TEORIA E CALCOLO DI $\int \frac{dz}{\log . z}$

DI TOMMASO VALPERGA - CALUSO

Ricevuti il dì 28 Giugno 1805.

Il fu nostro Socio Lorenzo Mascheroni, le cui lodi si possono leggere nel Volume precedente di questa nostra Società, si è particolarmente segnalato nelle sue sottili, e difficili ricerche relative a $\int \frac{dz}{\log . z}$, ed al Capo IV, Sezione I, Vol. I del Calcolo Integrale di Eulero. Ma neppur egli vi ha scorto ciò che (assai meno difficile) a me pare più soddisfacente. Pertanto ad esporlo sia HFACQ la curva, le cui ascisse ($x = \mathrm{OP}$) sono i logaritmi naturali delle ordinate ($z = \mathrm{PQ}$) ed $\mathrm{OA} = 1$.

Avendo $z = e^x$, $dz = e^x\, dx = z dx$, fatto $y = \int \frac{dz}{\log . z}$, ho $dy = \frac{z dx}{x}$, e $dx : dy :: x : z$. Ma in ogni curva è la sottangente $s = \frac{y dx}{dy}$. Dunque $dx : dy :: s : y :: x : z$ sarà una proprietà della curva, la cui equazione differenziale è $dy = \frac{dz}{\log . z}$; e la tangente a qualunque suo punto sarà parallela alla retta condotta da O, origine delle x, al punto, dove la logaritmica taglia l' ordinata.

Ora poniamo che dal lato OL dei logaritmi negativi comincino y, e dx insieme con $z = 0$ quando $x = -\infty$. Avremo a concepire dx, e dz positivi, mentre nasce z positivo, e scema x negativo, e perciò $dy = \frac{z dx}{x}$, ed y hanno a venir negativi finchè le fluenti pervengano a $x = 0$, $z = \mathrm{OA}$. Quindi tagliando $x = \mathrm{OE}$, cadrà $\mathrm{EG} = y$ dal lato opposto ad $\mathrm{EF} = z$, e sarà la tangente SG parallela ad OF.

Ed è chiaro che quanto più E si piglia lontano da O, tanto più scema l' angolo FOE senza che OF cada su OL finchè non si con-

concepisca $z = o$, $x = -\infty$. Dunque la stessa retta LO sarà il limite altresì, a cui si accosta all' infinito la posizione della tangente SG, la quale fatto $z = o$ dovrà coincidere con LO, che perciò avendosi a riputare tangente alla curva GK quando $x = -\infty$, ne sarà un assintoto.

Vero è che l'equazione esige solo che sia allora la tangente parallela ad OL; ma la distanza fra le due sarebbe una costante K, che conviene annullare ponendo l' asse della logaritmica sull' assintoto di GK per avere le semplici fluenti y, e non $y' = y + K$.

Essendo $dy = \frac{dz}{x}$, se consideriamo la grandezza assoluta, e perciò prescindiamo dai segni $\pm$, è chiaro che quanto x è più grande dell' unità, tanto dz è maggiore di dy. Sicchè venendo da L verso O, supposta LO incomparabilmente maggiore dell' unità, verranno a crescere simultaneamente z ed y, ma y con incrementi a principio incomparabilmente minori, i quali però meno piccioli relativamente a misura che scema x, giungono all' egualità coll' incremento di z quando $OE = 1 = OA$. Dunque fino a questo punto la somma degl' incrementi di y dovrà essere minore della somma degl' incrementi di z, $y < z$. E si trova che ivi $z = 0,36787\,94412$, $y = -0,21938\,39344$, benchè questo quì da me non si cerca. Ma dal punto, in cui $OE = OA$ cominciando gl' incrementi di y, a misura che si viene verso O, a vie più sempre esser maggiori di quelli di z, verrà la grandezza di y ad uguagliare quella di z, e quindi oltrapassarla con incrementi ognora più grandi, finchè al momento, in cui si concepisce FO ed FE, svanendo EO, andare a cadere sopra OA, si avrà a concepire EG $= -\infty$ insieme colla sua tangente SG cadere su ON, che perciò sarà un secondo assintoto di KGI.

