{x}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)\partial x}\cdot\partial x = e^{-\int\frac{1}{x}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)dx} + \left[\frac{1}{x}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)+\mathrm{A}\right]$$

$\int e^{-\int\frac{1}{x}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)\partial x}.\partial x$. Quindi quello dell'equazione di second' ordine sarà $y = \mathrm{B}e^{\int \mathrm{W}\partial x}$ essendo $\mathrm{W} = \dfrac{e^{-\int\frac{1}{x}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)\partial x}}{\int e^{\int\frac{1}{x}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)\partial x}\partial x}\cdot +$ $\frac{1}{x}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)+\mathrm{A}$.

Similmente l' equazione molto più generale $x^m(a+bx^\alpha)^n\partial\partial y + x^p(c+ex^\beta)^q\,\partial y\,\partial x + x^r(f+gx^r)^s y\partial x^2 = 0$ sarà integrabile se $x^{r-m}\dfrac{(f+gx^r)^s}{(a+bx^\alpha)^n}\partial x = \partial\,.\,x^{p-m}\dfrac{(c+ex^\beta)^q}{(a+bx^\alpha)^n} = \left[(p-m)+\right.$ $\left.q\beta e\,(c+ex^\beta)^{-1}.\,x^\beta - n\alpha b(a+bx^\alpha)^{-1}.\,x^\alpha\right]x^{p-m-1}\dfrac{(c+ex^\beta)^q}{(a+bx^\alpha)^n}\partial x$:

Quindi la nostra equazione prenderà la forma $\dfrac{\partial\partial y}{\partial x^2} + x^{p-m}.\dfrac{(c+ex^\beta)^q}{(a+bx^\alpha)^n}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial x}$

$$+\left[(p-m)+q\beta e(c+ex^\beta)^{-1}.\,x^\beta - n\alpha b(a+bx^\alpha)^{-1}.\,x^\alpha\right]\times$$

$x^{p-m-1}\dfrac{(c+ex^\beta)^q}{(a+bx^\alpha)^n}y = 0$. Fatte le solite operazioni si troverà il quadrinomio $\partial z + z^2\partial x +$

$$z\,\frac{(c+ex^\beta)^q}{(a+bx^\alpha)^n}\cdot x^{p-m}\cdot\partial x + \left[(p-m)+q\beta e(c+ex^\beta)^{-1}x^\beta - n\alpha b(a+bx^\alpha)^{-1}.x^\alpha\right]$$

$\times\, x^{p-m-1}\dfrac{(c+ex^\beta)^q}{(a+bx^\alpha)^n}\cdot\partial x = 0$, il di cui integrale è

$$z\int e^{\int\frac{\left(c+ex^{\beta}\right)^{q}}{\left(a+bx^{\alpha}\right)^{n}}\cdot x^{p-m}\cdot\partial x}\cdot\partial x=e^{\int\frac{\left(c+ex^{\beta}\right)^{q}}{\left(a+bx^{\alpha}\right)^{n}}\cdot x^{p-m}\cdot\partial x}+$$
$$\left[A-\frac{\left(c+ex^{\beta}\right)^{q}}{\left(a+bx^{\alpha}\right)^{n}}x^{p-m}\right]\cdot\int e^{\int\frac{\left(c+ex^{\beta}\right)^{q}}{\left(a+bx^{\alpha}\right)^{n}}x^{p-m}\cdot\partial x}\cdot\partial x.$$

Chiamato P il valore di z, e sostituito questo avremo $y=B\,e^{\int P\partial x}$, che sarà l' integrale finito della proposta equazione di secondo ordine.

Osservazioni simili a quelle fatte per l'equazioni di second' ordine $\frac{\partial\partial u}{dx^2}+M\frac{\partial u}{\partial x}+M'u=0$, dobbiamo fare per il generale quadrinomio $\partial z+z^2\partial x+zP\partial x+Q\partial x=0$, essendo P, e Q due funzioni qualunque della x. Questo sarà generalmente integrabile in termini finiti se $Q\partial x$ sarà la differenziale di P.

Si abbia l' equazione $\partial z+z^2\partial x+z\,(ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\text{ec.})\,\partial x+(max^{m-1}+(m-1)bx^{m-2}+c(m-3)x^{m-3}+\text{ec.})\,\partial x=0$, avendo questa le condizioni richieste sarà completamente integrabile; ed usate le posizioni come sopra si troverà che

$$z=\frac{e^{\int\left(ax^{m}+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\text{ec.}\right)\partial x}}{\int e^{\int\left(ax^{m}+bx^{m-1}+cz^{m-2}+\text{ec.}\right)\partial x}\cdot\partial x}-$$
$$(xa^{m}+bx^{m-1}+cx^{m-2}\ \text{ec.})+C,\ \text{ossia}$$

$$z\int e^{\left(\frac{ax^{m+1}}{m+1}+\frac{bx^{m}}{m}+\text{ec.}\right)}\cdot\partial x=e^{\left(\frac{ax^{m+1}}{m+1}+\frac{bx^{m}}{m}+\text{ec.}\right)}+$$
$$\left[C-\left(ax^{m}+bx^{m-1}+bx^{m-2}+\text{ec.}\right)\right]\cdot\int e^{\left(\frac{ax^{m+1}}{m+1}+\frac{bx^{m}}{m}+\text{ec.}\right)}\cdot\partial x$$

integrale cercato.

Sia l' equazione $\partial z + z^2 \partial x + az \text{ sen.} x \log. x \, \partial x + a\left(\frac{\text{sen.} x}{x}\right.$ $\left. - \text{Cos.} x \log. x \right) \partial x = 0$ questa sarà integrabile, perchè $a\left(\frac{\text{sen.} x}{x} - \text{Cos.} x \log. x\right) \partial x = \partial . a \text{ sen.} x . \log x$. Trattata quest' equazione come sopra si arriverà all' integrale completo

$$y = \frac{e^{a\int \text{Sen.} x \log. x \partial x}}{\int e^{a\int \text{Sen.} x \log. x \partial x}} + \text{C} - a \text{ sen.} x \log. x.$$

Proposta finalmente l' equazione $\partial z + z^2 \partial x + byx^m e^{nx} \partial x + b\left(\frac{m}{x} + n\right) x^m . e^{nx} . \partial x = 0$, che sarà pure integrabile per essere $b\left(\frac{m}{x} + n\right) x^m e^{nx} \partial x$ la differenziale di $bx^m . e^{nx}$; e si troverà che l' integrale è $y \int e^{b\int x^m . e^{nx} . \partial x} . \partial x = e^{b\int x^m . e^{nx} . \partial x}$

$$- \left(bx^m e^{nx} - \text{C}\right) \int e^{b\int x^m . e^{nx} . \partial x} . \partial x.$$

Potrei moltiplicare gli esempj, ed integrare completamente moltissime equazioni differenziali, che i celebri Goldbac, e Nicola Bernoulli integrano sotto certe condizioni degli esponenti ec., nei Commentarj Antichi di Pietroburgo. Ma non avendosi quì per iscopo di dare delle Tavole d' equazioni integrate, così porrò fine alla presente Memoria, contento d' avere presentata una nuova classe di equazioni, che se ad altro, come dissi, non potrà servire, gioverà ad arricchire le Tavole sopra dichiarate.

TEN-