Collo stesso ragionamento passando alla curva DBR delle y corrispondenti a x positivo, poichè similmente vi debbe essere $s : y :: x : z$, dovrà la tangente a essa curva quando $x = o$ cader egualmente su ON, che sarà assintoto anche a BD. E al primo nascere di x positivo, quando $z = 1$, $y = -\infty$, $dy = \left(\frac{dz}{x} = \frac{zdx}{x}\right)$

=

$= \frac{dx}{0}$, verrà y scemando la sua grandezza assoluta infinita da principio rapidissimamente, ma di mano in mano con decrementi sempre meno veloci, maggiori però degl' incrementi di z finchè sia $x = OB = 1$, $z = BC = e$, nel qual punto sarà $dy = edx$, e però, supposta dx costante, $ddy = 0$; onde sarà B un punto d' inflessione della curva, concava verso OA nel suo ramo superiore BR, e convessa nell' inferiore BD.

Una retta, che si menasse di O in C, essendo tangente alla logaritmica, l' angolo, ch' essa fa con OA (di $20^\circ\ 11'\ 31'', 11$) è il massimo di tutti gli angoli AOq fatti dalle rette tirate da O ad alcun punto della logaritmica. Ora a queste rette debbono essere parallele le tangenti a DBR. Dunque la tangente in B, parallela alla tangente in C, farà il massimo degli angoli delle tangenti colle ordinate, e per ogni altro angolo più picciolo vi saranno sempre due punti r, R, le tangenti ai quali saranno parallele a una medesima OQ.

Il punto B, che ho posto sull' asse, potea supporsi in qualunque altro punto della retta BC, sopra o sotto prolungata, aggiungendo o togliendo una costante arbitraria a tutte le ordinate pr, PR. Ma non potendo le ordinate cominciare insieme colle ascisse in O, perchè ivi $y = -\infty$, si vuol fare $y = 0$ in alcun altro punto; nè ve n' ha alcuno, dove ragione il voglia fuorchè lo scelto, dove $x = 1$. Poichè y è funzion del solo rapporto de' Numeri ai Logaritmi. Ora la prima ragione, presa per misura generale ed unità dei logaritmi, essendo quella di $e : 1$, sta molto bene che sia y positivo per tutti i rapporti maggiori di $e : 1$, e negativo per i minori. I logaritmi essendo $x = \int \frac{dz}{z}$, possiamo chiamare *logologaritmi* queste seconde funzioni trascendentali $y = \int \frac{dz}{\int \frac{dz}{z}}$. Quindi come ne' logaritmi $x = 0$, quando $z = 1$, $dx = dz$, così l' analogia vuole che sia il logologaritmo $y = 0$, quando similmente

$\int \frac{dz}{z}$

$\int \frac{dz}{z} = 1$, $dy = dz$. Oltre che non avendo la curva altro punto distinto per proprietà alcuna che il segnalatissimo dell'inflessione, non può avere proprio e vero asse che quello, che passi per questo punto.

Del resto la considerazione di $\frac{dz}{dy} = x$ ci basta a indicazione di tutto il corso della curva, potendosene facilmente conchiudere che QR, qr debbono crescere all'infinito a misura che P, e p allontanandosi da B, vanno pur crescendo all'infinito con segno contrario PR, e pr. E sarà QR sempre maggiore di qr; poichè la tangente in R, parallela ad OQ, dee venir sotto B, e la tangente in r, parallela alla medesima Oq, dee andare sopra allo stesso punto B.

Ma veniamo al calcolo; per cui è ovvia la sostituzione della nota serie, che dà il Numero mediante il Logaritmo, colla quale viene eliminato z nella equazione $dy = \frac{zdx}{x} = \frac{dx}{x}\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \text{ec.}\right)$, onde si ha $y = K + \log.x + x + \frac{x^2}{2.2} + \frac{x^3}{2.3.3} + \frac{x^4}{2.3.4.4} + \&c. = K + \log.x + x + \frac{x}{2.2}A + \frac{2x}{3.3}B + \frac{3x}{4.4}C + \frac{4x}{5.5}D + \&c.$, dove è K una costante, ed A, B, C, &c. il termine precedente.

Fatto in questa serie $x = 1$, $\log.x = 0$, trovo $y - K = 1,31790215311$. Ora è questo il caso, in cui vuol essere $y = 0$. Dunque $K = -1,31790215311$; ed essendo la serie più convergente a misura che scema x, non v'ha difficoltà per le y negative di B in O.

Ma per trapassare all'altra curva, fatto x negativo, s'incontra l'intoppo di $\log.x$, che diviene logaritmo di Numero negativo. Quello, che siasi fatto a superare questa ed altre difficoltà riguardanti il calcolo delle y dal canto di OL, non occorre che io qui l'inserisca, volendo piuttosto che leggasi nelle *Annotazioni* del Mascheroni ad Eulero, alle quali si aggiungano le Osserservazioni di un mio collega nell' Accademia di Torino, il Signor Giorgio Bidoni, che verranno pubblicate nel primo Volume, che aggiungerassi prossimamente ai già stampati di questa Accademia.

Però tornando alla parte de' logaritmi positivi, per andare di B in P a determinar PR la serie trovata va scemando la sua convergenza in modo che poco si può andar avanti. Nè giova il ricorso alla integrazione per parti, per cui mezzo cominciando da $d\left(\frac{z}{x}\right) = \frac{dz}{x} - \frac{zdx}{x^2} = \frac{dz}{x} - \frac{dz}{x^2}$, si ha $\int\frac{dz}{x} = \frac{z}{x} + \int\frac{dz}{x^2}$, e così continuando si ottiene $y = \mathrm{K} + z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{2.3}{x^4} + \frac{2.3.4}{x^5} + \&c.\right) = \mathrm{K} + z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\mathrm{A} + \frac{2}{x}\mathrm{B} + \frac{3}{x}\mathrm{C} + \frac{4}{x}\mathrm{D} + \&c.\right)$. Poichè supponendovi x un numero intiero, si vede subito che la serie non converge che per il numero di termini $n = x$. Il termine $n + 1$ è uguale al precedente, che chiamerò P, e i seguenti Q, R, &c. la cui somma, a cominciare da esso termine $n + 1$, sarà $\mathrm{P} + \frac{x+1}{x}\mathrm{P} + \frac{x+2}{x}\mathrm{Q} + \frac{x+3}{x}\mathrm{R} + \&c. = \infty$, sempre che, essendo x positivo, è P positivo, e non vengono i termini alternando coi segni $+$, e $-$.

Però mi maraviglio che non siasi pensato a ricorrere al notissimo teorema di Taylor, per cui dati due valori corrispondenti α, β di x, y, determinando $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{ddy}{dx^2}$, $r = \frac{d^3y}{dx^3}$, $s = \frac{d^4y}{dx^4}$, &c. al valore, che hanno quando $x = \alpha$, $y = \beta$, si ha, in corrispondenza di $x = \alpha + \nu$, $y = \beta + p\nu + \frac{q\nu^2}{2} + \frac{r\nu^3}{2.3} + \frac{s\nu^4}{2.3.4} + \&c.$

Noi abbiamo generalmente $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{x}$. Dunque quando $x = \alpha$, $p = \frac{e^\alpha}{\alpha}$; $\frac{ddy}{dx^2} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)e^x$, e però $q = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right)e^\alpha$;

$\frac{d^3y}{dx^3}$

$\frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)e^x$, $r = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3}\right)e^\alpha$, e così continuando trovasi $s = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{3}{\alpha^2} + \frac{6}{\alpha^3} - \frac{6}{\alpha^4}\right)e^\alpha$, ed è facile proseguire il calcolo degli altri fattori t, u, &c. all'infinito, osservando che i numeratori del coefficiente di ν^m sono m termini della serie $1 - (m-1) + (m-1)(m-2) - (m-1)(m-2)(m-3) + \&c.$; della quale il termine $m+1$ è zero.

Così posto $\alpha = 1$, si trova $p = e$, $q = 0$, $r = e$, $s = 2e$, $t = 9e$, e seguendo gli altri fattori -44; $+265$; -1854; $+14833$; -133496; $+$ &c. tutti moltiplicanti e, mentre $\beta = 0$, si avrà $y = e\left(\nu * + \frac{\nu^3}{2.3} - \frac{2\nu^4}{2.3.4} + \frac{9\nu^5}{2.3.4.5} - \frac{44\nu^6}{2.3.4.5.6} + \&c.\right)$ e ridotti i termini all' espression più semplice $y = e\left(\nu * + \frac{1}{6}\nu^3 - \frac{1}{12}\nu^4 + \frac{3}{40}\nu^5 - \frac{11}{180}\nu^6 + \frac{53\nu^7}{1008} - \frac{103\nu^8}{2240} + \frac{2119\nu^9}{51840} - \frac{16687\nu^{10}}{453600} + \&c.\right)$ onde fatto $\nu = \pm\frac{1}{10}$, trovo $y = -0,27230\ 610266$ quando $x = \frac{9}{10}$, e $y = 0,27226\ 046321$ quando $x = 1,1$. Ho calcolato il precedente valore di y negativo, perchè in gran parte uno stesso calcolo serve per li due. Ma a proseguire quello dei positivi, dove è il pregio dell' opera, facciasi $\alpha = \frac{6}{5}$, onde $p = \frac{5e^{\frac{6}{5}}}{6}$, $q = \frac{5}{36}e^{\frac{6}{5}}$, &c. $y = \beta + e^{\frac{6}{5}}\left(\frac{5}{6}\nu + \frac{5\nu^2}{2.36} + \frac{65\nu^3}{2.3.108} + \frac{145\nu^4}{2.3.4.216} + \frac{995\nu^5}{2.3.4.5.324} - \&c.\right)$. Si ha facilmente $e^{\frac{6}{5}}$ moltiplicando il modulo $0,43429\ 44819\ 03$ &c. per $\frac{6}{5}$, o aggiungendovi il quinto per averne il logaritmo Briggiano, col quale in fine delle tavole di Gardiner, di Callet, e altre si ha facil mezzo di trovare il Numero $e^{\frac{6}{5}} = 3,320117$ &c. anche fino no alla diciannovesima decimale. Che però non v'è difficoltà, fatto $\nu = \pm \frac{1}{10}$, ad avere i due valori di $e^{\frac{6}{5}} \left(\frac{1}{6}\nu + \frac{5\nu^2}{2.36} + \frac{65\nu^3}{2.3.108} - \&c. \right)$ de' quali il negativo sottratto da β dee dare lo stesso valore già trovato di y corrispondente a $x = 1, 1$. Dunque aggiungendolo a detto valore di $y = 0, 2722604$ etc. si avrà β, che è il valore di y quando $x = \frac{6}{5}$. Quindi aggiungendo a β l'altro dei due valori di $e^{\frac{6}{5}} \left(\frac{1}{6}\nu + \frac{5\nu^2}{3.36} + \frac{65\nu^3}{2.3.108} - \&c. \right)$ che si ha fattovi $\nu = \frac{1}{10}$, si otterrà quello di y quando $x = 1, 3$; e proseguendo si avranno a pajo a pajo i valori di y di decimale in decimale di x all'infinito. E la serie sempre più convergendo, è chiaro che si potrebbero facilmente dare esatti anche a quindici cifre i trecento, che sono da $x=1$ fino a $x=30$, $z=106\,86474\,581524\frac{7}{15}$, coi quali sarebbe agevole di avere il valore di y, o sia il logologaritmo di qualunque Numero anche oltre alquanto ai dieci milioni di milioni. Poichè dato il Numero se ne trova il logaritmo naturale, che non può differire più di un ventesimo dal prossimo nei trecento, il quale fatto $= \alpha$, ed il suo Numero $= \beta$, $\nu < \frac{1}{20}$ renderà la serie convergentissima a determinar il logologaritmo, che si domanda.

A dar però buon saggio della serie con minor calcolo, ripreso il supposto di $\alpha = 1$, in cui fra tutti i casi di bisogno della serie n'è menoma la convergenza, avendo $y = e \left(\nu * + \frac{1}{6}\nu^3 - \frac{1}{12}\nu^4 + \frac{3}{40}\nu^5 - \text{ec.} \right)$ facciamovi $\nu = \pm \frac{1}{2}$, onde $y = \pm \frac{e}{2} \pm \frac{e}{48} - \frac{e}{192}$ $\pm \frac{3e}{1280} - \frac{11e}{11520} \pm \frac{53e}{129024} - \frac{103e}{573440} \pm \frac{2119\,e}{26542080} - \frac{16687\,e}{4\text{[illegible]}486400} \pm \text{ec.}$ vale a dire e moltiplicato per la differenza, o la somma di

±

$$\pm \left\{ \begin{array}{l} 0{,}50000000 \\ 0{,}02083333 \\ 0{,}00234375 \\ 0{,}00041078 \\ 0{,}00007984 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} 0{,}00520833 \\ 0{,}00095486 \\ 0{,}00017962 \\ 0{,}00003593 \end{array} \right\}$$

contentandoci di quêsti termini, ne abbiamo la differenza 0,51729 che moltiplicata per e dà il valore di $y = 1{,}40614$ quando $x = \frac{3}{2}$, e la somma $-0{,}53005$, che dà $y = -1{,}44082$ quando $x = \frac{1}{2}$, mentre con questo valore di x la prima serie $y = K + \log. x + x + \frac{x^2}{4} +$ ec., fattovi $K = -1{,}31790215$; $\log. x = -0{,}69314718$, ci dà più esattamente $y = -1{,}44089851$. Sicchè il difetto de' termini seguenti non calcolati non importa interi otto alla quinta decimale nel prodotto di e per la somma. Onde arguisco che esso difetto non vi cagionerà l' errore di 3 nel prodotto di essa e per la differenza, e però sarà $y = 1{,}40616$ *proxime* quando $x = \frac{3}{2}$.

Ora facciamo $\alpha = 2$; onde riescono i valori di $p = \frac{1}{2} e^2$ $q = \frac{1}{4} e^2$, e parimenti $r = \frac{1}{4} e^2$, $s = \frac{1}{8} e^2$, e di nuovo $t = \frac{1}{4} e^2$, a cui seguono i fattori $- \frac{1}{8} e^2$; $+ \frac{7}{8} e^2$; $- \frac{41}{16} e^2$; $+ \frac{43}{4} e^2$; $- \frac{383}{8} e^2$; $+$ ec. Dove osservo che il primo valore negativo viene al fattore di ν^6, ed è già solo un' ottantesima parte del corrispondente nel supposto di $\alpha = 1$; e quello di ν^{10} è $\frac{383}{8 \,.\, 133496}$, e però meno di $\frac{1}{2788}$ del corrispondente in quel primo supposto. Onde si scorge quanto già più la serie converga. E però nel calcolo i soli primi otto termini $\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{8}\nu^2 + \frac{1}{24}\nu^3 + \frac{1}{192}\nu^4 + \frac{1}{480}\nu^5 - \frac{1}{5760}\nu^6 + \frac{1}{5760}\nu^7 - \frac{41}{645120}\nu^8$ da moltiplicarsi per e^2 per avere $y = \beta + e^2\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{8}\nu^2 + \text{ec.}\right)$ e facendo $\nu = \pm\frac{1}{2}$, trovo doversi moltiplicar e^2 per $0{,}2868474$, se ν è positivo, e per $-0{,}2237022$, se negativo. Quindi trovo $y = \beta + 2{,}119524$, ed $y = \beta - 1{,}652941$, ed aggiungendo $1{,}652941$ al logaritmo già trovato corrispondente a $x = \frac{3}{2}$ ho $\beta = 3{,}05910 = y$ quando $x = 2$, ed $y = 5{,}17863$ quando $x = 2{,}5$.

Proseguo supponendo $\alpha = 3$, che dà $y = \beta + e^3\left(\frac{1}{3}\nu + \frac{2}{9}\cdot\frac{\nu^2}{2} + \frac{5}{27}\cdot\frac{\nu^3}{6} + \frac{4}{27}\cdot\frac{\nu^4}{24} + \frac{11}{81}\cdot\frac{\nu^5}{120} + \frac{26}{243}\cdot\frac{\nu^6}{720} + \frac{29}{243}\cdot\frac{\nu^7}{5040} + \frac{40}{729}\cdot\frac{\nu^8}{40320} + \text{ec.}\right)$ e fattovi $\nu = \pm\frac{1}{2}$, ho i due valori $y = \beta + 3{,}97023$, ed $y = \beta - 2{,}880072$, e quindi $\beta = 8{,}05870 = y$ quando $x = 3$, ed $y = 12{,}02893$ quando $x = 3{,}5$. Con che parendomi non poter rimanere dubbio, o difficoltà nel calcolo de' logologaritmi, non porterò più oltre gli esempj; bastando anche per far concetto del progresso de' termini di tal funzione sopratrascendentale la seguente tavoletta

Logaritmi	Numeri	Logologaritmi
0,5	1,6487212	— 1,44090
1	2,7182818	0
1,5	4,4816891	1,40616
2	7,3890561	3,05910
2,5	12,1824939	5,17863
3	20,0855369	8,05870
3,5	33,1154520	12,02893

OS-